



รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

แบบจำลองการระบาดสำหรับโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus
ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1
Transmission model for Influenza Pandemic Due to a New-strain
of the H1N1 Influenza A Virus

นางสาว พันชนิ พงศ์สัมพันธ์
(หัวหน้าโครงการ)

RCH
พ 564 ๙
๒554

สาขา.....
เลขทะเบียน 137854
ในเดือนปี 3 ค.ศ. 2558

12701403
.b.....
.i.....

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากทุนพัฒนานักวิจัยประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2554

กองทุนวิจัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

ชื่อโครงการ(ภาษาไทย) แบบจำลองการระบาดสำหรับโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ

Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1

ชื่อโครงการ(ภาษาอังกฤษ) Transmission model for Influenza Pandemic Due to a New-strain of the H1N1 Influenza A Virus

แหล่งเงิน ทุนพัฒนานักวิจัย กองทุนวิจัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2554 จำนวนเงินที่ได้รับการสนับสนุน 480,000 บาท

ระยะเวลาทำการวิจัย 2 ปี ตั้งแต่วันที่ 22 มิถุนายน 2554 ถึงวันที่ 21 มิถุนายน 2556

หัวหน้าโครงการ รองศาสตราจารย์ ดร.พันธณี พงศ์สัมพันธ์

สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

e-mail: kppuntan@kmitl.ac.th

บทคัดย่อ

โรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A พบได้ทั่วโลก ไวรัสชนิดใหม่ที่ถูกค้นพบอยู่ในสายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1 ลักษณะของโรคนี้คล้ายกับโรคไข้หวัดตามฤดูกาล แต่แตกต่างกันตรงโครงสร้างของยีน ไวรัสสายพันธุ์ใหม่นี้เกิดขึ้นครั้งแรกในประเทศเม็กซิโก และสหรัฐอเมริกาในเดือนมีนาคมและเมษายนเมื่อปี ค.ศ.2009 ตั้งแต่นั้นมา โรคนี้ก็ถูกค้นพบมากกว่า 70 ประเทศ และภายในชุมชนของแต่ละประเทศ เมื่อวันที่ 15 กรกฎาคม ค.ศ. 2009 กระทรวงสาธารณสุขได้รายงานว่าคนไข้ที่ค้นพบมีประมาณ 4,000 คน และมี 24 คนเสียชีวิต สัปดาห์ต่อมา มีผู้ป่วยเสียชีวิตเพิ่มขึ้นเป็น 44 คน แนวโน้มการเสียชีวิตของผู้ป่วยสูงสุดเป็นอันดับแรกของชาวเอเชียและเป็นอันดับที่ 6 ของโลก องค์การอนามัยโลกได้ยกระดับการแพร่กระจายของโรคไข้หวัดชนิดนี้ให้อยู่ในระดับ 6 เนื่องจากการระบาดของไวรัสชนิดนี้เป็นไปอย่างต่อเนื่อง จำนวนของผู้ป่วยที่เกิดจากโรคนี้มีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเรื่อยๆทั่วโลก การระบาดของโรคนี้ในสหรัฐอเมริกาเกิดขึ้นในช่วงที่ไม่มีมีการระบาดของโรคไข้หวัดตามฤดูกาล ดังนั้นไวรัสทุกตัวที่เกิดขึ้นในสหรัฐอเมริกาก็ถูกค้นพบว่าเป็นเกิดจากไวรัสสายพันธุ์ใหม่ ซึ่งไวรัสชนิดนี้ได้ถูกกลายไปที่ประเทศอาร์เจนตินาในช่วงที่มีการระบาดของโรคไข้หวัดตามฤดูกาลทำให้เป็นการระบาดที่แย่ที่สุดในซีกโลกเหนือ กระทรวงสาธารณสุขทั่วโลกคาดการณ์ถึงการกลับมาใหม่ที่แย่ของโรคไข้หวัดตามฤดูกาลที่เกิดขึ้นในช่วงฤดูฝนและฤดูหนาวของซีกโลกเหนือ เพื่อการรับมือในการกลับมาใหม่ของโรคนี้อีกครั้ง การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่พิจารณาถึงการระบาดวิทยาของโรคนี้ได้นำมาพิจารณา โดยแบบจำลองของโรคไข้หวัดที่เกิดขึ้นในประเทศสเปนเมื่อปีค.ศ.1917 (ซึ่งมีผู้คนเสียชีวิตมากกว่า 50

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

ล้านคนทั่วโลก) ได้นำมาพิจารณาอีกครั้ง สำหรับแบบจำลองที่จะนำมาพิจารณาในงานวิจัยนี้ การถ่ายทอดเชื้อ อัตราการติดเชื้อ การติดเชื้อของไวรัส สภาวะแวดล้อม ระดับภูมิคุ้มกันต่อการติดเชื้อของแต่ละบุคคลนำมาพิจารณา เนื่องจากไวรัสชนิดนี้ถ่ายทอดระหว่างบุคคล การติดเชื้อเกิดจากการไอและจามของผู้ป่วย ซึ่งอาจจะได้รับเชื้อโดยการสัมผัสสิ่งของแล้วไปสัมผัสตา จมูก หรือปาก อาการของไข้หวัดสายพันธุ์ใหม่คือ ไข้ซึ่งอุณหภูมิสูงประมาณ 106 องศาฟาเรนไฮต์ ไอ น้ำมูก หรืออาการคัดจมูก เจ็บคอ ปวดเมื่อยตามร่างกาย ปวดหัว หนาวสั่น ความเมื่อยล้า และอาจจะมีอาการจันรุนแรงจนถึงท้องเสีย และอาเจียน ในงานวิจัยนี้ได้ทำการสร้างแบบจำลองเชิงพลวัตโดยพิจารณาการแพร่กระจายของโรครภายในท้องถิ่นและระหว่างท้องถิ่น ในการระบาดระหว่างท้องถิ่น การเดินทางของประชากร โดยเครื่องบิน หรือการเดินทางระยะทางไกลได้นำมาพิจารณา ขณะที่การระบาดภายในท้องถิ่น การติดเชื้อซ้ำพร้อมทั้งอัตราการเสียชีวิตของคนที่เคยติดเชื้อมาก่อนได้นำมาพิจารณา วิธีการสร้างแบบจำลองเชิงพลวัตมาตรฐานได้นำมาวิเคราะห์แบบจำลองนี้ ผลเฉลยเชิงตัวเลขนำมายืนยันผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่ได้ แบบจำลองเชิงพื้นที่ได้นำมาอธิบายการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ทั้งในระดับท้องถิ่นและระหว่างท้องถิ่น พารามิเตอร์ที่มีผลต่อการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ได้นำมาวิเคราะห์ แนวทางลดการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ได้นำมาเสนอในงานวิจัยนี้

คำสำคัญ ไข้หวัดหมู H1N1 ไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ แบบจำลองเชิงพลวัต แบบจำลองเชิงพื้นที่ วิธีการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Research Title: Transmission model for Influenza Pandemic Due to a New-strain of the H1N1 Influenza A Virus

Researcher: Assoc.Prof.Dr.Puntani Pongsumpun

Faculty: Faculty of Science **Department:** Department of Mathematics
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

ABSTRACT

A new strain of influenza A virus has appeared around the world. The new virus has been designated as subtype H1N1. This is the same designation given to the seasonal flu. They differ in their genome structures. The new virus contains segments of the swine (pig) virus, the chicken virus and a human virus. The new virus first appeared in Mexico and the United States in March and April of 2009. Since then, it has spread to more than 70 countries and within local communities in each country, it has spread rapidly. On July 15th 2009, it was reported by the Thai Ministry of Public Health of Thailand that there were about 4,000 cases and 24 deaths due to this new influenza. A week later, the death toll rose to 44 persons. Its death toll here is the highest in Asia and the sixth highest in the world. The World Health Organization (WHO) raised the worldwide pandemic alert level to Phase 6 in response to the ongoing global spread of the new influenza A (H1N1) virus. A Phase 6 designation indicates that a global pandemic is underway. Every day ever growing number of cases is reported throughout the world.

The epidemic in the United States is occurring in the off season for the normal seasonal flu infection. Therefore all the viruses which are causing the present flu infections in the USA have been shown to be caused by the new virus. The new strain of the influenza A virus has spread to Argentina which is in the seasonal flu season. Thus, the epidemic in Argentina is much worse than that in the Northern Hemisphere. Public Health Officials around the world are expecting the arrival of a much worse pandemic when the seasonal flu season arrives in the North Hemisphere in the fall and winter. In the anticipation of a giant new wave of infections later on in the year, preparations are being made. To determine whether these preparations will work or not, epidemiological and mathematical modeling of this diseases are being undertaken. Previous models of earlier pandemics, especially the one in 1917 (the Spanish Flu Pandemic which killed over 50 million people throughout the world) are being revisited. For the new versions to be used

now to work new assumptions about the modes of transmission, contact rates, infectivity of the

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการศึกษาวิจัยเท่านั้น ไม่สามารถนำเนื้อหาไปใช้ในการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

virus, special circumstances, the level of immunity of the people to the virus of the present disease must be made.

We know that this virus is transmitted from person to person. People get sick mainly through the coughs and sneezes of people who are sick with this virus. It may also be spread by touching infected objects and then touching the eyes, nose or mouth. The symptoms of this new-strain influenza are fever, which is usually high (106° F), coughing, running nose or stuffy nose, sore throat, body aches, headache, chills, fatigue or tiredness, which can be extreme, diarrhea and vomiting. In this project, we will construct a dynamical model which takes into account the existence of the local spread and the pandemic spread of this disease. In the pandemic spread, we have to take into account the role of air travel (or long distance travel). While in the local spread, we have to take into account the effect of repeated contact exposure of an individual to the virus in a closed environment. We will also take into account that people having a prior illness have a higher mortality rate. The Standard dynamical modeling method will be used to analyze this model. The numerical simulations will be used to confirm our analytical solutions. We will use the spatial model to describe the epidemic of this new influenza in the regional level and the global level. The parameters which effect to the transmission of this new influenza will be analyzed. The alternative way for reducing the outbreak of this new influenza will be suggested.

Keywords : swine flu, H1N1, new-strain influenza, dynamical model, spatial model, the standard dynamical modeling method.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ Professor Dr. I-Ming Tang, Mahidol University, Thailand และ Professor Dr. Marc A. Dubois, Service de Physique de l'Etat Condensé, Commissariat à l'Energie Atomique CEA Saclay –Orme des Merisiers, Cedex, France เป็นอย่างสูง ที่กรุณาให้คำปรึกษาแนะนำต่างๆ ในการทำงานวิจัย และดูแลเอาใจใส่การทำงานและให้ความรู้ พร้อมกับประสบการณ์ที่ดีต่างๆ ตลอดมา

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์สาขาคณิตศาสตร์ รวมถึงเจ้าหน้าที่ประจำสาขาวิชาทุกท่าน ที่ช่วยเหลือในด้านการอำนวยความสะดวกเกี่ยวกับอุปกรณ์ที่จำเป็นต่างๆ และคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ขอกราบขอบพระคุณครอบครัว ที่ได้ให้การสนับสนุนทุกประการทางการทำวิจัย และยังให้กำลังใจตลอดมาจนถึงปัจจุบัน และขอขอบคุณเพื่อนๆ ทุกคนที่ช่วยเหลือให้คำแนะนำต่างๆ งานวิจัยสำเร็จสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากงานวิจัยฉบับนี้ ผู้จัดทำขออุทิศแด่ บิดา มารดา และผู้มีพระคุณทุกท่าน

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ทนพัฒนานักวิจัย กองทุนวิจัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ได้ให้ทุนสนับสนุนการทำงานวิจัยนี้

รองศาสตราจารย์ ดร. พันธณี พงศ์สัมพันธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	i
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	iii
กิตติกรรมประกาศ	v
สารบัญ	vi
สารบัญภาพ	vii
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย	3
1.3 ขอบเขตของการวิจัย	3
1.4 วิธีดำเนินการวิจัย	3
1.5 ทฤษฎีหรือกรอบแนวคิดของโครงการวิจัย (ภาคผนวก)	4
1.6 ประโยชน์ที่ได้รับ	4
บทที่ 2 แนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง/การทบทวนวรรณกรรม	5
2.1 ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1	5
2.2 ทฤษฎีที่ใช้ในโครงการวิจัย	18
2.3 การทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง	25
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย	28
บทที่ 4 ผลการวิจัย	41
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ	108
บทที่ 6 สรุปผลผลิตงานวิจัย	109
เอกสารอ้างอิง	111
ภาคผนวก ก ผลงานตีพิมพ์และประชุมวิชาการ	114
ภาคผนวก ข ข้อมูลประวัติผู้วิจัย	237

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

สารบัญภาพ

	หน้า
รูปที่ 2.1 อัตราป่วยต่อประชากรแสนคนโรคไข้หวัดใหญ่ของประเทศไทย พ.ศ. 2545 – 2554	16
รูปที่ 2.2 อัตราตายต่อประชากรแสนคนโรคไข้หวัดใหญ่ของประเทศไทย พ.ศ. 2545 – 2554	16
รูปที่ 3.1 แผนภาพของแบบจำลองแบบที่ 1	28
รูปที่ 3.2 แผนภาพของแบบจำลองแบบที่ 2	30
รูปที่ 3.3 แผนภาพแสดงการเคลื่อนที่ของประชากรระหว่างบ้านแต่ละหลัง	32
รูปที่ 3.4 กราฟแสดงผู้ป่วยโรคไข้หวัด H1N1 ตามกลุ่มอายุระหว่าง 28 เมษายน และวันที่ 9 กรกฎาคม ค.ศ. 2010	34
รูปที่ 3.5 แผนภาพของแบบจำลองแบบที่ 5	37
รูปที่ 4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับ $R_0 < 1$ ค่าของพารามิเตอร์คือ $c = \frac{1}{30}$ ต่อวัน, $\mu_h = \frac{1}{365 \times 65}$ ต่อวัน, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ต่อวัน, $b = \frac{1}{40}$ ต่อวัน, $\theta = \frac{1}{6}$ ต่อวัน, $\alpha = \frac{1}{30}$ ต่อวัน, $\beta = \frac{1}{8}$ ต่อวัน, $\gamma = 0.05$ และ $R_0 = 0.625$.	47
4.1a) ผลเฉลยตามเวลาของผู้เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ และผู้ที่ถูกกักกันโรคตามลำดับ	
4.1b) แนววิธีผลเฉลยบนระนาบ (S,E), (S,I), (S,Q), (E,I), (E,Q) and (I,Q) สักส่วนของผลเฉลย (S^*, E^*, I^*, Q^*) เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะไร้โรค (1,0,0,0)	
รูปที่ 4.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับ $R_0 > 1$ ค่าของพารามิเตอร์คือ $c = \frac{1}{30}$ ต่อวัน,	49
$\mu_h = \frac{1}{365 \times 65}$ ต่อวัน, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ต่อวัน, $b = \frac{1}{40}$ ต่อวัน, $\theta = \frac{1}{6}$ ต่อวัน, $\alpha = \frac{1}{30}$ ต่อวัน, $\beta = \frac{1}{8}$ ต่อวัน, $\gamma = 0.05$ และ $R_0 = 0.625$.	
4.2a) ผลเฉลยตามเวลาของผู้เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ และผู้ที่ถูกกักกันโรคตามลำดับ	
4.2b) แนววิธีผลเฉลยบนระนาบ (S,E), (S,I), (S,Q), (E,I), (E,Q) and (I,Q) สักส่วนของผลเฉลย (S^*, E^*, I^*, Q^*) เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะเรื้อรัง (0.100043, 0.193052, 0.128665, 0.0964747)	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

สารบัญญภาพ(ต่อเนื่ง)

	หน้า
รูปที่ 4.3 แผนภาพ bifurcation ของสมการ (4.1) - (4.5) สำหรับ R_0 ที่แตกต่างกัน เมื่อพารามิเตอร์มีค่าดังนี้	50
$c = \frac{1}{30}$ ต่อวัน, $\mu_h = \frac{1}{365 \times 65}$ ต่อวัน, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ต่อวัน, $b = \frac{1}{40}$ ต่อวัน, $\theta = \frac{1}{6}$ ต่อวัน, $\alpha = \frac{1}{30}$ ต่อวัน และ $\beta = \frac{1}{8}$ ต่อวัน.	
รูปที่ 4.4 ผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับ $T_0 < 1$ ค่าของพารามิเตอร์คือ $b_h = 1/(365 \times 65)$, $g = 1/20$, $h_1 = 1/16$, $h_2 = 1/10$, $\alpha_1 = 1/14$, $\alpha_2 = 1/12$, $\lambda_1 = 1/20$, $\lambda_2 = 1/24$, $l = 1/22$, $s = 0.05$, $T_0 = 0.43$ สัดส่วน ของประชากรแต่ละกลุ่มเข้าสู่จุดสมดุลสภาวะไร้โรค $B_0 = (1,0,0,0,0)$	57
รูปที่ 4.5 ผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับ $T_0 > 1$ ค่าของพารามิเตอร์คือ $b_h = 1/(365 \times 65)$, $g = 1/20$, $h_1 = 1/16$, $h_2 = 1/10$, $\alpha_1 = 1/14$, $\alpha_2 = 1/12$, $\lambda_1 = 1/20$, $\lambda_2 = 1/24$, $l = 1/22$, $s = 0.8$ and $T_0 = 15.67$. สัดส่วนของประชากรแต่ละกลุ่มเข้าสู่จุดสมดุลสภาวะเรื้อรัง $(0.115, 0.172, 0.109, 0.101, 0.213)$	60
รูปที่ 4.6 ผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับช่วงเวลาการกักกัน โรคที่แตกต่างกัน	62
รูปที่ 4.7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับจำนวนบ้านที่ แตกต่างกันในแต่ละหมู่บ้าน พารามิเตอร์มีค่าดังนี้ $N = 100$, $\gamma = 0.25$, $IIP = 5$, $a = 1/8$, $b = 1/6$, $c = 1/7$, $f =$ $1/10$	63
รูปที่ 4.8 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับจำนวนบ้านที่ แตกต่างกันในแต่ละหมู่บ้าน พารามิเตอร์มีค่าเหมือนกับรูปที่ 4.7	64
รูปที่ 4.9 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราการ ติดเชื้อที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าดังนี้ $N = 100$, $n = 40$, $IIP = 5$, $a = 1/8$, $b = 1/6$, $c = 1/7$, $f = 1/10$	64
รูปที่ 4.10 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราการติดเชื้อ ที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าเหมือนกับรูปที่ 4.9	65
รูปที่ 4.11 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับระยะเวลา การฟักตัวของเชื้อไวรัส H1N1 ที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าดังนี้ $N = 100$, $n = 40$, $\gamma = 0.25$, $a = 1/8$, $b =$ $1/6$, $c = 1/7$, $f = 1/10$	65
รูปที่ 4.12 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับระยะเวลาการ ฟักตัวของเชื้อไวรัส H1N1 ที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าเหมือนกับรูปที่ 4.11	66

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

สารบัญภาพ(ต่อเนื่อง)

	หน้า
รูปที่ 4.13 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ถูกกักกันโรคในแต่ละหมู่บ้านที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าดังนี้ $N = 100, n = 40, \gamma = 0.25, IIP = 5, b = 1/6, c = 1/7, f = 1/10$	66
รูปที่ 4.14 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ถูกกักกันโรคในแต่ละหมู่บ้านที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าเหมือนกับรูปที่ 4.13	67
รูปที่ 4.15 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราที่ผู้ที่ถูกกักกันโรคเปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นฟูไข้ในแต่ละหมู่บ้านที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าดังนี้ $N = 100, n = 40, \gamma = 0.25, IIP = 5, a = 1/8, c = 1/7, f = 1/10$	67
รูปที่ 4.16 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราที่ผู้ที่ถูกกักกันโรคเปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นฟูไข้ในแต่ละหมู่บ้านที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าเหมือนกับรูปที่ 4.15	68
รูปที่ 4.17 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราที่ผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นฟูไข้ในแต่ละหมู่บ้านที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าดังนี้ $N = 100, n = 40, \gamma = 0.25, IIP = 5, a = 1/8, b = 1/6, f = 1/10$	68
รูปที่ 4.18 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราที่ผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นฟูไข้ในแต่ละหมู่บ้านที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าเหมือนกับรูปที่ 4.17	69
รูปที่ 4.19 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นฟูไข้ในแต่ละหมู่บ้านที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าดังนี้ $N = 100, n = 40, \gamma = 0.25, IIP = 5, a = 1/8, b = 1/6, c = 1/7, f = 1/10$	69
รูปที่ 4.20 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นฟูไข้ในแต่ละหมู่บ้านที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าเหมือนกับรูปที่ 4.19	70
รูปที่ 4.21 ช่วงค่าของพารามิเตอร์สำหรับสมการ $\lambda^3 + f_1\lambda^2 + f_2\lambda + f_3 = 0$ ซึ่งสอดคล้องกับกฎของ Routh– Hurwitz นำมาแสดงบนระนาบ $(f_1, \delta_2), (f_3, \delta_2), (f_1f_2 - f_3, \delta_2)$ ตามลำดับ ค่าของพารามิเตอร์ดังนี้ $\rho = 0.000273973, \mu = 0.000039139, \eta = 0.111111, \alpha = 0.142857, \varepsilon = 0.2, \beta = 0.142857, \gamma = 0.7$ และ $\delta_3 = 1$. จากรูปข้างต้น จะเห็นได้ว่ากฎของ Routh– Hurwitz เป็นจริงสำหรับ $\tilde{L}_0 > I$	75

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

สารบัญภาพ(ต่อเนื่อง)

	หน้า
รูปที่ 4.22 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแสดงบนระนาบ $(S_1, E_1), (S_1, I_1), (S_1, Q_1), (S_2, E_2),$ $(S_2, I_2), (S_2, Q_2), (S_3, E_3), (S_3, I_3), (S_3, Q_3)$ ตามลำดับ สำหรับ $L_0 < 1, \tilde{L}_0 < 1$ และ $\hat{L}_0 < 1$ ค่าของพารามิเตอร์ คือ $\mu = 1/(365 \times 70)$ ต่อวัน, $\kappa = 1/(365 \times 10)$ ต่อวัน, $\eta = 1/9$ ต่อวัน, $\alpha = 1/7 \text{ day}^{-1}$, $\epsilon = 1/5$ ต่อวัน, $\beta = 1/7$ ต่อวัน, $\gamma = 0.7$ ต่อวัน, $\delta_1 = 0.6, \delta_2 = 0.9, \delta_3 = 0.15, L_0^* = 0.39044693,$ $\tilde{L}_0 = 0.51246160$ และ $\hat{L}_0 = 0.59863369$	77
รูปที่ 4.23 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแสดงบนระนาบ $(S_1, E_1), (S_1, I_1), (S_1, Q_1),$ $(S_2, E_2), (S_2, I_2), (S_2, Q_2), (S_3, E_3), (S_3, I_3), (S_3, Q_3)$ ตามลำดับ สำหรับ $L_0^* < 1, \tilde{L}_0 < 1$ และ $\hat{L}_0 > 1$ ค่าของ พารามิเตอร์คือ $\delta_1 = 1.45, \delta_2 = 1.65, \delta_3 = 1.25, L_0^* = 0.94358008, \tilde{L}_0 = 0.93951293,$ และ $\hat{L}_0 = 4.98861411$ แต่ตัวพารามิเตอร์อื่นๆ นิยามเหมือนในรูปที่ 4.22 สัดส่วนของประชากร $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ วนเข้าหาจุดสมดุลสถานะเรื้อรังสำหรับกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0.20045647, 0.00012320, 0.00003992, 0.00001141)	78
รูปที่ 4.24 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแสดงบนระนาบ $(S_1, E_1), (S_1, I_1), (S_1, Q_1),$ $(S_2, E_2), (S_2, I_2), (S_2, Q_2), (S_3, E_3), (S_3, I_3), (S_3, Q_3)$ ตามลำดับ สำหรับ $L_0^* < 1, \tilde{L}_0 > 1$ ค่าของพารามิเตอร์คือ $\delta_1 = 1.52, \delta_2 = 2.5, \delta_3 = 1.45, L_0^* = 0.98913223, \tilde{L}_0 = 1.42350444$ แต่ตัวพารามิเตอร์อื่นๆ นิยาม เหมือนในรูปที่ 4.22 สัดส่วนของประชากร $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ วนเข้าหาจุดสมดุล สถานะเรื้อรังสำหรับกลุ่มอายุกลุ่มที่ 2 และ 3 (1, 0, 0, 0, 0.70249166, 0.00036634, 0.00011861, 0.00003387, 0.17266629, 0.00008170, 0.00002649, 0.00000757)	79
รูปที่ 4.25 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแสดงบนระนาบ $(S_1, E_1), (S_1, I_1), (S_1, Q_1), (S_2, E_2)$ $(S_2, I_2), (S_2, Q_2), (S_3, E_3), (S_3, I_3), (S_3, Q_3)$ ตามลำดับ สำหรับ $L_0^* > 1$ ค่าของพารามิเตอร์คือ $\delta_1 = 6, \delta_2 = 7,$ $\delta_3 = 5$ และ $L_0^* = 3.90446932$ แต่ตัวพารามิเตอร์อื่นๆ นิยามเหมือนในรูปที่ 4.22 สัดส่วนของประชากร $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ วนเข้าหาจุดสมดุลสถานะเรื้อรังสำหรับกลุ่มอายุกลุ่มที่ 1, 2 และ 3 (0.25611675, 0.00091599, 0.00029658, 0.00008470, 0.23726898, 0.00002434, 0.00000815, 0.00000237, 0.05010638, 0.00002884, 0.00000935, 0.00000267)	80
รูปที่ 4.26 แผนภาพ bifurcation ของผลเฉลยสำหรับแบบจำลองนี้ สำหรับค่าที่แตกต่างกันของ \hat{L}_0 โดยที่ *-*- แทนสถานะที่เสถียร และ 0-0-0 แทนสถานะที่ไม่เสถียร	82

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

สารบัญภาพ(ต่อเนื่อง)

	หน้า
รูปที่ 4.27 แผนภาพ bifurcation ของผลเฉลยสำหรับแบบจำลองนี้ บนระนาบ $(\tilde{L}_0, S_2), (\tilde{L}_0, E_2), (\tilde{L}_0, I_2), (\tilde{L}_0, Q_2), (\tilde{L}_0, S_3), (\tilde{L}_0, E_3), (\tilde{L}_0, I_3), (\tilde{L}_0, Q_3)$ ตามลำดับ สำหรับค่าที่แตกต่างกันของ \tilde{L}_0 โดยที่ $*-*$ แทนสถานะที่เสถียร และ 0-0-0 แทนสถานะที่ไม่เสถียร	83
รูปที่ 4.28 แผนภาพ bifurcation ของผลเฉลยสำหรับแบบจำลองนี้ บนระนาบ $(L'_0, S_1), (L'_0, E_1), (L'_0, I_1), (L'_0, Q_1), (L'_0, S_2), (L'_0, E_2), (L'_0, I_2), (L'_0, Q_2), (L'_0, S_3), (L'_0, E_3), (L'_0, I_3), (L'_0, Q_3)$ ตามลำดับ สำหรับค่าที่แตกต่างกันของ L'_0 โดยที่ $*-*$ แทนสถานะที่เสถียร และ 0-0-0 แทนสถานะที่ไม่เสถียร	84
รูปที่ 4.29 ผลเฉลยตามเวลาของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ	103
รูปที่ 4.30 ผลเฉลยตามเวลาของผู้ที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้	104
รูปที่ 4.31 ผลเฉลยตามเวลาของผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้	104
รูปที่ 4.32 ผลเฉลยตามเวลาของผู้ที่ถูกกักกัน โรค	104
รูปที่ 4.33 ผลเฉลยตามเวลาของผู้ที่ฟื้นฟู	105
รูปที่ 4.34 ผลเฉลยตามเวลาของผู้ติดเชื้อเมื่อมีร้อยละของการติดเชื้อซ้ำที่แตกต่างกัน	105
รูปที่ 4.35 ผลเฉลยตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้สำหรับอัตราการเสียชีวิตเนื่องจากการติดเชื้อที่แตกต่างกัน	106
รูปที่ 4.36 ผลเฉลยตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้สำหรับร้อยละของผู้ติดเชื้อที่เป็นผู้ถูกกักกัน โรคที่แตกต่างกัน	106

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

โรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 มีชื่อเรียกอย่างเป็นทางการคือ “ไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ชนิด A (H1N1)” (Influenza A (H1N1)) จัดเป็นโรคติดต่ออุบัติใหม่ เริ่มระบาดตั้งแต่เดือนมีนาคม 2009 โดยพบครั้งแรกที่ประเทศเม็กซิโก และสหรัฐอเมริกา ต่อมาได้แพร่ออกไปอีกหลายประเทศ จากคำอธิบายของกรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข ได้ระบุไว้ว่า โรคนี้เป็นโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ในคน แพร่ติดต่อระหว่างคนสู่คน เกิดจากเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ชนิดเอ เอช1 เอ็น1 (A/H1N1) เป็นเชื้อตัวใหม่ ซึ่งเป็นเชื้อที่เกิดจากการผสมสารพันธุกรรมของเชื้อไข้หวัดใหญ่ของสุกรเป็นส่วนใหญ่ และมีสารพันธุกรรมของเชื้อไข้หวัดใหญ่ของคน และเชื้อไข้หวัดใหญ่ที่พบในนกด้วย ข่าวการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 ที่ออกมาในตอนแรกๆ นั้น เรียกโรคนี้ว่า “ไข้หวัดสุกร” (Swine Influenza) เนื่องจาก สารพันธุกรรมของไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 นี้ ส่วนใหญ่ไปเหมือนกับสารพันธุกรรมของไข้หวัดใหญ่ในสุกรนั่นเอง ทั้งนี้ตั้งแต่วันที่ 12 มิถุนายน 2009 (ตามเวลาในประเทศไทย) แพทย์หญิง มาการีต ซาน ผู้อำนวยการใหญ่ องค์การอนามัยโลก ได้ประกาศยกระดับเตือนภัยการระบาดใหญ่ของไข้หวัดใหญ่ จากระดับ 5 เป็นระดับ 6 ซึ่งหมายถึง การระบาดของเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ ชนิด A (H1N1) เริ่มแพร่กระจายไปทั่วโลกแล้วโดยมีการติดต่อจากคนสู่คน ข้อมูลล่าสุดจากองค์การอนามัยโลก ณ วันที่ 27 กรกฎาคม ค.ศ. 2009 รายงานว่า มีจำนวนผู้ป่วยที่เป็นโรคนี้นี้มากกว่า 100,000 ราย ใน 157 ประเทศทั่วโลก โดยประเทศสหรัฐอเมริกามีจำนวนผู้ติดเชื้อมากที่สุด และมีแนวโน้มจะพบผู้ติดเชื้อเพิ่มจำนวนมากขึ้นทั้งในพื้นที่ของประเทศที่มีผู้ติดเชื้ออยู่เดิมและประเทศใหม่ๆ เพิ่มขึ้น ส่วนจำนวนผู้เสียชีวิตมีประมาณ 800 กว่าคน สำหรับประเทศไทยนั้น กระทรวงสาธารณสุขได้รายงานข้อมูล ณ วันที่ 15 กรกฎาคม ค.ศ. 2009 ว่ามีจำนวนผู้ป่วยที่เป็นโรคนี้นี้มากกว่า 4,000 คน จำนวนผู้เสียชีวิตมีประมาณ 24 คน หลังจากนั้นมา 1 สัปดาห์ จำนวนผู้ป่วยที่เป็นโรคนี้นี้ก็มียังมากกว่า 6,000 คน จำนวนผู้เสียชีวิตก็มีประมาณ 44 คน และมีแนวโน้มว่าจะสูงขึ้นเรื่อยๆ องค์การอนามัยโลกได้รายงาน ณ วันที่ 26 กรกฎาคม ค.ศ. 2009 ว่า จำนวนผู้ติดเชื้อ และจำนวนผู้เสียชีวิตจากโรคนี้นี้ในประเทศไทยมีมากเป็นอันดับที่หนึ่งของภูมิภาคเอเชีย

สำหรับผู้ป่วยโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1 อาการที่สำคัญคือ หลังจากที่ผู้ป่วยได้รับเชื้อนี้แล้ว ผู้ป่วยส่วนใหญ่จะเริ่มมีอาการหลังจากได้รับเชื้อไวรัส 1-3 วัน โดยจะปรากฏอาการที่คล้ายกับผู้ป่วยโรคไข้หวัดใหญ่ธรรมดา แต่มีอาการรุนแรงกว่าและรวดเร็วกว่า นั่นคือ มีไข้สูงราว 38 องศาเซลเซียส ปวดศีรษะ ปวดเมื่อยตาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งเมื่อมีการนำไปใช้

รองศาสตราจารย์ ดร. พันธณี พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

ร่างกายและตามข้อ เจ็บคอ อ่อนเพลีย ไอ มีน้ำมูก มีเสมหะ ปวดบวม เมื่ออาหาร บางรายอาจท้องเสีย คลื่นไส้ อาเจียน ยาด้านไวรัสที่ใช้รักษาโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่คือ โอเซลทามิเวียร์ (Oseltamivir) หรือ ทามิฟลู (Tamiflu) และ ซานามิเวียร์ (Zanamivir) หรือ รีเลนซา (Relenza) แต่หลังจากการได้รับการรักษาด้วยยาทั้งสองชนิดนี้ผู้ป่วยก็ได้รับอาการข้างเคียงอีก คือ อาการคลื่นไส้ อาเจียน ปวดท้อง เลือดกำเดาออก อาการหายใจลำบาก อาการชัก ปัญหาเรื่องหู และโรคตาแดง ทั้งนี้ ยาทั้งสองชนิด สามารถป้องกันเชื้อไวรัสไม่ให้แตกตัว แต่ต้องรับยาภายใน 48 ชั่วโมง เพราะมีโอกาสที่เชื้อไวรัสจะกลายพันธุ์ได้อีก ในปัจจุบันนี้ยังไม่มีวัคซีนที่สามารถป้องกันโรคนี้ได้ได้อย่างแท้จริง ส่วนวัคซีนป้องกันโรคไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาลที่ผลิตใ้ช้ในปัจจุบัน ยังไม่มีหลักฐานว่า จะสามารถป้องกันโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ได้

งานวิจัยทางด้านโรคไข้หวัดที่มีผู้วิจัยมาแล้ว จะเป็นงานวิจัยทางด้านโรคไข้หวัดใหญ่ (เกิดจากเชื้อ Influenza virus ชนิด A, B และ C) และโรคไข้หวัดนก (เกิดจากเชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H5N1) แต่สำหรับโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ ซึ่งเกิดจากเชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1 แทบจะยังไม่มีผู้ใดศึกษามาก่อน เนื่องจากยังไม่มีวัคซีนที่สามารถป้องกันโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ได้อย่างแท้จริง ขณะเดียวกัน ในบางครั้งยารักษาโรคนี้อาจเกิดผลข้างเคียงเช่นกัน และใช้งบประมาณที่ค่อนข้างสูงในการควบคุมโรคนี้นี้ ผู้วิจัยจึงคิดว่าน่าจะเสนอทางเลือกใหม่ในการควบคุมโรคนี้นี้ โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการแพร่ระบาดของโรคนี้นี้ ซึ่งได้จากการศึกษาลักษณะการแพร่ระบาดของโรคนี้นี้ แล้วหาความสัมพันธ์ ระหว่างปัจจัยต่างๆ ที่ทำให้เกิดการระบาดของโรคนี้นี้ โดยพิจารณาถึงอิทธิพลที่เกิดจากภายในชุมชนเอง และอิทธิพลที่มาจากภายนอกชุมชนที่ก่อให้เกิดการแพร่ระบาดของโรคนี้นี้ สำหรับการแพร่ระบาดของโรคที่เกิดจากอิทธิพลภายนอก จะพิจารณาถึงการแพร่เชื้อเมื่อมีการเดินทางของประชาชน โดยเครื่องบิน (หรือการเดินทางชนิดอื่นๆ ที่เป็นการเดินทางระหว่างชุมชน) สำหรับอิทธิพลที่เกิดจากภายในชุมชนเอง จะพิจารณาถึงอิทธิพลของการเสี่ยงที่จะมีการติดเชื้อซ้ำๆ ของแต่ละคนในชุมชนปิด (closed environment) นอกจากนั้นยังมีการพิจารณาถึงบุคคลที่เคยติดเชื้อมาก่อน ซึ่งบุคคลเหล่านี้จะมีอัตราการเสียชีวิตที่สูงกว่าบุคคลที่ยังไม่เคยติดเชื้อมาก่อน หลังจากนั้นวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้โดยใช้ความรู้และทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ นอกจากนั้นยังมีการศึกษาการกระจายของผู้ป่วยโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่โดยใช้ แบบจำลองการกระจายตามพื้นที่ (Spatial model) และใช้กระบวนการสโตแคสติก (Stochastic process) มาวิเคราะห์ จำนวนผู้ป่วยโดยจะทำการพิจารณาถึงตัวพารามิเตอร์ต่างๆ ที่มีอิทธิพลต่อการกระจายของผู้ป่วยโรคนี้นี้ และหาสมการที่สามารถนำมาอธิบายถึงการเปลี่ยนแปลงของผู้ป่วยโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1 ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้นั้นจะสามารถช่วยในการลดการระบาดของโรคนี้นี้ให้น้อยลง ซึ่งเป็นประโยชน์ในทางวิทยาศาสตร์การแพทย์ ตลอดจนสามารถช่วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์และสงวนลิขสิทธิ์ในเนื้อหา ห้ามมิให้ผู้ใดนำเนื้อหาไปใช้โดยไม่ได้รับอนุญาต
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงชื่อคุณและบรรณานุกรมที่ปรากฏมาไว้ใช้
รองศาสตราจารย์ ดร.พันธิ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

นอกจากนั้นแล้วผลที่ได้ยังสามารถก่อให้เกิดองค์ความรู้ใหม่ที่สามารถใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์มาควบคุมการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ ซึ่งจะทำให้เกิดความก้าวหน้าทางด้านแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคระบาดเป็นอย่างยิ่ง

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อศึกษาลักษณะการระบาดสำหรับโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1
2. เพื่อสร้างและพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1
3. เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1
4. เพื่อหาแนวทางใหม่ในการลดการระบาดของโรคนี้ให้น้อยลง โดยใช้ความรู้และทฤษฎีทางคณิตศาสตร์
5. เพื่อใช้ความรู้และทฤษฎีทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์กับวิทยาศาสตร์ทางการแพทย์
6. เพื่อลดงบประมาณแผ่นดินที่ต้องสูญเสียเป็นจำนวนมากในการควบคุมการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1. ผลิตบทความตีพิมพ์เผยแพร่ในระดับชาติ และนานาชาติ
2. ผลที่ได้จากงานวิจัยเป็นแนวทางในการแก้ปัญหาผู้ป่วยโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1
3. ผลิตบัณฑิตที่จบการศึกษาระดับปริญญาโทหรือปริญญาเอก

1.4 วิธีดำเนินการวิจัย

1. ศึกษาข้อมูลเบื้องต้น เกี่ยวกับโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1
2. ค้นคว้าและรวบรวมข้อมูลของคนไข้โรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1
3. ศึกษาหาความสัมพันธ์ระหว่างปัจจัยต่างๆ ที่ทำให้เกิดการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1
4. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ

เอกสารนี้เป็นเอกสาร Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1 ศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งเมื่อมีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

5. พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1
6. วิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1
7. สร้างทฤษฎีใหม่ๆ ที่เกี่ยวข้อง
8. หาคำตอบเชิงตัวเลข
9. ทดสอบทฤษฎีที่สร้างขึ้นใหม่
10. วิเคราะห์และสรุปผล
11. สรุปผลการวิจัย

1.5 ทฤษฎีหรือกรอบแนวคิดของโครงการวิจัย

1. Standard Dynamical Analysis Method
2. The equilibrium state
3. The Routh-Hurwitz criteria
4. Local asymptotical stability
5. Stochastic process

1.6 ประโยชน์ที่ได้รับ

ได้รับแนวทางในการลดการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1 โดยใช้ความรู้เรื่องแบบจำลองทางคณิตศาสตร์พร้อมทั้งผลิตภัณฑ์ และนักวิจัยรุ่นใหม่



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารฉบับนี้เมื่อกรนำไปใช้

รองศาสตราจารย์ ดร. พันชนิ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

บทที่ 2

แนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง/การทบทวนวรรณกรรม

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์อีกหนึ่งวิชาที่มีความหลากหลาย โดดเด่นและมีความพิเศษในศาสตร์ของตัวเอง มีความน่าสนใจและสามารถศึกษาได้อย่างไร้ขอบเขต ทั้งที่เป็นการศึกษาทางด้านทฤษฎีหรือเป็นการศึกษาเพื่อแก้ปัญหาหรือใช้ประโยชน์ในชีวิตประจำวัน การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Modeling) เป็นสาขาหนึ่งในการศึกษาทางคณิตศาสตร์ที่เน้นการนำไปใช้แก้ปัญหาจริง ที่เกิดขึ้นในหลายๆด้าน เช่น ด้านชีววิทยาและสิ่งแวดล้อม เคมี ฟิสิกส์ สังคมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ หรือแพทยศาสตร์ เป็นต้น การแก้ปัญหาต่างๆ ถ้าสามารถสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ ก็จะช่วยให้การแก้ปัญหานั้นๆเป็นระบบ เป็นขั้นตอน ช่วยในการวางแผนหรือควบคุมปริมาณที่เกี่ยวข้องได้ และสามารถปรับปรุงแบบจำลองให้เหมาะสม เมื่อเงื่อนไขหรือสิ่งแวดล้อมเปลี่ยนแปลงไป รวมไปถึงการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อเป็นการศึกษาหาแนวทางลดการระบาดของโรค

2.1 ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1

โรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 หรือ โรคไข้หวัดสุกร หรือ Swine influenza เกิดจากเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ ชนิด เอ เอช1 เอ็น1 (A/H1N1) ซึ่งเป็นเชื้อไข้หวัดใหญ่ตัวใหม่ที่ไม่เคยพบมาก่อน เกิดจากการผสมสารพันธุกรรมของเชื้อไข้หวัดใหญ่ของคน สุกร และนก [1] ตามปกติมีการระบาดในสุกรเท่านั้น สามารถพบได้ทั้งในสุกรเลี้ยงและสุกรป่า ซึ่งมีหลากหลายสายพันธุ์ ทั้ง H1N1, H1N2 และ H3N2 แต่บางครั้งสุกรอาจมีเชื้อไข้หวัดอยู่ในตัวมากกว่า 1 ชนิด ซึ่งอาจทำให้เกิดการผสมกันของยีนส์ได้ ทำให้เกิดเป็นไวรัสชนิดใหม่ที่สามารถข้ามสายพันธุ์มาติดต่อยังมนุษย์ได้ เริ่มต้นจากการสัมผัสกับสุกรที่เป็นโรค [2] สำหรับการแพร่ระบาดของโรค เชื้อไวรัสที่มีอยู่ในเสมหะ น้ำมูก น้ำลายของผู้ป่วย แพร่ติดต่อไปยังคนอื่นๆ โดยการไอจามรดกันโดยตรง หรือหายใจเอาฝุ่นละอองเข้าไป หากอยู่ใกล้ผู้ป่วยในระยะ 1 เมตร บางรายได้รับเชื้อทางอ้อมผ่านทางมือหรือสิ่งของเครื่องใช้ที่ปนเปื้อนเชื้อ เช่น แก้วน้ำ ลูกบิดประตู โทรศัพท์ ผ้าเช็ดมือ เป็นต้น เชื้อจะเข้าสู่ร่างกายทางจมูก ตา ปาก ผู้ป่วยอาจเริ่มแพร่เชื้อได้ตั้งแต่ 1 วันก่อนป่วย ช่วง 3 วันแรกจะแพร่เชื้อได้มากที่สุด และระยะแพร่เชื้อมักไม่เกิน 7 วัน เมื่อเชื้อไข้หวัดสุกรเข้าสู่ร่างกายจะมีระยะฟักตัวประมาณ 1 สัปดาห์ ก่อนจะปรากฏอาการที่คล้ายกับผู้ป่วยโรคไข้หวัดใหญ่ธรรมดา แต่มีอาการรุนแรงกว่า และรวดเร็วกว่า นั่นคือ มีไข้สูงราว 38 องศาเซลเซียส ปวดเมื่อยตามร่างกาย ตามข้อ ไอ มีน้ำมูก มีเสมหะ ปวดบวม เบื่ออาหาร บางรายอาจท้องเสีย คลื่นไส้ อาเจียน จากนั้นเชื้อจะแพร่เข้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

สู่กระแสโลหิต จึงทำให้เกิดเชื้อหุ้มสมองอักเสบ ผู้ป่วยจะมีการทรงตัวผิดปกติ เดินเอนไปเอนมา เหมือนคนเมาสุรา นอกจากนี้อาจสูญเสียการได้ยินจนถึงขั้นหูหนวกได้ และอาจเป็นอันตรายถึงชีวิต หากไม่ได้รับการรักษาอย่างทันท่วงที [3,4] ก่อนจะกลายพันธุ์เป็นไข้หวัดสุกรสายพันธุ์ใหม่ หรือ ไข้หวัดใหญ่เม็กซิโกนั้น ไข้หวัดสุกรสายพันธุ์ดั้งเดิม พบมาตั้งแต่ปี ค.ศ.1918-1919 ในช่วงที่ ไข้หวัดใหญ่สเปน (Spanish Flu) ระบาดครั้งใหญ่ทั่วโลก จนมีผู้เสียชีวิตมากกว่า 50 ล้านคน ส่วนใหญ่อายุ 20-40 ปี และตั้งแต่ 65 ปีขึ้นไป[5,6,7,8,9] จากนั้นโรคไข้หวัดสุกรได้แพร่ระบาดในช่วงต่างๆ ก่อให้เกิดโรคในคนอยู่มากกว่า 50 ราย โดยผู้ป่วย 61% มีประวัติสัมผัสสุกรและมีอายุเฉลี่ย 24 ปี หลังจากนั้นใน ค.ศ.1974 ไข้หวัดสุกรได้แพร่ระบาดในค่ายทหาร (Fort Dix) ที่รัฐนิวเจอร์ซีย์ มีผู้ป่วย 13 ราย เสียชีวิต 1 ราย โดยที่อีก 230 ราย คิดเชื่อแต่ไม่มีอาการ หรือมีอาการแต่น้อยมาก ทั้งหมดนี้ไม่มีประวัติสัมผัสสุกร ซึ่งแสดงว่าน่าจะมีการพัฒนาจนมีการติดต่อจากคนสู่คน ต่อมาในปี ค.ศ.1988 หญิงตั้งครรภ์คนหนึ่งเสียชีวิตในรัฐวิสคอนซิน และมีประวัติสัมผัสสุกร จึงเกิดการสงสัยว่าไข้หวัดสุกรอาจไม่ใช่พันธุ์สุกรล้วน (Classic H1N1) จนกระทั่งปี ค.ศ.1998 จึงพิสูจน์พบว่าสุกรที่เลี้ยงในประเทศสหรัฐอเมริกา มีไวรัสไข้หวัดสุกรกลายพันธุ์ โดยมีพันธุกรรมผสมระหว่างสุกร คน และนก เกิดสายพันธุ์ผสม (Triple assortant virus) H3N2, H1N2, และ H1N1 [10,11] และสายพันธุ์ผสมนี้ยังพบได้ในเอเชีย และแคนาดา จนกระทั่งล่าสุด เกิดการแพร่ระบาดของไข้หวัดสุกรในประเทศเม็กซิโก และมีการยืนยันอย่างแน่ชัดว่า โรคนี้สามารถแพร่กันระหว่างคนสู่คน เนื่องจากเชื้อโรคได้วิวัฒนาการอย่างสมบูรณ์แล้ว องค์การอนามัยโลก ระบุไว้ว่า โรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ หรือโรคไข้หวัดสุกร มีอัตราการแพร่ระบาดมากกว่าโรคซาร์ส และโรคไข้หวัดนก ข้อมูลล่าสุดจากองค์การอนามัยโลก ณ วันที่ 27 กรกฎาคม ค.ศ. 2009 รายงานว่า มีจำนวนผู้ป่วยที่เป็นโรคนี้มากกว่า 100,000 ราย ใน 157 ประเทศทั่วโลก โดยประเทศสหรัฐอเมริกามีจำนวนผู้ติดเชื้อมากที่สุด และมีแนวโน้มจะพบผู้ติดเชื้อเพิ่มจำนวนมากขึ้นทั้งในพื้นที่ของประเทศที่มีผู้ติดเชื้ออยู่เดิม และประเทศใหม่ๆ เพิ่มขึ้น ส่วนจำนวนผู้เสียชีวิตมีประมาณ 800 กว่าคน สำหรับประเทศไทยนั้น กระทรวงสาธารณสุขได้รายงานข้อมูล ณ วันที่ 15 กรกฎาคม ค.ศ. 2009 ว่ามีจำนวนผู้ป่วยที่เป็นโรคนี้มากกว่า 4,000 คน จำนวนผู้เสียชีวิตมีประมาณ 24 คน หลังจากนั้นมา 1 สัปดาห์ จำนวนผู้ป่วยที่เป็นโรคนี้ก็ยังมีมากกว่า 6,000 คน จำนวนผู้เสียชีวิตก็มีประมาณ 44 คน และมีแนวโน้มว่าจะสูงขึ้นเรื่อยๆ [12] เนื่องจากยังไม่มีวัคซีนที่สามารถป้องกันโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่นี้ได้อย่างแท้จริง ขณะเดียวกัน ในบางครั้งยารักษาโรคนี้ก็ยังสามารถเกิดผลข้างเคียงเช่นกัน และใช้งบประมาณที่ค่อนข้างสูงในการควบคุมโรคนี้

การระบาดของไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 เป็นการระบาดทั่วโลกของเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ ชนิดเอ เอช 1 เอ็น 1 สายพันธุ์ใหม่ หรือโดยทั่วไปมักเรียกว่า "ไข้หวัดหมู" เริ่มพบการระบาดตั้งแต่เดือนเมษายน พ.ศ. 2552 เป็นต้นมา แม้ว่าไวรัสประกอบด้วยการรวมกันของ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ทางปัญญาและเป็นทรัพย์สินทางปัญญาของศูนย์วิจัยและพัฒนาสุขภาพสัตว์ปีก และในสุกร ร่วมกับไวรัสไข้หวัดใหญ่ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของลิขสิทธิ์ทุกครั้งเมื่อมีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

สุกรยูเรเชีย ลักษณะที่แปลกประหลาดหนึ่งของเชื้อเอช 1 เอ็น 1 คือ มักจะไม่ค่อยติดต่อผู้คนวัยชรา อายุมากกว่า 60 ปี

ไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ดังกล่าวมีการพบครั้งแรกในรัฐเวรากรูซ ประเทศเม็กซิโก และมีหลักฐานว่าโรคดังกล่าวได้มีการระบาดเป็นเวลานานนับเดือนก่อนจะมีการรับรองอย่างเป็นทางการ ถึงแม้ว่ารัฐบาลเม็กซิโกจะพยายามจะยับยั้งการระบาดของโรคด้วยการปิดสถานที่ราชการและเอกชนจำนวนมากแล้วก็ตาม แต่เชื้อก็ได้ระบาดอย่างรวดเร็วทั่วโลก จนเมื่อวันที่ 11 มิถุนายน พ.ศ. 2552 องค์การอนามัยโลกและศูนย์ควบคุมและป้องกันโรคสหรัฐอเมริกา (CDC) ได้ประกาศให้ระดับการระบาดของเชื้อเป็น "โรคระบาดทั่ว"

ผู้ป่วยด้วยโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 ส่วนใหญ่มีอาการเพียงเล็กน้อย แต่ก็มีบางรายมีอาการรุนแรงได้ โดยอาการของโรคเล็กน้อยได้แก่มีไข้ เจ็บคอ ไอ ปวดศีรษะ ปวดกล้ามเนื้อ หรือข้อต่อ และมีอาการคลื่นไส้ อาเจียน หรืออาการท้องร่วง สำหรับผู้ที่มีความเสี่ยงที่จะมีอาการรุนแรง ได้แก่ ผู้ป่วยด้วยโรคหอบหืด เบาหวาน โรคอ้วน โรคหัวใจ ผู้ที่มีภาวะภูมิคุ้มกันบกพร่อง เด็กซึ่งมีภาวะทางพัฒนาการทางประสาท และสตรีมีครรภ์ อย่างไรก็ตาม กระทั่งผู้ซึ่งเคยมีสุขภาพดี ก็มีความเสี่ยงที่จะเป็นปอดบวมหรือกลุ่มอาการหายใจลำบากในผู้ใหญ่ได้ ซึ่งจะมีอาการหายใจลำบากขึ้นและมักจะเกิดขึ้น 3-6 วันภายหลังเริ่มมีอาการของไข้หวัด

โรคดังกล่าวไม่มีการระบาดจากการรับประทานเนื้อสุกรหรือผลิตภัณฑ์จากสุกรแต่อย่างใด การระบาดของเอช 1 เอ็น 1 สามารถติดต่อกันระหว่างมนุษย์สู่มนุษย์ผ่านทางละอองของการหายใจ เช่นเดียวกับไวรัสไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์อื่น อาการของโรคมักปรากฏเป็นเวลา 4-6 วัน จึงแนะนำให้ ผู้ที่มีอาการพักผ่อนอยู่ที่บ้านและอยู่ห่างจากโรงเรียน ที่ทำงาน หรือสถานที่แออัด เพื่อหลีกเลี่ยงการแพร่ระบาดของโรค สำหรับผู้ซึ่งมีอาการรุนแรงหรืออยู่ในกลุ่มเสี่ยง ควรได้รับยาต้านไวรัส (โอเซลทามิเวียร์หรือซานามิเวียร์) ผู้เสียชีวิตที่ได้รับการยืนยันทั่วโลกมีจำนวนทั้งสิ้น 14,286 ราย อย่างไรก็ตาม จำนวนดังกล่าวเป็นผลรวมของรายงานจากหน่วยงานของรัฐต่าง ๆ ซึ่งองค์การอนามัยโลกระบุว่า จำนวนที่แท้จริงนั้น "สูงกว่านี้โดยไม่ต้องสงสัย"

จำนวนผู้ป่วยที่พบโรคนี้ลดจำนวนลงเรื่อย ๆ และวันที่ 10 สิงหาคม พ.ศ. 2553 องค์การอนามัยโลก มาร์กาเรต แชน ได้ประกาศว่าการระบาดของไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 สิ้นสุดลงแล้ว ข้อมูลขององค์การอนามัยโลกระบุว่า มีผู้เสียชีวิตจากไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 มากกว่า 18,000 คนทั่วโลก

การเรียกชื่อ

การระบาดในตอนเริ่มแรก สื่ออเมริกันเรียกโรคดังกล่าวว่า "ไข้หวัดใหญ่ เอช 1 เอ็น 1" ก่อนที่องค์การอนามัยโลกจะตั้งชื่ออย่างเป็นทางการว่า ไวรัสโรคระบาด เอช 1 เอ็น 1/09 ในขณะที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับใช้ในเชิงวิชาการเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ในเชิงพาณิชย์ การคัดลอกหรือการนำเนื้อหาไปใช้โดยไม่ได้รับอนุญาตถือว่าผิดกฎหมาย

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

ในเนเธอร์แลนด์ เดิมเรียกว่า "ไข้หวัดหมู" แต่ในปัจจุบัน สถาบันสุขภาพแห่งชาติได้เรียกว่า "ไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ ชนิดเอ (เอช 1 เอ็น 1)" ถึงแม้ว่าในสื่อและประชาชนโดยทั่วไปจะใช้ชื่อว่า "ไข้หวัดใหญ่เม็กซิโก" ก็ตาม; เกาหลีใต้และอิสราเอล พิจารณาเรียกชื่ออย่างสั้น ๆ ว่า "ไวรัสเม็กซิโก" ในภายหลัง สื่อสุขภาพเกาหลีใต้ใช้ตัวย่อ "SI" ซึ่งย่อมาจาก "ไข้หวัดใหญ่ในสุกร" (Swine influenza) ในไต้หวันใช้ชื่อว่า "ไข้หวัดเอช 1 เอ็น 1" หรือ "ไข้หวัดสายพันธุ์ใหม่" ซึ่งเป็นชื่อที่ใช้กันในสื่อท้องถิ่นจำนวนมากองค์การสุขภาพสัตว์โลกเสนอชื่อว่า "ไข้หวัดใหญ่อเมริกาเหนือ" คณะกรรมการยุโรปใช้คำว่า "ไวรัสไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่"

ส่วนในประเทศไทย ได้เคยมีการเรียกโรคดังกล่าวว่า "ไข้หวัดหมู" และ "ไข้หวัดใหญ่เม็กซิโก" ก่อนที่จะมีการเปลี่ยนชื่อเป็น "ไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009" ในภายหลัง แต่ในปัจจุบันมักจะย่อเป็น "ไข้หวัด 2009" หรือ "หวัดใหญ่ 2009"

ภาพของไวรัสไข้หวัดใหญ่เอช 1 เอ็น 1 จากกล้องจุลทรรศน์อิเล็กตรอน ซึ่งมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง ~100 นาโนเมตร

ประวัติการเกิดโรค

ได้มีการประมาณว่า ประชากร โลกอย่างน้อย 5 - 15 % ติดเชื้อไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาล ถึงแม้ว่าผู้ป่วยส่วนมากจะมีอาการไม่รุนแรงมากนัก แต่โรคระบาดดังกล่าวก็ยังก่อให้เกิดการเจ็บป่วยอย่างรุนแรงในประชากร 3-5 ล้านคน และมีผู้เสียชีวิตถึง 250,000 - 500,000 รายทั่วโลกทุกปีโดยเฉลี่ยแล้ว ทุกปีจะมีผู้เสียชีวิตในสหรัฐอเมริการาว 41,400 ราย ตามข้อมูลซึ่งเก็บรวบรวมระหว่าง พ.ศ. 2522 - 2544 ในประเทศอุตสาหกรรม ส่วนใหญ่อาการเจ็บป่วยอย่างรุนแรงและการเสียชีวิตเกิดขึ้นกับเด็กทารก ผู้สูงอายุ และผู้ป่วยอาการเรื้อรัง ซึ่งเป็นกลุ่มเสี่ยงสูง ถึงแม้ว่าโรคระบาดของไข้หวัดใหญ่ในสุกร (เช่นเดียวกับการระบาดของไข้หวัดใหญ่สเปน เมื่อปี พ.ศ. 2461) มีความแตกต่างกันบ้าง เนื่องจากไข้หวัดใหญ่ในสุกรมักจะติดต่อกับคนในวัยหนุ่มสาวและมีสุขภาพดี

นอกเหนือจากโรคระบาดประจำปีเหล่านี้ ไวรัสไข้หวัดใหญ่ชนิดเอยังก่อให้เกิดโรคระบาด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ในการศึกษาค้นคว้าเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ทั่วโลกสามครั้งในช่วงคริสต์ศตวรรษที่ 20: ไข้หวัดใหญ่สเปน ในปี พ.ศ. 2461 ไข้หวัดใหญ่เอเชีย
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีกรณีนำไปใช้
รองศาสตราจารย์ ดร.พนชน พงศ์สมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

ในปี พ.ศ. 2500 และไข้หวัดใหญ่ฮ่องกง ในปี พ.ศ. 2511 -2512 สายพันธุ์ไวรัสเหล่านี้ยังได้ผ่านการเปลี่ยนแปลงด้านพันธุกรรมครั้งใหญ่ ซึ่งประชากร โลกยังไม่มีภูมิคุ้มกันที่จำเป็น การศึกษาพันธุกรรมเมื่อเร็ว ๆ นี้ได้เปิดเผยว่า ส่วนพันธุกรรมกว่าสามในสี่หรือหกในแปดของสายพันธุ์ไข้หวัดใหญ่ระบาดทั่ว พ.ศ. 2552 เกิดขึ้นมาจากไข้หวัดใหญ่ในสุกรอเมริกาเหนือ ซึ่งได้เริ่มแพร่ระบาดตั้งแต่ปี พ.ศ. 2541 เมื่อสายพันธุ์ใหม่ถูกระบุชนิดเป็นครั้งแรกในโรงงานฟาร์มในรัฐนอร์ทแคโรไลนา และยังเป็นไวรัสไข้หวัดใหญ่พันทางซึ่งรวมไวรัสกว่าสามสายพันธุ์

การแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่สเปนเริ่มต้นจากระลอกแรกซึ่งมักจะไม่มีแสดงอาการรุนแรงมากนักในฤดูใบไม้ผลิ ก่อนที่ในระลอกต่อมาจะเป็นอันตรายถึงชีวิตในฤดูใบไม้ร่วง และทำให้มีผู้เสียชีวิตนับแสนคนในสหรัฐอเมริกา ผู้เสียชีวิตเกือบทั้งหมดจากการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่สเปนเป็นผลมาจากแบคทีเรียโรคปอดอักเสบ ไวรัสไข้หวัดใหญ่ได้ทำลายเยื่อกรองของถุงหลอดลมและปอดของเหยื่อ ทำให้แบคทีเรียโดยทั่วไปจากจมูกและลำคอแพร่เชื้อใส่ปอดของผู้ป่วยโรคระบาดทั่วในภายหลังมีอันตรายถึงตายน้อยลงเนื่องจากการพัฒนายาปฏิชีวนะซึ่งสามารถรับมือกับโรคปอดบวมได้

ไวรัสไข้หวัดใหญ่ยังได้ก่อให้เกิดภัยโรคระบาดทั่วหลายครั้งในศตวรรษที่ผ่านมา รวมทั้งโรคระบาดทั่วแบบไม่แท้ในปี พ.ศ. 2490 (ถึงแม้ว่าจะมีผลกระทบไม่มากนัก เนื่องจากแม้จะติดต่อกันไปทั่วโลก แต่ก็มิได้เสียชีวิตเป็นจำนวนมากน้อย) การแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่ในสุกร และไข้หวัดใหญ่รัสเซีย ในปี พ.ศ. 2520 ล้วนเกิดขึ้นจากไวรัสเอช 1 เอ็น 1 ทั่วโลกได้เพิ่มระดับการเฝ้าระวังนับตั้งแต่การแพร่ระบาดของโรคซาร์ส ในเอเชียตะวันออกเฉียงใต้ (เกิดจากโคโรนาไวรัสซาร์ส) ระดับของการเตรียมพร้อมได้เพิ่มขึ้นอีกและรับมือกับการแพร่ระบาดของ "ไข้หวัดนก" หรือไข้หวัดใหญ่ ชนิดเอ เอช 5 เอ็น 1 เนื่องจากเป็นสายพันธุ์ที่มีอัตราการเสียชีวิตสูง แต่สายพันธุ์ดังกล่าวมีอัตราการติดต่อกันจากคนสู่คนหรืออัตราการแพร่ระบาดในระดับโลกต่ำ

ผู้ซึ่งคิดเชื้อไข้หวัดใหญ่ก่อนหน้าปี พ.ศ. 2500 ดูเหมือนว่าจะมีภูมิคุ้มกันบางอย่างต่อไข้หวัดใหญ่ในสุกรได้ ดร. เจเนียล เจอร์นิแกนแห่ง CDC กล่าวว่า "ผลการทดสอบบนเซรัมเลือดจากผู้สูงอายุแสดงว่าพวกเขามีแอนติบอดีที่สามารถโจมตีไวรัสชนิดใหม่ได้ แต่ไม่ได้หมายความว่าผู้ที่มีอายุมากกว่า 55 ปีทุกคนจะมีภูมิคุ้มกันต่อโรคโดยสมบูรณ์ นับตั้งแต่ผู้สูงอายุชาวอเมริกันและเม็กซิกันได้เสียชีวิตจากไข้หวัดใหญ่ชนิดใหม่นี้"

ก่อนที่จะมีการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 นี้ ทั่วโลกได้เคยมีการระบาดของไข้หวัดใหญ่อื่นๆมาแล้วดังนี้

- พ.ศ.2461-2462 (ค.ศ.1918-1919) ไวรัสไข้หวัดใหญ่ A ชนิด H1 N1 (ยุคนั้นยังไม่สามารถตรวจแยกเชื้อได้ แต่มีการตรวจชนิดของเชื้อไวรัสในภายหลัง) ชื่อว่าไข้หวัดใหญ่สเปน (Spain Flu) เป็นการระบาดทั่วโลกครั้งร้ายแรงที่สุด มีผู้ป่วยเสียชีวิตประมาณ 50 ล้านคน ในจำนวนนี้อยู่ในสหรัฐอเมริกา 500,000 คน โดยผู้เสียชีวิตส่วนมากจะอายุ 20-40 ปี และตั้งแต่ 65 ปีขึ้นไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ของสถาบันวิจัยและพัฒนาสุขภาพแห่งชาติ ซึ่งผู้ใช้งานสามารถนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รองศาสตราจารย์ ดร. พันธณี พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

- พ.ศ.2500-2501 (ค.ศ.1957-1958) ไวรัสไข้หวัดใหญ่ A ชนิด H2 N2 มีชื่อว่าไข้หวัดใหญ่เอเซีย (Asian Flu) ระบาดครั้งแรกที่สาธารณรัฐประชาชนจีน ก่อนระบาดไปทั่วโลก มีผู้เสียชีวิต 70,000 คน ในสหรัฐ การระบาดในครั้งนี้สามารถตรวจพบและจำแนกเชื้อได้รวดเร็ว และผลิตวัคซีนออกมาฉีดป้องกันได้ทัน จึงมีผู้เสียชีวิตไม่มาก

- พ.ศ.2511-2512 (ค.ศ.1968-1969) ไวรัสไข้หวัดใหญ่ A ชนิด H3 N2 มีชื่อว่าไข้หวัดใหญ่ฮ่องกง (Hong Kong Flu) รายงานผู้ป่วยรายแรกเป็นชาวฮ่องกง มีผู้เสียชีวิตประมาณ 34,000 คน ในสหรัฐ เป็นชนิดย่อยที่มีลักษณะทางพันธุกรรมคล้ายไข้หวัดใหญ่เอเซีย (H2 N2) จึงมีผู้ป่วยจำนวนไม่มาก เพราะมีภูมิคุ้มกันอยู่บ้างแล้ว

- พ.ศ.2520-2521 (ค.ศ.1977-1978) ไวรัสไข้หวัดใหญ่ A ชนิด H1 N1 กลับมาระบาดใหม่ มีชื่อว่าไข้หวัดใหญ่รัสเซีย (Russian Flu) เริ่มระบาดที่สาธารณรัฐประชาชนจีนตอนเหนือ แล้วกระจายไปทั่วโลก ทราบภายหลังว่าเป็นไวรัสชนิดเดียวกับ ไข้หวัดใหญ่สเปน (H1 N1) วิวัฒนาการของเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 เริ่มจากระหว่างปี พ.ศ. 2540-2541 เกิดการผสมระหว่างสารพันธุกรรมของไวรัสไข้หวัดหมูสายพันธุ์ c H1N1 กับไวรัสไข้หวัดใหญ่ของคนสายพันธุ์ H3N2 ได้เป็นไวรัสไข้หวัดใหญ่ในคนสายพันธุ์ 2r H3N2 ซึ่งมีสารพันธุกรรมของไวรัสไข้หวัดหมูผสมอยู่

จากนั้นในปีพ.ศ. 2541 เกิดการผสมระหว่าง ไวรัสไข้หวัดใหญ่ในคนสายพันธุ์ 2r H3N2 กับไวรัสไข้หวัดนกที่ระบาดในแถบอเมริกาเหนือแต่ไม่ทราบสายพันธุ์ที่แน่ชัด กลายเป็นไวรัสไข้หวัดใหญ่ในคนสายพันธุ์ใหม่ 3r H3N2 ซึ่งเป็นไวรัสที่มีสารพันธุกรรมของไวรัสไข้หวัดหมู ไวรัสไข้หวัดนกและไวรัสไข้หวัดใหญ่ในคนผสมกัน เวลานั้นไปจนกระทั่งไวรัสไข้หวัดใหญ่ในคนสายพันธุ์ 3r H3N2 ได้กลับมาผสมกับไวรัสไข้หวัดหมูสายพันธุ์ c H1N1 อีกครั้ง ได้เป็นไวรัสสายพันธุ์ใหม่ 2 สายพันธุ์ คือ r H1N1 และ r H1N2 ซึ่งไวรัสทั้ง 2 สายพันธุ์นี้มีสารพันธุกรรมทั้งจากไวรัสไข้หวัดหมู ไวรัสไข้หวัดนก และไวรัสไข้หวัดใหญ่ของคนผสมกันอยู่ และในปีพ.ศ. 2552 ซึ่งเป็นปีที่พบการระบาดของไวรัสไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 นั้น คาดว่าไวรัสสายพันธุ์ใหม่นี้ น่าจะเกิดจากการผสมระหว่างไวรัสไข้หวัดหมูสายพันธุ์ Eurasian (ไวรัสไข้หวัดหมูสายพันธุ์ที่ระบาดในยุโรปผสมกับสายพันธุ์ที่ระบาดในเอเซีย) ไข้หวัดหมูสายพันธุ์อเมริกาเหนือ ไข้หวัดนกสายพันธุ์อเมริกาเหนือและไข้หวัดใหญ่ในคน

อาการและอาการแสดง

อาการป่วยของผู้ที่ได้รับเชื้อไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 จะไม่แตกต่างจากผู้ป่วยด้วยโรคไข้หวัดทั่ว ๆ ไป ซึ่งอาจมีอาการไข้ขึ้นสูง ไอ ปวดศีรษะ เจ็บตามกล้ามเนื้อและข้อต่อ หนาวสั่น ปวดเมื่อย และคัดจมูก ส่วนอาการที่ออร์วัง อาเจียนและอาการทางประสาทอาจมีการรายงานใน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ที่รัฐบาลไทยและหน่วยงานที่เกี่ยวข้องได้แก่ผู้ซึ่งมีอายุ 65 ปีขึ้นไป
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งเมื่อมีการนำไปใช้
รองศาสตราจารย์ ดร.พนชนิ พงศ์สัมพันธ์

ไป เด็กอายุต่ำกว่า 5 ขวบ เด็กซึ่งมีอาการทางประสาท สตรีมีครรภ์ (โดยเฉพาะอย่างยิ่ง สามเดือนก่อนคลอด) และผู้ที่มีโรคประจำตัว อย่างเช่น โรคหืด โรคเบาหวาน โรคอ้วน โรคหัวใจ หรือภูมิคุ้มกันบกพร่อง ตัวเลขจาก CDC ระบุว่า จำนวนผู้ป่วยที่ต้องเข้ารับการรักษายาบาลในโรงพยาบาลในสหรัฐอเมริกามากกว่าร้อยละ 70 คือ ผู้ที่มีโรคประจำตัว

เมื่อเดือนกันยายน พ.ศ. 2552 CDC รายงานว่าไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 "ดูเหมือนจะติดต่อกันในเด็กซึ่งป่วยเรื้อรังมากกว่าไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาลโดยปกติ" และจากจำนวนเด็กซึ่งเสียชีวิตจนถึงปัจจุบัน เกือบสองในสามเคยมีความผิดปกติทางระบบประสาท "เด็กซึ่งมีปัญหาทางประสาทและกล้ามเนื้ออาจเสี่ยงสูงต่อภาวะแทรกซ้อนได้"

อาการในผู้ป่วยรุนแรง

องค์การอนามัยโลกรายงานว่าลักษณะอาการของผู้ป่วยรุนแรงนั้นมีความแตกต่างจากลักษณะที่พบในการระบาดของไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาลอย่างมาก เป็นที่รู้จักกันโดยทั่วไปว่าผู้มีโรคประจำตัวจะเสี่ยงติดโรคติดต่อกันมากขึ้น แต่ไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 กลับแสดงอาการรุนแรงในผู้ป่วยซึ่งเคยมีสุขภาพดีมากกว่าในผู้มีโรคประจำตัว ซึ่งในปัจจุบัน ปัจจัยเพิ่มความเสี่ยงของการแสดงอาการเจ็บป่วยอย่างรุนแรงในผู้ป่วยเหล่านี้ยังคงอยู่ในระหว่างการวิจัย ในกรณีที่แสดงอาการรุนแรง ผู้ป่วยมักจะเริ่มจากมีอาการทรุดลงราว 3-5 วัน หลังจากเริ่มสังเกตเห็นอาการของโรค สุขภาพของผู้ป่วยจะทรุดหนักลงอย่างรวดเร็ว ซึ่งในช่วงนี้ ผู้ป่วยจำนวนมากมักจะประสบกับความล้มเหลวของระบบหายใจภายใน 24 ชั่วโมง ซึ่งต้องการรักษาในห้องไอซียูอย่างเร่งด่วน และต้องการการช่วยหายใจเชิงกล

คำแนะนำ CDC รายงานว่าอาการแสดงต่อไปนี้คือ "อาการแสดงเตือนฉุกเฉิน" (emergency warning sign) และแนะนำให้ผู้ป่วยที่มีอาการแสดงอย่างใดอย่างหนึ่งตามรายชื่อนี้ไปรับการรักษาที่แพทย์โดยด่วน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รองศาสตราจารย์ ดร. พันชนี พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

สัญญาณเตือนฉุกเฉินในผู้ใหญ่

หายใจลำบากหรือหายใจกระชั้น

เจ็บ ปวด หรือรู้สึกอึดอัดบริเวณอกหรือท้องน้อย

อาการเวียนศีรษะเฉียบพลัน

มีอาการสับสน

อาเจียนอย่างรุนแรงและต่อเนื่อง

ร่างกายมีอุณหภูมิต่ำ

สัญญาณเตือนฉุกเฉินในเด็กและทารก

หายใจถี่หรือหายใจลำบาก

ตัวเขียว

ดื่มน้ำไม่เพียงพอ

ปลุกไม่ตื่นหรือไม่มีปฏิกิริยาตอบสนอง

รู้สึกหงุดหงิดจนเด็กไม่ยอมถูกอุ้ม

มีอาการคล้ายไข้หวัดใหญ่ที่มีอาการดีขึ้นแล้วครั้ง

หนึ่งแต่กลับเป็นอีกโดยมีไข้และไออย่างรุนแรง

มีไข้และมีผื่น

ไม่สามารถรับประทานอาหารได้

ร้องไห้ไม่มีน้ำตาไหล

การแพร่เชื้อ

ข้อมูลเท่าที่มีอยู่บ่งชี้ว่าเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ชนิด A(H1N1) สามารถติดต่อได้ด้วยวิธีคล้ายกับเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ที่เกิดตามฤดูกาล ซึ่งแพร่จากคนสู่คนโดยการสัมผัสฝอยละอองน้ำมูก น้ำลายของผู้ป่วย เนื่องจากฝอยละอองน้ำมูก น้ำลายไม่คงอยู่ในอากาศและจะกระจายไปได้ในระยะใกล้ (น้อยกว่า 1 เมตร) การได้รับเชื้อจึงต้องสัมผัสใกล้ชิด (เช่น ผู้ป่วยไอ หรือจามใกล้ผู้ที่มีภูมิไวรับ) นอกจากนี้ยังสามารถติดเชื้อได้จากสิ่งของที่ปนเปื้อนเชื้อ โดยคนจับสิ่งของที่ปนเปื้อนแล้วเอามือไปสัมผัสตา จมูก ปาก โดยไม่ได้ล้างมือก่อน ไม่มีความเสี่ยงในการติดเชื้อจากการรับประทานหมูและผลิตภัณฑ์จากหมู

ระยะฟักตัว

ระยะฟักตัวของเชื้อยังไม่รู้แน่ชัดคาดว่าอยู่ในช่วง 1-7 วัน ส่วนใหญ่ 1-4 วัน (ข้อสันนิษฐานจากข้อมูลการระบาดใหญ่ที่ผ่านๆ มาพบ ระยะฟักตัว 1-3 วัน ระยะแฝง (latent period) 0.5-2 วัน)

ระยะแพร่เชื้อ

เชื่อว่าเชื้อมีคุณสมบัติในการแพร่เชื้อเช่นเดียวกับไวรัสไข้หวัดใหญ่ที่เกิดตามฤดูกาลคือ ตั้งแต่ก่อนมีอาการ 1 วันจนถึง 7 วันหลังมีอาการ เด็กเล็กอาจมีระยะแพร่เชือนานกว่านี้ การระบาดครั้งนี้ในเม็กซิโกพบว่าบางตัวอย่างที่เก็บหลังวันเริ่มป่วย 6-7 วันยังให้ผลบวกจากการตรวจ RT-

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึง **รื่องศาสตราจารย์ ดร.พนรัตน์ พงศ์สัมพันธ์**

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

PCR จากข้อมูลการระบาดใหญ่ที่ผ่านๆ มาพบอัตราการติดโรคพื้นฐาน (Basic reproduction number -R0) 1.5-2.0 (หมายถึงจำนวนคนเฉลี่ยที่จะติดโรคจากผู้ป่วย 1 ราย)

ภาวะแทรกซ้อน

จนถึงวันนี้ยังไม่มีข้อมูลภาวะแทรกซ้อนของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ชนิด A(H1N1) ผู้ป่วยที่พบในการระบาดครั้งก่อนๆ พบตั้งแต่อาการทางเดินหายใจเล็กน้อยจนถึงอาการของระบบทางเดินหายใจส่วนล่าง ขาดน้ำ หรือปอดอักเสบ การเสียชีวิตยังมีน้อย แม้ว่าจะยังไม่มีข้อมูลแต่แพทย์ควรตระหนักถึงภาวะแทรกซ้อนที่อาจมีเช่นเดียวกับไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาลได้แก่ ภาวะแทรกซ้อนของระบบทางเดินหายใจส่วนบน (sinusitis, otitis media, croup) ภาวะแทรกซ้อนของระบบทางเดินหายใจส่วนล่าง (pneumonia, bronchiolitis, status asthmaticus) ภาวะแทรกซ้อนของหัวใจ cardiac (myocarditis, pericarditis) ภาวะกล้ามเนื้อหัวใจอักเสบ (myositis, rhabdomyolysis), ระบบประสาท (acute and post-infectious encephalopathy, encephalitis, febrile seizures, status epilepticus) toxic shock syndrome และปอดอักเสบติดเชื้อทุติยภูมิ

ผู้ที่มีโอกาสเสี่ยงที่จะเกิดภาวะแทรกซ้อน ขณะนี้ยังไม่มีข้อมูลจึงใช้ข้อมูลผู้ที่เกี่ยวข้องการเกิดภาวะแทรกซ้อนของไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาล ดังนี้

- เด็กอายุต่ำกว่า 5 ปี
- ผู้ที่อายุตั้งแต่ 65 ปีขึ้นไป
- หญิงตั้งครรภ์
- ผู้ใหญ่และเด็กที่เป็นโรคปอดเรื้อรัง โรคตับ โรคเลือด โรคระบบประสาท กล้ามเนื้อ
- ผู้ใหญ่และเด็กที่มีภูมิคุ้มกันบกพร่อง
- บุคลากรที่ดูแลผู้ป่วย

ภาวะแทรกซ้อนอื่น

กล้ามเนื้อหัวใจอักเสบขั้นรุนแรง (fulminant myocarditis) มีความสัมพันธ์กับการติดเชื้อเอช 1 เอ็น 1 โดยมีรายงานที่ได้รับการยืนยันแล้วอย่างน้อย 4 กรณี ในผู้ป่วยซึ่งติดเชื้อไข้หวัดใหญ่ชนิดเอ เอช 1 เอ็น 1 ผู้ป่วย 3 จาก 4 ราย ซึ่งมีกล้ามเนื้อหัวใจอักเสบที่สัมพันธ์กับการติดเชื้อเอช 1 เอ็น 1 มีอาการถึงขั้นรุนแรง และหนึ่งในผู้ป่วยได้เสียชีวิต นอกจากนี้ยังดูเหมือนว่ามีความเชื่อมโยงระหว่างการติดเชื้อไข้หวัดใหญ่ชนิดเอ เอช 1 เอ็น 1 อย่างรุนแรงกับภาวะสิ่งหลุดอุดหลอดเลือดปอด (pulmonary embolism) ในรายงานฉบับหนึ่ง มีการรับผู้ป่วย 5 ราย จาก 14 ราย เข้าสู่หน่วยรักษาพยาบาลผู้ป่วยขั้นวิกฤต ด้วยอาการติดเชื้อไข้หวัดใหญ่ชนิดเอ เอช 1 เอ็น 1 อย่างรุนแรง และมีภาวะสิ่งหลุดอุดหลอดเลือดปอด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งซึ่งมีกรรมสิทธิ์
รองศาสตราจารย์ ดร.พันธิ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

การวินิจฉัยโรค

การวินิจฉัยและยืนยันโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 ซึ่งเกิดจากไข้หวัดใหญ่ เอช 1 เอ็น 1/09 ต้องการการตรวจเยื่อชั้นคอหอยส่วนจมูกหรือคอหอยส่วนปากจากผู้ป่วย การทดสอบแบบ Real-time RT-PCR เป็นการทดสอบที่ได้รับการแนะนำ เพราะเป็นการตรวจที่สามารถแยกแยะความแตกต่างระหว่างไข้หวัดใหญ่เอช 1 เอ็น 1/09 จากไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาลได้

อย่างไรก็ตาม ผู้มีอาการของไข้หวัดใหญ่ส่วนใหญ่ไม่จำเป็นต้องทดสอบโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 โดยเฉพาะ เพราะโดยปกติแล้ว ผลการทดสอบมักจะไม่กระทบต่อแนวทางการรักษาที่แพทย์แนะนำแต่อย่างใด CDC แนะนำให้ผู้ที่ควรเข้ารับการตรวจ ได้แก่ ผู้ซึ่งพักรักษาตัวอยู่ในโรงพยาบาลเนื่องจากต้องสงสัยว่าติดโรคไข้หวัด สตรีมีครรภ์ และผู้ที่มีระบบภูมิคุ้มกันบกพร่องเท่านั้น สำหรับการวินิจฉัยโรคเพิ่มเติมของไข้หวัดใหญ่ นอกเหนือจากไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 สามารถพบได้ในวงกว้างกว่า ซึ่งรวมถึงการทดสอบวินิจฉัยโรคไข้หวัดใหญ่อย่างรวดเร็ว (RIDT) ซึ่งได้รับการทดสอบภายใน 30 นาที และการสอบด้วยวิธีการอิมมูโนฟลูออเรสเซนซ์โดยตรงและโดยอ้อม (DFA และ IFA) ซึ่งใช้เวลาราว 2-4 ชั่วโมง เนื่องจากอัตราการผิดพลาดของการทดสอบ RIDT อยู่ในระดับสูง CDC จึงแนะนำให้ผู้ป่วยซึ่งมีอาการใกล้เคียงกับการติดไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 แต่มีผลการทดสอบ RIDT เป็นลบ ควรจะได้รับการรักษาตามการสังเกต ขึ้นอยู่กับคำแนะนำของแพทย์ โรคประจำตัว ความรุนแรงของอาการ และอัตราเสี่ยงต่ออาการแทรกซ้อน และถ้าหากต้องการตรวจสอบการติดเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ให้ชัดเจนยิ่งขึ้น ควรจะทดสอบด้วย rRT-PCR หรือการแยกเพาะเลี้ยงเชื้อไวรัส

ดร. รอนดา มีดอวส์ แห่งกรมสาธารณสุขจอร์เจีย กล่าวว่า การทดสอบอย่างรวดเร็วมีโอกาสผิดพลาดระหว่าง 30-90% ไม่ว่าจะทำการทดสอบที่ใดก็ตาม เธอได้เตือนแพทย์ในประเทศมิให้ใช้การทดสอบไข้หวัดใหญ่อย่างรวดเร็ว เนื่องจากได้ผลผิดพลาดออกมาบ่อยครั้ง นักวิจัย พอล เซร์คเคนเบอร์เกอร์ แห่งระบบสาธารณสุข มหาวิทยาลัยโลโยลา ยังตั้งคำถามต่อการใช้ RIDT ด้วย เขาเป็นผู้เสนอว่า อันที่จริงแล้ว ตัวการทดสอบอย่างรวดเร็วนี้อาจเป็นความเสี่ยงที่อันตรายต่อสาธารณสุขโดยรวมด้วยซ้ำไป ดร. นิคกี ซินโด แห่งองค์การอนามัยโลกได้แสดงความเสียใจที่มีรายงานว่ามีการรักษาซึ่งล่าช้าเนื่องจากรอผลการทดสอบ เอช 1 เอ็น 1 และเสนอว่า "แพทย์ไม่ควรรอกการยืนยันจากห้องปฏิบัติการ แต่ควรใช้การวินิจฉัยโรคโดยใช้อาการทางคลินิกและข้อมูลพื้นฐานทางวิทยาการระบาด และเริ่มการรักษาอย่างรวดเร็ว"

ไวรัสที่ก่อให้เกิดไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 เป็นไวรัสไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ซึ่งการให้วัคซีนป้องกันโรคไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาลที่มีในปัจจุบันช่วยเพิ่มการป้องกันโรคได้เพียงเล็กน้อยเท่านั้น จากการศึกษาของ CDC เมื่อเดือนพฤษภาคม พ.ศ. 2552 ค้นพบว่า เด็กไม่มีภูมิคุ้มกันต่อไวรัสดังกล่าวเลย แต่ในผู้ใหญ่ และโดยเฉพาะอย่างยิ่ง ผู้มีอายุมากกว่า 60 ปีขึ้นไป

พอจะมีภูมิคุ้มกันต่อโรคอยู่บ้าง ไม่มีการสร้างแอนติบอดีที่แสดงปฏิกิริยาข้ามกันมา มีผลกับไวรัส

สายพันธุ์ใหม่ในเด็ก ในขณะที่ผู้ใหญ่อายุ 18-64 ปี มีการสร้าง 6-9% และผู้ที่อายุมากกว่านั้นมีการสร้าง 33% จึงมีการพิจารณาว่าไวรัสสายพันธุ์ใหม่นี้มีถิ่นกำเนิดจากไวรัสไข้หวัดใหญ่ห้าชนิดประกอบกัน: ไวรัสไข้หวัดใหญ่ในสุกรทวีปอเมริกาเหนือ ไข้หวัดนกทวีปอเมริกาเหนือ ไข้หวัดใหญ่ในมนุษย์ และไข้หวัดใหญ่ในสุกรทวีปเอเชียและทวีปยุโรป การวิเคราะห์ยังได้แสดงให้เห็นถึงโปรตีนของไวรัสมีความคล้ายคลึงกับโปรตีนในสายพันธุ์ที่ก่อให้เกิดอาการไม่รุนแรงในมนุษย์ เมื่อวันที่ 1 พฤษภาคม พ.ศ. 2552 นักวิทยาศาสตร์ เวนดี บาร์เคลย์ กล่าวว่า จากการแสดงอาการในช่วงแรกของไวรัสพบว่า มีลักษณะที่ไม่น่าจะก่อให้เกิดอาการรุนแรงในมนุษย์ส่วนมากได้เลย

ในเดือนกรกฎาคม พ.ศ. 2552 CDC หมายเหตุว่า การติดเชื้อส่วนใหญ่ก่อให้เกิดอาการไม่รุนแรง ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาล การฟื้นตัวของผู้ป่วยค่อนข้างเร็วและการเสียชีวิตจนถึงปัจจุบันเป็นเพียงตัวเลขน้อยมากเมื่อเทียบกับผู้ซึ่งเสียชีวิตจากไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาล เมื่อวันที่ 14 พฤศจิกายน ไวรัสได้ติดต่อ 1 ใน 6 ของชาวอเมริกัน โดยมี 200,000 คน ต้องเข้ารับการรักษาในโรงพยาบาล และมีผู้เสียชีวิตกว่า 10,000 คน แม้จะมีผู้เข้ารับการรักษาจำนวนมากและมีผู้เสียชีวิตจำนวนน้อยกว่าโรคไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาลโดยทั่วไป แต่ในหลายครั้งที่ผู้ที่มีอายุน้อยกว่า 50 ปีจะมีความเสี่ยงมากกว่า นักวิจัยจากมหาวิทยาลัยแมริแลนด์ได้ผสมไข้หวัดใหญ่ในสุกรกับไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาล และสรุปว่า ไข้หวัดใหญ่ในสุกรไม่น่าจะมีอันตรายไปกว่านี้แล้ว

ส่วนในด้านโอกาสความเป็นไปได้หรือประวัติศาสตร์ของไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ เอช 1 เอ็น 1 เมื่อวันที่ 9 กรกฎาคม พ.ศ. 2552 บทความในวารสารการแพทย์นิวอิงแลนด์ได้กล่าวว่า "เอช 1 เอ็น 2 และแบบชนิดย่อยอื่นอาจสืบเชื้อสายมาจากไวรัสสุกร เอช 3 เอ็น 2 ซึ่งมีการผสมสายพันธุ์ในทวีปอเมริกาเหนือ ไวรัสดังกล่าวได้แพร่ไปสู่สุกรรอบโลก และพบว่ามี การติดต่อสู่มนุษย์ด้วย อย่างไรก็ตาม ส่วนที่ประกอบขึ้นสำหรับ นิวรามินิเดสและโปรตีนเมตริกซ์ของไวรัสเอช 1 เอ็น 1 สายพันธุ์ใหม่ในมนุษย์มีความเกี่ยวข้องกับไวรัสไข้หวัดใหญ่ในสุกรท้องถิ่นในทวีปยุโรป ซึ่งพบเมื่อต้นคริสต์ทศวรรษ 1990"

การติดต่อ

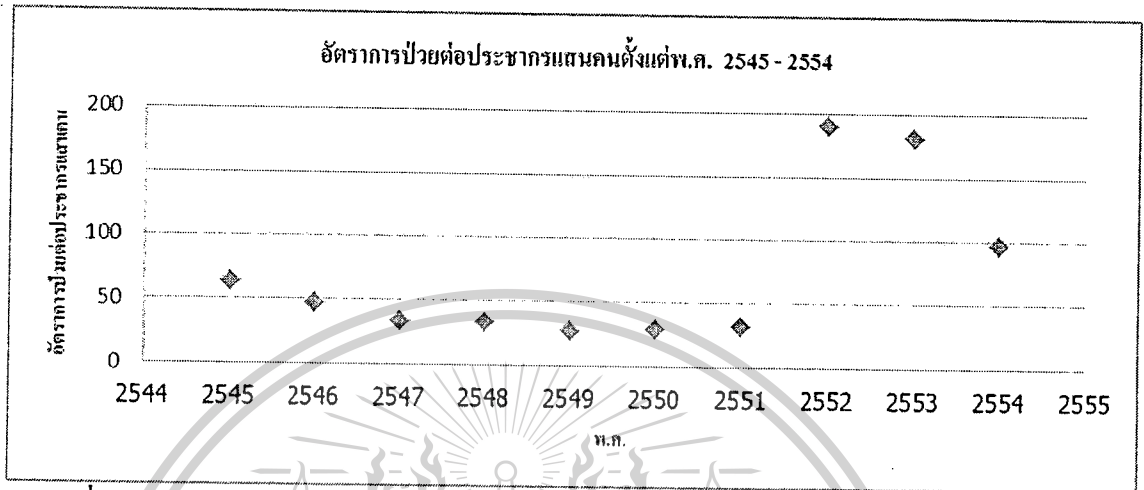
เป็นที่เชื่อกันว่า การแพร่ระบาดของไวรัสเอช 1 เอ็น 1 เกิดขึ้นในวิธีเดียวกับการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาล โดยส่วนใหญ่ ไวรัสไข้หวัดใหญ่แพร่ระบาดจากคนสู่คนผ่านทาง การไอหรือการจามของผู้ป่วยโรคไข้หวัดใหญ่ ในบางครั้ง ก็อาจรวมไปถึงการสัมผัสกับบางสิ่งซึ่งมีไวรัสไข้หวัดใหญ่อยู่บริเวณนั้น แล้วไปสัมผัสกับปากหรือจมูกของตนเองได้อีกทางหนึ่งด้วยค่าความเร็วในการแพร่กระจายของเชื้อไวรัส (ค่าตัวเลขซึ่งระบุว่าผู้ติดเชื้อจะสามารถแพร่เชื้อไปยังบุคคลอื่นได้มากเพียงใด ในประชากรซึ่งไม่มีภูมิคุ้มกันต่อโรค) ต่อไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ เอช 1 เอ็น 1 พ.ศ. 2552 ถูกประเมินไว้ที่ 1.75

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ ห้ามนำไปใช้โดยไม่ได้รับอนุญาตจากศูนย์วิจัยและพัฒนาสุขภาพสัตว์ปีก มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
รองศาสตราจารย์ ดร. พันธน์ พงศ์สัมพันธ์

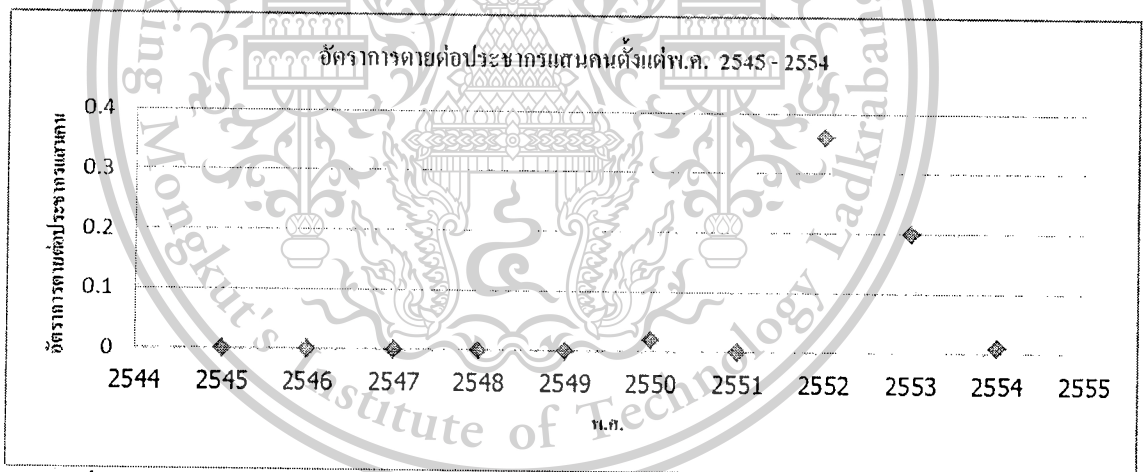
This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

สถานการณ์การแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่



รูปที่ 2.1 อัตราผู้ป่วยต่อประชากรแสนคนโรคไข้หวัดใหญ่ของประเทศไทย พ.ศ. 2545 – 2554



รูปที่ 2.2 อัตราตายต่อประชากรแสนคนโรคไข้หวัดใหญ่ของประเทศไทย พ.ศ. 2545 – 2554

ระดับการระบาดใหญ่ของไข้หวัดใหญ่

การระบาดใหญ่ของไข้หวัดใหญ่มีผลกระทบทั่วโลกและไม่สามารถคาดการณ์ได้ ตั้งแต่ศตวรรษที่ 16 การระบาดใหญ่ของไข้หวัดใหญ่เกิดขึ้นเป็นช่วงๆ โดยมีระยะห่างประมาณ 10-50 ปี แต่ละครั้งมีความรุนแรงและผลกระทบแตกต่างกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งซึ่งมีกรรมนำไปใช้
 รองศาสตราจารย์ ดร.พันธน พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

องค์การอนามัยโลกกำหนดระดับการระบาดใหญ่ของไข้หวัดใหญ่ใน พ.ศ.2542 และปรับใหม่ใน พ.ศ.2548 และ 2552 โดยมีการปรับเปลี่ยนการจัดกลุ่มและรายละเอียดระดับของสถานการณ์การระบาดใหญ่ให้กระชับ เข้าใจง่าย และอยู่บนพื้นฐานของสถานการณ์จริง ระดับ 1-3 เกี่ยวข้องกับการเตรียมพร้อมรวมทั้งการพัฒนาสมรรถนะและกิจกรรมวางแผนการตอบสนอง ระดับ 4-6 เป็นการส่งสัญญาณถึงความจำเป็นในการตอบสนองและความพยายามบรรเทาผลกระทบ นอกจากนี้ยังมีการเพิ่มรายละเอียดช่วงเวลาหลังการระบาดใหญ่ระลอกแรกเพื่อสนับสนุนกิจกรรมการฟื้นฟูภายหลังการระบาดใหญ่

ระดับการระบาดใหญ่ของไข้หวัดใหญ่โดยองค์การอนามัยโลก

ระดับ 1	ไม่พบเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ที่แพร่อยู่ในสัตว์เป็นสาเหตุการติดเชื้อในคน
ระดับ 2	เชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ที่แพร่อยู่ในสัตว์เลี้ยงหรือสัตว์ป่า สามารถทำให้เกิดการติดเชื้อในคน และเชื่อว่ามีโอกาสทำให้เกิดการระบาดใหญ่
ระดับ 3	เชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ของสัตว์หรือเชื้อที่กลายพันธุ์จากการผสมสายพันธุ์ (reassortant) ของไวรัสในคนและในสัตว์ทำให้เกิดการป่วยเป็นช่วงๆ หรือเป็นกลุ่มเล็ก แต่ไม่มีผลทำให้การติดต่อระหว่างคนสู่คนมากพอที่จะทำให้เกิดการระบาดในระดับชุมชน
ระดับ 4	ตรวจสอบพบว่าเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ของสัตว์หรือเชื้อที่กลายพันธุ์จากการผสมสายพันธุ์ (reassortant) ของไวรัสในคนและสัตว์สามารถทำให้เกิดการระบาดในระดับชุมชน
ระดับ 5	มีการแพร่เชื้อไวรัสดังกล่าวจากคนสู่คนในอย่างน้อย 2 ประเทศในหนึ่งภูมิภาคขององค์การอนามัยโลก
ระดับ 6	นอกเหนือจากเกณฑ์ที่กำหนดในระดับ 5 มีการระบาดในชุมชนในประเทศอื่นอย่างน้อย 1 ประเทศในอีกภูมิภาคขององค์การอนามัยโลก
Post-peak period	ระดับการระบาดในหลายประเทศที่มีการเฝ้าระวังอย่างคลิดต่ำกว่าระดับที่สูงสุด
Possible new wave	ระดับการระบาดในหลายประเทศที่มีการเฝ้าระวังอย่างคลิดกลับเพิ่มสูงขึ้น
Post-pandemic period	โรคไข้หวัดใหญ่กลับสู่ระดับที่พบตามฤดูกาลปกติในหลายประเทศที่มีการเฝ้าระวังอย่างคลิด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
รองศาสตราจารย์ ดร. พันธณี พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and create the document when use.

137854

2.2 ทฤษฎีที่ใช้ในโครงการวิจัย

ในโครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยจะนำทฤษฎีการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ทฤษฎีของการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน (standard dynamical modeling) ทฤษฎี Routh-Hurwitz ทฤษฎี hopf bifurcation ทฤษฎี limit cycle ทฤษฎีความเสถียรเฉพาะที่ (local asymptotically stable) ทฤษฎีความเสถียรวงกว้าง (global asymptotically stable) ทฤษฎีความเสถียรของ Lyapunov (Lyapunov stability theory) วิธีการของ Runge-Kutta-Fehlberg (Runge-Kutta-Fehlberg's method) กระบวนการ สโตแคสติก (stochastic process) แบบจำลองการกระจายตามพื้นที่ (spatial model) และระบบสารสนเทศทางภูมิศาสตร์ (geographic information system) มาวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้ โปรแกรมที่จะนำมาใช้คือ Pascal Language, C Language, Mathematica, Matlab, Arc GIS และ Spyglass ฯลฯ ทฤษฎีที่จะนำไปใช้มีดังนี้

Definition 1 A point $X_e \in \mathbb{R}^n$ is an equilibrium point (or stationary point, singular point, critical point or rest point) of

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X) \quad (2.1)$$

if $f(t, X_e) = 0$ for all $t \geq t^*$.

If X_e is an equilibrium point of (1) at t^* , then it is an equilibrium point for all $t \geq t^*$.

Definition 2 The equilibrium point of (1) is stable if for every $\delta > 0$ and any $t_0 \in \mathbb{R}^+$ there is a $\omega(\delta, t_0) > 0$ such that

$$|u(t, t_0, \gamma)| < \delta \text{ for every } t \geq t_0$$

whenever $|\gamma| < \omega(\delta, t_0)$ where $u(t, \gamma)$ is the solution of (1).

Definition 3 The equilibrium point of (1) is asymptotically stable if it is stable and for every $t_0 \geq 0$ there is an $\varepsilon(t_0) > 0$ such that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, t_0, \gamma) = 0 \text{ whenever } |\gamma| < \varepsilon \quad (2.2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธน์ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Definition 4 The equilibrium point of (1) is unstable if it is not stable. In this case, there is a $t_0 \geq 0$ and a sequence $\gamma_n \rightarrow 0$ of initial points and a sequence t_m such that $|u(t_0 + t_m, t_0, \gamma_m)| \geq \gamma$ for every m , $t_m \geq 0$ [13].

Theorem 1 The equilibrium point of (1) is stable if all eigenvalues of J have negative real parts and every eigenvalues of J which has a zero real part is a simple zero of the characteristic polynomial of J .

The behavior of the equilibrium points of the system of (1) can be determined by considering the different kinds of eigenvalues of the Jacobian matrix. The different behavior of equilibrium points are determined from the characteristics of eigenvalues of J .

The eigenvalues λ of the matrix satisfy $\det(J - \lambda I) = 0$. We obtain a characteristic equation in the form

$$\lambda^k + b_1 \lambda^{k-1} + \dots + b_k = 0 \tag{2.3}$$

Definition 5 (Routh-Hurwitz criteria for local asymptotical stability) [13,14]

Take the characteristic equation (3), define k matrices as follows:

$$H_1 = [b_1],$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{bmatrix},$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{bmatrix}$$

⋮

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
รองศาสตราจารย์ ดร.พันธิ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$H_j = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & \dots & 0 \\ b_7 & b_6 & b_5 & b_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2j-1} & b_{2j-2} & b_{2j-3} & b_{2j-4} & \dots & b_j \end{bmatrix}$$

⋮

$$H_k = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & b_k \end{bmatrix}$$

where the (l,m) term in the matrix H_j is

$$b_{2l-m} \begin{cases} \text{for } 0 < 2l-m < k \\ 1 & \text{for } 2l = m \\ 0 & \text{for } 2l < m \text{ or } 2l > k+m. \end{cases}$$

then all eigenvalues have negative real parts. This means that the equilibrium point \bar{X} is stable if and only if the determination of all Hurwitz matrices are positive which is

$$\text{Det } H_j > 0 \text{ for } j = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Theorem 2 (Hopf Bifurcation Theorem) [15,16,17]

Let the following be a nonlinear system of n equations in n variables that contains a parameter v ,

$$\frac{dX}{dt} = f(X, v); \quad X \in \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

where $X \in \mathbb{R}^n$ and v is a real valued parameter on an interval J .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ในชื่อของวารสารวิชาการของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของวารสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
 รองศาสตราจารย์ ดร. พันธณี พงศ์สัมพันธ์

$$A(v) = D_x f(X^*(v), v) = \frac{\partial f_i}{\partial X_j}(X^*(v), v) \quad , \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (2.5)$$

Suppose that

i) $A(v)$ has a pair of complex conjugate eigenvalues λ_1 and λ_2 such that

$$\lambda_1(v) = \overline{\lambda_2(v)} = \alpha(v) \pm iw(v) \quad (2.6)$$

such that for some number $v = v_c \in A$, where v_c is called a critical value of v ,

$$w(v_c) = w_0 > 0, \quad \alpha(v_c) = 0 \quad \text{and} \quad \alpha'(v_c) = 0 \quad (2.7)$$

ii) The remaining $n-2$ eigenvalues of $A(v)$ all have strictly negative real parts.

Then the system (4) has a family of periodic solutions that means there is a loss of linear stability of the critical point $X^*(v)$ as v crosses v_c .

The system has a family of periodic solutions $X = P_v(t)$, ($0 < v < v_0$) where v measures the amplitude

$$\max_t \|P_v(t) - X^*(v_c)\|$$

and ϵ_0 is sufficiently small. The appearance of periodic solutions out of an equilibrium point is called Hopf bifurcation and the period is $T(\epsilon) = \frac{2\pi}{w}$.

The periodic solutions which result from a Hopf bifurcation from the critical point $X^*(v)$ corresponds to a trajectory on a closed curve or orbit about the critical point in the phase plane. Such closed trajectories in the neighborhood of which all trajectories are spiral are called limit cycles.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึง **รองศาสตราจารย์ ดร.พนธ์นี้ พงศ์สัมพันธ์** นำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Theorem 3 (Lyapunov's First or Direct Method) [18-20]

Let $x=0$ be an equilibrium point for $x' = f(x)$ and $D \subset \mathbb{R}^n$ be a continuously differentiable function such that

1. $V(0) = 0$ and $V(x) > 0 \quad \forall x \in D \setminus \{0\}$
2. $V'(x) \leq 0; \quad \forall x \in D$ then, $x = 0$ is stable. Moreover,
3. If $V'(x) < 0; \quad \forall x \in D \setminus \{0\}$ then $x = 0$ is asymptotically stable.

Theorem 4 Lyapunov's Second or Indirect Method [18-20]

Let $x=0$ be an equilibrium point for $x' = f(x)$ where $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a continuously differentiable and D is a neighborhood of the origin. Let $A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=0}$ then

1. The origin is asymptotically stable if $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ for all eigenvalues of A
2. The origin is unstable if $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ for one or more of the eigenvalues of A

Definition 6 Globally asymptotically stable equilibrium [18-20]

If the Lyapunov-candidate-function V is globally positive definite, radially unbounded and the time derivative of the Lyapunov-candidate-function is globally negative definite:

$V'(x) < 0; \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, then the equilibrium is proven to be globally asymptotically stable.

The Lyapunov-candidate function $V(x)$ is radially unbounded if $\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$.

Definition 7 Runge-Kutta-Fehlberg's method [21]

Runge-Kutta-Fehlberg's method is one of the most widely used methods, and is particularly

suitable in cases when the computation of higher derivatives is complicated. It can be used for

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รองศาสตราจารย์ ดร.พนรัตน์ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

equations of arbitrary order by means of a transformation to a system of first-order equations. We

shall discuss the solution of the three first-order equations. Let this system be

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z, t)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y, z, t)$$

$$\frac{dz}{dt} = h(x, y, z, t)$$

with initial point (x_0, y_0, z_0, t_0) and interval length h .

Runge-Kutta-Fehlberg's method for finding approximated values of x, y and z at each step

is

$$x_{n+1} = x_n + \frac{(2375k_1 + 11264k_3 + 10985k_4 - 4104k_5)}{20520},$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{(2375r_1 + 11264r_3 + 10985r_4 - 4104r_5)}{20520}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{(2375s_1 + 11264s_3 + 10985s_4 - 4104s_5)}{20520}$$

where

$$k_1 = hf(x_n, y_n, z_n, t_n),$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{k_1}{4}, y_n + \frac{r_1}{4}, z_n + \frac{s_1}{4}, t_n + \frac{h}{4}\right),$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่จะนำไปใช้
รองศาสตราจารย์ ดร.พันธิ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{(3k_1 + 9k_2)}{32}, y_n + \frac{(3r_1 + 9r_2)}{32}, z_n + \frac{(3s_1 + 9s_2)}{32}, t_n + \frac{3h}{8}\right),$$

$$k_4 = hf\left(x_n + \frac{(1932k_1 - 7200k_2 + 7296k_3)}{2197},$$

$$y_n + \frac{(1922r_1 - 7200r_2 + 7296r_3)}{2197},$$

$$z_n + \frac{(1932s_1 - 7200s_2 + 7296s_3)}{2197}, t_n + \frac{12h}{13}\right),$$

$$k_5 = hf\left(x_n + \frac{(8341k_1 - 32832k_2 + 29440k_3 - 845k_4)}{4104},$$

$$y_n + \frac{(8341r_1 - 32832r_2 + 29440r_3 - 854r_4)}{4104},$$

$$z_n + \frac{(8341s_1 - 32832s_2 + 29440s_3 - 854s_4)}{4104}, t_n + h),$$

$$k_6 = hf\left(x_n + \frac{(-6080k_1 + 41040k_2 - 28352k_3 + 9295k_4 - 5643k_5)}{20520},$$

$$y_n + \frac{(-6080r_1 + 41040r_2 - 28352r_3 + 9295r_4 - 5643r_5)}{20520},$$

$$z_n + \frac{(-6080s_1 + 41040s_2 - 28352s_3 + 9295s_4 - 5643s_5)}{20520}, t_n + \frac{h}{2}\right),$$

and the error for each step will be

$$\text{Error} = \frac{k_1}{360} - \frac{128k_3}{4275} - \frac{2197k_4}{75240} + \frac{k_5}{50}.$$

r_1, r_2, \dots, r_6 and the error of y value can be evaluated from the above equations. s_1, s_2, \dots, s_6 and the error of z value can be evaluated from the above equations. k_1, k_2, \dots, k_6 and error of x by replacing function f with function g and function h . Runge-Kutta-Fehlberge's method can be applied directly to a system of n first-order differential equations which we will do in this research project.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
รองศาสตราจารย์ ดร.พนรัตน์ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Definition 8 A probability space (Ω, F, P) , a stochastic process (or random process) with state space X is a collection of X -valued random variables indexed by a set T ("time"). That is, a stochastic process F is a collection

$$\{F_t : t \in T\}$$

where each F_t is an X -valued random variable [22].

Definition 9 Geographic Information System (GIS) is a process of spatial information (spatial data) with computer systems. The set-oriented data description (attributed data) and information such as address, house number are associated with spatial location as latitude longitude in the form of data tables and databases. GIS system comprises a set of tools that have the ability to collect, maintain and search, to provide customized analysis, display spatial data, to meet deployment objectives. The form and spatial relationships of all information can be used with GIS to analyze meaning in relation to changes over time as such the spread of the diseases, the migration movements, and the Intrusion damages [23].

2.3 การทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง (Literature review)

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เริ่มมีบทบาทสำคัญต่อการแก้ปัญหาการระบาดของโรค โดยในศตวรรษที่ 20 Kermack และ McKendrick [24] ได้ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบ SIR (Susceptible-Infectious-Recovered) สำหรับการศึกษาของโรคระบาด สำหรับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่นี้ แทบจะไม่มีใครได้ศึกษามาก่อน มีเพียงการศึกษาในกรณีไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาลโดยในปี ค.ศ. 1968

Rvachev [25] ได้พัฒนาแบบจำลองแบบ spatial-temporal สำหรับศึกษาการแพร่ระบาดของไข้หวัดใหญ่ โดยการนำแบบจำลองแบบ SIR ศึกษาเชื่อมโยงเข้ากับการแพร่ระบาดจริงในสหภาพโซเวียต โดยการนำข้อมูลการแพร่ระบาดในเมืองใหญ่ๆ มาใช้ศึกษากับแบบจำลอง ต่อมา Rvachev และคณะ [26] ได้ขยายแบบจำลองของเขาเองโดยการหาค่าผลกระทบจากการเดินทางทางอากาศกับการแพร่ระบาดของเชื้อ ในปี ค.ศ. 1988 Flahault และคณะ [27] ได้ทำการศึกษาและสร้างแบบจำลองที่สามารถนำมาอธิบายการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ในฝรั่งเศส ต่อมาพวกเขาและคณะ [28] ได้ทำการศึกษาและสร้างแบบจำลองที่สามารถนำมาอธิบายการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่อีกครั้ง โดยได้ทำการศึกษาการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ในทวีปยุโรป ในปี ค.ศ. 2007 Chowell และคณะ [29] ได้เปรียบเทียบการแพร่ระบาดของโรคกับฤดูกาลในสหรัฐอเมริกา ฝรั่งเศสและออสเตรเลีย โดยการประมาณจากค่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารต้นฉบับ (the basic reproductive number) จากข้อมูล 3 ปีย้อนหลัง ผลที่ได้แสดงให้เห็นข้อค้นพบที่น่าสนใจเกี่ยวกับโรคระบาด ซึ่งมีความสำคัญต่อการทำความเข้าใจเกี่ยวกับโรคระบาดในอนาคต การวิจัยครั้งนี้แสดงให้เห็นว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของผลงานวิจัยที่ศึกษาไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

ว่าการแพร่ระบาดในสามประเทศมีค่าไปในทิศทางเดียวกันทุกๆปี นอกจากนั้นก็ยังมีผลงานวิจัยเป็นจำนวนมากที่ได้มีการศึกษาการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ และเสนอแนวทางในการลดการระบาดของโรคนี้โดยใช้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์เชิงตัวเลข การพิจารณาค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (the basic reproductive number) และใช้ทฤษฎีทางระบาดวิทยา [30-42] เมื่อเร็วๆ นี้ Brian และคณะ [43] ได้ทำการศึกษาการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เพื่ออธิบายการระบาดของโรคนี้ในอนาคต โดยการอธิบายและควบคุมโรคด้วยค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน (the basic reproduction number) Fraser และคณะ [44] ได้ใช้แบบจำลองทางสถิติกับข้อมูลการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่จาก La Gloria ในเม็กซิโกทำการหาค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยค่าที่ได้มีค่าอยู่ในช่วง 1.4-1.6 ซึ่งค่าที่ได้ต่ำกว่าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานของโรคไข้หวัดใหญ่ตามฤดูกาลปี ค.ศ.1918-1919 ซึ่งมีค่าในช่วง 1.4-2.8 สำหรับแบบจำลองของ Fraser และคณะ ได้ทำการศึกษาการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ในประชากรคน โดยไม่ได้คำนึงถึงปัจจัยของการระบาดของเชื้อที่เกิดจากภายในชุมชนเองและปัจจัยที่มาจากภายนอกชุมชน ซึ่งเป็นปัจจัยที่มีผลทำให้จำนวนของผู้ติดเชื้อเพิ่มขึ้นเป็นอย่างมาก ในงานวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยจะนำวิธีการของการสร้างแบบจำลองการกระจายตามพื้นที่ (Spatial model) และใช้กระบวนการสโตแคสติก (Stochastic process) มาวิเคราะห์ผู้ป่วยโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1 ด้วยซึ่งยังไม่มียานวิจัยใดที่เกี่ยวกับโรคนี้ที่ได้ใช้วิธีการนี้ศึกษามาก่อน มีเพียงงานวิจัยของผู้วิจัยเอง [45] ที่ได้เคยใช้วิธีการนี้มาวิเคราะห์ ทำการศึกษาการกระจายของผู้ป่วยโรคไข้เลือดออกโดยใช้วิธีการของการสร้างแบบจำลองการกระจายตามพื้นที่ (Spatial model) และใช้กระบวนการสโตแคสติก (Stochastic process) มาวิเคราะห์ จำนวนผู้ป่วยในระดับหมู่บ้าน ทำการศึกษาโดยการพิจารณาถึงตัวพารามิเตอร์ต่างๆที่มีอิทธิพลต่อการกระจายของผู้ป่วยโรคไข้เลือดออก และหาสมการที่สามารถนำมาอธิบายถึงการเปลี่ยนแปลงของผู้ป่วยโรคไข้เลือดออก ผลที่ได้ทำให้เกิดแนวทางใหม่ในการควบคุมและลดการระบาดของโรคไข้เลือดออกได้

ผู้วิจัยจึงเห็นความสำคัญที่ว่า การสร้างแบบจำลองของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่นั้นมีความสำคัญมาก เพราะในประเทศไทย แนวโน้มของคนไข้โรคนี้มีมากขึ้นเรื่อยๆ ซึ่งในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้เป็นการเสนอแนวทางใหม่อีกทางเลือกหนึ่งที่จะช่วยในการลดการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ ซึ่งได้จากการศึกษาลักษณะการแพร่ระบาดของโรคนี้ แล้วหาความสัมพันธ์ ระหว่างปัจจัยต่างๆ ที่ทำให้เกิดการระบาดของโรคนี้ โดยพิจารณาถึงอิทธิพลที่เกิดจากภายในชุมชนเอง และ อิทธิพลที่มาจากภายนอกชุมชน [46] ที่ก่อให้เกิดการแพร่ระบาดของโรคนี้ สำหรับการแพร่ระบาดของโรคที่เกิดจากอิทธิพลภายนอก จะพิจารณาถึง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ภายใต้ลิขสิทธิ์ของสถาบันวิจัยและพัฒนาสุขภาพแห่งชาติ ซึ่งเป็นหน่วยงานด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารฉบับนี้ทุกครั้งหากนำไปใช้

รองศาสตราจารย์ ดร.พนรัตน์ พงศ์สัมพันธ์

This material is prepared for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

การเดินทางระหว่างชุมชน) สำหรับอิทธิพลที่เกิดจากภายในชุมชนเอง จะพิจารณาถึงอิทธิพลของการเสี่ยงที่จะมีการติดเชื้อซ้ำๆของแต่ละคนในชุมชนปิด (closed environment) นอกจากนั้นยังมีการพิจารณาถึงบุคคลที่เคยติดเชื้อมาก่อน ซึ่งบุคคลเหล่านี้จะมีอัตราการเสียชีวิตที่สูงกว่าบุคคลที่ยังไม่เคยติดเชื้อมาก่อน หลังจากนั้นวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้โดยใช้ความรู้และทฤษฎีของการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน (Standard dynamical modeling) นอกจากนั้นยังมีการศึกษาการกระจายของผู้ป่วยโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่โดยใช้วิธีการของการสร้างแบบจำลองการกระจายตามพื้นที่ (Spatial model) และใช้กระบวนการ สโตแคสติก (Stochastic process) มาวิเคราะห์ จำนวนผู้ป่วยโดยจะทำการพิจารณาถึงตัวพารามิเตอร์ต่างๆที่มีอิทธิพลต่อการกระจายของผู้ป่วยโรคนี้ และหาสมการที่สามารถนำมาอธิบายถึงการเปลี่ยนแปลงของผู้ป่วยโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1 ต่อจากนั้นใช้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ และทฤษฎีทางการแพทย์มาวิเคราะห์การระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ ซึ่งผลที่ได้จะช่วยในการแก้ปัญหาการระบาดของโรค ซึ่งมีผลต่อการพัฒนาคุณภาพชีวิต คุณภาพสังคม ตลอดจนงบประมาณที่ต้องสูญเสียในการควบคุมการระบาดของโรค การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อทำความเข้าใจและแก้ปัญหาเกี่ยวกับการระบาดของโรค และนำไปสู่การควบคุมการระบาดของโรค



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงชื่อของเอกสารงานวิจัยที่นำมาใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

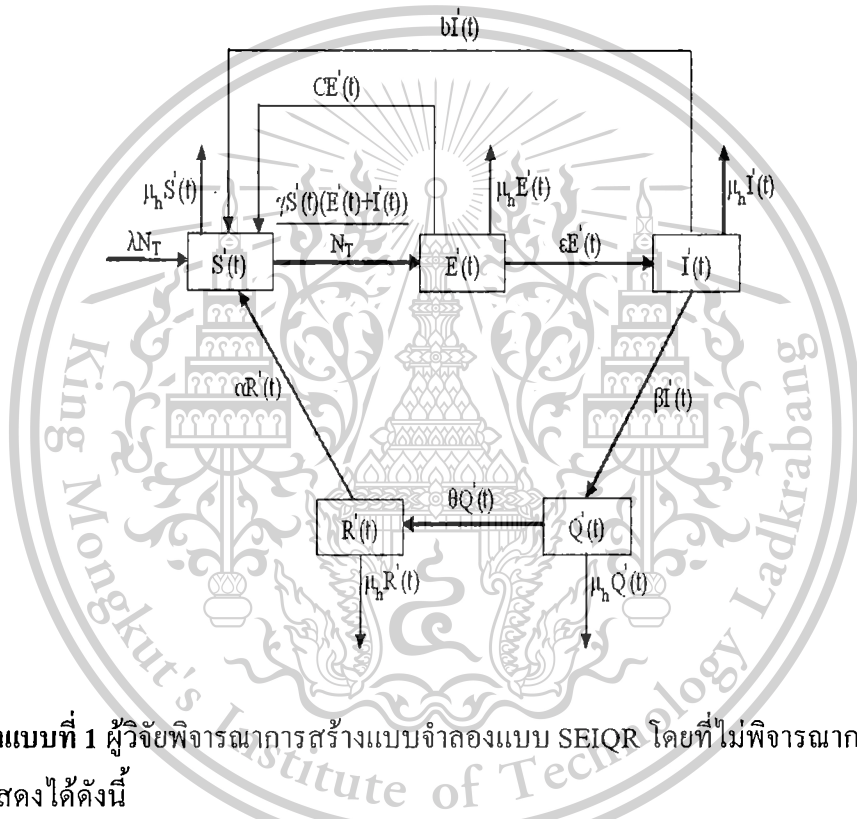
Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1

ในบทนี้ ผู้วิจัยพิจารณาการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ

Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1



แบบจำลองแบบที่ 1 ผู้วิจัยพิจารณาการสร้างแบบจำลองแบบ SEIQR โดยที่ไม่พิจารณาการติดเชื้อซ้ำ แผนภาพแสดงได้ดังนี้

รูปที่ 3.1 แผนภาพของแบบจำลองแบบที่ 1

โดยที่

$S'(t)$ เป็นจำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลา t

$E'(t)$ เป็นจำนวนของผู้ที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ณ เวลา t

$I'(t)$ เป็นจำนวนของผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ณ เวลา t

$Q(t)$ เป็นจำนวนของผู้ที่ถูกกักกันโรคไว้ ณ เวลา t

$R'(t)$ เป็นจำนวนของผู้ที่ฟื้นไข้ ณ เวลา t

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รองศาสตราจารย์ ดร.พนธนิ พงศ์สัมพันธ์

สมการเชิงพลวัตแสดงได้ดังนี้

$$\frac{dS'(t)}{dt} = \lambda N_T - \gamma \frac{S'(t)(E'(t)+I'(t))}{N_T} + cE'(t) + bI'(t) + \alpha R'(t) - \mu_h S'(t) \quad (3.1)$$

$$\frac{dE'(t)}{dt} = \gamma \frac{S'(t)(E'(t)+I'(t))}{N_T} - (c + \varepsilon + \mu_h) E'(t) \quad (3.2)$$

$$\frac{dI'(t)}{dt} = \varepsilon E'(t) - (\beta + b + \mu_h) I'(t) \quad (3.3)$$

$$\frac{dQ'(t)}{dt} = \beta I'(t) - (\theta + \mu_h) Q'(t) \quad (3.4)$$

$$\frac{dR'(t)}{dt} = \theta Q'(t) - (\alpha + \mu_h) R'(t) \quad (3.5)$$

โดยที่

$$N_T = S'(t) + E'(t) + I'(t) + Q'(t) + R'(t)$$

และ

λ คืออัตราการเกิดของประชากร

N_T คือจำนวนประชากรทั้งหมด

γ คืออัตราการติดเชื้อไวรัส H1N1

c คืออัตราที่ผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้กลายเป็นผู้เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีกครั้ง

μ_h คืออัตราการเสียชีวิตของประชากร

$\varepsilon = 1/PIP$ โดยที่ PIP คือจำนวนวันของการพักตัวสำหรับเชื้อไวรัส H1N1

b คืออัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้กลายเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีกครั้ง

θ คืออัตราซึ่งผู้ที่ถูกกักกันโรคกลายเป็นผู้ที่ฟื้นไข้

α คืออัตราที่ผู้ฟื้น ไข้กลายเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีกครั้ง

β คืออัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อ ได้กลายเป็นผู้ที่ถูกกักกันโรค

ขนาดของประชากรสมมติให้เป็นจำนวนคงที่ นั่นก็คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของแต่ละกลุ่มประชากร

เป็น 0 กำหนดให้ $\frac{dN_T}{dt} = 0$ ดังนั้น $\lambda = \mu_h$

ลดรูปสมการ (3.1)-(3.5) โดยการสมมติให้

$$S(t) = S'(t)/N_T, E(t) = E'(t)/N_T, I(t) = I'(t)/N_T, Q(t) = Q'(t)/N_T, R(t) = R'(t)/N_T,$$

จะได้สมการชุดใหม่คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รองศาสตราจารย์ ดร.พันธินี พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$\frac{dS(t)}{dt} = \mu_h - \gamma S(t)(E(t) + I(t)) + cE(t) + bI(t) + \alpha(1 - S(t) - E(t) - I(t) - Q(t)) - \mu_h S(t) \quad (3.6)$$

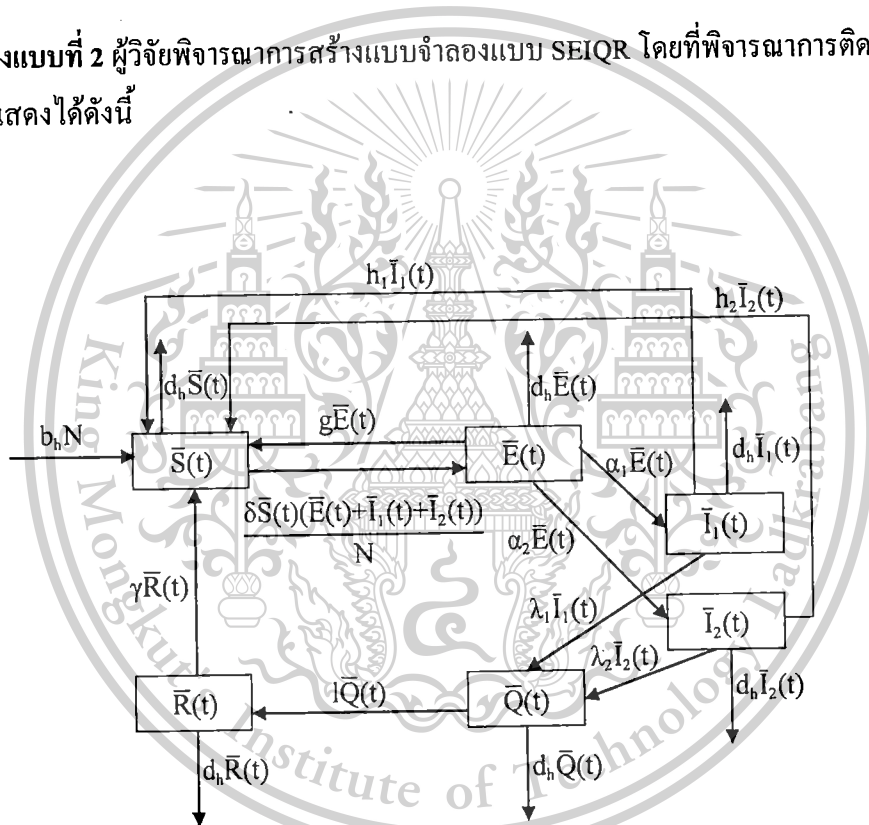
$$\frac{dE(t)}{dt} = \gamma S(t)(E(t) + I(t)) - (c + \varepsilon + \mu_h)E(t) \quad (3.7)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \varepsilon E(t) - (\beta + b + \mu_h)I(t) \quad (3.8)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \beta I(t) - (\theta + \mu_h)Q(t) \quad (3.9)$$

โดยที่ $1 = S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t)$. (3.10)

แบบจำลองแบบที่ 2 ผู้วิจัยพิจารณาการสร้างแบบจำลองแบบ SEIQR โดยที่พิจารณาการติดเชื้ออีกรอบ แผนภาพแสดงได้ดังนี้



รูปที่ 3.2 แผนภาพของแบบจำลองแบบที่ 2

จำนวนประชากรทั้งหมดกำหนดให้เป็นค่าคงที่ สมการเชิงพลวัตแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \bar{S}'(t) = & b_h N + h_1 \bar{I}_1(t) + h_2 \bar{I}_2(t) + g \bar{E}(t) - \delta \frac{\bar{S}(t)(\bar{E}(t) + \bar{I}_1(t) + \bar{I}_2(t))}{N} + \gamma \bar{R}(t) - d_h \bar{S}(t) \\ & - (g + d_h + \alpha_1 + \alpha_2) \bar{E}(t) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\bar{E}'(t) = \delta \frac{\bar{S}(t)(\bar{E}(t) + \bar{I}_1(t) + \bar{I}_2(t))}{N} - (g + d_h + \alpha_1 + \alpha_2) \bar{E}(t) \quad (3.12)$$

$$\bar{I}_1'(t) = \alpha_1 \bar{E}(t) - (h_1 + \lambda_1 + d_h) \bar{I}_1(t) \quad (3.13)$$

$$\bar{I}_2'(t) = \alpha_2 \bar{E}(t) - (h_2 + \lambda_2 + d_h) \bar{I}_2(t) \quad (3.14)$$

$$\bar{Q}'(t) = \lambda_1 \bar{I}_1(t) + \lambda_2 \bar{I}_2(t) - (l + d_h) \bar{Q}(t) \quad (3.15)$$

$$\bar{R}'(t) = l \bar{Q}(t) - (\gamma + d_h) \bar{R}(t) \quad (3.16)$$

โดยที่ $\bar{S}(t) + \bar{E}(t) + \bar{I}_1(t) + \bar{I}_2(t) + \bar{Q}(t) + \bar{R}(t) = N$.

และ

$\bar{S}(t)$ เป็นจำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลา t

$\bar{E}(t)$ เป็นจำนวนของผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ณ เวลา t

$\bar{I}_1(t)$ เป็นจำนวนของผู้ติดเชื้อและแสดงอาการ ณ เวลา t

$\bar{I}_2(t)$ เป็นจำนวนของผู้ติดเชื้อและไม่แสดงอาการ ณ เวลา t

$\bar{Q}(t)$ เป็นจำนวนของผู้ที่ถูกกักกันโรค ณ เวลา t

$\bar{R}(t)$ เป็นจำนวนของผู้ที่ฟื้นไข้ ณ เวลา t

b_h เป็นอัตราการเกิดของประชากร

d_h เป็นอัตราการเสียชีวิตของประชากร

N เป็นจำนวนประชากรทั้งหมด

h_1 เป็นอัตราที่ผู้ติดเชื้อและแสดงอาการกลายเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

h_2 เป็นอัตราที่ผู้ติดเชื้อและไม่แสดงอาการกลายเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

g เป็นอัตราที่ผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้กลายเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

δ เป็นอัตราการติดเชื้อของไวรัส H1N1

α_1 เป็นอัตราที่ผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้กลายเป็นติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้

α_2 เป็นอัตราที่ผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้กลายเป็นผู้ติดเชื้อและแสดงอาการ

λ_1 เป็นอัตราที่ผู้ติดเชื้อและแสดงอาการกลายเป็นผู้ที่ถูกกักกันโรค

λ_2 เป็นอัตราที่ผู้ติดเชื้อและไม่แสดงอาการกลายเป็นผู้ที่ถูกกักกันโรค

l เป็นอัตราการฟื้นไข้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งหากมีกรณียกเว้นใช้

รองศาสตราจารย์ ดร. พันธนี พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

γ เป็นอัตราที่ผู้ฟื้นฟูไข้กลายเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

เนื่องจากกำหนดให้ประชากรทั้งหมดคงที่ นั่นก็คือ $\frac{dN}{dt} = 0$ ซึ่งหมายถึงอัตราการเกิดเท่ากับอัตราการเสียชีวิตของประชากร ซึ่งก็คือ $b_h = d_h$.

จากระบบสมการข้างต้น นิยามตัวแปรใหม่ดังนี้

$$S(t) = \frac{\bar{S}(t)}{N}, E(t) = \frac{\bar{E}(t)}{N}, I_1(t) = \frac{\bar{I}_1(t)}{N}, I_2(t) = \frac{\bar{I}_2(t)}{N}, Q(t) = \frac{\bar{Q}(t)}{N}, R(t) = \frac{\bar{R}(t)}{N}.$$

ระบบสมการที่ลดรูปแล้วแสดงได้ดังนี้

$$S'(t) = b_h + h_1 I_1(t) + h_2 I_2(t) + gE(t) - \delta S(t)(E(t) + I_1(t) + I_2(t)) + \gamma R(t) - b_h S(t) \quad (3.17)$$

$$E'(t) = \delta S(t)(E(t) + I_1(t) + I_2(t)) - (g + b_h + \alpha_1 + \alpha_2)E(t) \quad (3.18)$$

$$I_1'(t) = \alpha_1 E(t) - (h_1 + \lambda_1 + b_h)I_1(t) \quad (3.19)$$

$$I_2'(t) = \alpha_2 E(t) - (h_2 + \lambda_2 + b_h)I_2(t) \quad (3.20)$$

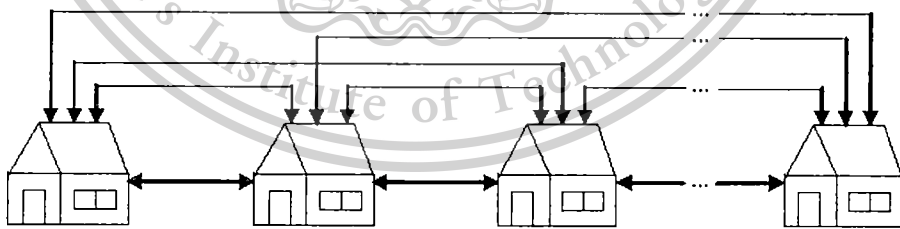
$$Q'(t) = \lambda_1 I_1(t) + \lambda_2 I_2(t) - (1 + b_h)Q(t) \quad (3.21)$$

$$\text{โดยที่ } S(t) + E(t) + I_1(t) + I_2(t) + Q(t) + R(t) = 1 \quad (3.22)$$

แบบจำลองแบบที่ 3 ผู้วิจัยพิจารณาการสร้างแบบจำลองแบบ SEIQR โดยที่พิจารณาการเคลื่อนที่ของประชากร

แผนภาพแสดงได้ดังนี้

กำหนดให้ประชากรมีการเดินทางไปมาระหว่างบ้านแต่ละหลังตลอดเวลาอย่างสุ่ม แต่วันสุดท้ายจะกลับมาที่บ้านของตนเอง



รูปที่ 3.3 แผนภาพแสดงการเคลื่อนที่ของประชากรระหว่างบ้านแต่ละหลัง

สมมติให้ประชากรในแต่ละหมู่บ้านมีประชากร N คนการเคลื่อนที่ของประชากรเป็นไปอย่างสุ่ม การเดินทางของประชากรเป็นไปอย่างสุ่มตั้งแต่คนที่ 1 ถึงคนที่ N และมีการเดินทางทุกวัน ทุกคนมีความน่าจะเป็นในการเดินทางไปบ้านแต่ละหลังเท่ากันกำหนดให้มีคนติดเชื้อเพียงคนเดียวในบ้านหลังที่ 1

ตัวแปรและพารามิเตอร์นิยามดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- $S_{t,i}$ แทนจำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อในบ้านหลังที่ i วันที่ t
- $E_{t,i}$ แทนจำนวนของผู้ที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ในบ้านหลังที่ i วันที่ t
- $I_{t,i}$ แทนจำนวนของผู้ที่ติดและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ในบ้านหลังที่ i วันที่ t
- $Q_{t,i}$ แทนจำนวนของผู้ที่ถูกกักกันโรคในบ้านหลังที่ i วันที่ t
- $R_{t,i}$ แทนจำนวนของผู้ที่ถูกกักกันโรฟื่นไข้ในบ้านหลังที่ i วันที่ t
- M แทนจำนวนประชากรทั้งหมด
- n แทนจำนวนบ้านทั้งหมด
- γ แทนอัตราการถ่ายทอดเชื้อไวรัส H1N1
- IIP เป็นระยะเวลาการฟักตัวของเชื้อไวรัส H1N1
- a เป็นอัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ถูกกักกันโรค
- b เป็นอัตราที่ผู้ถูกกักกันโรคเปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นไข้
- f เป็นอัตราที่ผู้ติดเชื้อเปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นไข้
- c เป็นอัตราที่ผู้ติดเชื้อและยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นไข้
- กำหนดให้ประชากรทั้งหมดเป็นค่าคงที่ สมการเชิงพลวัตของประชากรแสดงได้ดังนี้

$$\Delta S_{t,i} = -\gamma S_{t,i}(E_{t,i} + I_{t,i}) \quad (3.23)$$

$$\Delta E_{t,i} = \gamma S_{t,i}(E_{t,i} + I_{t,i}) - \frac{1}{IIP} E_{t,i} - cE_{t,i} \quad (3.24)$$

$$\Delta I_{t,i} = \frac{1}{IIP} E_{t,i} - fI_{t,i} - aI_{t,i} \quad (3.25)$$

$$\Delta Q_{t,i} = aI_{t,i} - bQ_{t,i} \quad (3.26)$$

$$\Delta R_{t,i} = fI_{t,i} + bQ_{t,i} + cE_{t,i} \quad (3.27)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รองศาสตราจารย์ ดร. พันธุ์ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

แบบจำลองแบบที่ 4 ผู้วิจัยพิจารณาการสร้างแบบจำลองแบบ SEIQR โดยที่แบ่งประชากรออกเป็นกลุ่มอายุ กราฟแสดงผู้ป่วยตามกลุ่มอายุของโรคไข้หวัด H1N1 แสดงได้ดังนี้



รูปที่ 3.4 กราฟแสดงผู้ป่วยโรคไข้หวัด H1N1 ตามกลุ่มอายุระหว่าง 28 เมษายน และวันที่ 9 กรกฎาคม ค.ศ. 2010

$$\frac{dS'_1}{dt} = \mu_b N_T - \frac{\delta_1 S'_1 (E'_1 + I'_1)}{N_T} - \mu S'_1, \quad (3.28)$$

$$\frac{dE'_1}{dt} = \frac{\delta_1 S'_1 (E'_1 + I'_1)}{N_T} - (\mu + \eta + \alpha + \kappa) E'_1, \quad (3.29)$$

$$\frac{dI'_1}{dt} = \eta E'_1 - (\mu + \varepsilon + \beta + \kappa) I'_1, \quad (3.30)$$

$$\frac{dQ'_1}{dt} = \varepsilon I'_1 - (\mu + \gamma + \kappa) Q'_1, \quad (3.31)$$

$$\frac{dR'_1}{dt} = \alpha E'_1 + \beta I'_1 + \gamma Q'_1 - (\mu + \kappa) R'_1, \quad (3.32)$$

$$\frac{dS'_2}{dt} = \kappa S'_1 - \frac{\delta_2 S'_2 (E'_2 + I'_2)}{N_T} - (\mu + \kappa) S'_2, \quad (3.33)$$

$$\frac{dE'_2}{dt} = \kappa E'_1 + \frac{\delta_2 S'_2 (E'_2 + I'_2)}{N_T} - (\mu + \eta + \alpha + \kappa) E'_2, \quad (3.34)$$

$$\frac{dI'_2}{dt} = \kappa I'_1 + \eta E'_2 - (\mu + \varepsilon + \beta + \kappa) I'_2, \quad (3.35)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พันธิพงษ์ ศัมพันธ์
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$\frac{dQ'_2}{dt} = \kappa Q'_1 + \epsilon I'_2 - (\mu + \gamma + \kappa) Q'_2, \quad (3.36)$$

$$\frac{dR'_2}{dt} = \kappa R'_1 + \alpha E'_2 + \beta I'_2 + \gamma Q'_2 - (\mu + \kappa) R'_2, \quad (3.37)$$

$$\frac{dS'_3}{dt} = \kappa S'_2 - \frac{\delta_3 S'_3 (E'_3 + I'_3)}{N_T} - \mu S'_3, \quad (3.38)$$

$$\frac{dE'_3}{dt} = \kappa E'_2 + \frac{\delta_3 S'_3 (E'_3 + I'_3)}{N_T} - (\mu + \eta + \alpha) E'_3, \quad (3.39)$$

$$\frac{dI'_3}{dt} = \kappa I'_2 + \eta E'_3 - (\mu + \epsilon + \beta) I'_3, \quad (3.40)$$

$$\frac{dQ'_3}{dt} = \kappa Q'_2 + \epsilon I'_3 - (\mu + \gamma) Q'_3, \quad (3.41)$$

$$\frac{dR'_3}{dt} = \kappa R'_2 + \alpha E'_3 + \beta I'_3 + \gamma Q'_3 - \mu R'_3, \quad (3.42)$$

โดยมีเงื่อนไขคือ $N_T = N_{T_1} + N_{T_2} + N_{T_3}$, $N_{T_1} = S'_1 + E'_1 + I'_1 + Q'_1 + R'_1$,

$N_{T_2} = S'_2 + E'_2 + I'_2 + Q'_2 + R'_2$, และ $N_{T_3} = S'_3 + E'_3 + I'_3 + Q'_3 + R'_3$,

โดยที่ 1, 2 และ 3 แทนกลุ่มอายุที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ

ตัวแปรและพารามิเตอร์นิยามดังนี้

N_T คือประชากรทั้งหมด

N_{T_1} คือประชากรทั้งหมดของกลุ่มที่ 1

N_{T_2} คือประชากรทั้งหมดของกลุ่มที่ 2

N_{T_3} คือประชากรทั้งหมดของกลุ่มที่ 3

μ , เป็นอัตราการเกิดโดยธรรมชาติ

μ เป็นอัตราการเสียชีวิตโดยธรรมชาติ

κ เป็นอัตราการเปลี่ยนกลุ่มอายุของประชากร

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ มีค่าเท่ากับ $\psi_1 \phi_n, \psi_2 \phi_n, \psi_3 \phi_n$ โดยที่ ψ_1, ψ_2 และ ψ_3 เป็นความน่าจะเป็นของการได้รับเชื้อของแต่ละกลุ่มอายุ ตามลำดับ

ϕ_n เป็นจำนวนโดยเฉลี่ยของประชากรที่ติดเชื้อมต่อวัน

Q, α, β, γ เป็นอัตราที่ประชากรกลุ่ม E, I และ Q ฟื้นไข้จากโรค

เมื่อรวมสมการ (3.28) ถึง (3.42), (3.28) – (3.32), (3.33) – (3.37) และ (3.38) – (3.42) แล้วจะได้ว่า

$$\frac{dN_T}{dt} = \mu N_T - \mu_m N_T,$$

$$\frac{dN_{T_1}}{dt} = \mu N_T - (\mu + \kappa) N_{T_1},$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รองศาสตราจารย์ ดร.พันธ์ทิพย์ พิศัยพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$\begin{aligned}\frac{dN_{T_1}}{dt} &= \kappa N_{T_1} - (\mu + \kappa) N_{T_1}, \\ \frac{dN_{T_2}}{dt} &= \kappa N_{T_2} - \mu N_{T_2}\end{aligned}\tag{3.43}$$

กำหนดให้ประชากรทั้งหมดคงที่ จำนวนทั้งหมดของประชากรแต่ละกลุ่มคงที่

$$\text{ดังนั้น } \frac{dN_T}{dt} = 0 \text{ และ } \frac{dN_{T_1}}{dt} = \frac{dN_{T_2}}{dt} = \frac{dN_{T_3}}{dt} = 0.$$

จัดสมการแต่ละสมการของ ให้เท่ากับ 0 จะได้ว่า

$\mu_b = \mu$ (อัตราการเกิดเท่ากับอัตราการเสียชีวิต),

$$\frac{N_{T_1}}{N_T} = \frac{\mu}{\mu + \kappa} \text{ (อัตราการระหว่างจำนวนประชากรทั้งหมดของกลุ่มแรกและประชากรทั้งหมด)}$$

$$\frac{N_{T_2}}{N_T} = \frac{\mu\kappa}{(\mu + \kappa)^2} \text{ (อัตราการระหว่างจำนวนประชากรทั้งหมดของกลุ่มที่สองและประชากรทั้งหมด)}$$

$$\frac{N_{T_3}}{N_T} = \frac{\kappa^2}{(\mu + \kappa)^2} \text{ (อัตราการระหว่างจำนวนประชากรทั้งหมดของกลุ่มที่สามและประชากรทั้งหมด)}$$

ลดรูปสมการ (3.28) – (3.42) โดยการสมมติให้

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{S'_1}{N_{T_1}}, E_1 = \frac{E'_1}{N_{T_1}}, I_1 = \frac{I'_1}{N_{T_1}}, Q_1 = \frac{Q'_1}{N_{T_1}}, R_1 = \frac{R'_1}{N_{T_1}}, S_2 = \frac{S'_2}{N_{T_2}}, E_2 = \frac{E'_2}{N_{T_2}}, I_2 = \frac{I'_2}{N_{T_2}}, Q_2 = \frac{Q'_2}{N_{T_2}}, \\ R_2 &= \frac{R'_2}{N_{T_2}}, S_3 = \frac{S'_3}{N_{T_3}}, E_3 = \frac{E'_3}{N_{T_3}}, I_3 = \frac{I'_3}{N_{T_3}}, Q_3 = \frac{Q'_3}{N_{T_3}}, R_3 = \frac{R'_3}{N_{T_3}}.\end{aligned}$$

โดยมีเงื่อนไขคือ $S_1 + E_1 + I_1 + Q_1 + R_1 = 1$,

$$S_2 + E_2 + I_2 + Q_2 + R_2 = 1, \text{ and } S_3 + E_3 + I_3 + Q_3 + R_3 = 1$$

ดังนั้นรูปแบบสมการที่ได้ใหม่คือ

$$\frac{dS_1}{dt} = \theta_1(1 - S_1) - \theta_2 S_1(E_1 + I_1),\tag{3.44}$$

$$\frac{dE_1}{dt} = \theta_2 S_1(E_1 + I_1) - \theta_3 E_1,\tag{3.45}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \eta E_1 - \theta_4 I_1,\tag{3.46}$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = \epsilon I_1 - \theta_5 Q_1,\tag{3.47}$$

$$\frac{dS_2}{dt} = \theta_1(S_1 - S_2) - \theta_6 S_2(E_2 + I_2),\tag{3.48}$$

$$\frac{dE_2}{dt} = \theta_1 E_1 + \theta_6 S_2(E_2 + I_2) - \theta_3 E_2,\tag{3.49}$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \theta_1 I_1 + \eta E_2 - \theta_4 I_2,\tag{3.50}$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = \theta_1 Q_1 + \epsilon I_2 - \theta_5 Q_2,\tag{3.51}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร. พันธุ์ พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{dS_3}{dt} = \mu(S_2 - S_3) - \theta_7 S_3 (E_3 + I_3), \tag{3.52}$$

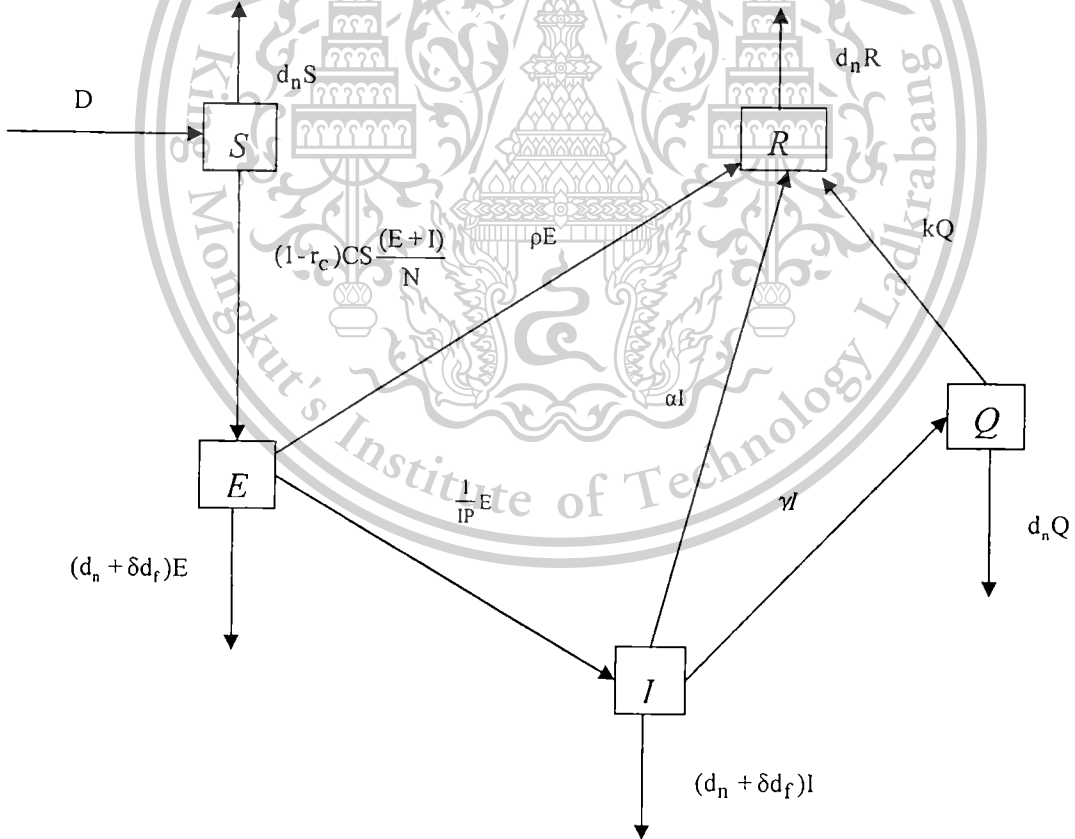
$$\frac{dE_3}{dt} = \mu E_2 + \theta_7 S_3 (E_3 + I_3) - \theta_8 E_3, \tag{3.53}$$

$$\frac{dI_3}{dt} = \mu I_2 + \eta E_3 - \theta_9 I_3, \tag{3.54}$$

$$\frac{dQ_3}{dt} = \mu Q_2 + \varepsilon I_3 - \theta_{10} Q_3, \tag{3.55}$$

โดยที่ $\theta_1 = \mu + \kappa$, $\theta_2 = \frac{\delta_1 \mu}{\mu + \kappa}$, $\theta_3 = \mu + \eta + \alpha + \kappa$, $\theta_4 = \mu + \varepsilon + \beta + \kappa$, $\theta_5 = \mu + \gamma + \kappa$,
 $\theta_6 = \frac{\delta_2 \mu \kappa}{(\mu + \kappa)^2}$, $\theta_7 = \frac{\delta_3 \kappa^2}{(\mu + \kappa)^2}$, $\theta_8 = \mu + \eta + \alpha$, $\theta_9 = \mu + \varepsilon + \beta$, และ $\theta_{10} = \mu + \gamma$.

แบบจำลองแบบที่ 5 ผู้วิจัยพิจารณาการสร้างแบบจำลองแบบ SEIQR โดยที่พิจารณาการติดเชื้อซ้ำ แผนภาพแสดงแนวคิดในการสร้างแบบจำลอง แสดงได้ดังนี้



รูปที่ 3.5 แผนภาพของแบบจำลองแบบที่ 5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีคำค้นพบใช้

รองศาสตราจารย์ ดร.พันธ์พิณพงศ์สัมพันธ์ใช้

ในแบบจำลองแบบนี้ พิจารณาการถ่ายทอดเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ H1N1 ในประชากร โดย

$S(t)$ เป็นจำนวนของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลา t

$E(t)$ เป็นจำนวนของผู้ที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ณ เวลา t

$I(t)$ เป็นจำนวนของผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ณ เวลา t

$Q(t)$ เป็นจำนวนของผู้ที่ถูกกักกันโรคไว้ ณ เวลา t

$R(t)$ เป็นจำนวนของผู้ฟื้นไข้ ณ เวลา t

C เป็นจำนวนของการติดเชื้อ

N เป็นจำนวนของประชากร

อัตราการย่อยของรายชื้อคนที่มีการทำซ้ำแล้วการเพิ่มจำนวนของมนุษย์สัมผัสจะได้รับโดย

$$(1-r_c)CS(t) \frac{E(t)+I(t)}{N} \quad (3.56)$$

โดยที่ r_c คือร้อยละของการติดเชื้อซ้ำ

d_n คืออัตราการเสียชีวิตของประชากร

$$\frac{d}{dt}S(t) = D - (1-r_c)CS(t) \frac{E(t)+I(t)}{N} - d_nS(t) \quad (3.57)$$

$$\frac{d}{dt}E(t) = (1-r_c)CS(t) \frac{E(t)+I(t)}{N} - \left(\rho + \frac{1}{IP} + d_n + \delta d_f\right)E(t) \quad (3.58)$$

$$\frac{d}{dt}I(t) = \frac{1}{IP}E(t) - (\alpha + \gamma + d_n + \delta d_f)I(t) \quad (3.59)$$

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \gamma I(t) - (k + d_n)Q(t) \quad (3.60)$$

$$\frac{d}{dt}R(t) = \rho E(t) + \alpha I(t) + kQ(t) - d_nR(t) \quad (3.61)$$

โดยที่ $N = S + E + I + Q + R.$ (3.62)

สมมติให้จำนวนประชากรทั้งหมดคงที่ นั่นก็คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรมีค่าเป็น 0 ซึ่งคือ

$$\frac{dN}{dt} = 0 \text{ ดังนั้น}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธวี พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$E + I = \frac{D - d_n N}{\delta d_f} \tag{3.63}$$

เพื่อที่จะลดจำนวนสมการเพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ สมมติให้

$$s = \frac{S}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, q = \frac{Q}{N}, r = \frac{R}{N} \tag{3.64}$$

นิยามของตัวแปรและพารามิเตอร์ของแบบจำลองนี้

พารามิเตอร์	นิยาม
D	จำนวนเริ่มต้นของประชากร
r _c	ร้อยละของการติดเชื้อที่มีการติดเชื้อซ้ำ
C	อัตราการติดเชื้อของไวรัส H1N1 ระหว่างประชากร
d _n	อัตราการเสียชีวิตของประชากร Natural mortality rate of human population
δd _f	อัตราการเพิ่มขึ้นของอัตราการตายเนื่องมาจากการติดเชื้อ I ครั้ง
ρ	อัตราซึ่งผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนเป็นผู้ฟื้นไข้
IP	อัตราการติดเชื้อของเชื้อไวรัส H1N1 ในประชากรมนุษย์
k	อัตราซึ่งผู้กักโรคเปลี่ยนเป็นผู้ฟื้นไข้
α	อัตราซึ่งผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนเป็นผู้ฟื้นไข้
γ	อัตราซึ่งผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนเป็นผู้ถูกกักกันโรค
N	จำนวนประชากรทั้งหมด

หลังจากที่ลดรูปสมการแล้ว จะได้ระบบสมการรูปแบบใหม่คือ

$$\frac{d}{dt}s(t) = \frac{D}{N} - \frac{C(D - d_n N)(1 - r_c)s(t)}{\delta d_f N} - d_n s(t) \tag{3.65}$$

$$\frac{d}{dt}e(t) = \frac{C(D - d_n N)(1 - r_c)s(t)}{\delta d_f N} - \left(\frac{1}{IP} + \delta d_f + \rho + d_n\right)e(t) \tag{3.66}$$

$$\frac{d}{dt}i(t) = \frac{1}{IP}e(t) - (\alpha + \delta d_f + \gamma + d_n)i(t) \tag{3.67}$$

$$\frac{d}{dt}q(t) = \gamma i(t) - (d_n + k)q(t) \tag{3.68}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร. พันธิ พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ $r = 1 - s - e - i - q$. (3.69)

หลังจากที่ได้รูปแบบสมการของแบบจำลองทั้งหมดแล้ว ในบทต่อไปจะทำการวิเคราะห์ผลเฉลยทั้งในรูปแบบผลเฉลยเชิงวิเคราะห์และผลเฉลยเชิงตัวเลข



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร. พันชนี พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

บทที่ 4

ผลการวิจัย

การวิเคราะห์ผลที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1

แบบจำลองแบบที่ 1 แบบจำลองแบบ SEIQR โดยที่ไม่พิจารณาการติดเชื้อซ้ำ ระบบสมการที่ลดรูปแล้วแสดงได้ดังนี้

$$\frac{dS(t)}{dt} = \mu_h - \gamma S(t)(E(t) + I(t)) + cE(t) + bI(t) + \alpha(1 - S(t) - E(t) - I(t) - Q(t)) - \mu_h S(t) \quad (4.1)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \gamma S(t)(E(t) + I(t)) - (c + \varepsilon + \mu_h)E(t) \quad (4.2)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \varepsilon E(t) - (\beta + b + \mu_h)I(t) \quad (4.3)$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \beta I(t) - (\theta + \mu_h)Q(t) \quad (4.4)$$

$$\text{โดยที่ } 1 = S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t). \quad (4.5)$$

การวิเคราะห์

จุดสมดุลสามารถหาได้จากการจัดสมการ (4.1)-(4.5) ให้เท่ากับ 0 จุดสมดุลที่ได้คือ

i) จุดสมดุลสถานะไร้โรค : $E_0 = (1, 0, 0, 0)$.

ii) จุดสมดุลสถานะเรื้อรัง : $E_1 = (S^*, E^*, I^*, Q^*)$

โดยที่

$$I^* = \frac{(R_0 - 1)}{R_0} \frac{(\varepsilon L_3 L_4)}{[L_4(\mu_h L_1 + (\beta + \mu_h)\varepsilon + \alpha(L_1 + \varepsilon)) + \beta\varepsilon\alpha]}, \quad (4.6)$$

$$S^* = \frac{\mu_h + I^* \left(b + c \frac{L_1}{\varepsilon} + \frac{\alpha\beta\theta}{L_3 L_4} \right)}{\mu_h + I^* \frac{\gamma}{\varepsilon} (L_1 + \varepsilon)}, \quad (4.7)$$

$$E^* = I^* \left(\frac{L_1}{\varepsilon} \right), \quad (4.8)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มาใช้

รองศาสตราจารย์ ดร. พันธุ์ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$Q^* = I^* \left(\frac{\beta}{L_4} \right), \tag{4.9}$$

โดยที่

$$R_0 = \frac{\gamma(b+\beta+\varepsilon+\mu_h)}{(b+\beta+\mu_h)(c+\varepsilon+\mu_h)} = \frac{\gamma(L_1+\varepsilon)}{L_1L_2}, \tag{4.10}$$

$$L_1 = b+\beta+\mu_h, \tag{4.11}$$

$$L_2 = c+\varepsilon+\mu_h, \tag{4.12}$$

$$L_3 = \alpha+\mu_h \text{ และ} \tag{4.13}$$

$$L_4 = \theta+\mu_h. \tag{4.14}$$

ทฤษฎีบทที่ 1 จุดสมดุลสถานะไร้โรค E_0 ของระบบสมการ (4.1)-(4.5) มีความเสถียรภายใน (locally asymptotically stable) ใน D เมื่อ $R_0 < 1$, และไม่เสถียรเมื่อ $R_0 > 1$, โดยที่

$$D = \{(S, E, I, Q) | S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, Q \geq 0, S + E + I + Q \leq 1\}.$$

พิสูจน์ เพื่อที่จะแสดงถึงความเสถียรภายในของจุดสมดุลสถานะไร้โรค E_0 เมตริกซ์จาโคเบียน $J(E_0)$ คำนวณได้ดังนี้:

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -\alpha - \mu_h & -\gamma + c - \alpha & -\gamma + b - \alpha & -\alpha \\ 0 & \gamma - (c + \varepsilon + \mu_h) & \gamma & 0 \\ 0 & \varepsilon & -(\beta + b + \mu_h) & 0 \\ 0 & 0 & \beta & -(\theta + \mu_h) \end{bmatrix}$$

ค่าเฉพาะ (eigenvalue) ของเมตริกซ์จาโคเบียนคือ

$$\eta_1 = -L_3, \eta_2 = -L_4, \eta_{3,4} = \frac{1}{2} [(\gamma - L_1 - L_2) \pm \sqrt{\Delta}]$$

โดยที่

$$\Delta = 4\varepsilon\gamma + \gamma^2 + 2\gamma L_1 + L_1^2 - 2\gamma L_2 - 2L_1 L_2 + L_2^2$$

ถ้า $R_0 < 1$, แล้วจะได้ว่า

$$\gamma L_1 - L_1 L_2 + \gamma \varepsilon < 0.$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \Delta &= (L_1 + L_2 - \gamma)^2 + 4(\gamma L_1 - L_1 L_2 + \gamma \varepsilon) \\ &< (L_1 + L_2 - \gamma)^2. \end{aligned}$$

นั่นก็คือ

$$\sqrt{\Delta} < L_1 + L_2 - \gamma \text{ เมื่อ } L_1 + L_2 - \gamma \geq 0.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธวี พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}[(\gamma - L_1 - L_2) + \sqrt{\Delta}] < \frac{1}{2}[(\gamma - L_1 - L_2) + L_1 + L_2 - \gamma] = 0,$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2}[(\gamma - L_1 - L_2) - \sqrt{\Delta}] < \frac{1}{2}[(\gamma - L_1 - L_2) - (L_1 + L_2 - \gamma)] \leq 0.$$

ดังนั้นทุกรากของสมการลักษณะเฉพาะ(characteristic equation) มีค่าลบสำหรับ $R_0 < 1$

นั่นก็คือจุดสมดุลสถานะไร้โรค E_0 มีความเสถียรภายใน (locally asymptotically stable) สำหรับ $R_0 < 1$ และไม่เสถียรสำหรับ $R_0 > 1$

ทฤษฎีบทที่ 2 จุดสมดุลสถานะเรื้อรัง E_1 ของระบบสมการ (4.1)-(4.5) มีความเสถียรภายใน (locally asymptotically stable) ใน D เมื่อ $R_0 > 1$

พหุนามเมตริกซ์จาโคเบียน $J(E_1)$ คำนวณได้ดังนี้:

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} -\gamma(E_h^* + I_h^*) - \alpha - \mu_h & -\gamma + S_h^* + c - \alpha & -\gamma S_h^* + b - \alpha & -\alpha \\ \gamma(E_h^* + I_h^*) & \gamma S_h^* - (c + \epsilon + \mu_h) & \gamma S_h^* & 0 \\ 0 & \epsilon & -(\beta + b + \mu_h) & 0 \\ 0 & 0 & \beta & -(\theta + \mu_h) \end{bmatrix}$$

สมการลักษณะเฉพาะคือ

$$\eta^4 + a_3\eta^3 + a_2\eta^2 + a_1\eta + a_0 = 0 \tag{4.15}$$

โดยที่

$$a_3 = \alpha + b + x_4 + \gamma X_h^* + \theta \tag{4.16}$$

$$a_2 = \beta(c + \epsilon) + \beta E_h^* \gamma + \epsilon E_h^* \gamma + \beta \gamma I_h^* + \epsilon \gamma I_h^* + 3\beta \mu_h + 3c \mu_h + 3\epsilon \mu_h + 3E_h^* \gamma \mu_h + 3\gamma I_h^* \mu_h + 6\mu_h^2 + \beta \gamma S_h^* + \epsilon \gamma S_h^* + 3\gamma \mu_h S_h^* + x_3 \theta + \gamma X_h^* \theta + b(c + \epsilon + 3\mu_h + \gamma X_h^* + \theta) + \alpha(b + x_3 + \gamma X_h^* + \theta) \tag{4.17}$$

$$a_1 = \mu_h(\mu_h(3(c + \epsilon) + 4\mu_h) + \gamma(2\epsilon + 3\mu_h)X_h^* + b(2(c + \epsilon + \gamma X_h^*) + 3\mu_h + 2\gamma X_h^*)) + (b m_2 + \mu_h(2(c + \epsilon) + 3\mu_h) + \gamma(\epsilon + 2\mu_h)X_h^*)\theta + \alpha((b + \beta)m_2 + \mu_h(2(c + \epsilon) + 3\mu_h) + \gamma(\epsilon + 2\mu_h)X_h^* + (b + \beta + m_2)\theta) + \beta(\mu_h(2c + 3\mu_h + 2\gamma X_h^* + (c + 2\mu_h + \gamma X_h^*)\theta) + \epsilon(\gamma(E_h^* + I_h^*) + 2\mu_h + \theta)) \tag{4.18}$$

$$a_0 = (\beta(c\mu_h + m_4(\gamma(E_h^* + I_h^*) + \mu_h) + \gamma\mu_h S_h^*) + \mu_h(b(\epsilon + m_3) + (c + m_4)\mu_h + \gamma m_4 X_h^*))(\mu_h + \theta) + \alpha((b(\epsilon + m_3) + (c + m_4)\mu_h + \gamma m_4 X_h^*)(\mu_h + \theta) + \beta(m_3(\mu_h + \theta) + \epsilon(\gamma(E_h^* + I_h^*) + \mu_h + \theta))) \tag{4.19}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พันธณี พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

โดยที่

$$\begin{aligned} X_h^* &= S_h^* + E_h^* + I_h^*, x_3 = \beta + c + \varepsilon + 3\mu_h, \\ x_4 &= \beta + c + \varepsilon + 4\mu_h, m_2 = c + \varepsilon + 2\mu_h + \gamma X_h^*, \\ m_3 &= c + \mu_h + \gamma X_h^*, m_4 = \varepsilon + \mu_h. \end{aligned}$$

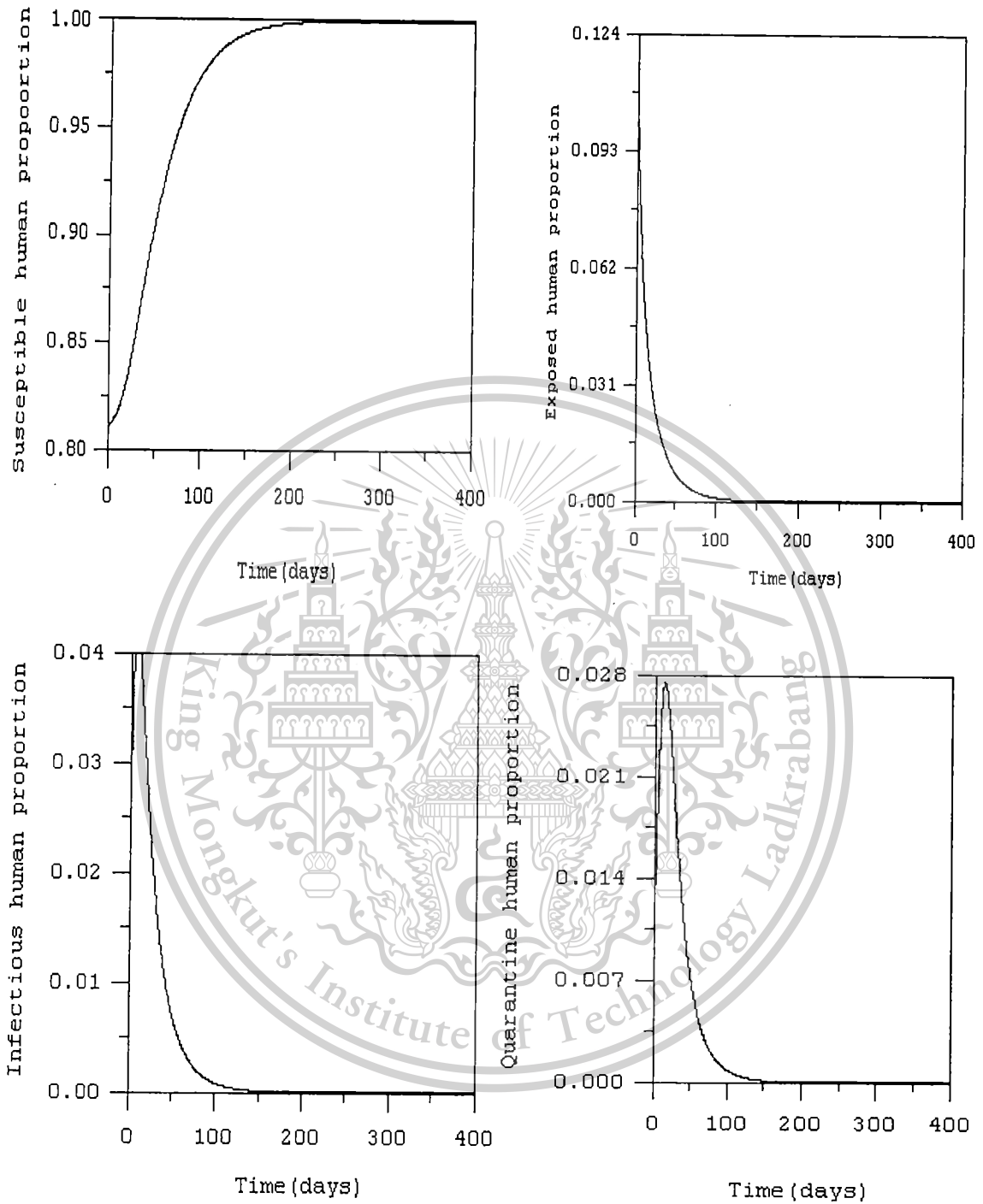
จากกฎของ Routh-hurwitz criteria, จุดสมดุล ณ สภาวะเรื้อรังมีความเสถียรภายในเมื่อเงื่อนไขข้างล่างนี้เป็นจริง

- i) $a_3 > 0$
 - ii) $a_1 > 0$
 - iii) $a_0 > 0$
- (4.20)

โดยการใช้ MATHEMATICA, เงื่อนไขข้างบนเป็นจริงเมื่อ $R_0 > 1$ ดังนั้นจุดสมดุล ณ สภาวะเรื้อรัง E_1 มีความเสถียรภายใน (locally asymptotically stable) สำหรับ $R_0 > 1$

ผลเฉลยเชิงตัวเลข

ในหัวข้อนี้ผู้วิจัยได้วิเคราะห์ระบบสมการที่ลดรูปแล้ว (4.1)-(4.5) พารามิเตอร์ที่นำมาใช้มีค่าดังนี้ $c = \frac{1}{30}$ ต่อวัน สอดคล้องกับจำนวนวันที่ผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้กลายเป็นผู้เสี่ยงต่อการติดเชื้อ 30 วัน $\mu_h = \frac{1}{365 \times 65}$ สอดคล้องกับจำนวนปีโดยเฉลี่ยของประชากรมนุษย์ที่มีอยู่ 65 ปี $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ต่อวัน สอดคล้องกับช่วงเวลาการฟักตัวของเชื้อไวรัส H1N1 ที่มีอยู่ 10 วัน $b = \frac{1}{40}$ ต่อวัน สอดคล้องกับช่วงเวลา 40 วันที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้กลายเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีกครั้ง $\theta = \frac{1}{6}$ ต่อวัน สอดคล้องกับ 6 วันที่ผู้ถูกกักกันโรคกลายเป็นผู้ฟื้นฟู $\alpha = \frac{1}{30}$ ต่อวัน สอดคล้องกับ 30 วันที่ผู้ฟื้นฟูกลายเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้ออีกครั้ง $\beta = \frac{1}{8}$ ต่อวัน สอดคล้องกับ 8 วันที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้กลายเป็นผู้ถูกกักกันโรค อัตราการติดเชื้อของไวรัส H1N1 (γ) เป็นค่าที่เลือกขึ้นมา แนววิถีของผลเฉลยสำหรับสภาวะไร้โรคและสภาวะเรื้อรังแสดงดังรูปข้างล่างนี้

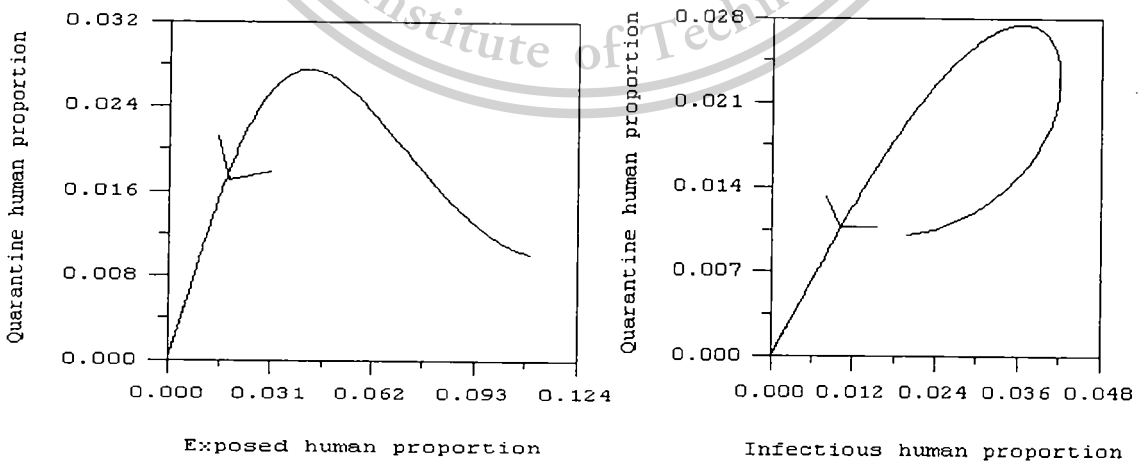
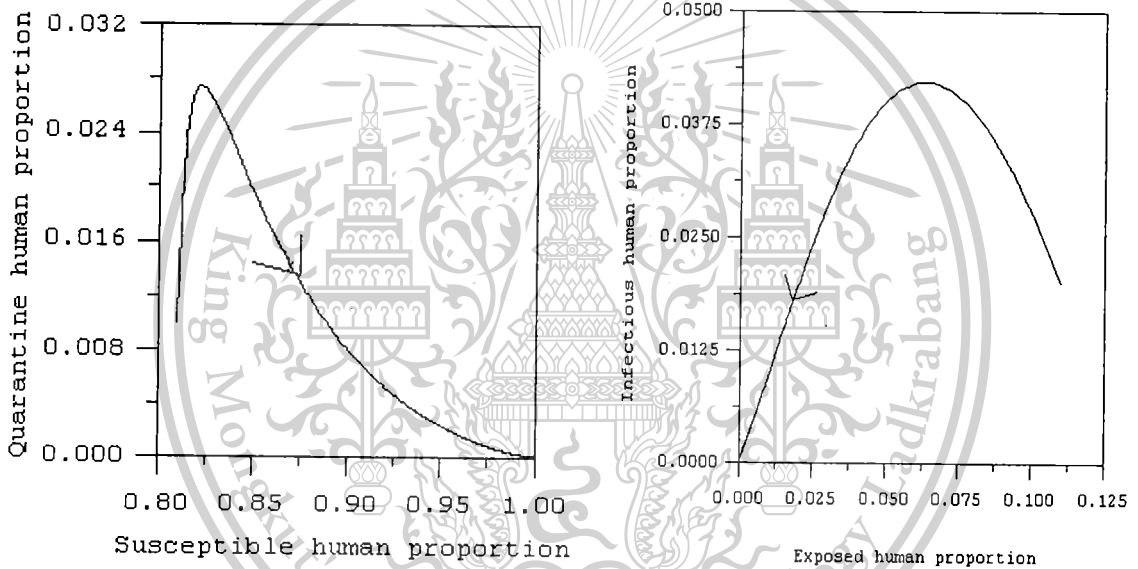
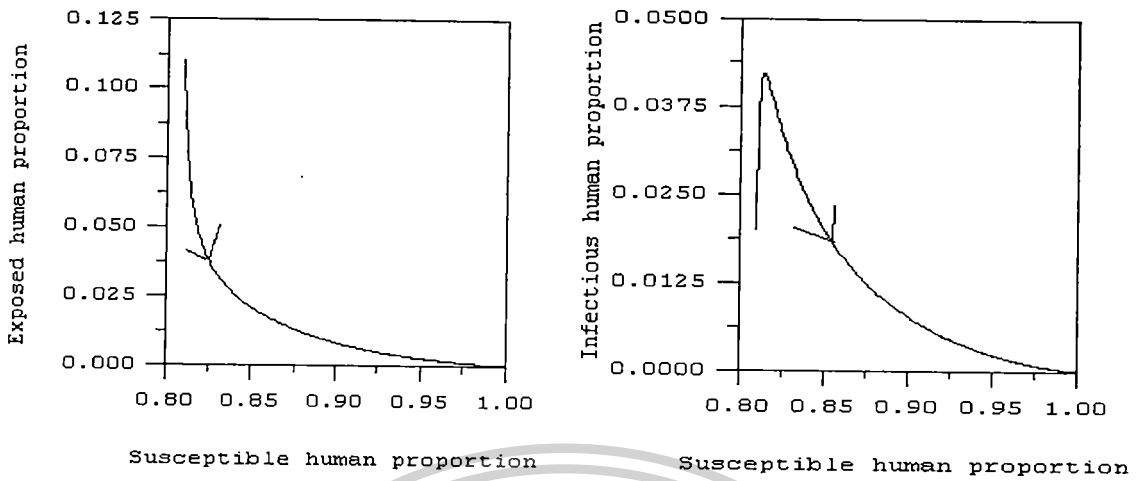


4.1a)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารที่แหล่งที่มาที่ระบุไว้
รองศาสตราจารย์ ดร. พันธุ์ พงศ์สัมพันธ์ ใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



4.1b)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รองศาสตราจารย์ ดร.พันธ์ นี พงศ์สัมพันธ์

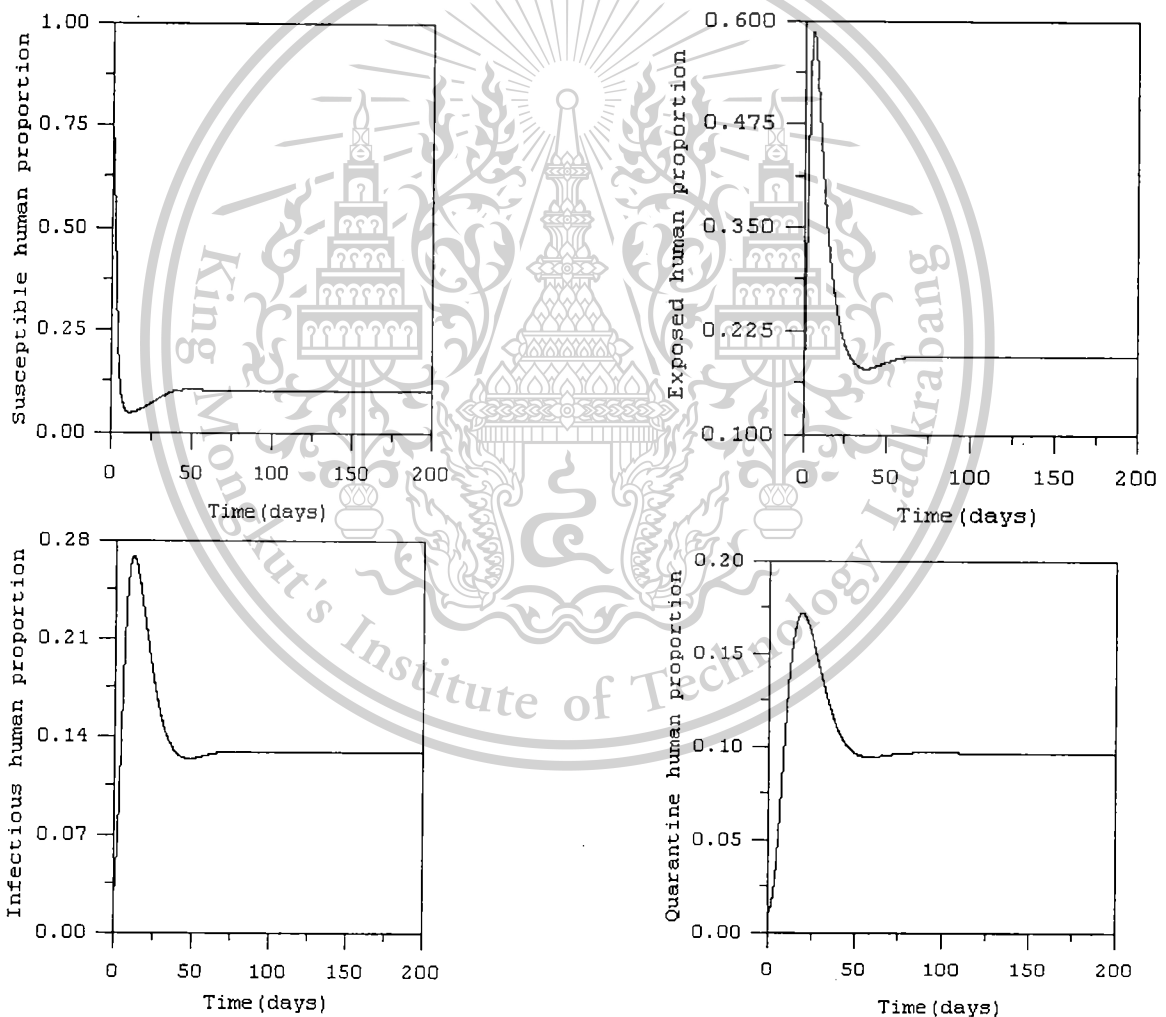
This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

รูปที่ 4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับ $R_0 < 1$ ค่าของพารามิเตอร์คือ $c = \frac{1}{30}$ ต่อวัน, $\mu_h = \frac{1}{365 \times 65}$ ต่อวัน, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ต่อวัน, $b = \frac{1}{40}$ ต่อวัน, $\theta = \frac{1}{6}$ ต่อวัน, $\alpha = \frac{1}{30}$ ต่อวัน, $\beta = \frac{1}{8}$ ต่อวัน, $\gamma = 0.05$ และ $R_0 = 0.625$.

4.1a) ผลเฉลยตามเวลาของผู้เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ และผู้ที่ถูกกักกันโรคตามลำดับ

4.1b) แนววิถีผลเฉลยบนระนาบ (S,E), (S,I), (S,Q), (E,I), (E,Q) and (I,Q) สัดส่วนของผลเฉลย (S^*, E^*, I^*, Q^*) เข้าสู่จุดสมดุลสถานะไร้โรค (1,0,0,0)



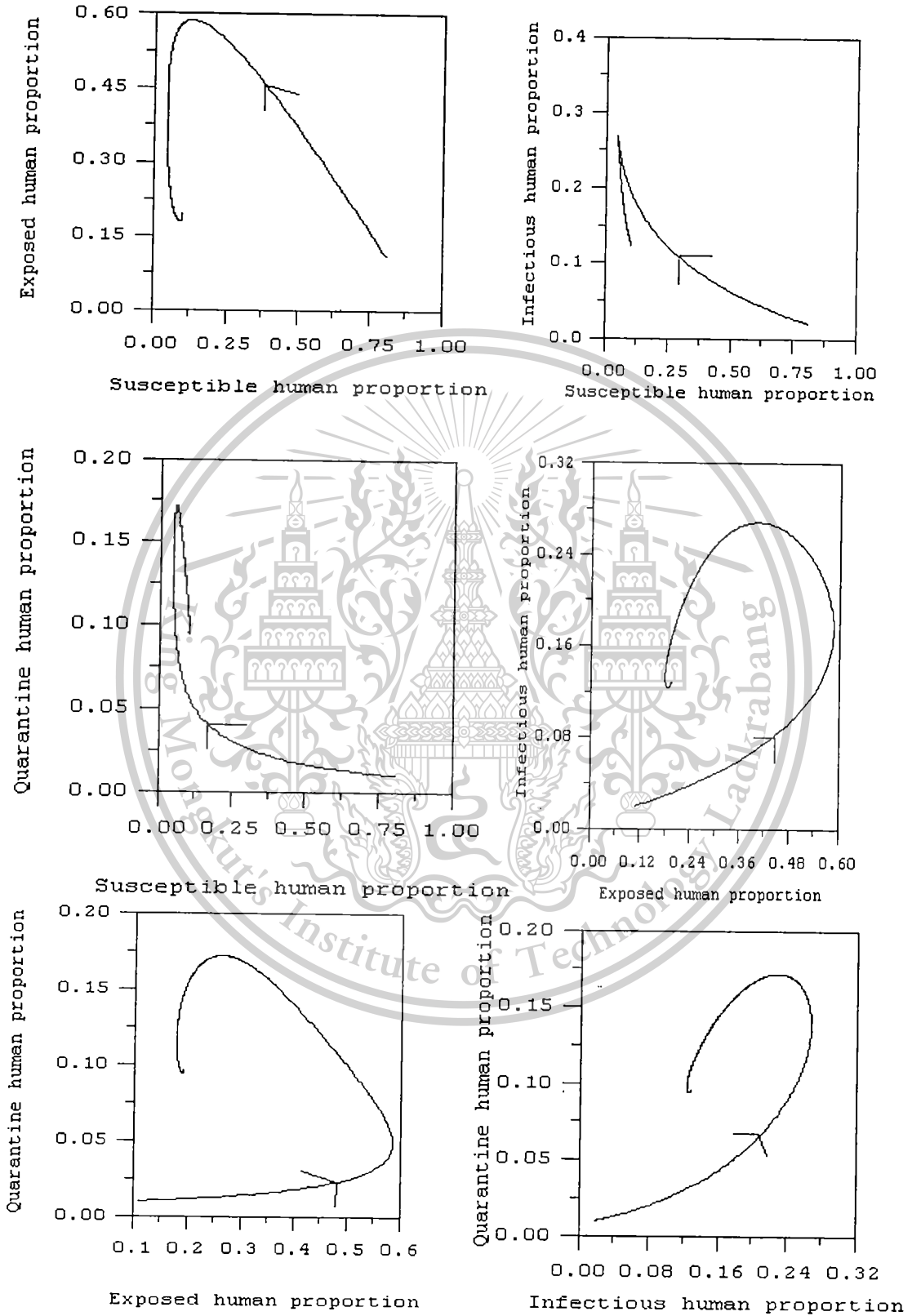
4.2a)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้

รองศาสตราจารย์ ดร.พันธ์ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



4.2b)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
รองศาสตราจารย์ ดร. พันชนัน พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

รูปที่ 4.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับ $R_0 > 1$ ค่าของพารามิเตอร์คือ $c = \frac{1}{30}$ ต่อวัน, $\mu_h = \frac{1}{365 \times 65}$ ต่อวัน, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ต่อวัน, $b = \frac{1}{40}$ ต่อวัน, $\theta = \frac{1}{6}$ ต่อวัน, $\alpha = \frac{1}{30}$ ต่อวัน, $\beta = \frac{1}{8}$ ต่อวัน, $\gamma = 0.05$ และ $R_0 = 0.625$.

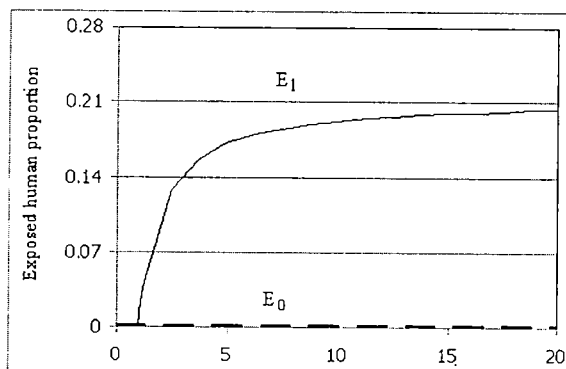
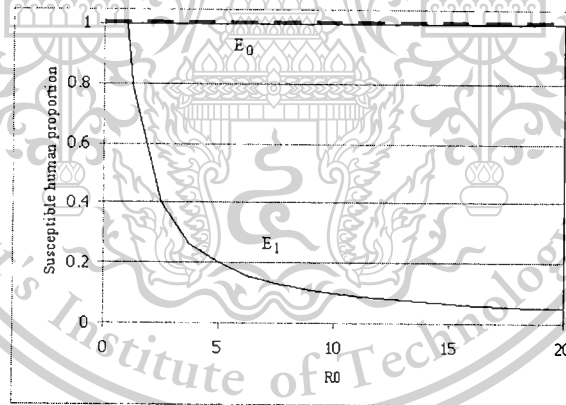
4.2a) ผลเฉลยตามเวลาของผู้เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ และผู้ที่ถูกกักกันโรคตามลำดับ

4.2b) แนววิถีผลเฉลยบนระนาบ (S,E), (S,I), (S,Q), (E,I), (E,Q) and (I,Q) สัดส่วนของผลเฉลย (S^*, E^*, I^*, Q^*) คู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะเรื้อรัง (0.100043, 0.193052, 0.128665, 0.0964747)

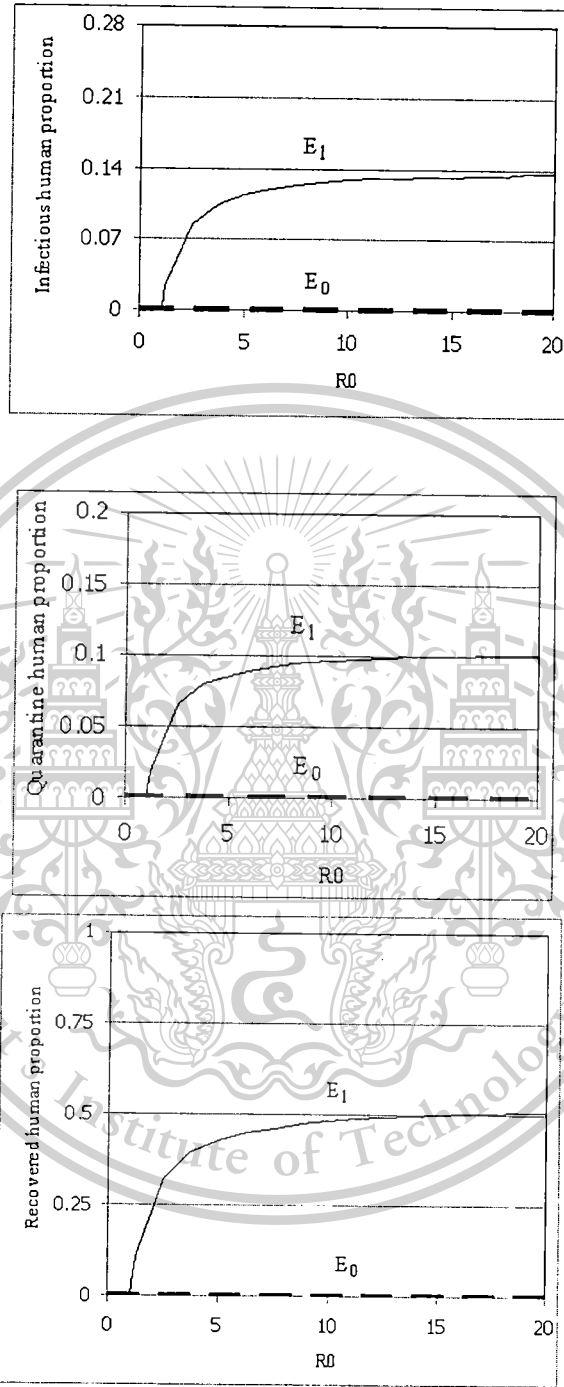
จากการวิเคราะห์ผลที่ได้ค่าขอบเขต threshold number (R_0) มีค่าเป็น

$$R_0 = \frac{\gamma(b + \beta + \varepsilon + \mu_h)}{(b + \beta + \mu_h)(c + \varepsilon + \mu_h)}$$

ถ้า R_0 น้อยกว่า 1 แล้วจุดสมดุล ณ สถานะไร้โรคมีความเสถียรภายใน และถ้า R_0 มากกว่า 1 แล้วจุดสมดุล ณ สถานะเรื้อรังมีความเสถียรภายใน แผนภาพ bifurcation แสดงได้ดังนี้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มาใช้
 รองศาสตราจารย์ ดร. พงษ์เทพี พงศ์สัมพันธ์



รูปที่ 4.3 แผนภาพ bifurcation ของสมการ (4.1) - (4.5) สำหรับ R_0 ที่แตกต่างกัน เมื่อพารามิเตอร์มีค่าดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มาใช้

รองศาสตราจารย์ ดร. พันธิ์ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$c = \frac{1}{30} \text{ ต่อวัน}, \mu_h = \frac{1}{365 \times 65} \text{ ต่อวัน}, \varepsilon = \frac{1}{10} \text{ ต่อวัน}, b = \frac{1}{40} \text{ ต่อวัน}, \theta = \frac{1}{6} \text{ ต่อวัน}, \alpha = \frac{1}{30} \text{ ต่อวัน และ } \beta = \frac{1}{8} \text{ ต่อวัน.}$$

----- แทนสถานะที่ผลเฉลยเสถียร และ

----- แทนสถานะที่ผลเฉลยไม่เสถียร สำหรับ $R_0 < 1$, E_0 จะมีความเสถียร สำหรับ $R_0 > 1$, E_1 จะไม่มีความเสถียร ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานนิยามโดย $R = \sqrt{R_0}$ ซึ่งแทนจำนวนโดยเฉลี่ยของผู้ป่วยที่เกิดจากการติดเชื้อครั้งที่ 1 จากแผนภาพข้างต้นแสดงว่า ถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 1 แล้วผู้ติดเชื้อที่เกิดขึ้นมีค่าน้อยกว่า 1 แล้วสถานะการระบาดหมดไป ถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 1 แล้วผู้เสี่ยงต่อการติดเชื้อลดลง และสัดส่วนของผู้ติดเชื้อมีค่าเพิ่มขึ้นเนื่องจากผู้เสี่ยงต่อการติดเชื้อเปลี่ยนสถานะไปเป็นผู้ติดเชื้อ

แบบจำลองแบบที่ 2 แบบจำลองแบบ SEIQR โดยที่พิจารณาการติดเชื้ออีกรอบ ระบบสมการที่ลดรูปแล้วแสดงได้ดังนี้

$$S'(t) = b_h + h_1 I_1(t) + h_2 I_2(t) + gE(t) - \delta S(t)(E(t) + I_1(t) + I_2(t)) + \gamma R(t) - b_h S(t) \quad (4.21)$$

$$E'(t) = \delta S(t)(E(t) + I_1(t) + I_2(t)) - (g + b_h + \alpha_1 + \alpha_2)E(t) \quad (4.22)$$

$$I_1'(t) = \alpha_1 E(t) - (h_1 + \lambda_1 + b_h)I_1(t) \quad (4.23)$$

$$I_2'(t) = \alpha_2 E(t) - (h_2 + \lambda_2 + b_h)I_2(t) \quad (4.24)$$

$$Q'(t) = \lambda_1 I_1(t) + \lambda_2 I_2(t) - (1 + b_h)Q(t) \quad (4.25)$$

$$\text{โดยที่ } S(t) + E(t) + I_1(t) + I_2(t) + Q(t) + R(t) = 1 \quad (4.26)$$

การวิเคราะห์

สถานะสมดุลที่ได้คือ

i) สถานะสมดุลไร้โรค

$$B_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$$

ii) สถานะสมดุลเวื้อรัง

$$B_1 = (S^*, E^*, I_1^*, I_2^*, Q^*)$$

โดยที่

$$S^* = \frac{D_1 D_2 D_3}{(\alpha_2 D_2 + \alpha_1 D_3 + 1) D_3 \delta} \quad (4.27)$$

$$E^* = \frac{D_1 E^*}{\delta} \quad (4.28)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มาใช้

รองศาสตราจารย์ ดร. พันธนี พงศ์สัมพันธ์

$$I_2^* = \frac{\alpha_2}{D_3} E^* \quad (4.29)$$

$$Q^* = \frac{\alpha_1 D_3 \lambda_1 + \alpha_2 D_2 \lambda_2}{D_2 D_3 D_4} E^* \quad (4.30)$$

$$E^* = \frac{X_1}{X_2} \quad (4.31)$$

โดยที่

$$X_1 = D_2 D_3 D_4 (D_1 D_2 D_3 + (\alpha_2 D_2 + (\alpha_1 + D_2) D_3) \delta) (b_h + \gamma), \quad (4.32)$$

$$X_2 = \alpha_2 D_2 + (\alpha_1 + D_2) D_3 \delta (D_1 D_2 D_3 D_4 + \alpha_1 D_3 (D_4 (\gamma + h_1) + \gamma \lambda_1) + D_2 (D_3 D_4 (g + \gamma) + \alpha_2 (D_4 \gamma + D_4 h_2 + \gamma \lambda_2))) \quad (4.33)$$

และ

$$D_1 = g + b_h + \alpha_1 + \alpha_2, \quad (4.34)$$

$$D_2 = h_1 + \lambda_1 + b_h, \quad (4.35)$$

$$D_3 = h_2 + \lambda_2 + b_h, \quad (4.36)$$

$$D_4 = i + b_h. \quad (4.37)$$

ทฤษฎีบทที่ 3 สถานะไร้โรค (B_0) ของสมการ (4.21)-(4.25) มีความเสถียรภายในบน \mathcal{C} สำหรับ

$\tau_0 < 1$, โดยที่

$$\mathcal{C} = \{(S, E, I_1, I_2, Q) | S \geq 0, E \geq 0, I_1 \geq 0, I_2 \geq 0, Q \geq 0, S + E + I_1 + I_2 + Q \leq 1\}.$$

พีชคณิตเมทริกซ์จาโคเบียนของสถานะไร้โรคคำนวณได้ดังนี้:

$$J_{B_0} = \begin{bmatrix} -b_h - \gamma & -\delta + g - \gamma & -\delta - \gamma + h_1 & -\delta - \gamma + h_2 & -\gamma \\ 0 & -D_1 + \delta & \delta & \delta & 0 \\ 0 & \alpha_1 & -D_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & -D_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & -D_4 \end{bmatrix}$$

สมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์จาโคเบียนคือ

$$(\lambda + D_4)(\lambda^3 + s_2 \lambda^2 + s_1 \lambda + s_0) = 0 \quad (4.38)$$

โดยที่

$$s_2 = D_1 + D_2 + D_3 + \delta, \quad (4.39)$$

$$s_1 = D_2 D_3 + D_1 (D_2 + D_3) - (\alpha_1 + \alpha_2 + D_2 + D_3) \delta, \quad (4.40)$$

$$s_0 = \alpha_1 D_2 D_3 + (\alpha_2 D_2 + (\alpha_1 + D_2) D_3) \delta. \quad (4.41)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พันธ์ พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าเฉพาะ (eigenvalues) $(\lambda_i; i=1,2,3,4)$ หาได้จากการแก้สมการ(4.38) นั่นก็คือ $\lambda_1 = -D_4$ ค่าเฉพาะที่เหลือ หาได้จากการแก้สมการ $\lambda^3 + s_2\lambda^2 + s_1\lambda + s_0 = 0$ จะเห็นได้ว่า λ_1 มีส่วนจริงเป็นค่าลบ ใช้เงื่อนไขของกฎ Routh-Hurwitz criteria เพื่อที่จะเช็คค่าเฉพาะตัวที่เหลือ ถ้าผลที่ได้สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างล่างนี้ จะได้ว่าค่าเฉพาะมีส่วนจริงเป็นค่าลบ

$$i) s_2 > 0 \tag{4.42}$$

$$ii) s_0 > 0 \tag{4.43}$$

$$iii) s_2s_1 - s_0 > 0. \tag{4.44}$$

จากการคำนวณ เงื่อนไข (4.42)-(4.44) เป็นจริงเมื่อ $T_0 < 1$; โดยที่

$$T_0 = \frac{\delta(\alpha_1(D_1 + D_2 + \delta) + \alpha_2(D_1 + D_3 + \delta) + (D_2 + D_3)(2D_1 + D_2 + D_3 + \delta))}{(D_1 + D_2)(D_1 + D_3)(D_2 + D_3)}$$

ดังนั้นสถานะไร้โรคมีความเสถียรภายในสำหรับ $T_0 < 1$. และไม่เสถียรสำหรับ $T_0 > 1$

ทฤษฎีบทที่ 4 สถานะเรื้อรัง (B_1) ของสมการ (4.21)-(4.25) มีความเสถียรภายในบน \mathcal{C} สำหรับ $T_0 > 1$

พิสูจน์ เมาทริกซ์จาโคเบียนของสถานะเรื้อรังคำนวณได้ดังนี้:

$$J_{B_1} = \begin{bmatrix} -D_5 - \delta(E^* + I_1^* + I_2^*) & D_6 - \delta S^* & D_7 - \delta S^* & D_8 - \delta S^* & -\gamma \\ \delta(E^* + I_1^* + I_2^*) & -D_1 + \delta S^* & \delta S^* & \delta S^* & 0 \\ 0 & \alpha_1 & -D_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & -D_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & -D_4 \end{bmatrix}$$

สมการลักษณะเฉพาะคือ

$$\lambda^5 + R_4\lambda^4 + R_3\lambda^3 + R_2\lambda^2 + R_1\lambda + R_0 = 0 \tag{4.45}$$

โดยที่

$$R_4 = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + \delta(E^* + I_1^* + I_2^* + S^*), \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned} R_3 = & -D_3D_4 + D_3D_5 + D_4D_5(D_3 + D_4 + D_6)\delta\delta^* + (D_3 + D_4 + D_6)\delta\delta^*(I_1^* + I_2^*) + D_1(D_2 + D_3 + D_4 + D_6 \\ & + \delta(E^* + I_1^* + I_2^*)) + D_2(D_3 + D_4 + D_5 + \delta(E^* + I_1^* + I_2^* \\ & + D_2(D_3 + D_4 + D_5 + \delta(E^* + I_1^* + I_2^* + S^*)) + (\alpha_1 + \alpha_2 \\ & + D_3 + D_4 + D_5)\delta\delta S^* \end{aligned}$$

$$\tag{4.47}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ภาควิชาคณิตศาสตร์, วิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี, กรุงเทพมหานคร
 ระบุว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$\begin{aligned}
 R_2 = & D_3 D_4 D_5 + (D_3 D_4 + (D_3 + D_4) D_6 + \alpha_1 D_7 + \alpha_2 D_8) \delta E^* \\
 & + (D_3 D_4 + (D_3 + D_4) D_6 + \alpha_1 D_7 + \alpha_2 D_8) \delta (I_1^* + I_2^*) \\
 & + D_1 (D_4 (D_5 + \delta (E^* + I_1^* + I_2^*))) + D_3 (D_4 + D_5 + \delta (E^* + I_1^* + I_2^*)) \\
 & + ((\alpha_2 + D_3) D_4 + (\alpha_2 + D_3 + D_4) D_5 + \alpha_1 (D_3 + D_4 + D_5)) \delta S^* \\
 & + D_2 (D_8 \delta (E^* + I_1^* + I_2^*) + D_4 (D_5 + \delta (E^* + I_1^* + I_2^* + S^*))) \\
 & + D_3 (D_4 + D_5 + \delta (E^* + I_1^* + I_2^* + S^*)) + (\alpha_2 + D_5) \delta S^*
 \end{aligned}
 \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
 R_1 = & D_1 (D_3 D_4 (D_5 + \delta (E^* + I_1^* + I_2^*))) + D_2 (D_4 (D_5 + \delta (E^* + I_1^* + I_2^*))) \\
 & + D_3 (D_4 + D_5 + \delta (E^* + I_1^* + I_2^*))) + \delta ((E^* + I_1^* + I_2^*) (D_3 D_4 D_6 \\
 & + \alpha_1 D_7 (D_3 + D_4) + \alpha_2 D_4 D_8 + \alpha_1 \gamma \lambda_1 + \alpha_2 \gamma \lambda_2)) \\
 & + (\alpha_1 D_3 D_4 + (\alpha_2 + D_3) D_4 D_5 + \alpha_1 (D_3 + D_4) D_5) S^* \\
 & + D_3 (D_4 (D_5 + \delta (E^* + I_1^* + I_2^* + S^*))) + \delta (D_6 (E^* + I_1^* + I_2^* + D_5 S^*)))
 \end{aligned}
 \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
 R_0 = & D_1 D_2 D_3 D_4 (D_5 + \delta (E^* + I_1^* + I_2^*)) (\alpha_1 D_3 (D_4 D_7 + \gamma \lambda_1) \\
 & - D_2 (D_3 D_4 D_6 + \alpha_2 D_4 D_8 + \alpha_2 \gamma \lambda_2)) + (\alpha_2 D_2 \\
 & + (\alpha_1 - D_2) D_3) D_4 D_5 \delta S^*
 \end{aligned}
 \tag{4.50}$$

โดยที่ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ และ α_4 นิยามใน (4.34) ถึง (4.37) และ D_5, D_6, D_7 และ D_8 นิยามไว้ดังนี้

$$D_5 = b_h + \gamma, \quad D_6 = g + \gamma, \quad D_7 = \gamma + h_1 \quad \text{and} \quad D_8 = \gamma + h_2.$$

เพื่อที่จะตรวจสอบความเสถียรภายใน กฎของ Routh-hurwitz criteria ได้นำมาใช้ในการวิเคราะห์ดังนี้

$$i) \quad R_1 > 0; j = 0, 1, 2, 3, 4 \tag{4.51}$$

$$ii) \quad R_4 R_3 R_2 - (R_2^2 + R_4^2 R_1) > 0 \tag{4.52}$$

$$iii) \quad (R_4 R_1 - R_0) (R_4 R_3 R_2 - R_2^2 - R_4^2 R_1) - R_0 (R_4 R_3 - R_2)^2 - R_4 R_0^2 > 0. \tag{4.53}$$

โดยการใช้โปรแกรม MATHEMATICA เงื่อนไขข้างต้นนี้เป็นจริง เมื่อ T_0 มากกว่า 1 แล้วจุดสมดุล ณ สภาวะเรื้อรังมีความเสถียรภายในสำหรับ T_0 มากกว่า 1

ผลเฉลยเชิงตัวเลข

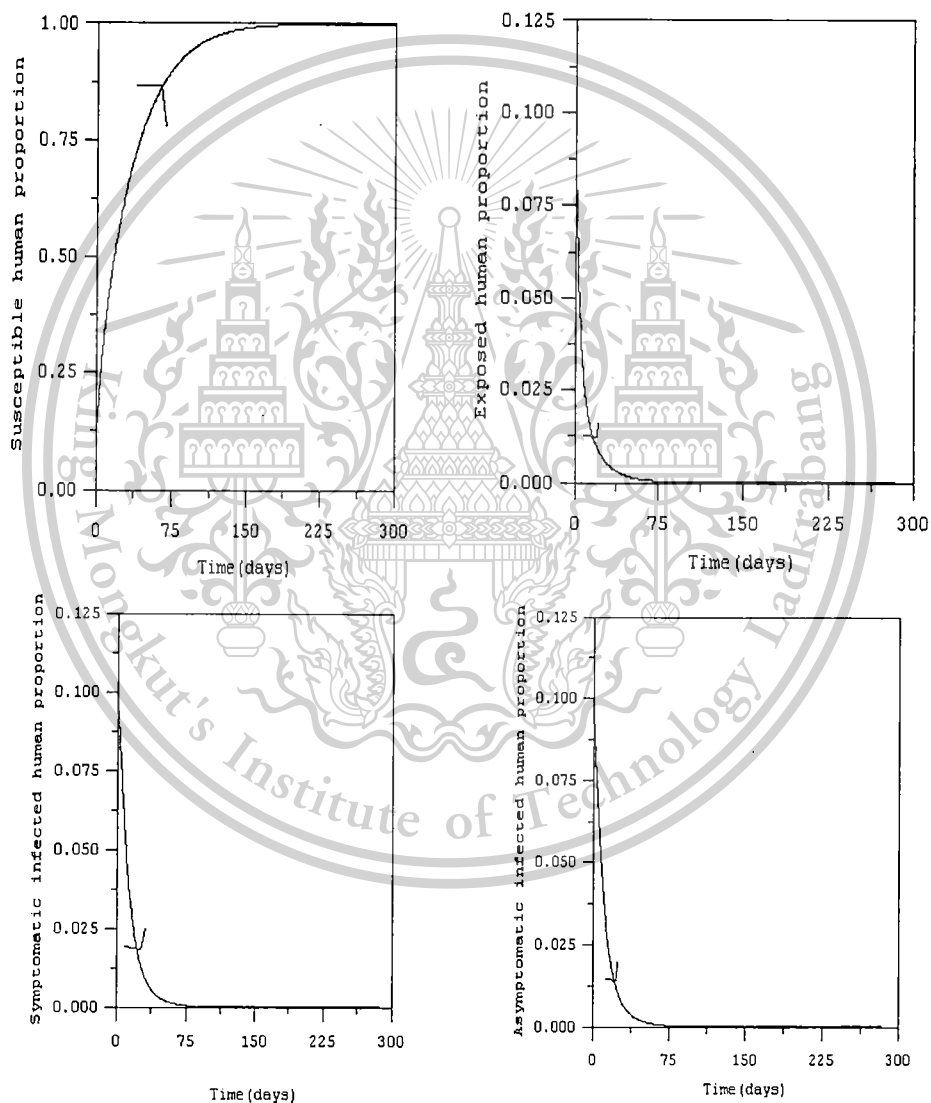
ในหัวข้อนี้ ผลเฉลยเชิงตัวเลขได้นำมาวิเคราะห์ พารามิเตอร์ที่ใช้มีค่าดังนี้ $b_h = 1/(365 \times 65)$ สอดคล้องกับอายุเฉลี่ยของประชากรมนุษย์ 65 ปี, $g = 1/20$ สอดคล้องกับจำนวนวัน 20 วันซึ่งประชากรผู้ติดเชื้อ

และยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้กลายเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ $h_1 = 1/16$ และ $h_2 = 1/10$ สอดคล้อง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยมนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งหากมีการนำไปใช้
 This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.
 Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

กับจำนวนวัน 16 วัน และ 10 วัน ที่ซึ่งผู้ติดเชื้อที่แสดงอาการกับผู้ติดเชื้อที่ไม่แสดงอาการกลายเป็นผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ตามลำดับ $\alpha_1 = 1/14$ และ $\alpha_2 = 1/12$ สอดคล้องกับระยะเวลาฟักตัวของเชื้อไวรัส 14 วัน และ 12 วัน สำหรับผู้ติดเชื้อที่แสดงอาการกับผู้ติดเชื้อที่ไม่แสดงอาการตามลำดับ $\lambda_1 = 1/20$ และ $\lambda_2 = 1/24$ สอดคล้องกับระยะเวลาที่ผู้ติดเชื้อที่แสดงอาการกับผู้ติดเชื้อที่ไม่แสดงอาการกลายเป็นผู้ที่ถูกกักกันโรคตามลำดับ $1 = 1/22$ สอดคล้องกับระยะเวลาการฟื้นฟูของโรคที่มีอยู่ 22 วัน ϵ เป็นค่าที่เลือกขึ้นมาเอง

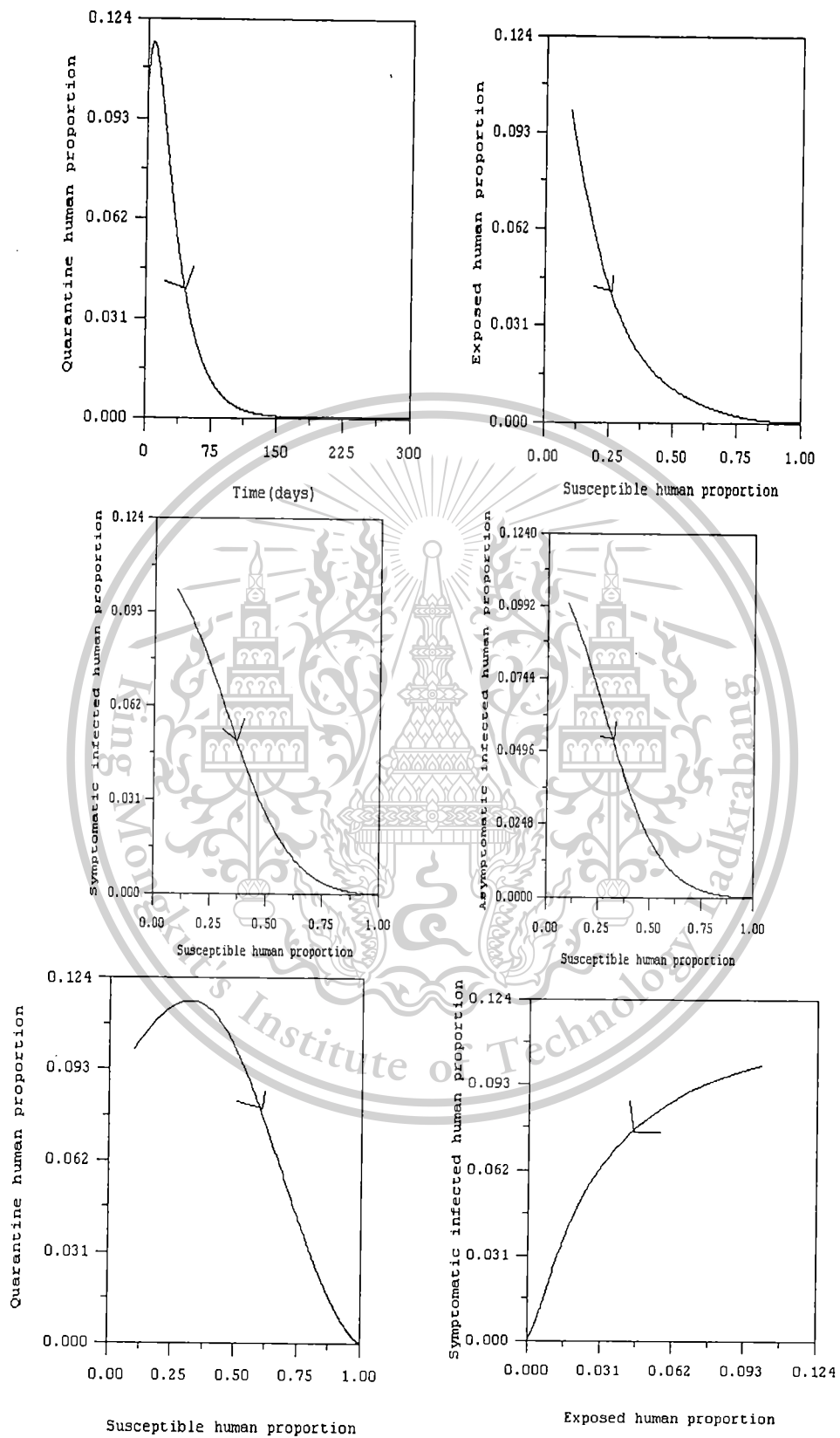


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มาใช้

รองศาสตราจารย์ ดร. พันธิ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

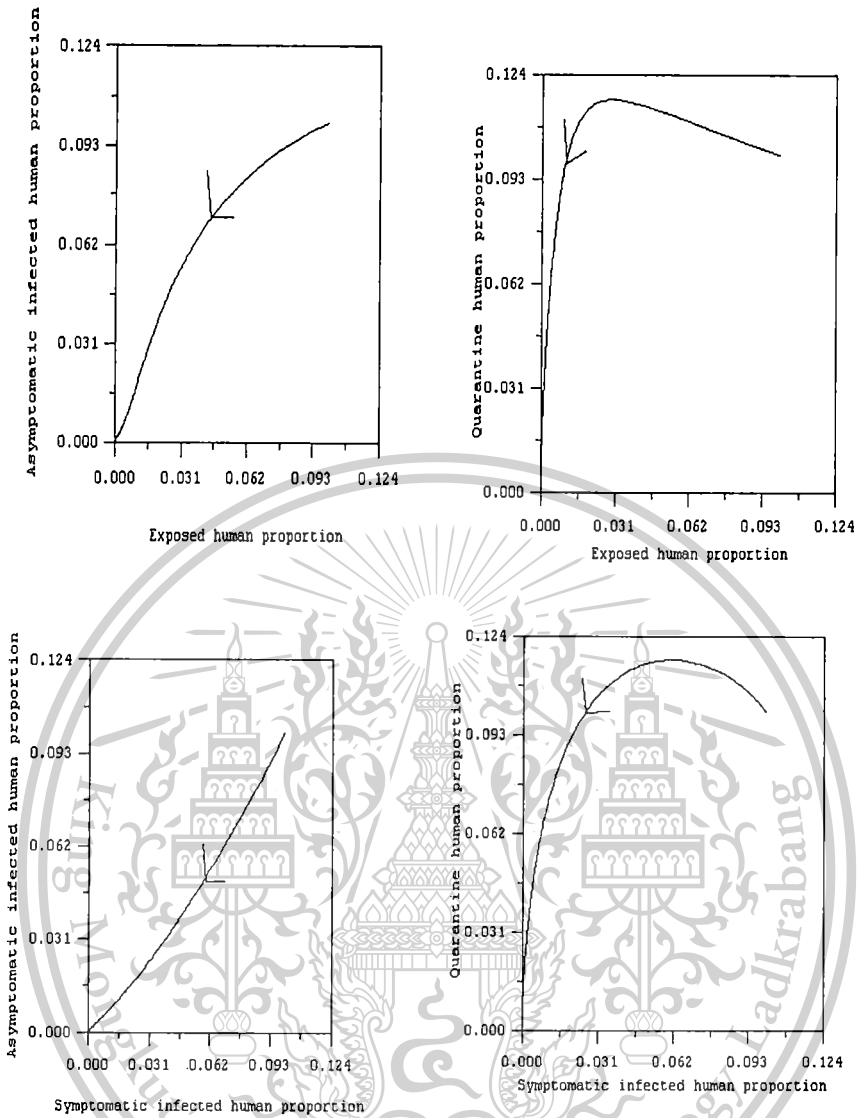


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

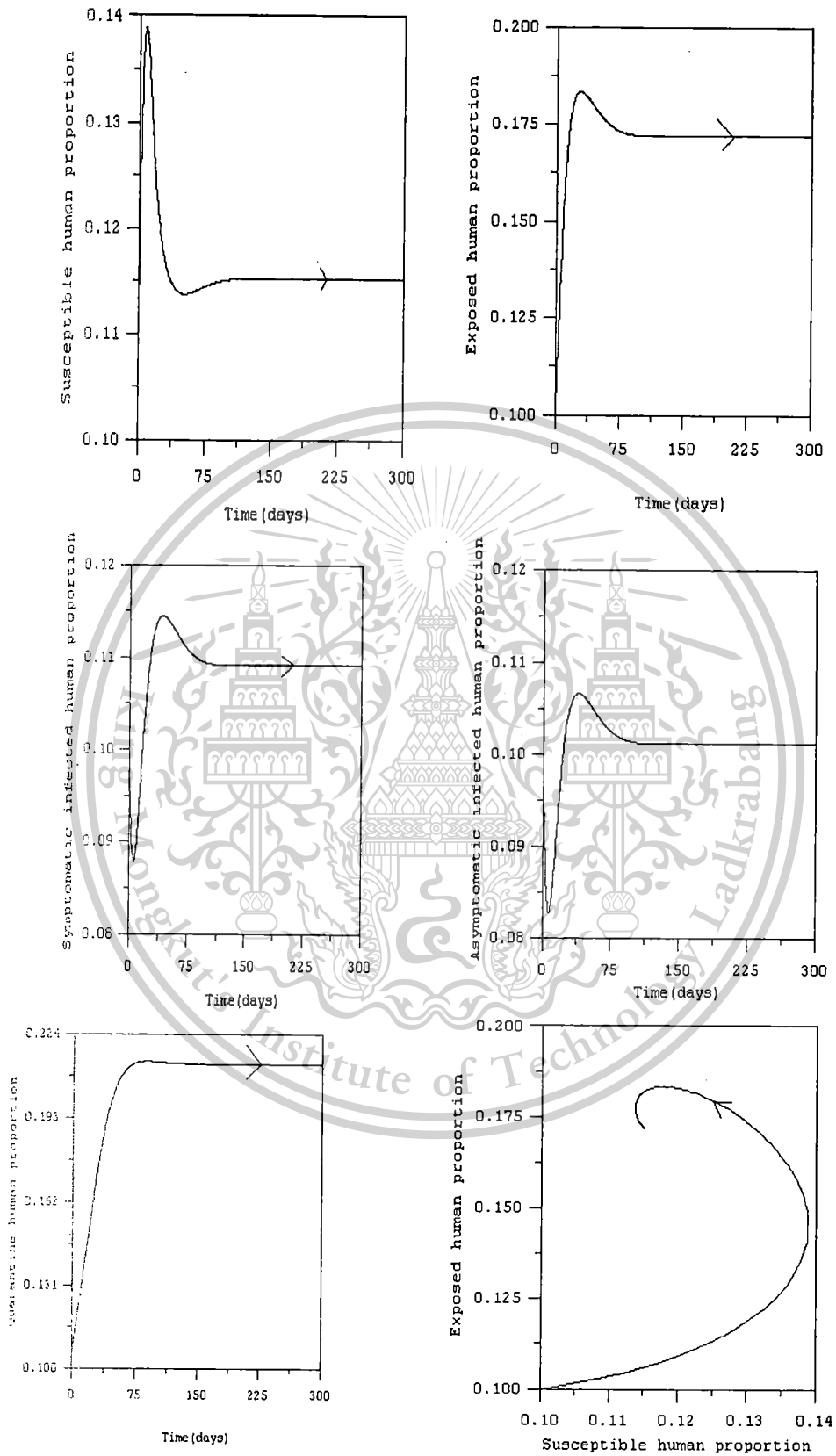
รองศาสตราจารย์ ดร.พันธ์ทิพย์ พงษ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



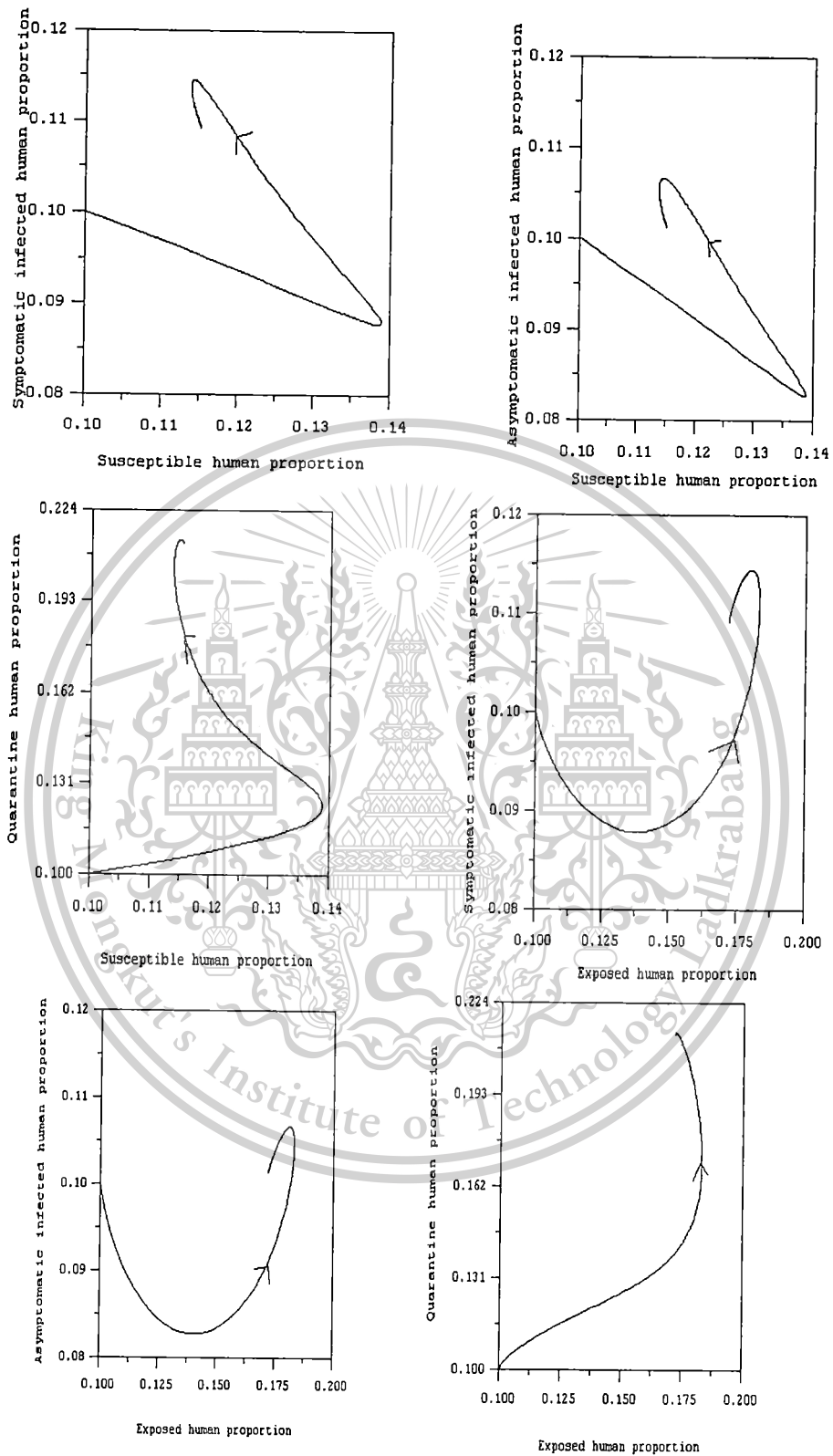
รูปที่ 4.4 ผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับ $T_0 < 1$ ค่าของพารามิเตอร์คือ $b_h = 1/(365 \times 65)$, $g = 1/20$, $h_1 = 1/16$, $h_2 = 1/10$, $\alpha_1 = 1/14$, $\alpha_2 = 1/12$, $\lambda_1 = 1/20$, $\lambda_2 = 1/24$, $l = 1/22$, $\delta = 0.05$, $T_0 = 0.43$ สัดส่วนของประชากรแต่ละกลุ่มเข้าสู่จุดสมดุลสถานะไร้โรค $B_0 = (1, 0, 0, 0)$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไร่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนชนิ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

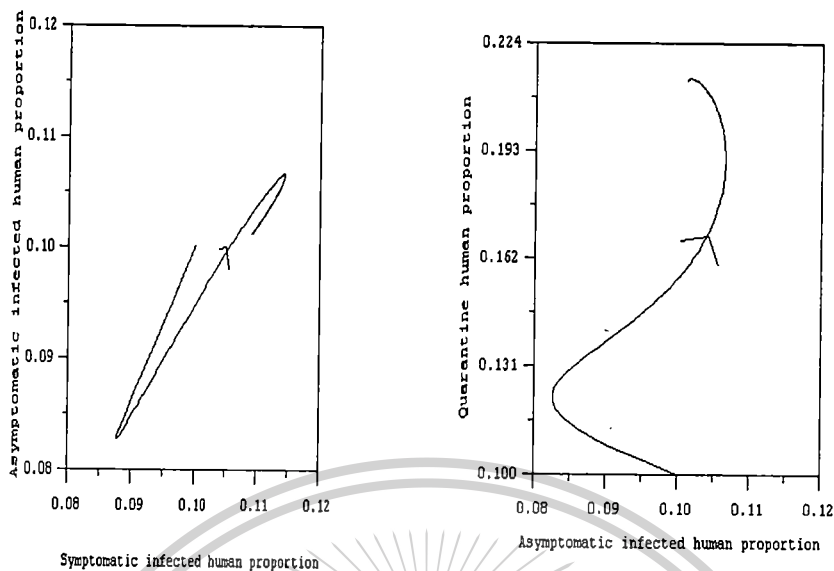


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มาใช้

รองศาสตราจารย์ ดร. พันธุ์ ฝงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

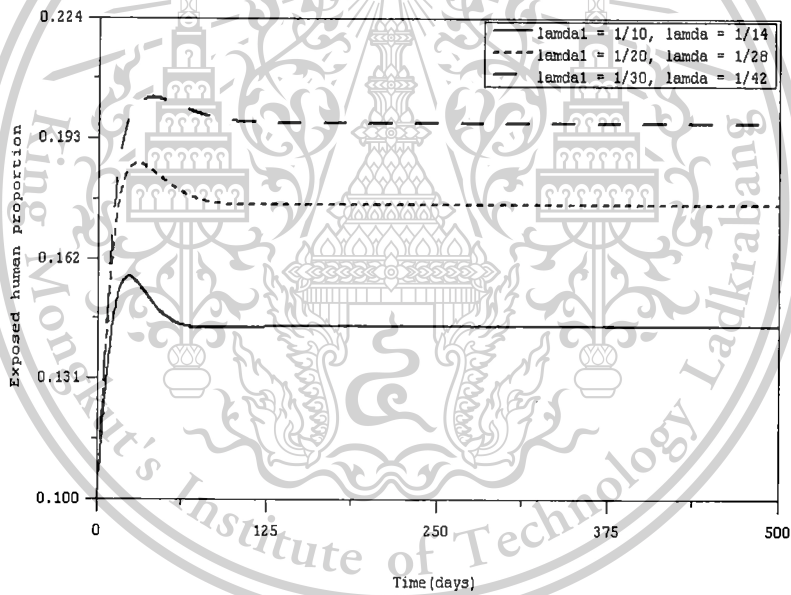
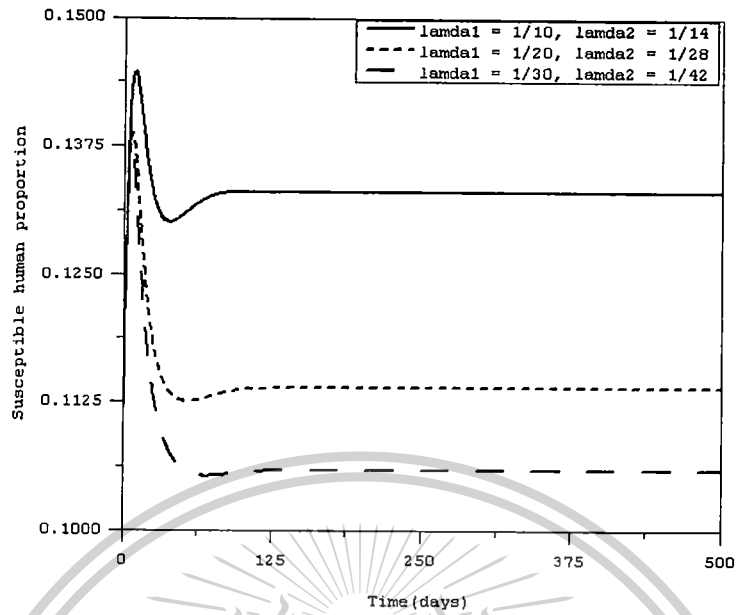
Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



รูปที่ 4.5 ผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับ $T_0 > 1$ ค่าของพารามิเตอร์คือ $b_h = 1/(365 \times 65)$, $g = 1/20$, $h_1 = 1/16$, $h_2 = 1/10$, $\alpha_1 = 1/14$, $\alpha_2 = 1/12$, $\lambda_1 = 1/20$, $\lambda_2 = 1/24$, $l = 1/22$, $s = 0.8$ and $T_0 = 15.67$. สัดส่วนของประชากรแต่ละกลุ่มเข้าสู่จุดสมดุลสถานะเรื้อรัง (0.115, 0.172, 0.109, 0.101, 0.213) จากการวิเคราะห์ผลที่ได้ค่าขอบเขต threshold number (T_0) มีค่าเป็น

$$T_0 = \frac{\delta(\alpha_1(D_1 + D_2 + \delta) + \alpha_2(D_1 + D_3 + \delta) + (D_2 + D_3)(2D_1 + D_2 + D_3 + \delta))}{(D_1 + D_2)(D_1 + D_3)(D_2 + D_3)}$$

ถ้า T_0 มีค่าน้อยกว่า 1 แล้วจุดสมดุล ณ สถานะไร้โรคมีความเสถียรภายใน และถ้า T_0 มากกว่า 1 แล้วจุดสมดุล ณ สถานะเรื้อรังมีความเสถียรภายใน ค่าขอบเขต threshold number (T_0) จะใช้เป็นแนวทางวางแผนการการระบาดของโรค ต่อไปแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขเมื่อจำนวนวันที่ผู้ติดเชื้อถูกกักกันโรคมีค่าแตกต่างกัน

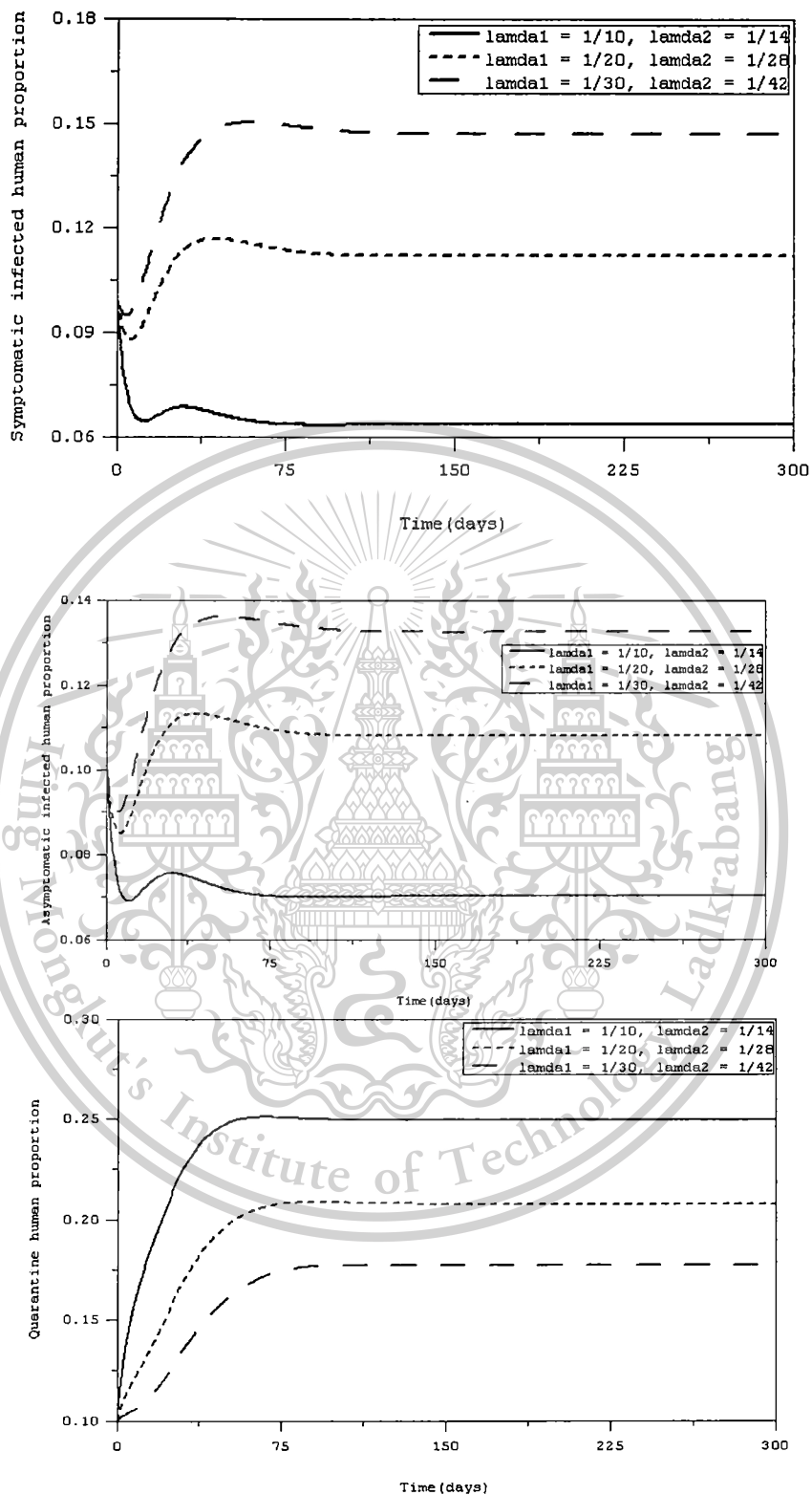


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มาใช้

รองศาสตราจารย์ ดร. พันธุ์ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



รูปที่ 4.6 ผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับช่วงเวลาการกักกัน โรคที่แตกต่างกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รองศาสตราจารย์ ดร.พนธ์นิ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

จากผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าถ้าระยะเวลาการกักกันโรคนานเท่าไร จุดสมดุลของผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ผู้ติดเชื้อที่แสดงอาการ และผู้ติดเชื้อที่ไม่แสดงอาการมีค่าเพิ่มขึ้น แต่จุดสมดุลของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อและผู้ฟื้นฟูมีค่าลดลง ช่วงเวลาการควบคุมโรคมียาวขึ้น

แบบจำลองแบบที่ 3 แบบจำลองแบบ SEIQR โดยที่พิจารณาการเคลื่อนที่ของประชากร สมการเชิงพลวัตของประชากรแสดงได้ดังนี้

$$\Delta S_{t,i} = -\gamma S_{t,i}(E_{t,i} + I_{t,i}) \tag{4.54}$$

$$\Delta E_{t,i} = \gamma S_{t,i}(E_{t,i} + I_{t,i}) - \frac{1}{IIP} E_{t,i} - cE_{t,i} \tag{4.55}$$

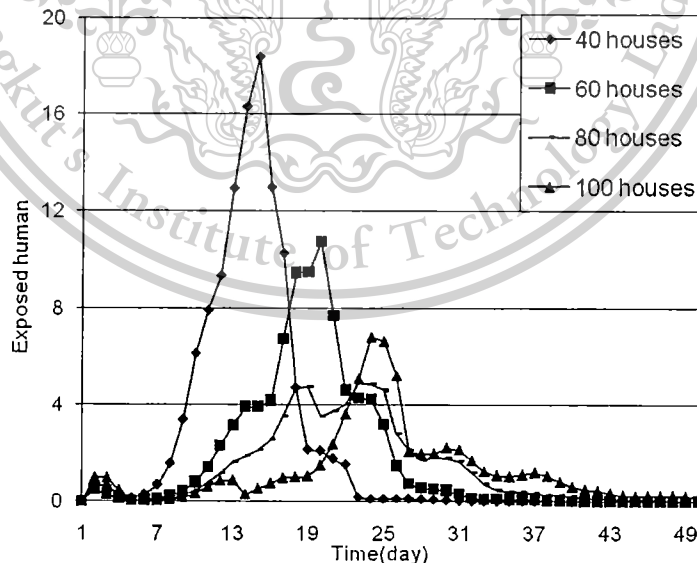
$$\Delta I_{t,i} = \frac{1}{IIP} E_{t,i} - fl_{t,i} - aI_{t,i} \tag{4.56}$$

$$\Delta Q_{t,i} = aI_{t,i} - bQ_{t,i} \tag{4.57}$$

$$\Delta R_{t,i} = fl_{t,i} + bQ_{t,i} + cE_{t,i} \tag{4.58}$$

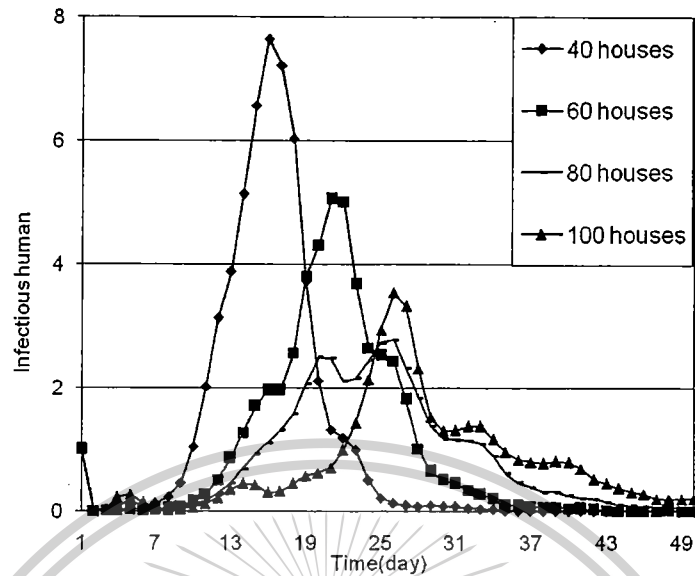
การวิเคราะห์

ผลเฉลยเชิงตัวเลขได้นำมาวิเคราะห์ในแบบจำลองนี้ การกระจายของประชากรตามเวลานำมาคำนวณ สำหรับสถานการณ์ที่แตกต่างกัน ผลที่ได้แสดงดังรูปต่อไปนี้

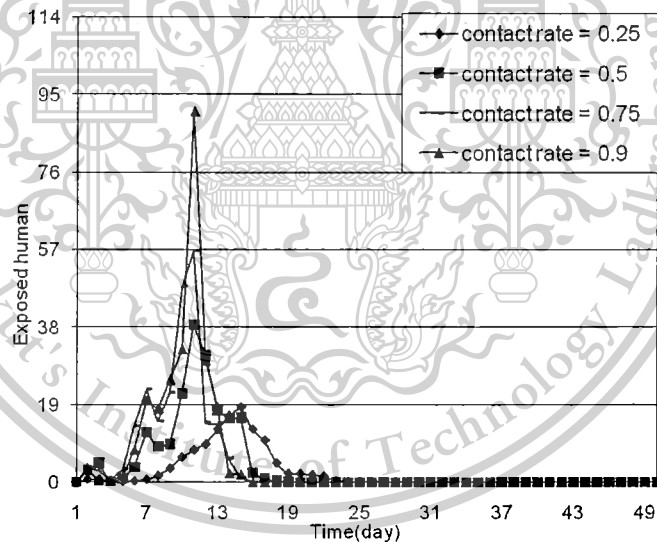


รูปที่ 4.7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับจำนวนบ้านที่แตกต่างกันในแต่ละหมู่บ้าน พารามิเตอร์มีค่าดังนี้ $N = 100, \gamma = 0.25, IIP = 5, a = 1/8, b = 1/6, c = 1/7,$

$f = 1/10$ เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำเนื้อหาไปใช้



รูปที่ 4.8 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับจำนวนบ้านที่แตกต่างกันในแต่ละหมู่บ้าน พารามิเตอร์มีค่าเหมือนกับรูปที่ 4.7

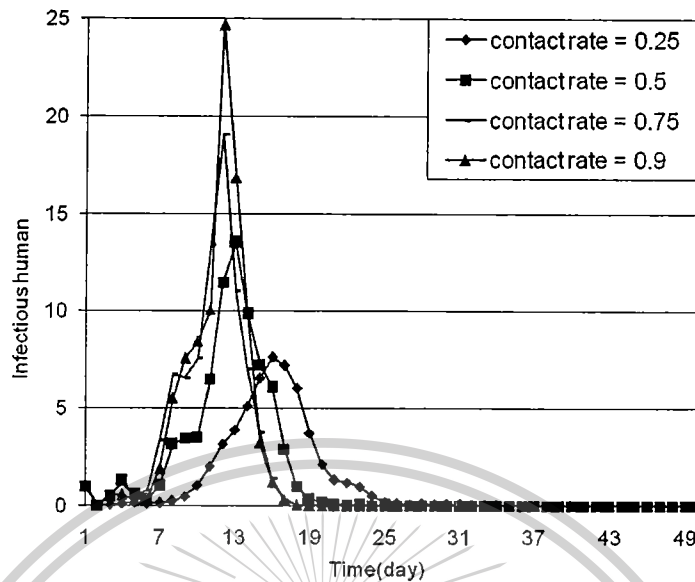


รูปที่ 4.9 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราการติดเชื้อที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าดังนี้ $N = 100, n = 40, IIP = 5, a = 1/8, b = 1/6, c = 1/7, f = 1/10$

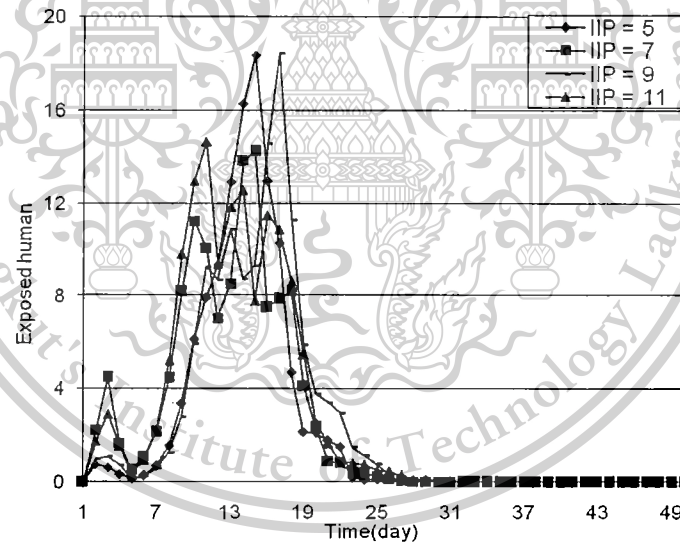
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



รูปที่ 4.10 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราการติดเชื้อที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าเหมือนกับรูปที่ 4.9

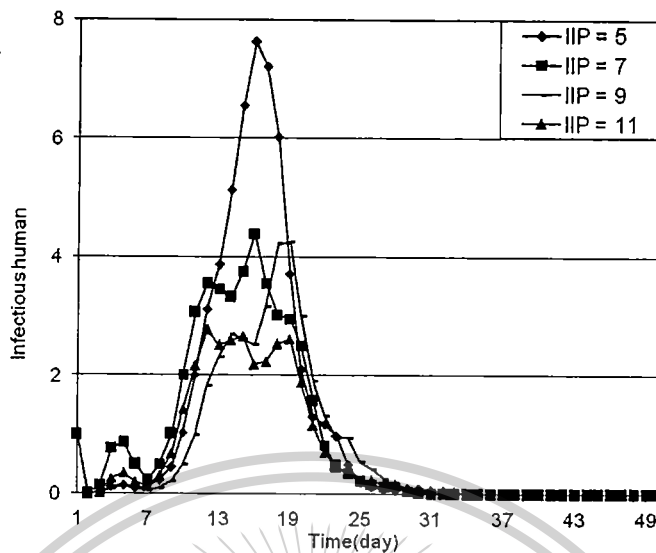


รูปที่ 4.11 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับระยะเวลาการฟักตัวของเชื้อไวรัส H1N1 ที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าดังนี้ $N = 100, n = 40, \gamma = 0.25, a = 1/8, b = 1/6, c = 1/7, f = 1/10$

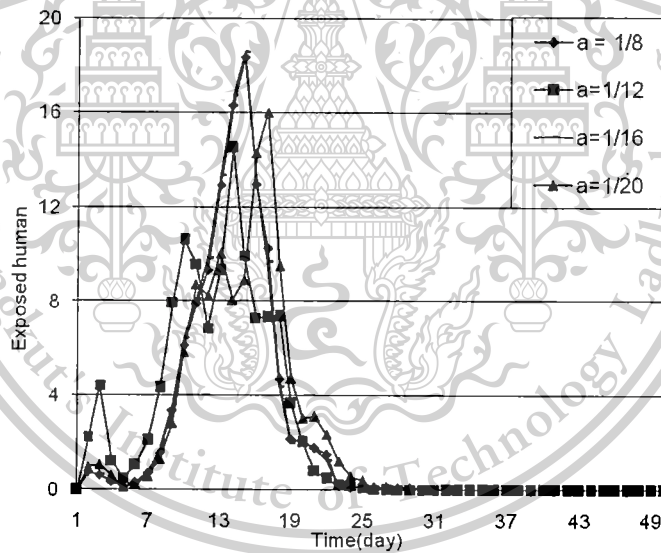
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



รูปที่ 4.12 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับระยะเวลาการฟักตัวของเชื้อไวรัส H1N1 ที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าเหมือนกับรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.13 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ถูกกักกันโรคในแต่ละหมู่บ้านที่แตกต่างกัน

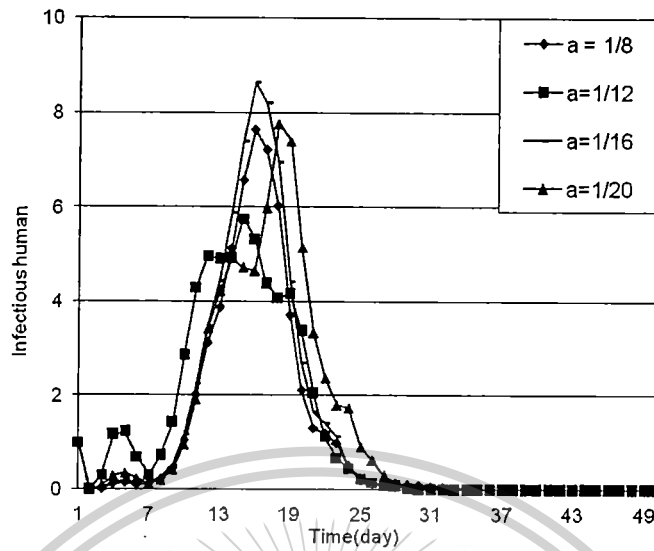
พารามิเตอร์มีค่าดังนี้ $N = 100, n = 40, \gamma = 0.25, IIP = 5, b = 1/6, c = 1/7, f = 1/10$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มาใช้

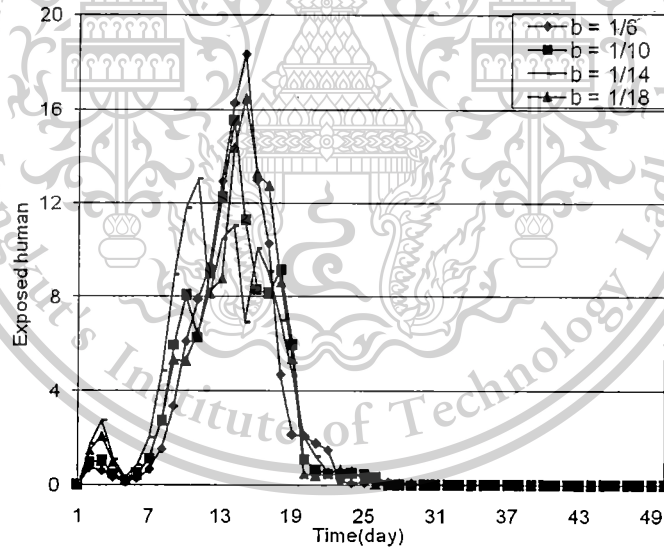
รองศาสตราจารย์ ดร. พันธุ์ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

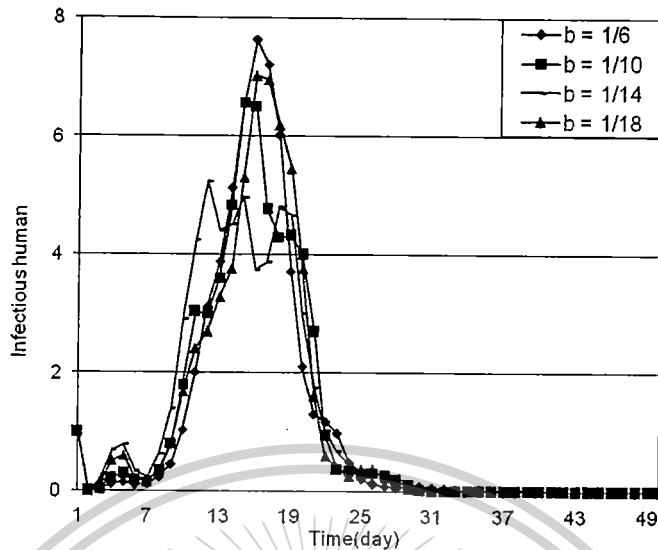
Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



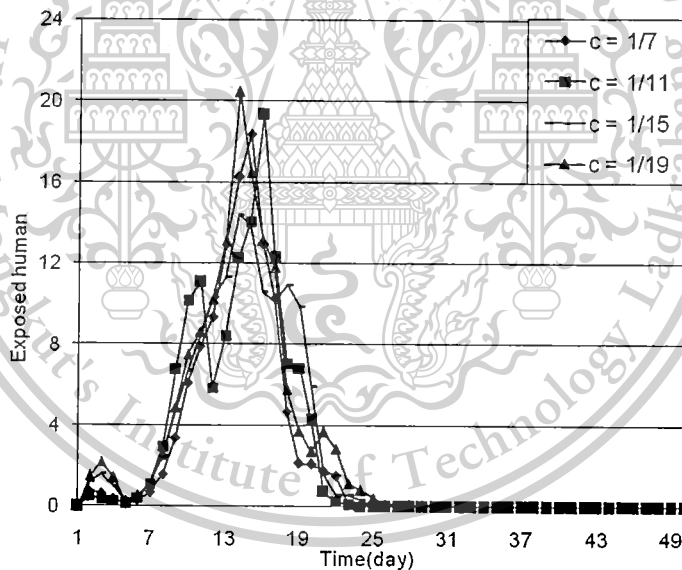
รูปที่ 4.14 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ถูกกักกันโรคในแต่ละหมู่บ้านที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าเหมือนกับรูปที่ 4.13



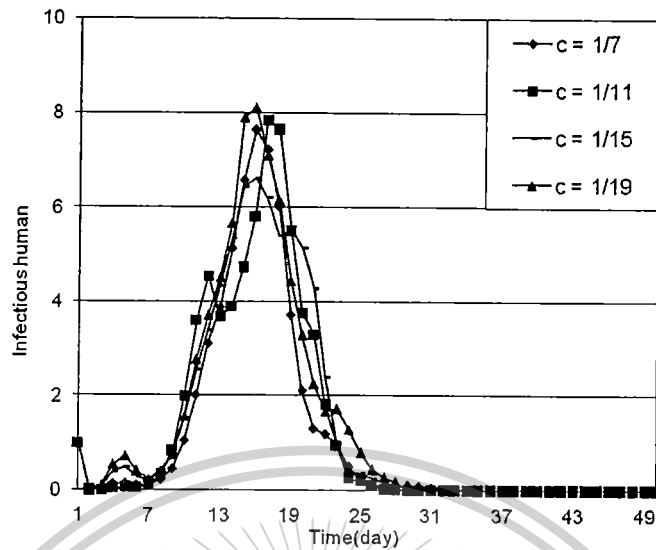
รูปที่ 4.15 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราที่ผู้ที่ถูกกักกันโรคเปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นฟูในแต่ละหมู่บ้านที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าดังนี้ $N = 100, n = 40, \gamma = 0.25, IIP = 5, a = 1/8, c = 1/7, f = 1/10$



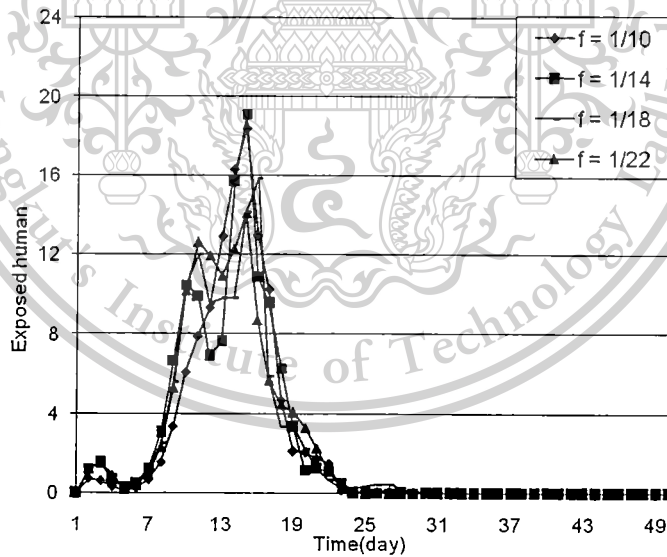
รูปที่ 4.16 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราที่ผู้ที่ถูกกักกันโรคเปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นฟูในแต่ละหมู่บ้านที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าเหมือนกับรูปที่ 4.15



รูปที่ 4.17 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราที่ผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นฟูในแต่ละหมู่บ้านที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าดังนี้ $N = 100, n = 40, \gamma = 0.25, IIP = 5, a = 1/8, b = 1/6, f = 1/10$



รูปที่ 4.18 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราที่ผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นไข้ในแต่ละหมู่บ้านที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าเหมือนกับรูปที่ 4.17

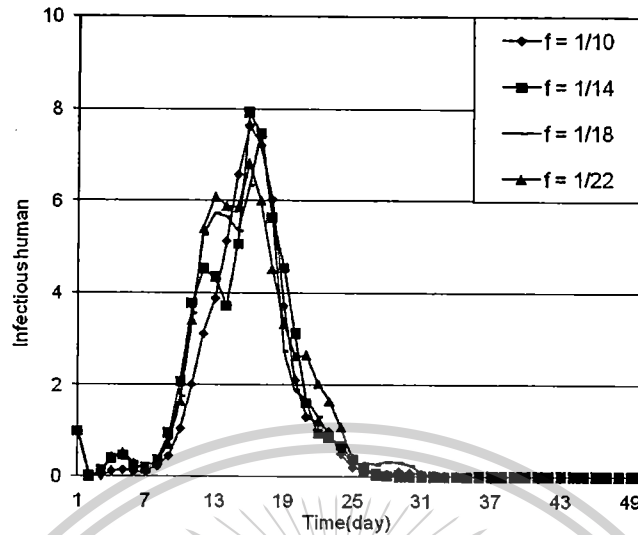


รูปที่ 4.19 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นไข้ในแต่ละหมู่บ้านที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าดังนี้ $N = 100$, $n = 40$, $\gamma = 0.25$, $IIP = 5$, $a = 1/8$, $b = 1/6$, $c = 1/7$, $f = 1/10$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารผู้ให้สิทธิ์ทุกครั้ง
รองศาสตราจารย์ ดร.พนัสนิ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



รูปที่ 4.20 ผลเฉลยเชิงตัวเลขตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ สำหรับอัตราที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นฟูในแต่ละหมู่บ้านที่แตกต่างกัน พารามิเตอร์มีค่าเหมือนกับรูปที่ 4.19

ผลเฉลยเชิงตัวเลขได้นำมาแสดงสำหรับชุดของพารามิเตอร์ที่แตกต่างกัน จะเห็นได้ว่าช่วงเวลาของการระบาดมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อมีจำนวนของบ้านในแต่ละหมู่บ้านลดลง อัตราการติดเชื้อเพิ่มขึ้น ช่วงเวลาการฟักตัวของเชื้อไวรัส H1N1 ลดลง จำนวนวันที่ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ที่ถูกกักกันโรคลดลง จำนวนวันที่ผู้ที่ถูกกักกันโรคเปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นฟูลดลง แต่เมื่อจำนวนวันซึ่งผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นฟูเพิ่มขึ้น และจำนวนวันซึ่งผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ฟื้นฟูเพิ่มขึ้นทำให้ช่วงเวลาของการระบาดของโรคเพิ่มขึ้น

แบบจำลองแบบที่ 4 แบบจำลองแบบ SEIQR โดยที่แบ่งประชากรออกเป็นกลุ่มอายุ 3 กลุ่มคือ กลุ่มอายุ 1-10 ปี กลุ่มอายุ 11-20 ปี และกลุ่มอายุมากกว่า 20 ปี

ระบบสมการที่ลดรูปแล้วแสดงได้ดังนี้

$$\frac{dS_1}{dt} = \theta_1(1 - S_1) - \theta_2 S_1(E_1 + I_1), \tag{4.59}$$

$$\frac{dE_1}{dt} = \theta_2 S_1(E_1 + I_1) - \theta_3 E_1, \tag{4.60}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \eta E_1 - \theta_4 I_1, \tag{4.61}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธ์นิ พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$\frac{dQ_1}{dt} = \varepsilon I_1 - \theta_5 Q_1, \quad (4.62)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = \theta_1 (S_1 - S_2) - \theta_6 S_2 (E_2 + I_2), \quad (4.63)$$

$$\frac{dE_2}{dt} = \theta_1 E_1 + \theta_6 S_2 (E_2 + I_2) - \theta_3 E_2, \quad (4.64)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \theta_1 I_1 + \eta E_2 - \theta_4 I_2, \quad (4.65)$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = \theta_1 Q_1 + \varepsilon I_2 - \theta_5 Q_2, \quad (4.66)$$

$$\frac{dS_3}{dt} = \mu (S_2 - S_3) - \theta_7 S_3 (E_3 + I_3), \quad (4.67)$$

$$\frac{dE_3}{dt} = \mu E_2 + \theta_7 S_3 (E_3 + I_3) - \theta_8 E_3, \quad (4.68)$$

$$\frac{dI_3}{dt} = \mu I_2 + \eta E_3 - \theta_9 I_3, \quad (4.69)$$

$$\frac{dQ_3}{dt} = \mu Q_2 + \varepsilon I_3 - \theta_{10} Q_3, \quad (4.70)$$

โดยที่ $\theta_1 = \mu + \kappa$, $\theta_2 = \frac{\delta_1 \mu}{\mu + \kappa}$, $\theta_3 = \mu + \eta + \alpha + \kappa$, $\theta_4 = \mu + \varepsilon + \beta + \kappa$, $\theta_5 = \mu + \gamma + \kappa$,
 $\theta_6 = \frac{\delta_2 \mu \kappa}{(\mu + \kappa)^2}$, $\theta_7 = \frac{\delta_3 \kappa^2}{(\mu + \kappa)^2}$, $\theta_8 = \mu + \eta + \alpha$, $\theta_9 = \mu + \varepsilon + \beta$, และ $\theta_{10} = \mu + \gamma$.

การวิเคราะห์ความเสถียรภายใน (Local stability analysis)

จุดสมดุลที่ได้คือ

i) จุดสมดุลสภาวะไร้โรค $P_0 = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$

ii) จุดสมดุลสภาวะเรื้อรังสำหรับกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3

$$\hat{P} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \hat{S}_3, \hat{E}_3, \hat{I}_3, \hat{Q}_3)$$

$$\text{โดยที่ } \hat{S}_3 = \frac{1}{\hat{L}_0}, \hat{E}_3 = \frac{\mu}{\theta_8 \hat{L}_0} [\hat{L}_0 - 1], \hat{I}_3 = \frac{\mu \eta}{\theta_8 \theta_9 \hat{L}_0} [\hat{L}_0 - 1], \hat{Q}_3 = \frac{\mu \eta \varepsilon}{\theta_8 \theta_9 \theta_{10} \hat{L}_0} [\hat{L}_0 - 1],$$

$$\text{และ } \hat{L}_0 = \frac{\theta_7 (\eta + \theta_9)}{\theta_8 \theta_9}.$$

iii) จุดสมดุลสภาวะเรื้อรังสำหรับกลุ่มอายุกลุ่มที่ 2 และ 3

$$\tilde{P} = (1, 0, 0, 0, \tilde{S}_2, \tilde{E}_2, \tilde{I}_2, \tilde{Q}_2, \tilde{S}_3, \tilde{E}_3, \tilde{I}_3, \tilde{Q}_3)$$

$$\text{โดยที่ } \tilde{S}_2 = \frac{1}{\tilde{L}_0}, \tilde{E}_2 = \frac{\theta_1}{\theta_3 \tilde{L}_0} [\tilde{L}_0 - 1], \tilde{I}_2 = \frac{\theta_1 \eta}{\theta_3 \theta_4 \tilde{L}_0} [\tilde{L}_0 - 1], \tilde{Q}_2 = \frac{\theta_1 \eta \varepsilon}{\theta_3 \theta_4 \theta_5 \tilde{L}_0} [\tilde{L}_0 - 1],$$

$$\tilde{S}_3 = \frac{\mu \tilde{S}_2}{\theta_7 (\tilde{E}_3 + \tilde{I}_3) + \mu}, \tilde{E}_3 = \frac{-X_2 + \sqrt{X_2^2 - 4X_1 X_3}}{2X_1}, \tilde{I}_3 = \frac{\mu \tilde{I}_2 + \eta \tilde{E}_3}{\theta_9}, \tilde{Q}_3 = \frac{\mu \tilde{Q}_2 + \varepsilon \tilde{I}_3}{\theta_{10}},$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนชนิ พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

และ $\tilde{L}_0 = \frac{\theta_6(\eta + \theta_4)}{\theta_3\theta_4}$,

$X_1 = \theta_7\theta_8(\eta + \theta_9)$, $X_2 = \mu\theta_8\theta_9 + \mu\theta_7(\theta_8\tilde{I}_2 - (\eta + \theta_9)\tilde{S}_2 - (\eta + \theta_9)\tilde{E}_2)$,

และ $X_3 = -[\mu^2\theta_7\tilde{I}_2(\tilde{S}_2 + \tilde{E}_2) + \mu^2\theta_9\tilde{E}_2]$.

iv) จุดสมดุลสภาวะเรื้อรังสำหรับกลุ่มอายุกลุ่มที่ 1, 2 และ 3

$P^* = (S_1^*, E_1^*, I_1^*, Q_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, Q_2^*, S_3^*, E_3^*, I_3^*, Q_3^*)$

โดยที่ $S_1^* = \frac{1}{L_0^*}$, $E_1^* = \frac{\theta_1}{\theta_3 L_0^*} [L_0^* - 1]$, $I_1^* = \frac{\theta_1 \eta}{\theta_3 \theta_4 L_0^*} [L_0^* - 1]$, $Q_1^* = \frac{\theta_1 \eta \varepsilon}{\theta_3 \theta_4 \theta_5 L_0^*} [L_0^* - 1]$,

$S_2^* = \frac{\theta_1 S_1^*}{\theta_6 (E_2^* + I_2^*) + \theta_1}$, $E_2^* = \frac{-Y_2 + \sqrt{Y_2^2 - 4Y_1 Y_3}}{2Y_1}$, $I_2^* = \frac{\theta_1 I_1^* + \eta E_2^*}{\theta_4}$, $Q_2^* = \frac{\theta_1 Q_1^* + \varepsilon I_2^*}{\theta_5}$,

$S_3^* = \frac{\mu S_2^*}{\theta_7 (E_3^* + I_3^*) + \mu}$, $E_3^* = \frac{-Z_2 + \sqrt{Z_2^2 - 4Z_1 Z_3}}{2Z_1}$, $I_3^* = \frac{\mu I_2^* + \eta E_3^*}{\theta_9}$, $Q_3^* = \frac{\mu Q_2^* + \varepsilon I_3^*}{\theta_{10}}$,

และ $L_0^* = \frac{\theta_2(\eta + \theta_4)}{\theta_3\theta_4}$, $Y_1 = \theta_3\theta_6(\eta + \theta_4)$, $Y_2 = \theta_1\theta_3\theta_4 + \theta_1\theta_6(\theta_3 I_1^* - (\eta + \theta_4)S_1^* - (\eta + \theta_4)E_1^*)$,

$Y_3 = -[\theta_1^2\theta_6 I_1^* (S_1^* + E_1^*) + \theta_1^2\theta_4 E_1^*]$, $Z_1 = \theta_7\theta_8(\eta + \theta_9)$,

$Z_2 = \mu\theta_8\theta_9 + \mu\theta_7(\theta_8 I_2^* - (\eta + \theta_9)S_2^* - (\eta + \theta_9)E_2^*)$ and $Z_3 = -[\mu^2\theta_7 I_2^* (S_2^* + E_2^*) + \mu^2\theta_9 E_2^*]$.

สภาวะสุดท้ายในสามารถหาได้จากเมตริกซ์จาโคเบียนที่คำนวณที่จุดสมดุล ถ้าค่าเฉพาะมีส่วนจริงเป็นค่าลบซึ่งค่าเฉพาะหาได้จากสมการลักษณะเฉพาะ $\det(J(p) - \lambda I_{12}) = 0$ โดยที่ $J(p)$ เป็นเมตริกซ์จาโคเบียนที่คำนวณ ณ จุดสมดุล p , I_{12} เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 12×12 ถ้าค่าเฉพาะมีส่วนจริงเป็นค่าลบแล้วจุดสมดุลมีความเสถียรภายใน คุณสมบัติความเสถียรภายในแสดงดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 5 ถ้า $L_0^* < 1$, $\tilde{L}_0 < 1$ และ $\hat{L}_0 < 1$, แล้วจุดสมดุล P_0 มีความเสถียรภายใน

พิสูจน์ สำหรับจุดสมดุลสภาวะไร้โรค $P_0 = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$,

สมการลักษณะเฉพาะคือ

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \theta_1)^2(\lambda + \theta_3)^2(\lambda + \theta_{10})[\lambda^2 + a_1\lambda + a_2][\lambda^2 + b_1\lambda + b_2][\lambda^2 + c_1\lambda + c_2] = 0, \tag{4.71}$$

โดยที่

$$a_1 = \frac{(1 - L_0^*)\theta_3\theta_4 + \eta\theta_3}{\eta + \theta_4} + \theta_4, \quad a_2 = \theta_3\theta_4(1 - L_0^*), \quad b_1 = \frac{(1 - \tilde{L}_0)\theta_3\theta_4 + \eta\theta_3}{\eta + \theta_4} + \theta_4, \quad b_2 = \theta_3\theta_4(1 - \tilde{L}_0),$$

$$c_1 = \frac{(1 - \hat{L}_0)\theta_8\theta_9 + \eta\theta_8}{\eta + \theta_9} + \theta_9, \quad \text{and} \quad c_2 = \theta_8\theta_9(1 - \hat{L}_0).$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 วิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี ๒๐๒๓
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

จากสมการเฉพาะ (4.71) จะเห็นได้ว่า ค่าเฉพาะทั้ง 6 ตัวคือ $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_{2,3} = -\theta_1$, $\lambda_{4,5} = -\theta_5$ และ $\lambda_6 = -\theta_{10}$, สังเกตเห็นได้ว่าค่าเฉพาะทั้ง 6 ตัวข้างต้นมีค่าเป็นลบ ค่าเฉพาะที่เหลือหาได้จากการแก้

$$\text{สมการลักษณะเฉพาะ } \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0 \text{ และ } \lambda^2 + c_1\lambda + c_2 = 0$$

แต่สำหรับความเสถียรภายใน เครื่องหมายของค่าเฉพาะต้องเป็นค่าลบ ใช้กฎของ Routh-Hurwitz criteria เพื่อเช็คเครื่องหมายของค่าเฉพาะพิจารณารูปแบบของสมการลักษณะเฉพาะ

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0,$$

ความเสถียรภายในเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $A > 0$ และ $B > 0$

สำหรับรูปแบบของสมการลักษณะเฉพาะ

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \quad a_1 > 0 \text{ และ } a_2 > 0, \text{ เมื่อ } \tilde{L}_0 < 1$$

สำหรับรูปแบบของสมการลักษณะเฉพาะ

$$\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0, \quad b_1 > 0 \text{ และ } b_2 > 0, \text{ เมื่อ } \tilde{L}_0 < 1$$

สำหรับรูปแบบของสมการลักษณะเฉพาะ

$\lambda^2 + c_1\lambda + c_2 = 0, \quad c_1 > 0$ และ $c_2 > 0$, เมื่อ $\hat{L}_0 < 1$. นั่นก็คือ รากของสมการลักษณะเฉพาะทั้งสามตัวมีส่วนจริงเป็นค่าลบ เมื่อ $\tilde{L}_0 < 1, \tilde{L}_0 < 1$ และ $\hat{L}_0 < 1$, ตามลำดับ

ทฤษฎีบทที่ 6 ถ้า $\tilde{L}_0 < 1, \tilde{L}_0 < 1$ และ $\hat{L}_0 > 1$, แล้วจุดสมดุล \hat{P} มีความเสถียรภายใน

พิสูจน์ จุดสมดุลสถานะเรื้อรังสำหรับกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 $\hat{P} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \hat{S}_3, \hat{E}_3, \hat{I}_3, \hat{Q}_3)$, สมการลักษณะเฉพาะคือ

$$(\lambda + \theta_1)^2(\lambda + \theta_5)^2(\lambda + \theta_{10})[\lambda^2 + a_1\lambda + a_2][\lambda^2 + b_1\lambda + b_2][\lambda^3 + d_1\lambda^2 + d_2\lambda + d_3] = 0, \quad (4.72)$$

โดยที่

$$d_1 = \mu + \theta_9 + \frac{\eta\theta_7}{\theta_9\tilde{L}_0} + \theta_7(\hat{E}_3 + \hat{I}_3), \quad d_2 = \mu\theta_9 + \frac{\mu\eta\theta_7}{\theta_9\tilde{L}_0} + \theta_7\theta_8(\hat{E}_3 + \hat{I}_3) + \theta_7\theta_9(\hat{E}_3 + \hat{I}_3), \quad d_3 = \theta_7\theta_8\theta_9(\hat{E}_3 + \hat{I}_3),$$

$$\text{และ } \hat{E}_3 = \frac{\mu}{\theta_8\tilde{L}_0}[\hat{L}_0 - 1], \quad \hat{I}_3 = \frac{\mu\eta}{\theta_8\theta_9\tilde{L}_0}[\hat{L}_0 - 1].$$

จากสมการลักษณะเฉพาะ (4.72) จะเห็นได้ว่า ค่าเฉพาะ 5 ตัวแรกคือ $\lambda_{1,2} = -\theta_1, \lambda_{3,4} = -\theta_5$ and

$\lambda_5 = -\theta_{10}$ สังเกตเห็นได้ว่าค่าเฉพาะทั้ง 5 ตัวมีส่วนจริงเป็นค่าลบ ค่าเฉพาะตัวที่เหลือหาได้จากการแก้สมการ

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0 \text{ และ } \lambda^3 + d_1\lambda^2 + d_2\lambda + d_3 = 0.$$

สำหรับ $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ และ $\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0$ รากทุกๆตัวของสมการมีส่วนจริงเป็นค่าลบเมื่อ

$\tilde{L}_0 < 1$ และ $\tilde{L}_0 < 1$ ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนรัตน์ พงศ์สัมพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

จากกฎของ Routh–Hurwitz criteria, พิจารณาสมการ $\lambda^3 + d_1\lambda^2 + d_2\lambda + d_3 = 0$,

ความเสถียรเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $d_1 > 0$, $d_3 > 0$ และ $d_1d_2 - d_3 > 0$.

ถ้า $\tilde{L}_0 > 1$, จะได้ว่า $d_1 > 0$, และ $d_3 > 0$, สังเกตเห็นได้ว่า $d_1d_2 - d_3 > 0$ สังเกตจากพจน์ $-d_3$ กับผลคูณระหว่างพจน์ที่สองของ d_1 และพจน์ที่สามของ d_2 ดังนั้นผลที่ได้จึงสอดคล้องกับกฎของ Routh–Hurwitz criteria

ทฤษฎีบทที่ 7 ถ้า $L_0 < 1$ และ $\tilde{L}_0 > 1$, แล้วจุดสมดุล \tilde{P} มีความเสถียรภายใน

พิสูจน์ สำหรับจุดสมดุลสถานะเรื้อรังสำหรับกลุ่มอายุกลุ่มที่ 2 และ 3

$\tilde{P} = (1, 0, 0, 0, \tilde{S}_2, \tilde{E}_2, \tilde{I}_2, \tilde{Q}_2, \tilde{S}_3, \tilde{E}_3, \tilde{I}_3, \tilde{Q}_3)$, สมการลักษณะเฉพาะคือ

$$(\lambda + \theta_1)(\lambda + \theta_3)^2(\lambda + \theta_{10})[\lambda^2 + a_1\lambda + a_2][\lambda^3 + e_1\lambda^2 + e_2\lambda + e_3][\lambda^3 + f_1\lambda^2 + f_2\lambda + f_3] = 0, \quad (4.73)$$

โดยที่

$$e_1 = \theta_1 + \theta_4 + \frac{\eta\theta_6}{\theta_4\tilde{R}_0} + \theta_6(\tilde{E}_2 + \tilde{I}_2),$$

$$e_2 = \theta_1\theta_4 + \frac{\eta\theta_1\theta_6}{\theta_4\tilde{R}_0} + \theta_6\theta_3(\tilde{E}_2 + \tilde{I}_2) + \theta_6\theta_4(\tilde{E}_2 + \tilde{I}_2), \quad e_3 = \theta_6\theta_3\theta_4(\tilde{E}_2 + \tilde{I}_2),$$

$$f_1 = \mu + \theta_8 + \theta_9 + \theta_7(\tilde{E}_3 + \tilde{I}_3 - \tilde{S}_3) \quad f_2 = \mu(\theta_8 + \theta_9) + \theta_8\theta_9 + \theta_7(\theta_8 + \theta_9)(\tilde{E}_3 + \tilde{I}_3) - \theta_7\tilde{S}_3(\mu + \eta + \theta_9),$$

$$f_3 = \mu\theta_8\theta_9 + \theta_7\theta_8\theta_9(\tilde{E}_3 + \tilde{I}_3) - \mu\theta_7(\eta + \theta_9)\tilde{S}_3, \quad \text{และ} \quad \tilde{E}_2 = \frac{\theta_1}{\theta_3\tilde{L}_0}[\tilde{L}_0 - 1], \quad \tilde{I}_2 = \frac{\theta_1\eta}{\theta_3\theta_4\tilde{L}_0}[\tilde{L}_0 - 1].$$

จากสมการลักษณะเฉพาะข้างต้น จะเห็นได้ว่าค่าเฉพาะ 4 ตัวแรกคือ $\lambda_1 = -\theta_1, \lambda_{2,3} = -\theta_3$ และ $\lambda_4 = -\theta_{10}$, ค่าเฉพาะเหล่านี้มีส่วนจริงเป็นค่าลบ ค่าเฉพาะตัวที่เหลือหาได้จากการแก้สมการ

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \quad \lambda^3 + e_1\lambda^2 + e_2\lambda + e_3 = 0 \quad \text{และ} \quad \lambda^3 + f_1\lambda^2 + f_2\lambda + f_3 = 0.$$

สำหรับ $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, รากทุกๆตัวมีส่วนจริงเป็นค่าลบเมื่อ $L_0 < 1$ สำหรับ

$\lambda^3 + e_1\lambda^2 + e_2\lambda + e_3 = 0$, ถ้า $\tilde{L}_0 > 1$, จะได้ว่า $e_1 > 0$ และ $e_3 > 0$, และสามารถเห็นได้ชัดเจนว่า

$e_1e_2 - e_3 > 0$ เนื่องจากพจน์ $-e_3$ เกิดจากผลคูณระหว่างพจน์ที่สองของ e_1 และพจน์ที่สามของ e_2 ดังนั้น

กฎของ Routh–Hurwitz criteria จึงเป็นจริง สำหรับ $\lambda^3 + f_1\lambda^2 + f_2\lambda + f_3 = 0$ เนื่องจาก \tilde{E}_3, \tilde{I}_3 และ \tilde{S}_3

นิยามในรูปแบบของ \tilde{E}_2, \tilde{I}_2 และ \tilde{S}_2 เหมือนก่อนหน้า นั่นก็คือ f_1, f_2 และ f_3 ถูกนิยามในรูปแบบ

ของ \tilde{E}_2, \tilde{I}_2 และ \tilde{S}_2 การแสดงว่าสมการที่อยู่ในรูปแบบของ $\lambda^3 + f_1\lambda^2 + f_2\lambda + f_3 = 0$ สอดคล้องกับกฎ

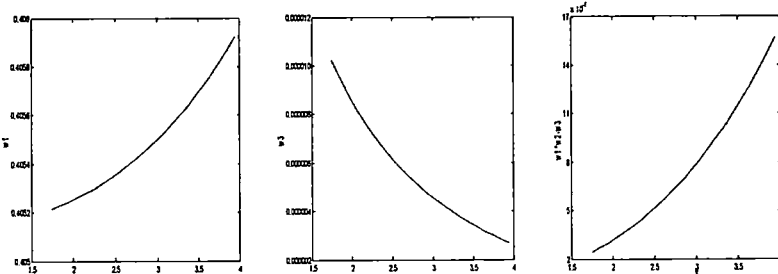
ของ Routh–Hurwitz criteria ก่อนข้างจะซับซ้อน ดังนั้นจึงแสดงโดยใช้โปรแกรมโดยการกำหนดค่า

δ_2 ให้แตกต่างกัน สำหรับ $\tilde{L}_0 > 1$ และพารามิเตอร์ตัวอื่นกำหนดให้เป็นค่าคงที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร. พันธน์ พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



รูปที่ 4.21 ช่วงค่าของพารามิเตอร์สำหรับสมการ $\lambda^3 + f_1\lambda^2 + f_2\lambda + f_3 = 0$ ซึ่งสอดคล้องกับกฎของ Routh– Hurwitz นำมาแสดงบนระนาบ $(f_1, \delta_2), (f_3, \delta_2), (f_1f_2 - f_3, \delta_2)$ ตามลำดับ ค่าของพารามิเตอร์ดังนี้ $\rho = 0.000273973, \mu = 0.000039139, \eta = 0.111111, \alpha = 0.142857, \varepsilon = 0.2, \beta = 0.142857, \gamma = 0.7$ และ $\delta_3 = 1$. จากรูปข้างต้น จะเห็นได้ว่ากฎของ Routh– Hurwitz เป็นจริงสำหรับ $\tilde{L}_0 > 1$.

ทฤษฎีบทที่ 8 ถ้า $L_0 > 1$ แล้วจุดสมดุล P^* มีความเสถียรภายใน พิสูจน์ สำหรับจุดสมดุล $P^* = (S_1^*, E_1^*, I_1^*, Q_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, Q_2^*, S_3^*, E_3^*, I_3^*, Q_3^*)$, สมการลักษณะเฉพาะคือ

$$(\lambda + \theta_5)^2(\lambda + \theta_{10}) [\lambda^3 + g_1\lambda^2 + g_2\lambda + g_3] [\lambda^3 + h_1\lambda^2 + h_2\lambda + h_3] [\lambda^3 + i_1\lambda^2 + i_2\lambda + i_3] = 0, \quad (4.74)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} g_1 &= \theta_1 + \theta_4 + \frac{\eta\theta_2}{\theta_4 L_0} + \theta_2(E_1^* + I_1^*), \\ g_2 &= \theta_1\theta_4 + \frac{\eta\theta_1\theta_2}{\theta_4 L_0} + \theta_2\theta_3(E_1^* + I_1^*) + \theta_2\theta_4(E_1^* + I_1^*), \\ g_3 &= \theta_2\theta_3\theta_4(E_1^* + I_1^*), \\ h_1 &= \theta_1 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_6(E_2^* + I_2^* - S_2^*), \quad h_2 = \theta_1\theta_3 + \theta_1\theta_4 + \theta_3\theta_4 + \theta_6(\theta_3 + \theta_4)(E_2^* + I_2^*) - \theta_6 S_2^*(\theta_1 + \eta + \theta_4), \\ h_3 &= \theta_1\theta_3\theta_4 + \theta_6\theta_3\theta_4(E_2^* + I_2^*) - \theta_1\theta_6(\eta + \theta_4)S_2^*, \quad i_1 = \mu + \theta_8 + \theta_9 + \theta_7(E_3^* + I_3^* - S_3^*), \\ i_2 &= \mu(\theta_8 + \theta_9) + \theta_8\theta_9 + \theta_7(\theta_8 + \theta_9)(E_3^* + I_3^*) - \theta_7 S_3^*(\mu + \eta + \theta_9), \\ i_3 &= \mu\theta_8\theta_9 + \theta_7\theta_8\theta_9(E_3^* + I_3^*) - \mu\theta_7(\eta + \theta_9)S_3^*, \text{ และ } E_1^* = \frac{\theta_1\eta}{\theta_3\theta_4 L_0} [L_0 - 1], \quad I_1^* = \frac{\theta_1\eta}{\theta_3\theta_4 L_0} [L_0 - 1]. \end{aligned}$$

จากสมการลักษณะเฉพาะ (4.74) สังเกตเห็นได้ว่า ค่าเฉพาะ 3 ตัวแรก คือ $\lambda_{1,2} = -\theta_5$ and $\lambda_3 = -\theta_{10}$ ค่าเฉพาะมีส่วนจริงเป็นค่าลบ ค่าเฉพาะตัวที่เหลือหาได้จากการแก้สมการ

$$\lambda^3 + g_1\lambda^2 + g_2\lambda + g_3 = 0, \quad \lambda^3 + h_1\lambda^2 + h_2\lambda + h_3 = 0 \text{ และ } \lambda^3 + i_1\lambda^2 + i_2\lambda + i_3 = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนรัตน์ พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

สำหรับ $\lambda^3 + g_1\lambda^2 + g_2\lambda + g_3 = 0$, ถ้า $L_0 > 1$, จะได้ว่า $g_1 > 0$ และ $g_3 > 0$, สังเกตเห็นได้ว่า $g_1g_2 - g_3 > 0$ เนื่องจากพจน์ $-g_3$ เกิดจากผลคูณระหว่างพจน์ที่สองของ g_1 และพจน์ที่สามของ g_2 นั่นก็คือกฎของ Routh-Hurwitz criteria เป็นจริง

สำหรับสมการ $\lambda^3 + h_1\lambda^2 + h_2\lambda + h_3 = 0$ และ $\lambda^3 + i_1\lambda^2 + i_2\lambda + i_3 = 0$, เนื่องจาก $E_2^*, I_2^*, S_2^*, E_3^*, I_3^*$ และ S_3^* นิยามในพจน์ของ E_1^*, I_1^* และ S_1^* นั่นก็คือ h_1, h_2, h_3, i_1, i_2 , และ i_3 อยู่ในรูปแบบของ E_1^*, I_1^* และ S_1^* ใช้โปรแกรม *MATLAB* แสดงเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz โดยการพิจารณาค่าที่แตกต่างกันของ δ_1 โดยที่ $L_0 > 1$ และพารามิเตอร์กำหนดให้คงที่เงื่อนไขของ Routh-Hurwitz เป็นจริงสำหรับ $L_0 > 1$.

ผลเฉลยเชิงตัวเลข

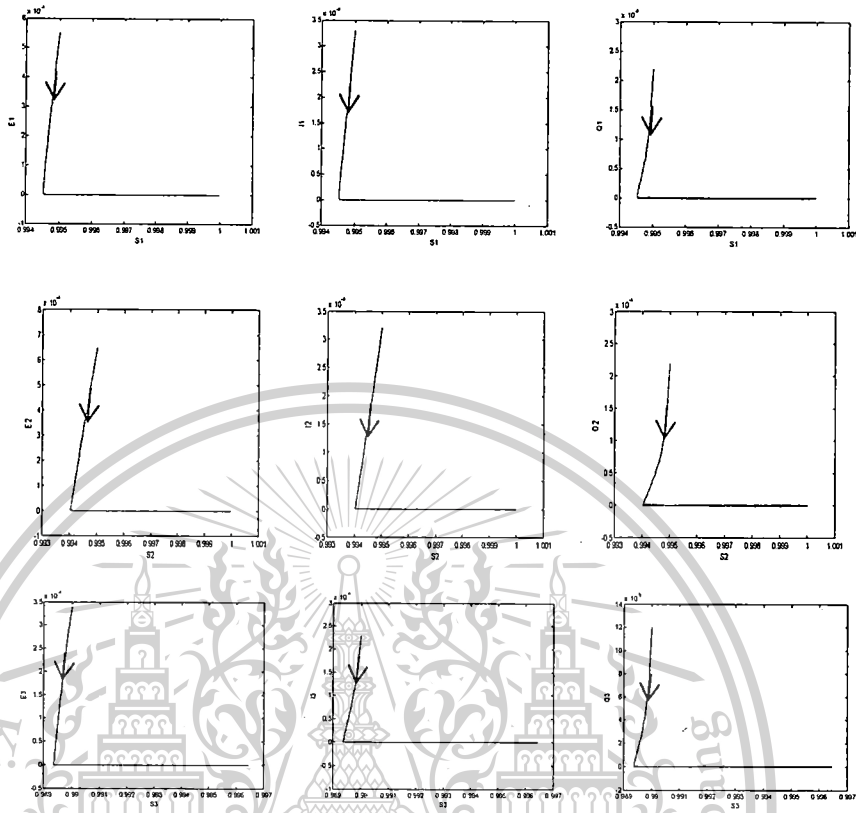
ผลเฉลยเชิงตัวเลขนำมาพิจารณาสำหรับการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่สำหรับแต่ละกลุ่มอายุที่แตกต่างกัน แนววิธีของผลเฉลยแสดงดังรูปข้างล่างนี้ ค่าของพารามิเตอร์ดังนี้ $\mu = 1/(365 \times 70)$ ต่อวัน, สอดคล้องกับอายุเฉลี่ยของประชากรมนุษย์ 70 ปี ช่วงเวลาที่เปลี่ยนระหว่างกลุ่มอายุคือ 10 ปี นั่นก็คือ $\kappa = 1/(365 \times 10)$ ต่อวัน พารามิเตอร์ตัวอื่นเป็นค่าที่เลือกขึ้นมา ผลเฉลยเชิงตัวเลขแสดงดังรูปต่อไปนี้



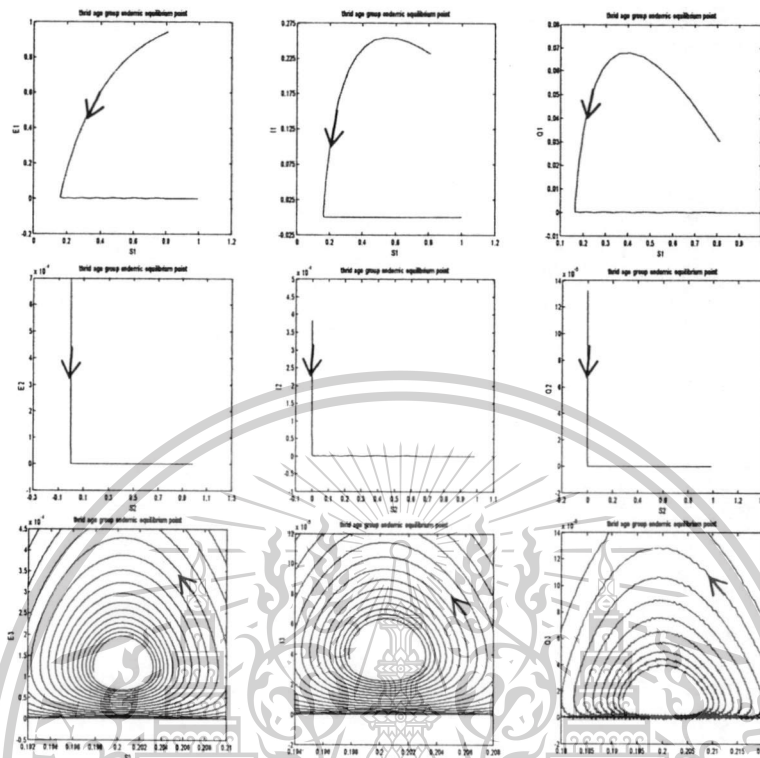
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รมงศาเสตราจารย ๓๓.พนรณ ๓พงศ๓มพนร
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



รูปที่ 4.22 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแสดงบนระนาบ $(S_1, E_1), (S_1, I_1), (S_1, Q_1), (S_2, E_2), (S_2, I_2), (S_2, Q_2), (S_3, E_3), (S_3, I_3), (S_3, Q_3)$ ตามลำดับ สำหรับ $L_0 < 1, \tilde{L}_0 < 1$ และ $\hat{L}_0 < 1$ ค่าของพารามิเตอร์คือ $\mu = 1/(365 \times 70)$ ต่อวัน, $\kappa = 1/(365 \times 10)$ ต่อวัน, $\eta = 1/9$ ต่อวัน, $\alpha = 1/7 \text{ day}^{-1}$, $\varepsilon = 1/5$ ต่อวัน, $\beta = 1/7$ ต่อวัน, $\gamma = 0.7$ ต่อวัน, $\delta_1 = 0.6, \delta_2 = 0.9, \delta_3 = 0.15, L_0 = 0.39044693, \tilde{L}_0 = 0.51246160$ และ $\hat{L}_0 = 0.59863369$ สัตว์ส่วนของประชากร $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ เข้าใกล้จุดสมดุลสถานะไร้โรค $(1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0)$.

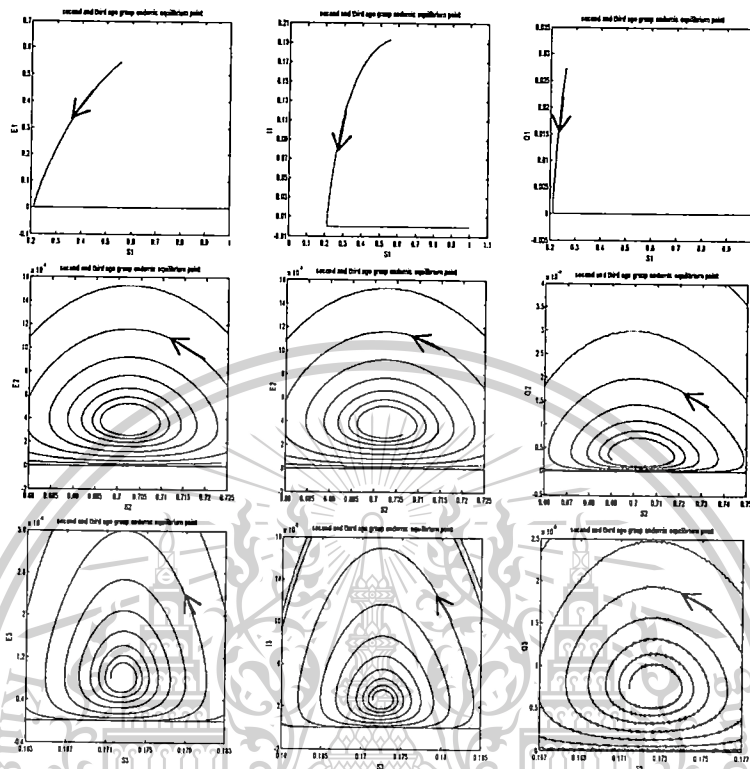


รูปที่ 4.23 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแสดงบนระนาบ $(S_1, E_1), (S_1, I_1), (S_1, Q_1), (S_2, E_2), (S_2, I_2), (S_2, Q_2), (S_3, E_3), (S_3, I_3), (S_3, Q_3)$ ตามลำดับ สำหรับ $L_0 < 1, \tilde{L}_0 < 1$ และ $\hat{L}_0 > 1$ ค่าของพารามิเตอร์คือ $\delta_1 = 1.45, \delta_2 = 1.65, \delta_3 = 1.25, L_0 = 0.94358008, \tilde{L}_0 = 0.93951293$, และ $\hat{L}_0 = 4.98861411$ แต่ตัวพารามิเตอร์อื่นๆ นียามเหมือนในรูปที่ 4.22 สัดส่วนของประชากร $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ ณเข้าหาจุดสมดุลสถานะเรื้อรังสำหรับกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 $(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0.20045647, 0.00012320, 0.00003992, 0.00001141)$

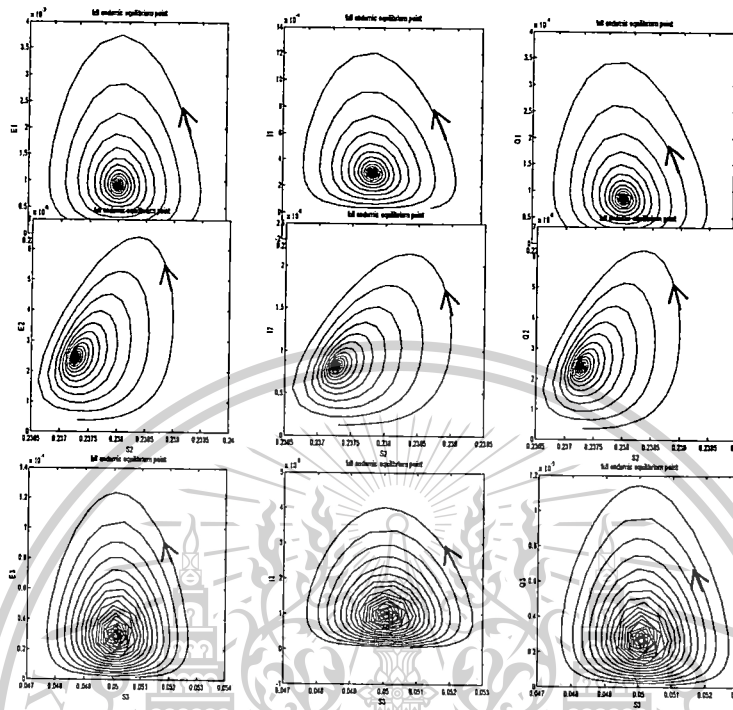
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนรัตน์ พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



รูปที่ 4.24 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแสดงบนระนาบ $(S_1, E_1), (S_1, I_1), (S_1, Q_1), (S_2, E_2), (S_2, I_2), (S_2, Q_2), (S_3, E_3), (S_3, I_3), (S_3, Q_3)$ ตามลำดับ สำหรับ $L_0 < 1, \tilde{L}_0 > 1$ ค่าของพารามิเตอร์ คือ $\delta_1 = 1.52, \delta_2 = 2.5, \delta_3 = 1.45, L_0 = 0.98913223, \tilde{L}_0 = 1.42350444$ แต่ตัวพารามิเตอร์อื่นๆ นิยามเหมือนในรูปที่ 4.22 สัดส่วนของประชากร $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ ณเข้าหาจุดสมดุลสถานะเรื้อรังสำหรับกลุ่มอายุกลุ่มที่ 2 และ 3 $(1, 0, 0, 0, 0.70249166, 0.00036634, 0.00011861, 0.00003387, 0.17266629, 0.00008170, 0.00002649, 0.00000757)$



รูปที่ 4.25 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแสดงบนระนาบ $(S_1, E_1), (S_1, I_1), (S_1, Q_1), (S_2, E_2), (S_2, I_2), (S_2, Q_2), (S_3, E_3), (S_3, I_3), (S_3, Q_3)$ ตามลำดับ สำหรับ $L_0 > 1$ ค่าของพารามิเตอร์คือ $\delta_1 = 6, \delta_2 = 7, \delta_3 = 5$ และ $L_0 = 3.90446932$ แต่ตัวพารามิเตอร์อื่นๆ นิยามเหมือนในรูปที่ 4.22 สัดส่วนของประชากร $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ ณเข้าหาจุดสมดุลสถานะเรื้อรังสำหรับกลุ่มอายุกลุ่มที่ 1, 2 และ 3 (0.25611675, 0.00091599, 0.00029658, 0.00008470, 0.23726898, 0.00002434, 0.00000815, 0.00000237, 0.05010638, 0.00002884, 0.00000935, 0.00000267)

ในแบบจำลองนี้จุดสมดุลที่ได้มี 4 จุดคือ P_0, \hat{P}, \tilde{P} และ P^* จุดแรกคือจุดสมดุลสถานะไร้โรค $P_0 = (1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0)$ แทนจุดที่ไม่มีการระบาดในมนุษย์ และมีความเสถียรภายในเมื่อ $L_0 < 1, \tilde{L}_0 < 1$ และ $\hat{L}_0 < 1$ รูปที่ 4.22 แสดงผลเฉลยของสัดส่วนของประชากร $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ ลู่เข้าสู่ $(1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0)$ เมื่อ $L_0 < 1, \tilde{L}_0 < 1$ และ $\hat{L}_0 < 1$

สำหรับ $\hat{P} = (1,0,0,0,1,0,0,0, \hat{S}_3, \hat{E}_3, \hat{I}_3, \hat{Q}_3)$, จุดที่สองเป็นจุดสมดุลสถานะเรื้อรังสำหรับกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 ซึ่งแทนสถานะที่มีการระบาดเรื้อรังเฉพาะกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 และมีความเสถียรภายในสำหรับ $L_0 < 1, \tilde{L}_0 < 1$ และ $\hat{L}_0 > 1$ รูปที่ 4.23 แสดงผลเฉลยของสัดส่วน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ของศาสตราจารย์ ดร. พิณชน พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประชากร $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ ซึ่งวนเข้าหาสภาวะที่มีการระบาดเรื้อรังกลุ่มอายุ กลุ่มที่ 3 $(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0.20045647, 0.00012320, 0.00003992, 0.00001141)$ สำหรับ $L_0^* < 1$, $\tilde{L}_0 < 1$ และ $\hat{L}_0 > 1$.

สำหรับ $\tilde{P} = (1, 0, 0, 0, \tilde{S}_2, \tilde{E}_2, \tilde{I}_2, \tilde{Q}_2, \tilde{S}_3, \tilde{E}_3, \tilde{I}_3, \tilde{Q}_3)$, จุดสมดุลที่ 3 คือจุดสมดุลสภาวะเรื้อรังสำหรับ กลุ่มอายุกลุ่มที่ 2 และ 3 ซึ่งแทนสภาวะที่มีการระบาดเรื้อรังทั้งกลุ่มอายุกลุ่มที่ 2 และกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 และมีความเสถียรภายในสำหรับ $L_0^* < 1$ และ $\tilde{L}_0 > 1$ รูปที่ 4.24 แสดงผลเฉลยของสัดส่วนประชากร $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ วนเข้าหาจุดสมดุลสภาวะเรื้อรังสำหรับกลุ่มอายุกลุ่มที่ 2 และ 3 $(1, 0, 0, 0, 0.70249166, 0.00036634, 0.00011861, 0.00003387, 0.17266629, 0.00008170, 0.00002649, 0.00000757)$ สำหรับ $L_0^* < 1$ และ $\tilde{L}_0 > 1$

จุดสมดุลที่ 4 คือจุดสมดุลสภาวะเรื้อรังสำหรับกลุ่มอายุกลุ่มที่ 1, 2 และ 3 $P^* = (S_1^*, E_1^*, I_1^*, Q_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, Q_2^*, S_3^*, E_3^*, I_3^*, Q_3^*)$ ซึ่งแทนสภาวะที่มีการระบาดเรื้อรังทั้งกลุ่มอายุกลุ่มที่ 1, กลุ่มอายุกลุ่มที่ 2 และกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 และมีความเสถียรภายในสำหรับ $L_0^* > 1$ รูปที่ 4.25 แสดงผลเฉลยของสัดส่วนประชากร $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ วนเข้าหาจุดสมดุลสภาวะเรื้อรัง สำหรับกลุ่มอายุกลุ่มที่ 1, 2 และ 3 $(0.25611675, 0.00091599, 0.00029658, 0.00008470, 0.23726898, 0.00002434, 0.00000815, 0.00000237, 0.05010638, 0.00002884, 0.00000935, 0.00000267)$ สำหรับ $L_0^* > 1$.

ความหมายทางกายภาพของค่าสัมประสิทธิ์พื้นฐาน L_0^* , \tilde{L}_0 and \hat{L}_0 สามารถอธิบายได้ดังนี้ $L_0^* = \left(\frac{\delta_1 \mu}{\mu + \kappa} \left[\left(\frac{\eta}{\mu + \eta + \alpha + \kappa} \right) \left(\frac{1}{\mu + \varepsilon + \beta + \kappa} \right) + \frac{1}{\mu + \eta + \alpha + \kappa} \right] \right)$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์พื้นฐานของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ในกลุ่มอายุกลุ่มแรก โดยที่ δ_1 เป็นอัตราการถ่ายทอดเชื้อต่อวันของกลุ่มอายุกลุ่มแรก $\frac{\mu}{\mu + \kappa}$ เป็นอัตราส่วนระหว่างจำนวนทั้งหมดของประชากรกลุ่มอายุกลุ่มแรกและประชากรทั้งหมด $\frac{\eta}{\mu + \eta + \alpha + \kappa}$ เป็นอัตราส่วนระหว่างจำนวนผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนไปเป็นผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ $\frac{1}{\mu + \varepsilon + \beta + \kappa}$ เป็นเวลาเฉลี่ยซึ่งผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ยังคงอยู่ในกลุ่มเดิมอยู่ และ $\frac{1}{\mu + \eta + \alpha + \kappa}$ เป็นเวลาเฉลี่ยที่ผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ยังคงอยู่ในกลุ่มเดิมอยู่

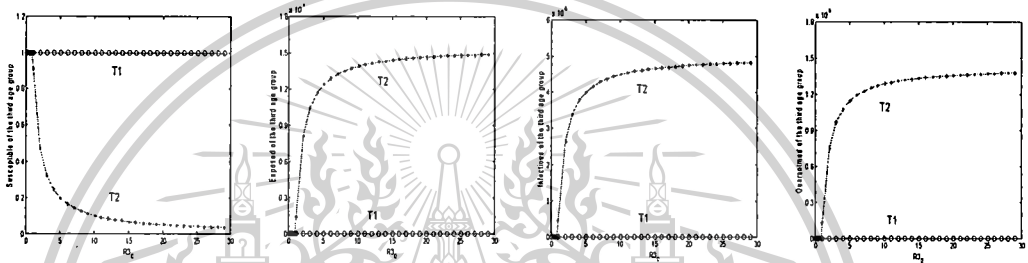
$\tilde{L}_0 = \frac{\delta_2 \mu \kappa}{(\mu + \kappa)^2} \left[\left(\frac{\eta}{\mu + \eta + \alpha + \kappa} \right) \left(\frac{1}{\mu + \varepsilon + \beta + \kappa} \right) + \frac{1}{\mu + \eta + \alpha + \kappa} \right]$ คือค่าสัมประสิทธิ์พื้นฐานสำหรับโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ในกลุ่มอายุกลุ่มที่ 2 โดยที่ δ_2 เป็นอัตราการถ่ายทอดเชื้อต่อวันของกลุ่มอายุ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กลุ่มที่ 2 $\frac{\mu\kappa}{(\mu+\kappa)^2}$ เป็นอัตราส่วนระหว่างจำนวนทั้งหมดของประชากรกลุ่มอายุกลุ่มที่ 2 และประชากรทั้งหมด

$\hat{L}_0 = \frac{\delta_3 \kappa^2}{(\mu+\kappa)^2} \left[\left(\frac{\eta}{\mu+\eta+\alpha} \right) \left(\frac{1}{\mu+\varepsilon+\beta} \right) + \frac{1}{\mu+\eta+\alpha} \right]$ เป็นค่าสืบพันธุ์พื้นฐานของโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ในกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 โดย δ_3 เป็นอัตราการถ่ายทอดเชื้อต่อวันของกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 $\frac{\kappa^2}{(\mu+\kappa)^2}$ เป็นอัตราส่วนระหว่างจำนวนประชากรทั้งหมดของกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 และประชากรทั้งหมด

แผนภาพ bifurcation ที่ได้จากแบบจำลอง แสดงไว้ดังรูปข้างล่างนี้



รูปที่ 4.26 แผนภาพ bifurcation ของผลเฉลยสำหรับแบบจำลองนี้ สำหรับค่าที่แตกต่างกันของ \hat{L}_0 โดยที่ *-*-* แทนสถานะที่เสถียร และ 0-0-0 แทนสถานะที่ไม่เสถียร

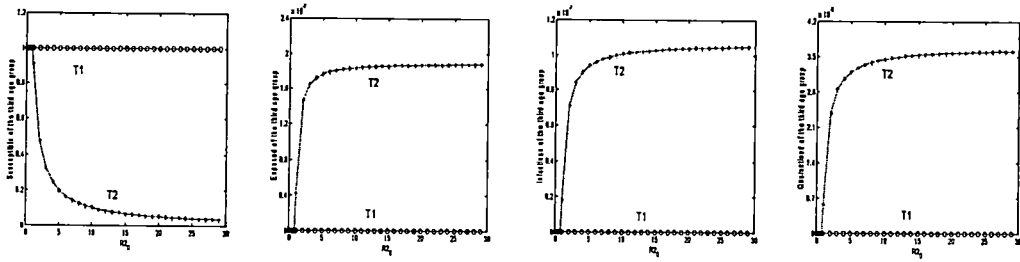
ผลเฉลยเชิงตัวเลขแสดงบนระนาบ $(S_1, E_1), (S_1, I_1), (S_1, Q_1), (S_2, E_2)$

$(S_2, I_2), (S_2, Q_2), (S_3, E_3), (S_3, I_3), (S_3, Q_3)$ ตามลำดับ สำหรับ $L_0 > 1$ ค่าของพารามิเตอร์คือ $\delta_1 = 6, \delta_2 = 7, \delta_3 = 5$ และ $L_0 = 3.90446932$ แต่ตัวพารามิเตอร์อื่นๆ นิยามเหมือนในรูปที่ 4.22 สัดส่วนของประชากร $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ วนเข้าหาจุดสมดุลสถานะเรื้อรังสำหรับกลุ่มอายุกลุ่มที่ 1, 2 และ 3 (0.25611675, 0.00091599, 0.00029658, 0.00008470, 0.23726898, 0.00002434, 0.00000815, 0.00000237, 0.05010638, 0.00002884, 0.00000935, 0.00000267) จะสังเกตเห็นได้ว่าเมื่อ $\hat{L}_0 < 1, T_1$ จะเสถียรและ สำหรับ $\hat{L}_0 > 1, T_2$ จะเสถียร ถ้าค่าขอบเขต (threshold number) ของกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 มีค่ามากกว่า 1 แล้วกลุ่มผู้เสี่ยงต่อการติดเชื้อของกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 จะมีจำนวนลดลง แต่กลุ่มผู้ติดเชื้อ กลุ่มผู้ถูกกักกันโรค และกลุ่มผู้ฟื้นฟูไข้ของกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 จะมีจำนวนเพิ่มขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารผู้สร้างสรรค์ที่มีภาระนี้ไว้

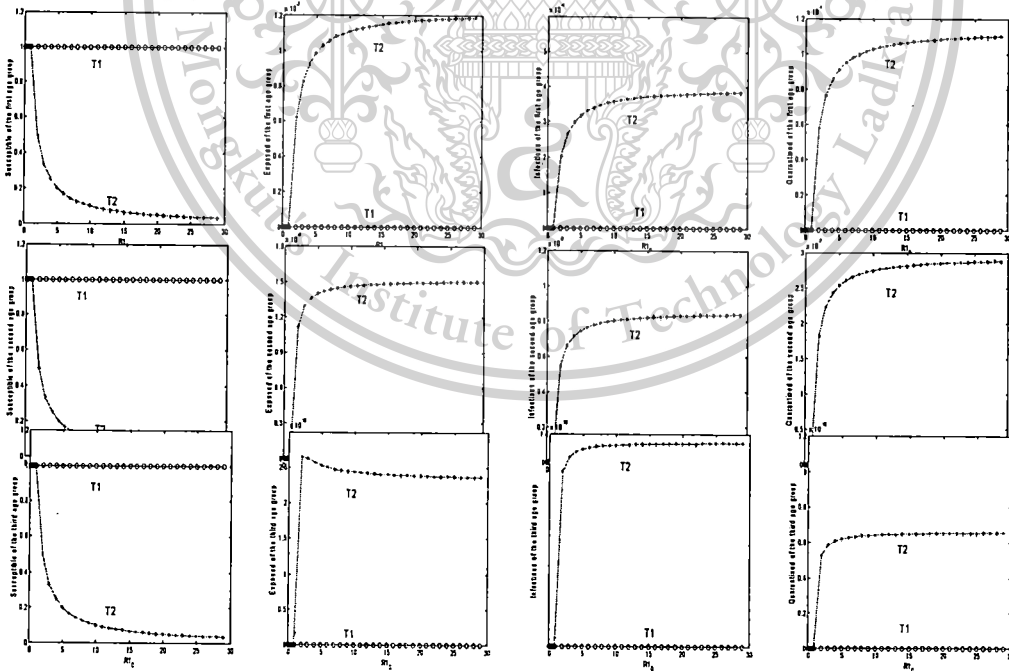
This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



รูปที่ 4.27 แผนภาพ bifurcation ของผลเฉลยสำหรับแบบจำลองนี้บนระนาบ $(\tilde{L}_0, S_2), (\tilde{L}_0, E_2), (\tilde{L}_0, I_2), (\tilde{L}_0, Q_2), (\tilde{L}_0, S_3), (\tilde{L}_0, E_3), (\tilde{L}_0, I_3), (\tilde{L}_0, Q_3)$ ตามลำดับ สำหรับค่าที่แตกต่างกันของ \tilde{L}_0 โดยที่ *-*- แทนสภาวะที่เสถียร และ 0-0-0 แทนสภาวะที่ไม่เสถียร

จะสังเกตเห็นได้ว่าเมื่อ $\tilde{L}_0 < 1$, T_1 จะมีความเสถียร และสำหรับ $\tilde{L}_0 > 1$, T_2 จะมีความเสถียร ถ้าค่าขอบเขตของกลุ่มอายุกลุ่มที่ 2 มีค่ามากกว่า 1 แล้วผู้เสี่ยงต่อการติดเชื้อกลุ่มอายุกลุ่มที่ 2 และกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 ลดลง กลุ่มผู้ติดเชื้อ ผู้ถูกกักกันโรค และผู้ฟื้นฟูของกลุ่มอายุกลุ่มที่ 2 เพิ่มขึ้น กลุ่มผู้ติดเชื้อ ผู้ถูกกักกันโรค และผู้ฟื้นฟูของกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 เพิ่มขึ้น



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พันธณี พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

รูปที่ 4.28 แผนภาพ bifurcation ของผลเฉลยสำหรับแบบจำลองนี้ บนระนาบ $(L_0, S_1), (L_0, E_1), (L_0, I_1), (L_0, Q_1), (L_0, S_2), (L_0, E_2), (L_0, I_2), (L_0, Q_2), (L_0, S_3), (L_0, E_3), (L_0, I_3), (L_0, Q_3)$ ตามลำดับ สำหรับค่าที่แตกต่างกันของ L_0 โดยที่ *-*-* แทนสถานะที่เสถียร และ 0-0-0 แทนสถานะที่ไม่เสถียร

จะสังเกตเห็นได้ว่าเมื่อ $L_0 < 1$, T_1 จะมีความเสถียร และสำหรับ $L_0 > 1$, T_2 จะมีความเสถียร ถ้าค่าขอบเขตของกลุ่มอายุกลุ่มที่ 1 มีค่ามากกว่า 1 แล้วผู้เสี่ยงต่อการติดเชื้อกลุ่มอายุกลุ่มที่ 1 กลุ่มอายุกลุ่มที่ 2 และกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 ลดลง กลุ่มผู้ติดเชื้อ ผู้ถูกกักกัน โรค และผู้ฟื้นฟูไข้ของกลุ่มอายุกลุ่มที่ 1 เพิ่มขึ้น กลุ่มผู้ติดเชื้อ ผู้ถูกกักกัน โรค และผู้ฟื้นฟูไข้ของกลุ่มอายุกลุ่มที่ 2 และกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 เพิ่มขึ้น

การวิเคราะห์ความเสถียรวงกว้าง (Global stability analysis)

พิจารณาแบบจำลองตามกลุ่มอายุอีกครั้ง โดยพิจารณาจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์นี้

$$S_1'(t) = bN_T - \left(\frac{a_1(E_1 + I_1)}{N_T} + \mu + k \right) S_1, \quad (4.75)$$

$$E_1'(t) = \frac{a_1 S_1 (E_1 + I_1)}{N_T} - (\mu + c + d + k) E_1, \quad (4.76)$$

$$I_1'(t) = cE_1 - (\mu + e + f + k) I_1, \quad (4.77)$$

$$Q_1'(t) = eI_1 - (\mu + g + k) Q_1, \quad (4.78)$$

$$R_1'(t) = dE_1 + fI_1 + gQ_1 - (\mu + k) R_1, \quad (4.79)$$

$$S_2'(t) = kS_1 - \left(\frac{a_2(E_2 + I_2)}{N_T} + \mu + k \right) S_2, \quad (4.80)$$

$$E_2'(t) = kE_1 + \frac{a_2 S_2 (E_2 + I_2)}{N_T} - (\mu + c + d + k) E_2, \quad (4.81)$$

$$I_2'(t) = kI_1 + cE_2 - (\mu + e + f + k) I_2, \quad (4.82)$$

$$Q_2'(t) = kQ_1 + eI_2 - (\mu + g + k) Q_2, \quad (4.83)$$

$$R_2'(t) = kR_1 + dE_2 + fI_2 + gQ_2 - (\mu + k) R_2, \quad (4.84)$$

$$S_3'(t) = kS_2 - \left(\frac{a_3(E_3 + I_3)}{N_T} + \mu \right) S_3, \quad (4.85)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนธ์นิ พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$E_3'(t) = kE_2 + \frac{a_3 S_3 (E_3 + I_3)}{N_T} - (\mu + c + d)E_3, \quad (4.86)$$

$$I_3'(t) = kI_2 + cE_3 - (\mu + e + f)I_3, \quad (4.87)$$

$$Q_3'(t) = kQ_2 + eI_3 - (\mu + g)Q_3, \quad (4.88)$$

$$R_3'(t) = kR_2 + dE_3 + fI_3 + gQ_3 - \mu R_3, \quad (4.89)$$

นำสมการต่อไปนี้นำมาบวกกัน (4.75) – (4.89), (4.75) – (4.79), (4.80) – (4.84), และ (4.85) – (4.89) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} N_T'(t) &= bN_T - \mu N_T, \quad N_1'(t) = bN_T - (\mu + k)N_1, \quad N_2'(t) = kN_1 - (\mu + k)N_2, \\ N_3'(t) &= kN_2 - \mu N_3 \end{aligned} \quad (4.90)$$

กำหนดให้ประชากรทั้งหมด ประชากรกลุ่มอายุกลุ่มที่ 1, กลุ่มอายุกลุ่มที่ 2 และกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 $N_T'(t) = N_1'(t) = N_2'(t) = N_3'(t) = 0$. จัดสมการ (4.90) ให้เท่ากับ 0 จะได้ว่า $b = \mu$,

$$\frac{N_1}{N_T} = \frac{b}{b+k}, \quad \frac{N_2}{N_T} = \frac{bk}{(b+k)^2} \quad \text{และ} \quad \frac{N_3}{N_T} = \frac{k^2}{(b+k)^2}$$

ทฤษฎีบทที่ 9 ให้

$(S_1(t), E_1(t), I_1(t), Q_1(t), R_1(t), S_2(t), E_2(t), I_2(t), Q_2(t), R_2(t), S_3(t), E_3(t), I_3(t), Q_3(t), R_3(t))$ เป็นผลเฉลยของสมการข้างต้นกับเงื่อนไขเริ่มต้น $(S_1(0), E_1(0), I_1(0), Q_1(0), R_1(0), S_2(0), E_2(0), I_2(0), Q_2(0), R_2(0), S_3(0), E_3(0), I_3(0), Q_3(0), R_3(0))$ และ

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \left\{ (S_1, E_1, I_1, Q_1, R_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, R_2, S_3, E_3, I_3, Q_3, R_3) \in R_+^{15}, J_1 \leq N_1 = \left(\frac{b}{b+k} \right) N_T, \right. \\ &\quad \left. J_2 \leq N_2 = \left(\frac{bk}{(b+k)^2} \right) N_T, J_3 \leq N_3 = \left(\frac{k^2}{(b+k)^2} \right) N_T \right\} \end{aligned}$$

พิสูจน์ เลือก ฟังก์ชัน Lyapunov

$$\begin{aligned} J(t) &= (J_1(t), J_2(t), J_3(t)) \\ &= (S_1 + E_1 + I_1 + Q_1 + R_1, S_2 + E_2 + I_2 + Q_2 + R_2, S_3 + E_3 + I_3 + Q_3 + R_3) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \left(\frac{dJ_1}{dt}, \frac{dJ_2}{dt}, \frac{dJ_3}{dt} \right) \\ &= \left(\frac{d}{dt} S_1 + \frac{d}{dt} E_1 + \frac{d}{dt} I_1 + \frac{d}{dt} Q_1 + \frac{d}{dt} R_1, \frac{d}{dt} S_2 + \frac{d}{dt} E_2 + \frac{d}{dt} I_2 + \frac{d}{dt} Q_2 + \frac{d}{dt} R_2, \right. \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนชนิ พงศ์เต็มพนธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} S_3 + \frac{d}{dt} E_3 + \frac{d}{dt} I_3 + \frac{d}{dt} Q_3 + R_3 \right) \\ &= (bN_T - (b+k)(S_1 + E_1 + I_1 + Q_1 + R_1), \\ & \quad k(S_1 + E_1 + I_1 + Q_1 + R_1) - (b+k)(S_2 + E_2 + I_2 + Q_2 + R_2), \\ & \quad k(S_2 + E_2 + I_2 + Q_2 + R_2) - b(S_3 + E_3 + I_3 + Q_3 + R_3)) \\ &= (bN_T - (b+k)N_1, kN_1 - (b+k)N_2, kN_2 - bN_3). \end{aligned}$$

เนื่องจาก $N_1 = \frac{b}{b+k} N_T$, $N_2 = \frac{bk}{(b+k)^2} N_T$ และ $N_3 = \frac{k^2}{(b+k)^2} N_T$, แล้ว

$$\frac{dJ_1}{dt} = bN_T - (b+k)J_1 \leq 0; \quad J_1 \geq \frac{bN_T}{b+k} \quad (4.91)$$

$$\frac{dJ_2}{dt} = \frac{bk}{b+k} N_T - (b+k)J_2 \leq 0; \quad J_2 \geq \frac{bkN_T}{(b+k)^2} \quad (4.92)$$

$$\frac{dJ_3}{dt} = \frac{bk^2}{(b+k)^2} N_T - bJ_3 \leq 0; \quad J_3 \geq \frac{k^2 N_T}{(b+k)^2}. \quad (4.93)$$

จาก (4.91) – (4.93), จะได้ว่า $\frac{dJ}{dt} \leq 0$ ทำให้ได้ว่า Ω_1 เป็น positively invariant set. ในทางกลับกัน

โดยการแก้สมการ (4.91) – (4.93), จะได้ว่า

$$0 \leq (J_1(t), J_2(t), J_3(t)) \leq \left(\frac{bN_T}{b+k} + J_1(0)e^{-(b+k)t}, \right. \\ \left. \frac{bkN_T}{(b+k)^2} + J_2(0)e^{-(b+k)t}, \frac{k^2 N_T}{(b+k)^2} + J_3(0)e^{-bt} \right),$$

โดยที่ $J_1(0), J_2(0)$ และ $J_3(0)$ เป็นเงื่อนไขของ $J_1(t), J_2(t)$ และ $J_3(t)$. ดังนั้นขณะที่ $t \rightarrow \infty$, $0 \leq (J_1(t), J_2(t), J_3(t)) \leq \left(\frac{bN_T}{b+k}, \frac{bkN_T}{(b+k)^2}, \frac{k^2 N_T}{(b+k)^2} \right) = (N_1, N_2, N_3)$ และจึงสามารถสรุปได้ว่า Ω_1 เป็น attractive set

การวิเคราะห์

จุดสมมูลสามารถหาได้จากการจัดด้านขวาของสมการ (4.75)-(4.89) ให้เท่ากับ 0 ดังนั้น จุดสมมูล คือ

$$\begin{aligned} \text{i) จุดสมมูลสภาวะไร้โรค } P_1(\bar{S}_1, \bar{E}_1, \bar{I}_1, \bar{Q}_1, \bar{R}_1, \bar{S}_2, \bar{E}_2, \bar{I}_2, \bar{Q}_2, \bar{R}_2, \bar{S}_3, \bar{E}_3, \bar{I}_3, \bar{Q}_3, \bar{R}_3) \\ = P_1\left(\frac{bN_T}{b+k}, 0, 0, 0, 0, \frac{bkN_T}{(b+k)^2}, 0, 0, 0, 0, \frac{k^2 N_T}{(b+k)^2}, 0, 0, 0, 0\right) \end{aligned}$$

$$\text{ii) จุดสมมูลสภาวะเรื้อรังกลุ่มที่ 3 } P_1(\bar{S}_1, \bar{E}_1, \bar{I}_1, \bar{Q}_1, \bar{R}_1, \bar{S}_2, \bar{E}_2, \bar{I}_2, \bar{Q}_2, \bar{R}_2, \bar{S}_3, \bar{E}_3, \bar{I}_3, \bar{Q}_3, \bar{R}_3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มาใช้

รองศาสตราจารย์ ดร.พันธ์ พิเศษ

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$P_2(\hat{S}_1, \hat{E}_1, \hat{I}_1, \hat{Q}_1, \hat{R}_1, \hat{S}_2, \hat{E}_2, \hat{I}_2, \hat{Q}_2, \hat{R}_2, \hat{S}_3, \hat{E}_3, \hat{I}_3, \hat{Q}_3, \hat{R}_3)$$

$$= P_2\left(\frac{bN_T}{b+k}, 0, 0, 0, 0, \frac{bkN_T}{(b+k)^2}, 0, 0, 0, 0, \hat{S}_3, \hat{E}_3, \hat{I}_3, \hat{Q}_3, \hat{R}_3\right)$$

เมื่อ $\hat{S}_3 = \frac{k^2 N_T}{(b+k)^2} \left(\frac{1}{\hat{R}_0} \right), \quad \hat{E}_3 = \frac{bk^2 N_T}{(b+k)^2 (b+c+d)} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0} \right),$

$$\hat{I}_3 = \frac{bck^2 N_T}{(b+k)^2 (b+c+d)(b+e+f)} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0} \right),$$

$$\hat{Q}_3 = \frac{bcek^2 N_T}{(b+k)^2 (b+c+d)(b+e+f)(b+g)} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0} \right),$$

$$\hat{R}_3 = \frac{(b+e+f)(b+g)d + cf(b+g) + ceg}{b(b+e+f)(b+g)} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0} \right) \text{ และ}$$

$$\hat{R}_0 = \frac{a_3 k^2 (b+c+e+f)}{(b+k)^2 (b+c+d)(b+e+f)}$$

iii) จุดสมดุลสถานะเรื้อรังกลุ่มที่ 2 และกลุ่มที่ 3

$$P_3(\tilde{S}_1, \tilde{E}_1, \tilde{I}_1, \tilde{Q}_1, \tilde{R}_1, \tilde{S}_2, \tilde{E}_2, \tilde{I}_2, \tilde{Q}_2, \tilde{R}_2, \tilde{S}_3, \tilde{E}_3, \tilde{I}_3, \tilde{Q}_3, \tilde{R}_3)$$

$$= P_3\left(\frac{bN_T}{b+k}, 0, 0, 0, 0, \tilde{S}_2, \tilde{E}_2, \tilde{I}_2, \tilde{Q}_2, \tilde{R}_2, \tilde{S}_3, \tilde{E}_3, \tilde{I}_3, \tilde{Q}_3, \tilde{R}_3\right)$$

โดยที่ $\tilde{S}_2 = \frac{bkN_T}{(b+k)^2} \left(\frac{1}{\tilde{R}_0} \right), \quad \tilde{E}_2 = \frac{bkN_T}{(b+k)(b+c+d+k)} \left(1 - \frac{1}{\tilde{R}_0} \right),$

$$\tilde{I}_2 = \frac{bckN_T}{(b+k)(b+c+d+k)(b+e+f+k)} \left(1 - \frac{1}{\tilde{R}_0} \right),$$

$$\tilde{Q}_2 = \frac{bcekN_T}{(b+k)(b+c+d+k)(b+e+f+k)(b+g+k)} \left(1 - \frac{1}{\tilde{R}_0} \right),$$

$$\tilde{R}_2 = \frac{(b+e+f+k)(b+g+k)d + cf(b+g+k) + ceg}{(b+k)(b+e+f+k)(b+g+k)} \left(1 - \frac{1}{\tilde{R}_0} \right)$$

$$\tilde{S}_3 = \frac{k\tilde{S}_2}{\frac{a_3}{N_T}(\tilde{E}_3 + \tilde{I}_3) + b}, \quad \tilde{E}_3 = \frac{-L_2 + \sqrt{L_2^2 - 4L_1L_3}}{2L_1}, \quad \tilde{I}_3 = \frac{k\tilde{I}_2 + c\tilde{E}_3}{b+e+f},$$

$$\tilde{Q}_3 = \frac{k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3}{b+g},$$

$$\tilde{R}_3 = \frac{k\tilde{R}_2 + d\tilde{E}_3 + f\tilde{I}_3 + g\tilde{Q}_3}{b}, \quad \tilde{R}_0 = \frac{a_2 bk(b+c+e+f+k)}{(b+k)^2 (b+c+d+k)(b+e+f+k)},$$

$$L_1 = \frac{a_3}{N_T} (b+c+d)(b+c+e+f),$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของลิขสิทธิ์
รองศาสตราจารย์ ดร. พันธุ์ พิณศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$L_2 = b(b+c+d)(b+e+f) + \frac{a_3 k}{N_T} \left((b+c+d)\tilde{I}_2 - (b+c+e+f)(\tilde{S}_2 + \tilde{E}_2) \right),$$

$$\text{และ } L_3 = - \left[\frac{k^2 a_3}{N_T} \tilde{I}_2 (\tilde{S}_2 + \tilde{E}_2) + bk(b+e+f)\tilde{E}_2 \right].$$

iv) จุดสมดุลสถานะเรื้อรังกลุ่มที่ 1, 2 และ 3 $P_4(S_1^*, E_1^*, I_1^*, Q_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, Q_2^*, S_3^*, E_3^*, I_3^*, Q_3^*)$

$$\text{โดยที่ } S_1^* = \frac{bN_T}{b+k} \left(\frac{1}{R_0^*} \right), \quad E_1^* = \frac{bN_T}{(b+c+d+k)} \left(1 - \frac{1}{R_0^*} \right),$$

$$I_1^* = \frac{bcN_T}{(b+c+d+k)(b+e+f+k)} \left(1 - \frac{1}{R_0^*} \right),$$

$$Q_1^* = \frac{bceN_T}{(b+c+d+k)(b+e+f+k)(b+g+k)} \left(1 - \frac{1}{R_0^*} \right),$$

$$R_1^* = \frac{(b+e+f+k)(b+g+k)d+cf(b+g+k)+ceg}{(b+k)(b+e+f+k)(b+g+k)} \left(1 - \frac{1}{R_0^*} \right)$$

$$S_2^* = \frac{kS_1^*}{\frac{a_2}{N_T}(E_2^* + I_2^*) + (b+k)}, \quad E_2^* = \frac{-L_2 + \sqrt{L_2^2 - 4L_1L_3}}{2L_1}, \quad I_2^* = \frac{kI_1^* + cE_2^*}{b+e+f+k},$$

$$Q_2^* = \frac{kQ_1^* + eI_2^*}{b+g+k}, \quad R_2^* = \frac{kR_1^* + dE_2^* + fI_2^* + gQ_2^*}{b+k}, \quad S_3^* = \frac{kS_2^*}{\frac{a_3}{N_T}(E_3^* + I_3^*) + b},$$

$$E_3^* = \frac{-M_2 + \sqrt{M_2^2 - 4M_1M_3}}{2M_1}, \quad I_3^* = \frac{kI_2^* + cE_3^*}{b+e+f}, \quad Q_3^* = \frac{kQ_2^* + eI_3^*}{b+g},$$

$$R_3^* = \frac{kR_2^* + dE_3^* + fI_3^* + gQ_3^*}{b} \quad \text{และ } R_0^* = \frac{a_1 b(b+c+e+f+k)}{(b+k)(b+c+d+k)(b+e+f+k)},$$

$$L_1 = \frac{a_2}{N_T} (b+c+d+k)(b+c+e+f+k), \quad L_2 = (b+k)(b+c+d+k)(b+e+f+k)$$

$$+ \frac{a_2 k}{N_T} \left((b+c+d+k)I_1^* - (b+c+e+f+k)(S_1^* + E_1^*) \right),$$

$$L_3 = - \left[\frac{a_2 k^2}{N_T} I_1^* (S_1^* + E_1^*) + k(b+k)(b+e+f+k)E_1^* \right],$$

$$M_1 = \frac{a_3}{N_T} (b+c+d)(b+c+e+f),$$

$$M_2 = b(b+c+d)(b+e+f) + \frac{a_3 k}{N_T} \left((b+c+d)I_2^* - (b+c+e+f)(S_2^* + E_2^*) \right),$$

$$\text{และ } M_3 = - \left[\frac{k^2 a_3}{N_T} I_2^* (S_2^* + E_2^*) + bk(b+e+f)E_2^* \right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่พิมพ์หรือใช้
รองศาสตราจารย์ ดร. พันธุ์ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

ความเสถียรวงกว้างของ (4.75)-(4.89) สามารถหาได้จากเทคนิคของกฎ Lyapunov ทฤษฎีบทที่ 10 กำหนดให้

$$\begin{cases} a_1 = \frac{bN_T}{S_1} \\ a_2 = \frac{bN_T}{S_2} \\ a_3 = \frac{bN_T}{S_3} \end{cases} \quad (4.94)$$

สำหรับ $\hat{R}_0 < 1, \tilde{R}_0 < 1, R_0^* < 1$, จุดสมดุลสถานะไร้โรค P_1 มีความเสถียรวงกว้างบน Ω_1 พิสูจน์พิจารณาบน Ω_1 ฟังก์ชัน Lyapunov

$$\rho(t) = (S_1 - \bar{S}_1 \ln S_1) + E_1 + I_1 + Q_1 + R_1 + (S_2 - \bar{S}_2 \ln S_2) + E_2 + I_2 + Q_2 + R_2 \\ + (S_3 - \bar{S}_3 \ln S_3) + E_3 + I_3 + Q_3 + R_3$$

หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(t) &= \frac{d}{dt} S_1 \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{S_1} \right) + \frac{d}{dt} E_1 + \frac{d}{dt} I_1 + \frac{d}{dt} Q_1 + \frac{d}{dt} R_1 \\ &\quad + \frac{d}{dt} S_2 \left(1 - \frac{\bar{S}_2}{S_2} \right) + \frac{d}{dt} E_2 + \frac{d}{dt} I_2 + \frac{d}{dt} Q_2 + \frac{d}{dt} R_2 \\ &\quad + \frac{d}{dt} S_3 \left(1 - \frac{\bar{S}_3}{S_3} \right) + \frac{d}{dt} E_3 + \frac{d}{dt} I_3 + \frac{d}{dt} Q_3 + \frac{d}{dt} R_3 \\ &= \left(bN_T - \left(\frac{a_1(E_1 + I_1)}{N_T} + b + k \right) S_1 \right) \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{S_1} \right) + \left(\frac{a_1 S_1 (E_1 + I_1)}{N_T} - (b + c + d + k) E_1 \right) \\ &\quad + (cE_1 - (b + e + f + k)I_1) + (eI_1 - (b + g + k)Q_1) + (dE_1 + fI_1 + gQ_1 - (b + k)R_1) \\ &\quad + \left(kS_1 - \left(\frac{a_2(E_2 + I_2)}{N_T} + b + k \right) S_2 \right) \left(1 - \frac{\bar{S}_2}{S_2} \right) + \left(kE_1 + \frac{a_2 S_2 (E_2 + I_2)}{N_T} - (b + c + d + k) E_2 \right) \\ &\quad + (kI_1 + cE_2 - (b + e + f + k)I_2) + (kQ_1 + eI_2 - (b + g + k)Q_2) \\ &\quad + (kR_1 + dE_2 + fI_2 + gQ_2 - (b + k)R_2) + \left(kS_2 - \left(\frac{a_3(E_3 + I_3)}{N_T} + b \right) S_3 \right) \left(1 - \frac{\bar{S}_3}{S_3} \right) \\ &\quad + \left(kE_2 + \frac{a_3 S_3 (E_3 + I_3)}{N_T} - (b + c + d) E_3 \right) + (kI_2 + cE_3 - (b + e + f)I_3) \\ &\quad + (kQ_2 + eI_3 - (b + g)Q_3) + (kR_2 + dE_3 + fI_3 + gQ_3 - bR_3) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พันธวิทย์ พงษ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 &= bN_T \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{S_1}\right) + (b+k)\bar{S}_1 - bS_1 - k\frac{S_1}{S_2}\bar{S}_2 + (b+k)\bar{S}_2 - bS_2 - k\frac{S_2}{S_3}\bar{S}_3 + b\bar{S}_3 - bS_3 \\
 &+ (E_1 + I_1) \left(\frac{a_1\bar{S}_1}{N_T} - b\right) + (E_2 + I_2) \left(\frac{a_2\bar{S}_2}{N_T} - b\right) + (E_3 + I_3) \left(\frac{a_3\bar{S}_3}{N_T} - b\right) \\
 &- bQ_1 - bR_1 - bQ_2 - bR_2 - bQ_3 - bR_3.
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ว่า } \frac{d}{dt}\rho(t) &= bN_T \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{S_1}\right) + (b+k)\bar{S}_1 \left(1 - \frac{S_1}{\bar{S}_1}\right) + kS_1 \left(1 - \frac{\bar{S}_2}{S_2}\right) + (b+k)\bar{S}_2 \left(1 - \frac{S_2}{\bar{S}_2}\right) \\
 &+ kS_2 \left(1 - \frac{\bar{S}_3}{S_3}\right) + b\bar{S}_3 \left(1 - \frac{S_3}{\bar{S}_3}\right) - bQ_1 - bR_1 - bQ_2 - bR_2 - bQ_3 - bR_3 \\
 &= bN_T \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{S_1}\right) + (b+k)\bar{S}_1 \left(1 - \frac{S_1}{\bar{S}_1}\right) + k\bar{S}_1 \left(\frac{S_1}{\bar{S}_1} - \frac{S_1}{\bar{S}_1} \frac{\bar{S}_2}{S_2}\right) + (b+k)\bar{S}_2 \left(1 - \frac{S_2}{\bar{S}_2}\right) \\
 &+ k\bar{S}_2 \left(\frac{S_2}{\bar{S}_2} - \frac{S_2}{\bar{S}_2} \frac{\bar{S}_3}{S_3}\right) + b\bar{S}_3 \left(1 - \frac{S_3}{\bar{S}_3}\right) - bQ_1 - bR_1 - bQ_2 - bR_2 - bQ_3 - bR_3.
 \end{aligned} \tag{4.96}$$

บน Ω_1 , จะได้ว่า $\bar{S}_1 = \frac{bN_T}{b+k}$, $\bar{S}_2 = \frac{k}{b+k} \bar{S}_1$ และ $\bar{S}_3 = \frac{k}{b} \bar{S}_2$. พิจารณา

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\rho(t) &= bN_T \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{S_1}\right) + bN_T \left(1 - \frac{S_1}{\bar{S}_1}\right) + k\bar{S}_1 \left(\frac{S_1}{\bar{S}_1} - \frac{S_1}{\bar{S}_1} \frac{\bar{S}_2}{S_2}\right) + k\bar{S}_1 \left(1 - \frac{S_2}{\bar{S}_2}\right) \\
 &+ k\bar{S}_2 \left(\frac{S_2}{\bar{S}_2} - \frac{S_2}{\bar{S}_2} \frac{\bar{S}_3}{S_3}\right) + k\bar{S}_2 \left(1 - \frac{S_3}{\bar{S}_3}\right) - bQ_1 - bR_1 - bQ_2 - bR_2 - bQ_3 - bR_3, \\
 \frac{d}{dt}\rho(t) &= bN_T \left(2 - \frac{\bar{S}_1}{S_1} - \frac{S_1}{\bar{S}_1}\right) + k\bar{S}_1 \left(\frac{S_1}{\bar{S}_1} - \frac{S_1}{\bar{S}_1} \frac{\bar{S}_2}{S_2} + 1 - \frac{S_2}{\bar{S}_2}\right) + k\bar{S}_2 \left(\frac{S_2}{\bar{S}_2} - \frac{S_2}{\bar{S}_2} \frac{\bar{S}_3}{S_3} + 1 - \frac{S_3}{\bar{S}_3}\right) \\
 &- bQ_1 - bR_1 - bQ_2 - bR_2 - bQ_3 - bR_3, \\
 \frac{d}{dt}\rho(t) &= -bN_T \frac{(\bar{S}_1 - S_1)^2}{S_1\bar{S}_1} - k\bar{S}_1 \left(\left(1 - \frac{\bar{S}_2}{S_2}\right)\left(\frac{S_2}{\bar{S}_2} - \frac{S_1}{\bar{S}_1}\right)\right) - k\bar{S}_2 \left(\left(1 - \frac{\bar{S}_3}{S_3}\right)\left(\frac{S_3}{\bar{S}_3} - \frac{S_2}{\bar{S}_2}\right)\right) \\
 &- bQ_1 - bR_1 - bQ_2 - bR_2 - bQ_3 - bR_3.
 \end{aligned} \tag{4.97}$$

ถ้า $\frac{S_2}{S_2} \geq \frac{S_1}{\bar{S}_1}$ สำหรับทุกๆ $S_1 \geq \bar{S}_1$ และ $\frac{S_2}{S_2} \leq \frac{S_1}{\bar{S}_1}$ สำหรับทุกๆ $0 < S_1 \leq \bar{S}_1$,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนธนิ พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$\text{แล้ว } -k\bar{S}_1 \left(\left(1 - \frac{\bar{S}_2}{S_2} \right) \left(\frac{S_2}{S_2} - \frac{S_1}{S_1} \right) \right) \leq 0.$$

ถ้า $\frac{S_3}{S_3} \geq \frac{S_2}{S_2}$ สำหรับทุกๆ $S_2 \geq \bar{S}_2$ และ $\frac{S_3}{S_3} \leq \frac{S_2}{S_2}$ สำหรับทุกๆ $0 < S_2 \leq \bar{S}_2$,

$$\text{แล้ว } -k\bar{S}_2 \left(\left(1 - \frac{\bar{S}_3}{S_3} \right) \left(\frac{S_3}{S_3} - \frac{S_2}{S_2} \right) \right) \leq 0.$$

สังเกตเห็นได้ว่าทุกๆพจน์ใน (4.97) มีค่าน้อยกว่า 0 นั่นก็คือ $\frac{d}{dt}\rho(t) \leq 0$, แล้วฟังก์ชัน $\frac{d}{dt}\rho(t)$ เป็น negative definite เซตจำกัดของผลเฉลยบรรจุอยู่ในเซตโดยที่

$S_1 = \bar{S}_1, S_2 = \bar{S}_2, S_3 = \bar{S}_3, Q_1 = 0, R_1 = 0, Q_2 = 0, R_2 = 0, Q_3 = 0$ และ $R_3 = 0$ ซึ่งคือ $\{P_1\}$. ทฤษฎีข้างต้นแสดงให้เห็นว่า P_1 มีความเสถียรวงกว้างบน Ω_1

เพื่อที่จะพิสูจน์ความเสถียรวงกว้างของ P_2 พิจารณาทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 11 ถ้า $\hat{R}_0 > 1, \tilde{R}_0 < 1, R_0^* < 1$ แล้วจุดสมดุล

$P_2(\hat{S}_1, \hat{E}_1, \hat{I}_1, \hat{Q}_1, \hat{R}_1, \hat{S}_2, \hat{E}_2, \hat{I}_2, \hat{Q}_2, \hat{R}_2, \hat{S}_3, \hat{E}_3, \hat{I}_3, \hat{Q}_3, \hat{R}_3) \in \Omega_1$ สามารถหาค่าได้และมีความเสถียรวงกว้างบน Ω_1 เมื่อ

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{bN_T}{\hat{S}_1} \\ a_2 = \frac{bN_T}{\hat{S}_2} \\ a_3 = \frac{(b+d)N_T}{\hat{S}_3} \\ d = e + f \end{array} \right.$$

พิสูจน์ พิจารณาฟังก์ชัน Lyapunov ที่อยู่ในรูปแบบ

$$\psi(t) = (S_1 - \hat{S}_1 \ln S_1) + E_1 + I_1 + Q_1 + R_1 + (S_2 - \hat{S}_2 \ln S_2) + E_2 + I_2 + Q_2 + R_2 + (S_3 - \hat{S}_3 \ln S_3) + E_3 + I_3 + (Q_3 - \hat{Q}_3 \ln Q_3)$$

อนุพันธ์สามารถหาได้จาก

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \frac{d}{dt} S_1 \left(1 - \frac{\hat{S}_1}{S_1} \right) + \frac{d}{dt} E_1 + \frac{d}{dt} I_1 + \frac{d}{dt} Q_1 + \frac{d}{dt} R_1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธวี พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{d}{dt} S_2 \left(1 - \frac{\hat{S}_2}{S_2} \right) + \frac{d}{dt} E_2 + \frac{d}{dt} I_2 + \frac{d}{dt} Q_2 + \frac{d}{dt} R_2 \\
 & + \frac{d}{dt} S_3 \left(1 - \frac{\hat{S}_3}{S_3} \right) + \frac{d}{dt} E_3 + \frac{d}{dt} I_3 + \frac{d}{dt} Q_3 \left(1 - \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right) \\
 = & \left(bN_T - \left(\frac{a_1(E_1 + I_1)}{N_T} + b + k \right) S_1 \right) \left(1 - \frac{\hat{S}_1}{S_1} \right) + \left(\frac{a_1 S_1 (E_1 + I_1)}{N_T} - (b + c + d + k) E_1 \right) \\
 & + (cE_1 - (b + e + f + k) I_1) + (eI_1 - (b + g + k) Q_1) + (dE_1 + fI_1 + gQ_1 - (b + k) R_1) \\
 & + \left(kS_1 - \left(\frac{a_2(E_2 + I_2)}{N_T} + b + k \right) S_2 \right) \left(1 - \frac{\hat{S}_2}{S_2} \right) + \left(kE_1 + \frac{a_2 S_2 (E_2 + I_2)}{N_T} - (b + c + d + k) E_2 \right) \\
 & + (kI_1 + cE_2 - (b + e + f + k) I_2) + (kQ_1 + eI_2 - (b + g + k) Q_2) \\
 & + (kR_1 + dE_2 + fI_2 + gQ_2 - (b + k) R_2) + \left(kS_2 - \left(\frac{a_3(E_3 + I_3)}{N_T} + b \right) S_3 \right) \left(1 - \frac{\hat{S}_3}{S_3} \right) \\
 & + \left(kE_2 + \frac{a_3 S_3 (E_3 + I_3)}{N_T} - (b + c + d) E_3 \right) + (kI_2 + cE_3 - (b + e + f) I_3) \\
 & + (kQ_2 + eI_3 - (b + g) Q_3) \left(1 - \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right) \\
 = & bN_T \left(1 - \frac{\hat{S}_1}{S_1} \right) + (b + k) \hat{S}_1 - bS_1 - k \frac{S_1}{S_2} \hat{S}_2 + (b + k) \hat{S}_2 - bS_2 - k \frac{S_2}{S_3} \hat{S}_3 + b\hat{S}_3 - bS_3 \\
 & + (E_1 + I_1) \left(\frac{a_1 \hat{S}_1}{N_T} - b \right) + (E_2 + I_2) \left(\frac{a_2 \hat{S}_2}{N_T} - b \right) + \left(\frac{a_3 \hat{S}_3}{N_T} - b - d \right) E_3 + \left(\frac{a_3 \hat{S}_3}{N_T} - b - e - f \right) I_3 \\
 & - bQ_1 - bR_1 - \left(b + k \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right) Q_2 - (b + k) R_2 + eI_3 \left(1 - \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right) + (b + g) \hat{Q}_3 \left(1 - \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right).
 \end{aligned}$$

(4.98)

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \psi(t) & = bN_T \left(1 - \frac{\hat{S}_1}{S_1} \right) + (b + k) \hat{S}_1 - bS_1 - k \frac{S_1}{S_2} \hat{S}_2 + (b + k) \hat{S}_2 - bS_2 - k \frac{S_2}{S_3} \hat{S}_3 + b\hat{S}_3 - bS_3 \\
 & - bQ_1 - bR_1 - \left(b + k \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right) Q_2 - (b + k) R_2 + eI_3 \left(1 - \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right) + (b + g) \hat{Q}_3 \left(1 - \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right) \\
 & = bN_T \left(1 - \frac{\hat{S}_1}{S_1} \right) + (b + k) \hat{S}_1 \left(1 - \frac{S_1}{\hat{S}_1} \right) + k \hat{S}_1 \left(\frac{S_1}{\hat{S}_1} - \frac{S_1}{\hat{S}_1} \frac{\hat{S}_2}{S_2} \right) + (b + k) \hat{S}_2 \left(1 - \frac{S_2}{\hat{S}_2} \right)
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รองศาสตราจารย์ ดร. พันธิ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$\begin{aligned}
 &+ k \frac{\hat{S}_2}{\hat{R}_0} \left(\frac{S_2}{\hat{S}_2/\hat{R}_0} - \frac{S_2}{\hat{S}_2/\hat{R}_0} \frac{\hat{S}_3}{S_3} \right) + b\hat{S}_3 \left(1 - \frac{S_3}{\hat{S}_3} \right) - bQ_1 - bR_1 - \left(b + k \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right) Q_2 - (b+k)R_2 \\
 &+ e\hat{I}_3 \left(\frac{I_3}{\hat{I}_3} - \frac{I_3}{\hat{I}_3} \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right) + (b+g)\hat{Q}_3 \left(1 - \frac{Q_3}{\hat{Q}_3} \right).
 \end{aligned}
 \tag{4.99}$$

เนื่องจาก

$\hat{S}_1 = \frac{bN_T}{b+k}$, $\hat{S}_2 = \frac{k}{b+k} \hat{S}_1$, $b\hat{S}_3 = \frac{k\hat{S}_2}{\hat{R}_0}$ and $e\hat{I}_3 = (b+g)\hat{Q}_3$, สมการ (4.99) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \psi(t) &= bN_T \left(1 - \frac{\hat{S}_1}{S_1} \right) + bN_T \left(1 - \frac{S_1}{\hat{S}_1} \right) + k\hat{S}_1 \left(\frac{S_1}{\hat{S}_1} - \frac{S_1}{\hat{S}_1} \frac{\hat{S}_2}{S_2} \right) + k\hat{S}_1 \left(1 - \frac{S_2}{\hat{S}_2} \right) \\
 &+ b\hat{S}_3 \left(\frac{S_2}{\hat{S}_2/\hat{R}_0} - \frac{S_2}{\hat{S}_2/\hat{R}_0} \frac{\hat{S}_3}{S_3} \right) + b\hat{S}_3 \left(1 - \frac{S_3}{\hat{S}_3} \right) - bQ_1 - bR_1 - \left(b + k \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right) Q_2 - (b+k)R_2 \\
 &+ e\hat{I}_3 \left(\frac{I_3}{\hat{I}_3} - \frac{I_3}{\hat{I}_3} \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right) + e\hat{I}_3 \left(1 - \frac{Q_3}{\hat{Q}_3} \right), \\
 \frac{d}{dt} \psi(t) &= bN_T \left(2 - \frac{\hat{S}_1}{S_1} - \frac{S_1}{\hat{S}_1} \right) + k\hat{S}_1 \left(\frac{S_1}{\hat{S}_1} - \frac{S_1}{\hat{S}_1} \frac{\hat{S}_2}{S_2} + 1 - \frac{S_2}{\hat{S}_2} \right) + b\hat{S}_3 \left(\frac{S_2}{\hat{S}_2/\hat{R}_0} - \frac{S_2}{\hat{S}_2/\hat{R}_0} \frac{\hat{S}_3}{S_3} + 1 - \frac{S_3}{\hat{S}_3} \right) \\
 &\quad - bQ_1 - bR_1 - \left(b + k \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right) Q_2 - (b+k)R_2 + e\hat{I}_3 \left(\frac{I_3}{\hat{I}_3} - \frac{I_3}{\hat{I}_3} \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} + 1 - \frac{Q_3}{\hat{Q}_3} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \psi(t) &= -bN_T \frac{(\hat{S}_1 - S_1)^2}{S_1 \hat{S}_1} - k\hat{S}_1 \left(\left(1 - \frac{\hat{S}_2}{S_2} \right) \left(\frac{S_2}{\hat{S}_2} - \frac{S_1}{\hat{S}_1} \right) \right) - b\hat{S}_3 \left(\left(1 - \frac{\hat{S}_3}{S_3} \right) \left(\frac{S_3}{\hat{S}_3} - \frac{S_2}{\hat{S}_2/\hat{R}_0} \right) \right) \\
 &\quad - bQ_1 - bR_1 - \left(b + k \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right) Q_2 - (b+k)R_2 - e\hat{I}_3 \left(\left(1 - \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right) \left(\frac{Q_3}{\hat{Q}_3} - \frac{I_3}{\hat{I}_3} \right) \right).
 \end{aligned}
 \tag{4.100}$$

จะเห็นว่า

ถ้า $\frac{S_3}{\hat{S}_3} \geq \frac{S_2}{\hat{S}_2/\hat{R}_0}$ สำหรับทุกๆ $S_2 \geq \hat{S}_2/\hat{R}_0$ และ $\frac{S_3}{\hat{S}_3} \leq \frac{S_2}{\hat{S}_2/\hat{R}_0}$ สำหรับทุกๆ $0 < S_2 \leq \hat{S}_2/\hat{R}_0$,

ดังนั้น $-b\hat{S}_3 \left(\left(1 - \frac{\hat{S}_3}{S_3} \right) \left(\frac{S_3}{\hat{S}_3} - \frac{S_2}{\hat{S}_2/\hat{R}_0} \right) \right) \leq 0$.

สำหรับพจน์สุดท้าย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของลิขสิทธิ์ที่ปรากฏบนเอกสารนี้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

ถ้า $\frac{Q_3}{\hat{Q}_3} \geq \frac{I_3}{\hat{I}_3}$ สำหรับทุกๆ $I_3 \geq \hat{I}_3$ และ $\frac{Q_3}{\hat{Q}_3} \leq \frac{I_3}{\hat{I}_3}$ สำหรับทุกๆ $0 < I_3 \leq \hat{I}_3$ นั่นก็คือ

$$-e\hat{I}_3 \left(\left(1 - \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right) \left(\frac{Q_3}{\hat{Q}_3} - \frac{I_3}{\hat{I}_3} \right) \right) \leq 0.$$

ดังนั้นทุกๆพจน์ใน (4.100) มีค่าน้อยกว่า 0 และ $\frac{d}{dt}\psi(t) \leq 0$. เซตจำกัดของผลเฉลยบรรจุอยู่ในเซต

โดยที่ $S_1 = \hat{S}_1, S_2 = \hat{S}_2, S_3 = \hat{S}_3, Q_1 = 0, R_1 = 0, Q_2 = 0,$

$R_2 = 0$ และ $Q_3 = \hat{Q}_3$ ซึ่งคือ $\{P_2\}$. ทฤษฎีข้างต้นแสดงให้เห็นว่า P_2 มีความเสถียรวงกว้างบน Ω_1

ทฤษฎีบทที่ 12 ถ้า $\tilde{R}_0 > 1, R_0^* < 1$, แล้ว

$P_3(\tilde{S}_1, \tilde{E}_1, \tilde{I}_1, \tilde{Q}_1, \tilde{R}_1, \tilde{S}_2, \tilde{E}_2, \tilde{I}_2, \tilde{Q}_2, \tilde{R}_2, \tilde{S}_3, \tilde{E}_3, \tilde{I}_3, \tilde{Q}_3, \tilde{R}_3) \in \Omega_1$ สามารถหาค่าได้และมีความเสถียรวงกว้างบน Ω_1 เมื่อ

$$\begin{cases} a_1 = \frac{bN_T}{\tilde{S}_1} \\ a_2 = \frac{(b+d)N_T}{\tilde{S}_2} \\ a_3 = \frac{(b+d)N_T}{\tilde{S}_3} \\ d = e + f \end{cases} \quad (4.101)$$

ฟังก์ชัน ฟังก์ชัน Lyapunov อยู่ในรูปแบบ

$$\eta(t) = (S_1 - \tilde{S}_1 \ln S_1) + E_1 + I_1 + Q_1 + R_1 + (S_2 - \tilde{S}_2 \ln S_2) + E_2 + I_2 + (Q_2 - \tilde{Q}_2 \ln Q_2) \\ + (S_3 - \tilde{S}_3 \ln S_3) + E_3 + I_3 + (Q_3 - \tilde{Q}_3 \ln Q_3)$$

$$\frac{d}{dt}\eta(t) = \frac{d}{dt}S_1 \left(1 - \frac{\tilde{S}_1}{S_1} \right) + \frac{d}{dt}E_1 + \frac{d}{dt}I_1 + \frac{d}{dt}Q_1 + \frac{d}{dt}R_1$$

$$+ \frac{d}{dt}S_2 \left(1 - \frac{\tilde{S}_2}{S_2} \right) + \frac{d}{dt}E_2 + \frac{d}{dt}I_2 + \frac{d}{dt}Q_2 \left(1 - \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right)$$

$$+ \frac{d}{dt}S_3 \left(1 - \frac{\tilde{S}_3}{S_3} \right) + \frac{d}{dt}E_3 + \frac{d}{dt}I_3 + \frac{d}{dt}Q_3 \left(1 - \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3} \right)$$

$$= \left(bN_T - \left(\frac{a_1(E_1 + I_1)}{N_T} + b + k \right) S_1 \right) \left(1 - \frac{\tilde{S}_1}{S_1} \right) + \left(\frac{a_1 S_1 (E_1 + I_1)}{N_T} - (b + c + d + k) E_1 \right)$$

$$+ (cE_1 - (b + e + f + k)I_1) + (eI_1 - (b + g + k)Q_1) + (dE_1 + fI_1 + gQ_1 - (b + k)R_1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่ออนุญาตเห็นไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร. พันธุ์ พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มาไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$\begin{aligned}
 & + \left(kS_1 - \left(\frac{a_2(E_2 + I_2)}{N_T} + b + k \right) S_2 \right) \left(1 - \frac{\tilde{S}_2}{S_2} \right) + \left(kE_1 + \frac{a_2S_2(E_2 + I_2)}{N_T} - (b + c + d + k)E_2 \right) \\
 & + (kI_1 + cE_2 - (b + e + f + k)I_2) + (kQ_1 + eI_2 - (b + g + k)Q_2) \left(1 - \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) \\
 & + \left(kS_2 - \left(\frac{a_3(E_3 + I_3)}{N_T} + b \right) S_3 \right) \left(1 - \frac{\tilde{S}_3}{S_3} \right) + \left(kE_2 + \frac{a_3S_3(E_3 + I_3)}{N_T} - (b + c + d)E_3 \right) \\
 & + (kI_2 + cE_3 - (b + e + f)I_3) + (kQ_2 + eI_3 - (b + g)Q_3) \left(1 - \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3} \right) \\
 & = bN_T \left(1 - \frac{\tilde{S}_1}{S_1} \right) + (b + k)\tilde{S}_1 - bS_1 - k\frac{S_1}{S_2}\tilde{S}_2 + (b + k)\tilde{S}_2 - bS_2 - k\frac{S_2}{S_3}\tilde{S}_3 + b\tilde{S}_3 - bS_3 \\
 & + (E_1 + I_1) \left(\frac{a_1\tilde{S}_1}{N_T} - b \right) - \left(b + k\frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) Q_1 - (b + k)R_1 + E_2 \left(\frac{a_2\tilde{S}_2}{N_T} - b - d \right) + I_2 \left(\frac{a_2\tilde{S}_2}{N_T} - b - e - f \right) \\
 & + (b + g + k)\tilde{Q}_2 \left(1 - \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) + e\tilde{I}_2 \left(1 - \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) + \left(\frac{a_3\tilde{S}_3}{N_T} - b - d \right) E_3 + \left(\frac{a_3\tilde{S}_3}{N_T} - b - e - f \right) I_3 \\
 & + (kQ_2 + eI_3) \left(1 - \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3} \right) + (b + g)\tilde{Q}_3 \left(1 - \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3} \right). \tag{4.102}
 \end{aligned}$$

หาอนุพันธ์จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \eta(t) & = bN_T \left(1 - \frac{\tilde{S}_1}{S_1} \right) + (b + k)\tilde{S}_1 - bS_1 - k\frac{S_1}{S_2}\tilde{S}_2 + (b + k)\tilde{S}_2 - bS_2 - k\frac{S_2}{S_3}\tilde{S}_3 + b\tilde{S}_3 - bS_3 \\
 & - \left(b + k\frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) Q_1 - (b + k)R_1 + (b + g + k)\tilde{Q}_2 \left(1 - \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) + eI_2 \left(1 - \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) \\
 & + (kQ_2 + eI_3) \left(1 - \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3} \right) + (b + g)\tilde{Q}_3 \left(1 - \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3} \right) \\
 & = bN_T \left(1 - \frac{\tilde{S}_1}{S_1} \right) + (b + k)\tilde{S}_1 \left(1 - \frac{S_1}{\tilde{S}_1} \right) + k\frac{\tilde{S}_1}{R_0} \left(\frac{S_1}{\tilde{S}_1/R_0} - \frac{S_1}{\tilde{S}_1/R_0} \frac{\tilde{S}_2}{S_2} \right) + (b + k)\tilde{S}_2 \left(1 - \frac{S_2}{\tilde{S}_2} \right) \\
 & + k\tilde{S}_2 \left(\frac{S_2}{\tilde{S}_2} - \frac{S_2}{\tilde{S}_2} \frac{\tilde{S}_3}{S_3} \right) + \left(b\tilde{S}_3 + \frac{a_3}{N_T} (\tilde{E}_3 + \tilde{I}_3) \tilde{S}_3 \right) \left(1 - \frac{S_3}{\tilde{S}_3} \right) - \frac{a_3}{N_T} (\tilde{E}_3 + \tilde{I}_3) \tilde{S}_3 \left(1 - \frac{S_3}{\tilde{S}_3} \right) \\
 & - \left(b + k\frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) Q_1 - (b + k)R_1 + (b + g + k)\tilde{Q}_2 \left(1 - \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) + e\tilde{I}_2 \left(\frac{I_2}{\tilde{I}_2} - \frac{I_2}{\tilde{I}_2} \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right)
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อผู้พิมพ์นี้หน้าไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของลิขสิทธิ์ของเอกสารนี้

รองศาสตราจารย์ ดร. พันธุ์ พงศ์สัมพันธ์

$$+ (k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3) \left(\frac{kQ_2 + eI_3}{k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3} - \frac{kQ_2 + eI_3}{k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3} \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3} \right) + (b + g)\tilde{Q}_3 \left(1 - \frac{Q_3}{\tilde{Q}_3} \right). \quad (4.103)$$

เนื่องจาก $\tilde{S}_1 = \frac{bN_T}{b+k}$, $(b+k)\tilde{S}_2 = \frac{k\tilde{S}_1}{\tilde{R}_0}$, $b\tilde{S}_3 + \frac{a_3}{N_T}(\tilde{E}_3 + \tilde{I}_3)\tilde{S}_3 = k\tilde{S}_2$, $e\tilde{I}_2 = (b+g+k)\tilde{Q}_2$ and

$k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3 = (b+g)\tilde{Q}_3$, สมการ (4.103) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\eta(t) &= bN_T \left(1 - \frac{\tilde{S}_1}{S_1} \right) + bN_T \left(1 - \frac{S_1}{\tilde{S}_1} \right) + (b+k)\tilde{S}_2 \left(\frac{S_1}{\tilde{S}_1/\tilde{R}_0} - \frac{S_1}{\tilde{S}_1/\tilde{R}_0} \frac{\tilde{S}_2}{S_2} \right) + (b+k)\tilde{S}_2 \left(1 - \frac{S_2}{\tilde{S}_2} \right) \\ &+ k\tilde{S}_2 \left(\frac{S_2}{\tilde{S}_2} - \frac{S_2}{\tilde{S}_2} \frac{\tilde{S}_3}{S_3} \right) + k\tilde{S}_2 \left(1 - \frac{S_3}{\tilde{S}_3} \right) - (k\tilde{S}_2 - b\tilde{S}_3) \left(1 - \frac{S_3}{\tilde{S}_3} \right) - \left(b+k \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) Q_1 - (b+k)R_1 \\ &+ e\tilde{I}_2 \left(1 - \frac{Q_2}{\tilde{Q}_2} \right) + e\tilde{I}_2 \left(\frac{I_2}{\tilde{I}_2} - \frac{I_2}{\tilde{I}_2} \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) + (b+g)\tilde{Q}_3 \left(\frac{kQ_2 + eI_3}{k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3} - \frac{kQ_2 + eI_3}{k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3} \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3} \right) + (b+g)\tilde{Q}_3 \left(1 - \frac{Q_3}{\tilde{Q}_3} \right), \\ \frac{d}{dt}\eta(t) &= bN_T \left(2 - \frac{\tilde{S}_1}{S_1} - \frac{S_1}{\tilde{S}_1} \right) + (b+k)\tilde{S}_2 \left(\frac{S_1}{\tilde{S}_1/\tilde{R}_0} - \frac{S_1}{\tilde{S}_1/\tilde{R}_0} \frac{\tilde{S}_2}{S_2} + 1 - \frac{S_2}{\tilde{S}_2} \right) + k\tilde{S}_2 \left(\frac{S_2}{\tilde{S}_2} - \frac{S_2}{\tilde{S}_2} \frac{\tilde{S}_3}{S_3} + 1 - \frac{S_3}{\tilde{S}_3} \right) \\ &- b \left(\frac{k\tilde{S}_2}{b} - \tilde{S}_3 \right) \left(1 - \frac{S_3}{\tilde{S}_3} \right) - \left(b+k \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) Q_1 - (b+k)R_1 + e\tilde{I}_2 \left(\frac{I_2}{\tilde{I}_2} - \frac{I_2}{\tilde{I}_2} \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} + 1 - \frac{Q_2}{\tilde{Q}_2} \right) \\ &+ (b+g)\tilde{Q}_3 \left(\frac{kQ_2 + eI_3}{k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3} - \frac{kQ_2 + eI_3}{k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3} \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3} + 1 - \frac{Q_3}{\tilde{Q}_3} \right), \\ \frac{d}{dt}\eta(t) &= -bN_T \frac{(\tilde{S}_1 - S_1)^2}{S_1\tilde{S}_1} - (b+k)\tilde{S}_2 \left(\left(1 - \frac{\tilde{S}_2}{S_2} \right) \left(\frac{S_2}{\tilde{S}_2} - \frac{S_1}{\tilde{S}_1/\tilde{R}_0} \right) \right) - k\tilde{S}_2 \left(\left(1 - \frac{\tilde{S}_3}{S_3} \right) \left(\frac{S_3}{\tilde{S}_3} - \frac{S_2}{\tilde{S}_2} \right) \right) \\ &- b \left(\frac{k\tilde{S}_2}{b} - \tilde{S}_3 \right) \left(1 - \frac{S_3}{\tilde{S}_3} \right) - \left(b+k \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) Q_1 - (b+k)R_1 - e\tilde{I}_2 \left(\left(1 - \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) \left(\frac{Q_2}{\tilde{Q}_2} - \frac{I_2}{\tilde{I}_2} \right) \right) \\ &- (b+g)\tilde{Q}_3 \left(\left(1 - \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3} \right) \left(\frac{Q_3}{\tilde{Q}_3} - \frac{kQ_2 + eI_3}{k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.104)$$

ถ้า $\frac{S_2}{\tilde{S}_2} \geq \frac{S_1}{\tilde{S}_1/\tilde{R}_0}$ สำหรับทุกๆ $S_1 \geq \tilde{S}_1/\tilde{R}_0$ และ $\frac{S_2}{\tilde{S}_2} \leq \frac{S_1}{\tilde{S}_1/\tilde{R}_0}$ สำหรับทุกๆ $0 < S_1 \leq \tilde{S}_1/\tilde{R}_0$,

$$\text{ดังนั้น } - (b+k)\tilde{S}_2 \left(\left(1 - \frac{\tilde{S}_2}{S_2} \right) \left(\frac{S_2}{\tilde{S}_2} - \frac{S_1}{\tilde{S}_1/\tilde{R}_0} \right) \right) \leq 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของลิขสิทธิ์ที่ปรากฏบนเอกสารนี้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

ถ้า $\frac{k\tilde{S}_2}{b} \leq \tilde{S}_3$ สำหรับทุกๆ $S_3 \geq \tilde{S}_3$ และ $\frac{k\tilde{S}_2}{b} \geq \tilde{S}_3$ สำหรับทุกๆ $0 < S_3 \leq \tilde{S}_3$, then

$$-b\left(\frac{k\tilde{S}_2}{b} - \tilde{S}_3\right)\left(1 - \frac{S_3}{\tilde{S}_3}\right) \leq 0.$$

ถ้า $\frac{Q_2}{I_2} \geq \frac{I_2}{\tilde{I}_2}$ สำหรับทุกๆ $I_2 \geq \tilde{I}_2$ และ $\frac{Q_2}{I_2} \leq \frac{I_2}{\tilde{I}_2}$ สำหรับทุกๆ $0 < I_2 \leq \tilde{I}_2$, then

$$-e\tilde{I}_2\left(\left(1 - \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2}\right)\left(\frac{Q_2}{\tilde{Q}_2} - \frac{I_2}{\tilde{I}_2}\right)\right) \leq 0.$$

ถ้า $\frac{Q_3}{I_3} \geq \frac{kQ_2 + eI_3}{k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3}$ สำหรับทุกๆ $Q_2 \geq \tilde{Q}_2$ และ $I_3 \geq \tilde{I}_3$, $\frac{Q_3}{I_3} \leq \frac{kQ_2 + eI_3}{k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3}$ สำหรับทุกๆ

$$0 < Q_2 \leq \tilde{Q}_2 \text{ และ } 0 < I_3 \leq \tilde{I}_3, \text{ แล้ว } -(b+g)\tilde{Q}_3\left(\left(1 - \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3}\right)\left(\frac{Q_3}{\tilde{Q}_3} - \frac{kQ_2 + eI_3}{k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3}\right)\right) \leq 0$$

ดังนั้นทุกๆพจน์ใน (4.100) มีค่าน้อยกว่า 0 และ $\frac{d}{dt}\psi(t) \leq 0$ เขตจำกัดของผลเฉลยบรรจุอยู่ในเซตโดย

ที่ $S_1 = \hat{S}_1, S_2 = \hat{S}_2, S_3 = \hat{S}_3, Q_1 = 0, R_1 = 0, Q_2 = 0,$
 $R_2 = 0$ และ $Q_3 = \hat{Q}_3$ ซึ่งคือ $\{P_2\}$ ทฤษฎีข้างต้นแสดงให้เห็นว่า P_2 มีความเสถียรวงกว้างบน Ω_1
 ทฤษฎีบทที่ 13 ถ้า $R_0 > 1$, แล้ว $P_4(S_1^*, E_1^*, I_1^*, Q_1^*, R_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, Q_2^*, R_2^*, S_3^*, E_3^*, I_3^*, Q_3^*, R_3^*) \in \Omega_1$
 สามารถหาค่าได้และมีความเสถียรวงกว้างบน Ω_1 เมื่อ

$$\begin{cases} a_1 = \frac{(b+d)N_T}{S_1^*} \\ a_2 = \frac{(b+d)N_T}{S_2^*} \\ a_3 = \frac{(b+d)N_T}{S_3^*} \\ d = e + f \end{cases}$$

(4.105)

พิสูจน์ ฟังก์ชัน Lyapunov อยู่ในรูปแบบ

$$\kappa(t) = (S_1 - S_1^* \ln S_1) + E_1 + I_1 + (Q_1 - Q_1^* \ln Q_1) + (S_2 - S_2^* \ln S_2) + E_2 + I_2 + (Q_2 - Q_2^* \ln Q_2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ของศาสตราจารย์ ดร.พนรัตน์ พงศ์สัมพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$\begin{aligned}
 & + (S_3 - S_3^* \ln S_3) + E_3 + I_3 + (Q_3 - Q_3^* \ln Q_3) \\
 \frac{d}{dt} \kappa(t) &= \frac{d}{dt} S_1 \left(1 - \frac{S_1^*}{S_1} \right) + \frac{d}{dt} E_1 + \frac{d}{dt} I_1 + \frac{d}{dt} Q_1 \left(1 - \frac{Q_1^*}{Q_1} \right) \\
 & + \frac{d}{dt} S_2 \left(1 - \frac{S_2^*}{S_2} \right) + \frac{d}{dt} E_2 + \frac{d}{dt} I_2 + \frac{d}{dt} Q_2 \left(1 - \frac{Q_2^*}{Q_2} \right) \\
 & + \frac{d}{dt} S_3 \left(1 - \frac{S_3^*}{S_3} \right) + \frac{d}{dt} E_3 + \frac{d}{dt} I_3 + \frac{d}{dt} Q_3 \left(1 - \frac{Q_3^*}{Q_3} \right) \\
 &= \left(bN_T - \left(\frac{a_1(E_1 + I_1)}{N_T} + b + k \right) S_1 \right) \left(1 - \frac{S_1^*}{S_1} \right) + \left(\frac{a_1 S_1 (E_1 + I_1)}{N_T} - (b + c + d + k) E_1 \right) \\
 & + (cE_1 - (b + e + f + k) I_1) + (eI_1 - (b + g + k) Q_1) \left(1 - \frac{Q_1^*}{Q_1} \right) \\
 & + \left(kS_1 - \left(\frac{a_2(E_2 + I_2)}{N_T} + b + k \right) S_2 \right) \left(1 - \frac{S_2^*}{S_2} \right) + \left(kE_1 + \frac{a_2 S_2 (E_2 + I_2)}{N_T} - (b + c + d + k) E_2 \right) \\
 & + (kI_1 + cE_2 - (b + e + f + k) I_2) + (kQ_1 + eI_2 - (b + g + k) Q_2) \left(1 - \frac{Q_2^*}{Q_2} \right) \\
 & + \left(kS_2 - \left(\frac{a_3(E_3 + I_3)}{N_T} + b \right) S_3 \right) \left(1 - \frac{S_3^*}{S_3} \right) + \left(kE_2 + \frac{a_3 S_3 (E_3 + I_3)}{N_T} - (b + c + d) E_3 \right) \\
 & + (kI_2 + cE_3 - (b + e + f) I_3) + (kQ_2 + eI_3 - (b + g) Q_3) \left(1 - \frac{Q_3^*}{Q_3} \right) \\
 &= bN_T \left(1 - \frac{S_1^*}{S_1} \right) + (b + k) S_1^* - bS_1 - k \frac{S_1}{S_2} S_2^* + (b + k) S_2^* - bS_2 - k \frac{S_2}{S_3} S_3^* + bS_3^* - bS_3 \\
 & + \left(\frac{a_1 S_1^*}{N_T} - b - d \right) E_1 + \left(\frac{a_1 S_1^*}{N_T} - b - e - f \right) I_1 + eI_1 \left(1 - \frac{Q_1^*}{Q_1} \right) + (b + g + k) Q_1^* \left(1 - \frac{Q_1^*}{Q_1} \right) \\
 & + \left(\frac{a_2 S_2^*}{N_T} - b - d \right) E_2 + \left(\frac{a_2 S_2^*}{N_T} - b - e - f \right) I_2 + (kQ_1 + eI_2) \left(1 - \frac{Q_2^*}{Q_2} \right) + (b + g + k) Q_2^* \left(1 - \frac{Q_2^*}{Q_2} \right) \\
 & + \left(\frac{a_3 S_3^*}{N_T} - b - d \right) E_3 + \left(\frac{a_3 S_3^*}{N_T} - b - e - f \right) I_3 + (kQ_2 + eI_3) \left(1 - \frac{Q_3^*}{Q_3} \right) + (b + g) Q_3^* \left(1 - \frac{Q_3^*}{Q_3} \right).
 \end{aligned} \tag{4.106}$$

แทนค่า (4.105) เข้าไปใน (4.106) จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt} \kappa(t) = bN_T \left(1 - \frac{S_1^*}{S_1} \right) + (b + k) S_1^* - bS_1 - k \frac{S_1}{S_2} S_2^* + (b + k) S_2^* - bS_2 - k \frac{S_2}{S_3} S_3^* + bS_3^* - bS_3$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งหากมีการรับใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$\begin{aligned}
 & + eI_1 \left(1 - \frac{Q_1^*}{Q_1}\right) + (b + g + k)Q_1^* \left(1 - \frac{Q_1}{Q_1^*}\right) \\
 & + (kQ_1 + eI_2) \left(1 - \frac{Q_2^*}{Q_2}\right) + (b + g + k)Q_2^* \left(1 - \frac{Q_2}{Q_2^*}\right) \\
 & \quad + (kQ_2 + eI_3) \left(1 - \frac{Q_3^*}{Q_3}\right) + (b + g)Q_3^* \left(1 - \frac{Q_3}{Q_3^*}\right) \\
 & = bN_T \left(1 - \frac{S_1^*}{S_1}\right) + (b + k)R_0^* S_1^* \left(\frac{1}{R_0^*} - \frac{S_1}{R_0^* S_1^*}\right) \\
 & + kS_1^* \left(\frac{S_1}{S_1^*} - \frac{S_1}{S_1^*} \frac{S_2^*}{S_2}\right) + \left((b + k)S_2^* + \frac{a_2}{N_T} (E_2^* + I_2^*) S_2^*\right) \left(1 - \frac{S_2}{S_2^*}\right) \\
 & - \frac{a_2}{N_T} (E_2^* + I_2^*) S_2^* \left(1 - \frac{S_2}{S_2^*}\right) + kS_2^* \left(\frac{S_2}{S_2^*} - \frac{S_2}{S_2^*} \frac{S_3^*}{S_3}\right) + \left(bS_3^* + \frac{a_3}{N_T} (E_3^* + I_3^*) S_3^*\right) \left(1 - \frac{S_3}{S_3^*}\right) \\
 & - \frac{a_3}{N_T} (E_3^* + I_3^*) S_3^* \left(1 - \frac{S_3}{S_3^*}\right) + eI_1^* \left(\frac{I_1}{I_1^*} - \frac{I_1}{I_1^*} \frac{Q_1^*}{Q_1}\right) + (b + g + k)Q_1^* \left(1 - \frac{Q_1}{Q_1^*}\right) \\
 & + (kQ_1^* + eI_2^*) \left(\frac{kQ_1 + eI_2}{kQ_1^* + eI_2^*} - \frac{kQ_1 + eI_2}{kQ_1^* + eI_2^*} \frac{Q_2^*}{Q_2}\right) + (b + g + k)Q_2^* \left(1 - \frac{Q_2}{Q_2^*}\right) \\
 & + (kQ_2^* + eI_3^*) \left(\frac{kQ_2 + eI_3}{kQ_2^* + eI_3^*} - \frac{kQ_2 + eI_3}{kQ_2^* + eI_3^*} \frac{Q_3^*}{Q_3}\right) + (b + g)Q_3^* \left(1 - \frac{Q_3}{Q_3^*}\right).
 \end{aligned}$$

(4.107)

เนื่องจาก

$$bN_T = (b + k)R_0^* S_1^*, \quad (b + k)S_2^* + \frac{a_2}{N_T} (E_2^* + I_2^*) S_2^* = kS_1^*, \quad bS_3^* + \frac{a_3}{N_T} (E_3^* + I_3^*) S_3^* = kS_2^*,$$

$$eI_1^* = (b + g + k)Q_1^*, \quad kQ_1^* + eI_2^* = (b + g + k)Q_2^* \quad \text{and} \quad kQ_2^* + eI_3^* = (b + g)Q_3^*,$$

ดังนั้น (4.107) สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \kappa(t) & = bN_T \left(1 - \frac{S_1^*}{S_1}\right) + bN_T \left(\frac{1}{R_0^*} - \frac{S_1}{R_0^* S_1^*}\right) + kS_1^* \left(\frac{S_1}{S_1^*} - \frac{S_1}{S_1^*} \frac{S_2^*}{S_2}\right) + kS_1^* \left(1 - \frac{S_2}{S_2^*}\right) \\
 & - (kS_1^* - (b + k)S_2^*) \left(1 - \frac{S_2}{S_2^*}\right) + kS_2^* \left(\frac{S_2}{S_2^*} - \frac{S_2}{S_2^*} \frac{S_3^*}{S_3}\right) + kS_2^* \left(1 - \frac{S_3}{S_3^*}\right) \\
 & - (kS_2^* - bS_3^*) \left(1 - \frac{S_3}{S_3^*}\right) + eI_1^* \left(\frac{I_1}{I_1^*} - \frac{I_1}{I_1^*} \frac{Q_1^*}{Q_1}\right) + eI_1^* \left(1 - \frac{Q_1}{Q_1^*}\right)
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการพิมพ์ใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$\begin{aligned}
& + (b+g+k)Q_2^* \left(\frac{kQ_1+eI_2}{kQ_1^*+eI_2^*} - \frac{kQ_1+eI_2}{kQ_1^*+eI_2^*} \frac{Q_2^*}{Q_2} \right) + (b+g+k)Q_2^* \left(1 - \frac{Q_2}{Q_2^*} \right) \\
& + (b+g)Q_3^* \left(\frac{kQ_2+eI_3}{kQ_2^*+eI_3^*} - \frac{kQ_2+eI_3}{kQ_2^*+eI_3^*} \frac{Q_3^*}{Q_3} \right) + (b+g)Q_3^* \left(1 - \frac{Q_3}{Q_3^*} \right), \\
\frac{d}{dt} \kappa(t) & = bN_T \left(1 - \frac{S_1^*}{S_1} + \frac{1}{R_0^*} - \frac{S_1}{R_0^* S_1^*} \right) + kS_1^* \left(\frac{S_1}{S_1^*} - \frac{S_1}{S_1^*} \frac{S_2^*}{S_2} + 1 - \frac{S_2}{S_2^*} \right) \\
& - (b+k) \left(\frac{kS_1^*}{b+k} - S_2^* \right) \left(1 - \frac{S_2}{S_2^*} \right) + kS_2^* \left(\frac{S_2}{S_2^*} - \frac{S_2}{S_2^*} \frac{S_3^*}{S_3} + 1 - \frac{S_3}{S_3^*} \right) \\
& - b \left(\frac{kS_2^*}{b} - S_3^* \right) \left(1 - \frac{S_3}{S_3^*} \right) + eI_1^* \left(\frac{I_1}{I_1^*} - \frac{I_1}{I_1^*} \frac{Q_1^*}{Q_1} + 1 - \frac{Q_1}{Q_1^*} \right) \\
& + (b+g+k)Q_2^* \left(\frac{kQ_1+eI_2}{kQ_1^*+eI_2^*} - \frac{kQ_1+eI_2}{kQ_1^*+eI_2^*} \frac{Q_2^*}{Q_2} + 1 - \frac{Q_2}{Q_2^*} \right) \\
& + (b+g)Q_3^* \left(\frac{kQ_2+eI_3}{kQ_2^*+eI_3^*} - \frac{kQ_2+eI_3}{kQ_2^*+eI_3^*} \frac{Q_3^*}{Q_3} + 1 - \frac{Q_3}{Q_3^*} \right), \\
\frac{d}{dt} \kappa(t) & = -bN_T \left(1 - \frac{S_1}{S_1^*} \left(\frac{S_1^*}{S_1} - \frac{1}{R_0^*} \right) \right) - kS_1^* \left(\left(1 - \frac{S_2^*}{S_2} \right) \left(\frac{S_2}{S_2^*} - \frac{S_1}{S_1^*} \right) \right) \\
& - (b+k) \left(\frac{kS_1^*}{b+k} - S_2^* \right) \left(1 - \frac{S_2}{S_2^*} \right) \\
& - kS_2^* \left(\left(1 - \frac{S_3^*}{S_3} \right) \left(\frac{S_3}{S_3^*} - \frac{S_2}{S_2^*} \right) \right) - b \left(\frac{kS_2^*}{b} - S_3^* \right) \left(1 - \frac{S_3}{S_3^*} \right) - eI_1^* \left(\left(1 - \frac{Q_1^*}{Q_1} \right) \left(\frac{Q_1}{Q_1^*} - \frac{I_1}{I_1^*} \right) \right) \\
& - (b+g+k)Q_2^* \left(\left(1 - \frac{Q_2^*}{Q_2} \right) \left(\frac{Q_2}{Q_2^*} - \frac{kQ_1+eI_2}{kQ_1^*+eI_2^*} \right) \right) - (b+g)Q_3^* \left(\left(1 - \frac{Q_3^*}{Q_3} \right) \left(\frac{Q_3}{Q_3^*} - \frac{kQ_2+eI_3}{kQ_2^*+eI_3^*} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.108}$$

ถ้า $\frac{S_1^*}{S_1} \leq \frac{1}{R_0^*}$ สำหรับทุกๆ $S_1 \geq S_1^*$ และ $\frac{S_1^*}{S_1} \geq \frac{1}{R_0^*}$ สำหรับทุกๆ $0 < S_1 \leq S_1^*$,

ดังนั้น $-bN_T \left(1 - \frac{S_1}{S_1^*} \left(\frac{S_1^*}{S_1} - \frac{1}{R_0^*} \right) \right) \leq 0$.

ถ้า $\frac{kS_1^*}{b+k} \leq S_2^*$ สำหรับทุกๆ $S_2 \geq S_2^*$ และ $\frac{kS_1^*}{b+k} \leq S_2^*$ สำหรับทุกๆ $0 < S_2 \leq S_2^*$,

นั่นก็คือ $-(b+k) \left(\frac{kS_1^*}{b+k} - S_2^* \right) \left(1 - \frac{S_2}{S_2^*} \right) \leq 0$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของลิขสิทธิ์ที่ปรากฏ

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

จะเห็นว่าทุกๆพจน์ของ (4.108) มีค่าน้อยกว่า 0 และ $\frac{d}{dt}k(t) \leq 0$ เขตจำกัดของผลเฉลยบรรจุอยู่ในเซต โดยที่ $S_1 = S_1^*, S_2 = S_2^*, S_3 = S_3^*, Q_1 = Q_1^*, Q_2 = Q_2^*$ และ $Q_3 = Q_3^*$ ซึ่งคือ $\{P_4\}$ ทฤษฎีข้างต้นแสดงให้เห็นว่า P_4 มีความเสถียรวงกว้างบน Ω_1 จากการวิเคราะห์ผลที่ได้คือ

$$\hat{R}_0 = \frac{a_3 k^2 (b+c+e+f)}{(b+k)^2 (b+c+d)(b+e+f)}, \tilde{R}_0 = \frac{a_2 b k (b+c+e+f+k)}{(b+k)^2 (b+c+d+k)(b+e+f+k)}$$

และ $R_0^* = \frac{a_1 b (b+c+e+f+k)}{(b+k)(b+c+d+k)(b+e+f+k)}$ เป็นค่าขอบเขต (threshold parameter) ความเสถียร

วงกว้างสามารถวิเคราะห์ได้โดยใช้ทฤษฎีของ Lyapunov ถ้า $\hat{R}_0 < 1, \tilde{R}_0 < 1$ และ $R_0^* < 1$ แล้วจุดสมดุลสถานะไร้โรคมีความเสถียรวงกว้างและไม่มีการระบาดของโรค ถ้า $\hat{R}_0 > 1, \tilde{R}_0 < 1$ และ $R_0^* < 1$, แล้วจุดสมดุลสถานะเรื้อรังกลุ่มที่ 3 มีความเสถียรวงกว้างและมีการระบาดเฉพาะกลุ่มอายุกลุ่มที่ 3 ถ้า $\tilde{R}_0 > 1$ และ $R_0^* < 1$ แล้วจุดสมดุลสถานะเรื้อรังกลุ่มที่ 2 และ 3 มีความเสถียรวงกว้างและมีการระบาดเฉพาะกลุ่มอายุกลุ่มที่ 2 และ 3 ถ้า $R_0^* > 1$ แล้วจุดสมดุลสถานะเรื้อรังกลุ่มที่ 1, 2 และ 3 มีความเสถียรวงกว้างและมีการระบาดเฉพาะกลุ่มอายุกลุ่มที่ 1, 2 และ 3

แบบจำลองแบบที่ 5 แบบจำลองแบบ SEIQR โดยที่พิจารณาการติดเชื้อซ้ำ

ระบบสมการที่ลดรูปแล้วแสดงได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt}s(t) = \frac{D}{N} - \frac{C(D-d_n N)(1-r_c)s(t)}{\delta d_f N} - d_n s(t) \quad (4.109)$$

$$\frac{d}{dt}e(t) = \frac{C(D-d_n N)(1-r_c)s(t)}{\delta d_f N} - \left(\frac{1}{IP} + \delta d_f + \rho + d_n\right)e(t) \quad (4.110)$$

$$\frac{d}{dt}i(t) = \frac{1}{IP}e(t) - (\alpha + \delta d_f + \gamma + d_n)i(t) \quad (4.111)$$

$$\frac{d}{dt}q(t) = \gamma i(t) - (d_n + k)q(t) \quad (4.112)$$

$$\text{โดยที่ } r = 1 - s - e - i - q. \quad (4.113)$$

การวิเคราะห์

จุดสมดุลสถานะเรื้อรังในระบบสมการนี้คือ $E = (s^*, e^*, i^*, q^*)$ โดยที่

$$s^* = \frac{D \delta d_f}{\delta d_n d_f N + C(D-d_n N)(1-r_c)}, \quad (4.114)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนิติน พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$e^* = \frac{CD(D-d_nN)(1-r_c)}{\left(\frac{1}{IP} + d_n + \delta d_f + \rho\right)N(\delta d_n d_f N + C(D-d_nN)(1-r_c))} \quad (4.115)$$

$$i^* = \frac{\frac{1}{IP} CD (D-d_nN)(1-r_c)}{(\alpha + d_n + \delta d_f + \gamma)\left(\frac{1}{IP} + d_n + \delta d_f + \rho\right)N(\delta d_n d_f N + C(D-d_nN)(1-r_c))} \quad (4.116)$$

$$q^* = \frac{\frac{1}{IP} CD\gamma(D-d_nN)(1-r_c)}{(\alpha + d_n + \delta d_f + \gamma)(d_n + k)\left(\frac{1}{IP} + d_n + \delta d_f + \rho\right)N(\delta d_n d_f N + C(D-d_nN)(1-r_c))} \quad (4.117)$$

ความเสถียรภายในสามารถหาได้จากเครื่องหมายของค่าเงาเงง ซึ่งค่าเงาเงง (λ) สามารถหาได้จากการแก้สมการลักษณะเฉพาะ

$$|J_E - \lambda I| = 0;$$

โดยที่ J_E เป็นเมตริกซ์จาโคเบียนที่สภาวะระบาศะเรื้อรัง และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ ถ้าค่าเงาเงงมีส่วนจริงเป็นค่าลบ แล้วจุดสมดุลสภาวะเรื้อรังมีความเสถียรภายใน สมการลักษณะเฉพาะสำหรับจุดสมดุลสภาวะเรื้อรังนิยามโดย

$$(\alpha - d_n - \delta d_f - \gamma - \lambda)(-d_n - k - \lambda)\left(\beta - d_n - \delta d_f - \gamma - \lambda\right)\left(-d_n + \frac{C(D-d_nN)(1-r_c)}{\delta d_f N} - \lambda\right) = 0. \quad (4.118)$$

ดังนั้นค่าเงาเงงคือ

$$\lambda_1 = \alpha - d_n - \delta d_f - \gamma, \lambda_2 = -d_n - k, \lambda_3 = -\beta - d_n - \delta d_f - \gamma, \lambda_4 = -d_n - \frac{C(D-d_nN)(1-r_c)}{\delta d_f N}. \quad (4.119)$$

ดังนั้นค่าเงาเงงมีส่วนจริงที่เป็นค่าลบสำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่

$$R_0 = \frac{D}{d_n N} + \frac{\delta d_f}{C(1-r_c)} \quad (4.120)$$

$\bar{R}_0 = \sqrt{R_0}$ คือค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน ซึ่งแทนจำนวนเฉลี่ยของผู้ป่วยระยะที่สองที่เกิดจากผู้ป่วยระยะแรก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พันธณี พงศ์สัมพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

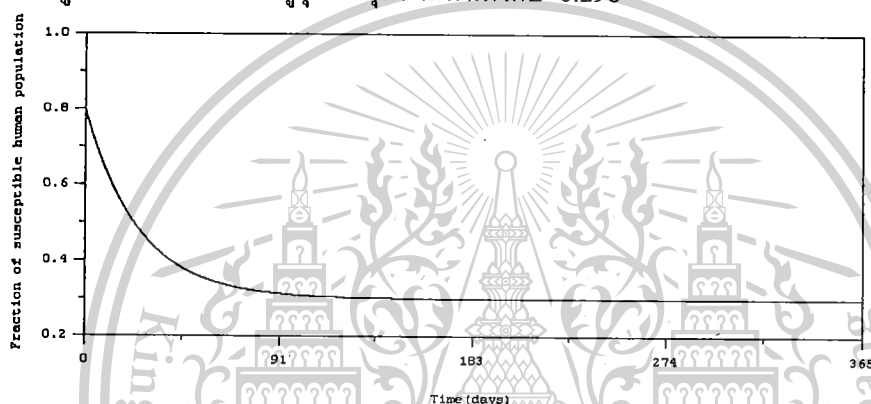
การวิเคราะห์เชิงตัวเลข

ในหัวข้อนี้ได้ทำการศึกษาถึงผลกระทบการเปลี่ยนแปลงของการระบาดเชื้อไวรัส H1N1 พารามิเตอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับแบบจำลองนี้คือ

$$D = 100, N = 10,000, d_n = 1/(365 * 65), C = 0.8, r_c = 80\%, \delta = 1, d_f = \frac{1}{21}, IP = 5,$$

$$\rho = \frac{1}{10}, \alpha = \frac{1}{14}, \gamma = \frac{1}{7}, k = \frac{1}{7}, \bar{R}_0 = 15.4.$$

ผลเฉลยเชิงตัวเลขของผู้เสี่ยงต่อการติดเชื้อเทียบกับเวลา แสดงดังรูปข้างล่างนี้ จะเห็นได้ว่าเมื่อเวลาผ่านไปสัดส่วนผู้ติดเชื้อลดลงจนเข้าสู่จุดสมดุลซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.298



รูปที่ 4.29 ผลเฉลยตามเวลาของผู้ที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

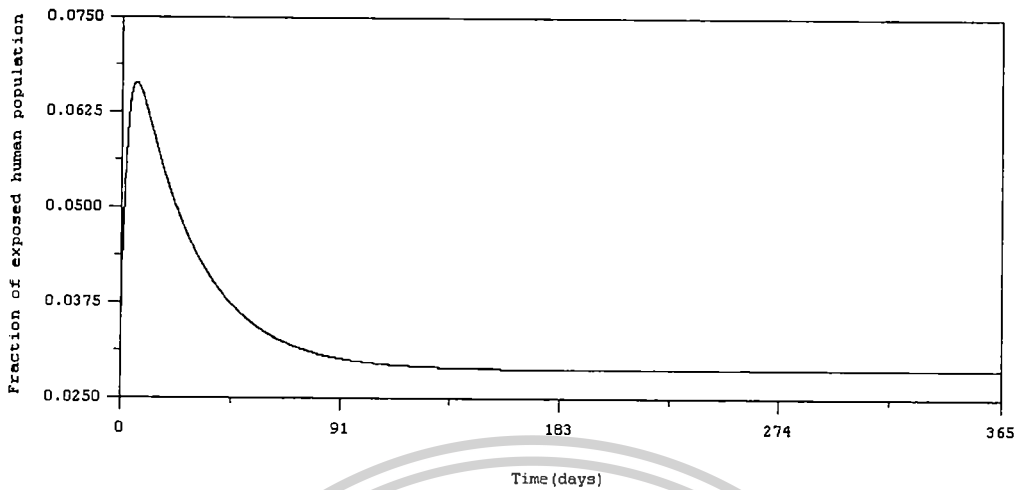
ผลเฉลยข้างต้นได้จากการจำลองเชิงตัวเลขของสมการ (4.109) รูปที่ (4.29)-(4.33) แสดงถึงผลเฉลยตามเวลาของผู้ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ผู้ที่ถูกกักกันโรค และผู้ที่ฟื้นไข้ ลักษณะผลเฉลยเชิงตัวเลขของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้และผู้ถูกกักกันโรคสามารถอธิบายได้โดยการหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชัน Gompertz ลักษณะของผลเฉลยประชากรแต่ละกลุ่มอธิบายได้โดยฟังก์ชันข้างต้น จะเห็นได้ว่าจุดสมดุลของประชากรทั้งสี่กลุ่มข้างต้นคือ 0.028, 0.022, 0.0219 และ 0.63, ค่าที่ได้สามารถหาได้จากสมการ (4.109)-(4.112)

จากการจำลองเชิงตัวเลขข้างต้น ผลที่ได้ทำให้ได้แนวทางลดการระบาดของโรค

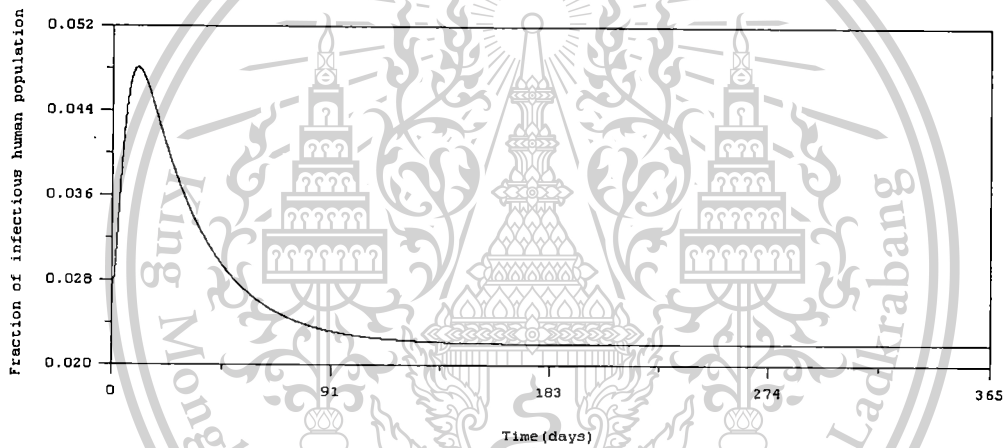
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พันธู์ พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

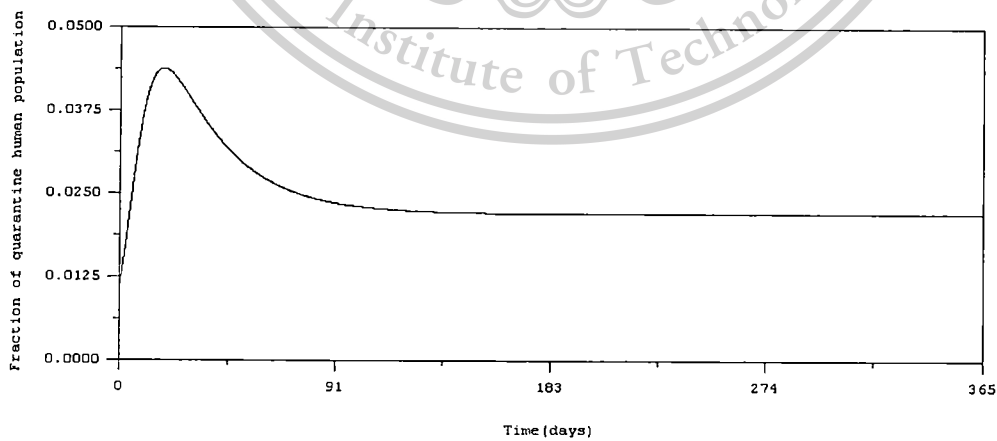
Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



รูปที่ 4.30 ผลเฉลยตามเวลาของผู้ที่ติดเชื้อแต่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้



รูปที่ 4.31 ผลเฉลยตามเวลาของผู้ที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้

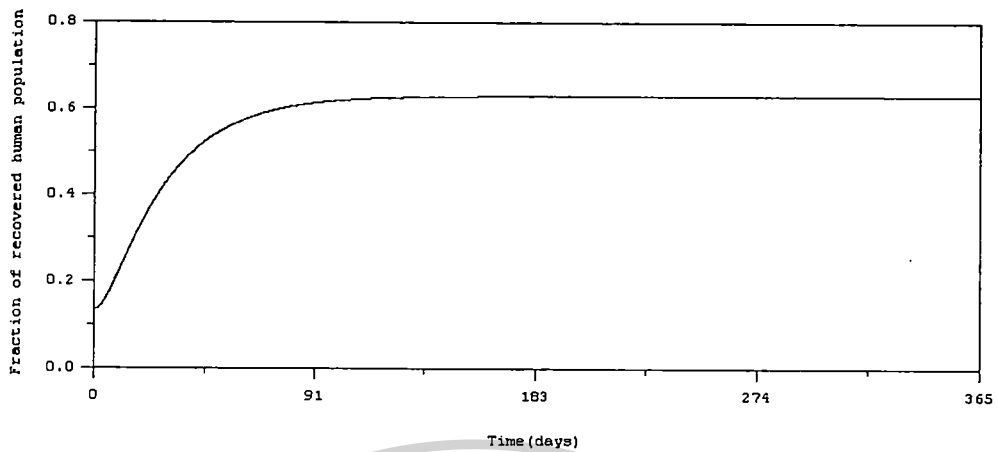


รูปที่ 4.32 ผลเฉลยตามเวลาของผู้ที่ถูกกักกันโรค

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของลิขสิทธิ์ที่ถูกต้อง

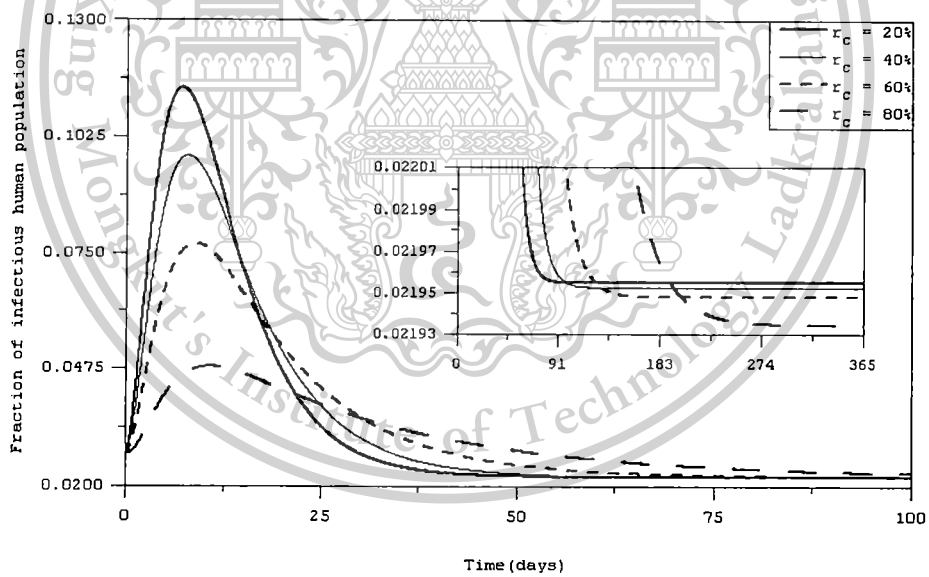
This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



รูปที่ 4.33 ผลเฉลยตามเวลาของผู้ที่ฟื้นไข้

การเปลี่ยนค่าร้อยละของการติดเชื้อซ้ำที่แตกต่างกัน (r_c) สามารถอธิบายได้ดังรูปที่ 4.34 จะเห็นได้ว่า ขณะที่ r_c มีค่าเปลี่ยนดังนี้ 20%, 40%, 60% และ 80% ขณะที่ r_c มีค่าเพิ่มขึ้น ประสิทธิภาพของการติดเชื้อที่สามารถสร้างผู้เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีค่าลดลงซึ่งเห็นได้จากรูปที่ 4.34

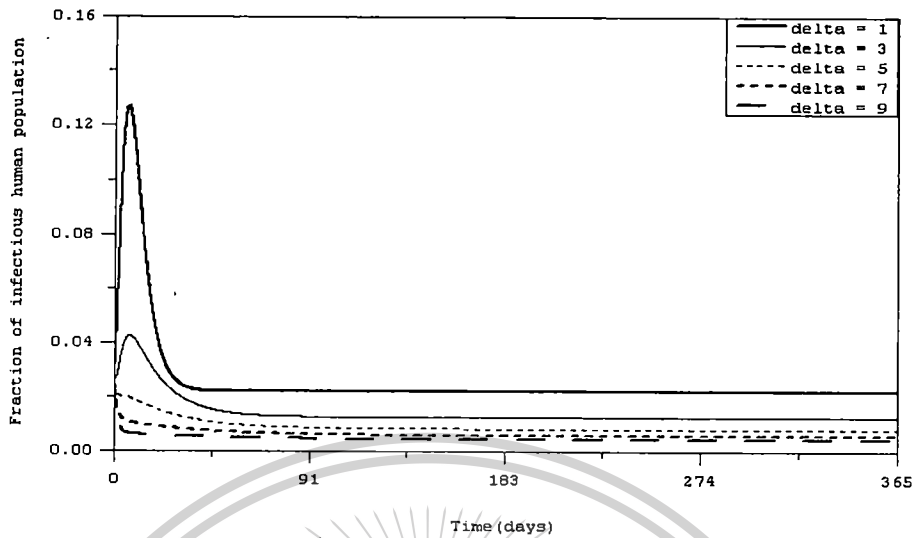


รูปที่ 4.34 ผลเฉลยตามเวลาของผู้ติดเชื้อเมื่อมีร้อยละของการติดเชื้อซ้ำที่แตกต่างกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีผู้นำไปใช้

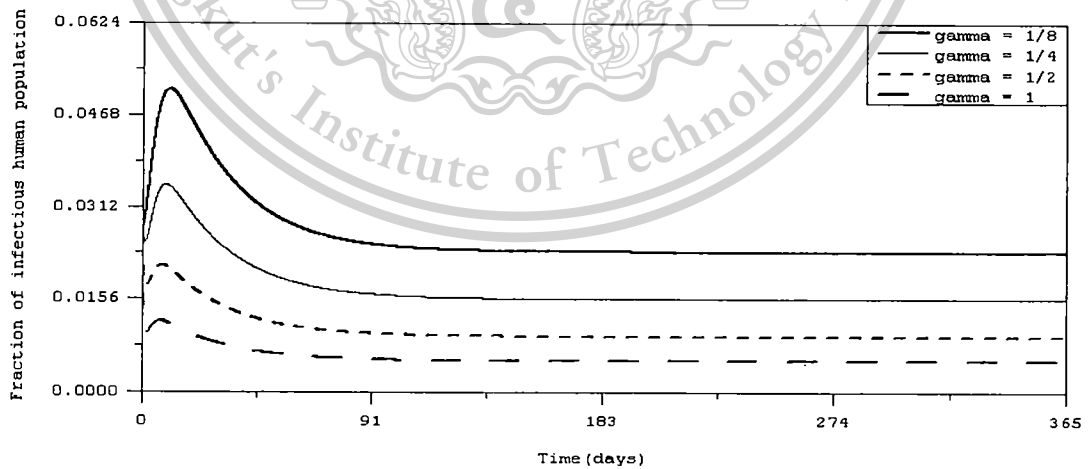
This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



รูปที่ 4.35 ผลเฉลยตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้สำหรับอัตราการเสียชีวิตเนื่องจากการติดเชื้อที่แตกต่างกัน

เนื่องจากอัตราการเสียชีวิตของผู้ติดเชื้อนิยามโดย $d_n + \delta d_r$ โดยที่ $d_r = 1/21$, เรามีว่า $\delta d_r \gg d_n$, อัตราการเสียชีวิตที่แตกต่างกันนำมาพิจารณาโดยกำหนดให้มีค่าเป็น $1/21, 1/7, 5/21, 1/3$ และ $3/7$ ต่อวัน ในรูปที่ 4.35 ผลเฉลยตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้นำมาพิจารณาเมื่อสัดส่วนของผู้ติดเชื้อที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ถูกกักกันโรคมียิ่งเพิ่มขึ้น ผู้ติดเชื้อที่ยังไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ไม่ถูกกักกันโรคเนื่องจากมีจำนวนหลายคนที่ไม่ถูกเปลี่ยนอยู่ในสถานะที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้และการกักกันโรคเป็นสิทธิส่วนบุคคล



รูปที่ 4.36 ผลเฉลยตามเวลาของผู้ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อได้สำหรับร้อยละของผู้ติดเชื้อที่เป็นผู้ถูกกักกันโรคที่แตกต่างกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีผู้พิมพ์หรือใช้

จากรูปข้างต้น จะเห็นว่าการเพิ่มขึ้นของอัตราการติดเชื้อซึ่งไม่มีผลต่อผู้ติดเชื้อที่ไม่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ความรุนแรงของไวรัส และสัดส่วนของผู้ติดเชื้อที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ที่เปลี่ยนไปเป็นผู้ถูกกักกันโรคมีผลต่อการลดลงของส่วนสูงสุดของเส้นโค้ง Gompertz สังเกตเห็นได้ว่าจำนวนของผู้ติดเชื้อที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ณ จุดสมมูลมีค่าเพิ่มขึ้นขณะที่อัตราการติดเชื้อขามีค่าเพิ่มขึ้น จำนวนของผู้ติดเชื้อที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ณ จุดสมมูล มีค่าลดลงขณะที่ความรุนแรงหรือสัดส่วนของผู้ติดเชื้อที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้มีค่าเพิ่มขึ้น ข้อสังเกตที่สำคัญคือ อัตราการติดเชื้อซ้ำยากที่จะควบคุมและการเพิ่มขึ้นหรือการลดลงของความรุนแรงไวรัสไม่สามารถควบคุมได้โดยกระทรวงสาธารณสุข มาตรการเดียวที่สามารถควบคุมได้คือ สัดส่วนของผู้ติดเชื้อที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้เปลี่ยนเป็นผู้ที่ถูกกักกันโรค



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร. พันธน์ พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยฉบับนี้เราได้ศึกษาพฤติกรรมของผลเฉลยในแบบจำลองสำหรับโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่เชื้อ Influenza virus ชนิด A สายพันธุ์ย่อยชนิด H1N1 แบบจำลองที่นำมาพิจารณามี 5 แบบดังนี้

แบบที่ 1 ผู้วิจัยพิจารณาการสร้างแบบจำลองแบบ SEIQR โดยที่ไม่พิจารณาการติดเชื้อซ้ำ

แบบที่ 2 ผู้วิจัยพิจารณาการสร้างแบบจำลองแบบ SEIQR โดยที่พิจารณาการติดเชื้ออีกรอบ

แบบที่ 3 ผู้วิจัยพิจารณาการสร้างแบบจำลองแบบ SEIQR โดยที่พิจารณาการเคลื่อนที่ของประชากร

แบบที่ 4 ผู้วิจัยพิจารณาการสร้างแบบจำลองแบบ SEIQR โดยที่แบ่งประชากรออกเป็นกลุ่มอายุ

แบบที่ 5 ผู้วิจัยพิจารณาการสร้างแบบจำลองแบบ SEIQR โดยที่พิจารณาการติดเชื้อซ้ำ

ในแบบจำลองแต่ละแบบจะทำการวิเคราะห์โดยวิธีการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน (standard dynamical modeling method) วิเคราะห์ความเสถียรภายใน (local stability) และความเสถียรวงกว้าง (global stability)

ในแบบจำลองแต่ละแบบจะได้เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับตัวแปรที่ทำให้เกิดความเสถียรภายในของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคและสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง โดยการใช้เงื่อนไข Routh-Hurwitz ตรวจสอบความเสถียรของจุดสมดุลแต่ละจุด ผลที่ได้จากทฤษฎีทำให้ได้ชุดของค่าพารามิเตอร์ที่สามารถลดการระบาดของโรค และแสดงในรูปของค่าสืบพันธุ์พื้นฐานที่หมายถึงจำนวนผู้ป่วยโดยเฉลี่ยที่เกิดจากการติดเชื้อของผู้ป่วยระยะที่หนึ่ง ซึ่งแสดงในรูปของเงื่อนไขที่ครอบคลุมถึงความเสถียรของสภาวะระบาดภายในและสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง ซึ่งชุดของพารามิเตอร์แต่ละชุดที่ได้ นั้นจะมีผลทำให้ลดการระบาดของโรคนั้น ผลเฉลยเชิงตัวเลขได้นำมาพิจารณาสำหรับสถานการณ์ที่แตกต่างกัน ซึ่งในทางการแพทย์นั้น ชุดของพารามิเตอร์แต่ละชุดที่ทำให้เกิดความเสถียรนั้น สามารถลดการระบาดของโรคนั้นได้นั่นเอง

อย่างไรก็ตาม ในงานวิจัยชิ้นนี้ยังไม่ได้คำนึงถึงปัจจัยทางสิ่งแวดล้อมอื่น ๆ ที่มีผลต่อการเกิดโรคนั้น งานวิจัยในอนาคตนั้นควรมีการคำนึงถึงอิทธิพลนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

8. P. Pongsumpun and I-Ming Tang, Dynamics of a New-strain of the H1N1 Influenza A Virus Incorporating the Effects of Repetitive Contacts, Computational and Mathematical Methods in Medicine, 2014, in press (ISI database).



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not all rights reserved. รองศาสตราจารย์ ดร.พัทธนี พงศ์สัมพันธ์

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

เอกสารอ้างอิง

- [1] ไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ 2009 Available: <http://www.thaigoodview.com/node/23422>
- [2] ไข้หวัดหมู หวัดสายพันธุ์ใหม่ที่ควรรู้จัก Available: <http://hilight.kapook.com/view/36260>
- [3] ไข้หวัดใหญ่ สายพันธุ์ใหม่ ชนิดเอ เอช1เอ็น1 Influenza A(H1N1) สำนักโรคติดต่ออุบัติใหม่ กรมควบคุมโรค 2009 Available: <http://beid.ddc.moph.go.th>
- [4] R.Gani, H.Hughes et al., Potential impact of antiviral use on hospitalizations during influenza pandemic, *Emerg. Infectious diseases* 2005, **11**, pp.1355-1362.
- [5] R.Walter, D.Dowdle, Influenza Pandemic Periodicity, virus recycling, and the art of risk assessment, *Emerg. Infectious diseases*, 2006, **12**, pp.34-39.
- [6] G.Neumann, Y.Kawaoka, Host range restriction and pathogenicity in the context of influenza pandemic, *Emerg. Infectious diseases*, 2006, **12**, pp.881-886.
- [7] M.I.Meltzer, N.J.Cox et al., The economic impact of pandemic influenza in the United States: Priorities for intervention, *Emerg. Infectious diseases*, 1999, **5**, pp.659-671.
- [8] H.Oshitani, T.Kamigaki et al, Major issues and challenges of influenza pandemic preparedness in developing countries, *Emerg. Infectious diseases*, 2008, **6**, pp.875-880.
- [9] WHO, Novel influenza A(H1N1) virus infections among health-care personnel --- United States, April—May 2009.
- [10] วารสารโรคติดต่อ JID 2008 Available: <http://www.ไข้หวัดหมู.com/?p=106>
- [11] G.Smith et al., Origins and evolutionary genomics of the 2009 swine-origin H1N1 influenza A epidemic, *Nature*, 2009, **459**, pp.1122-1126.
- [12] การเฝ้าระวังโรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ใหม่ ชนิด A (H1N1) สำนักโรคติดต่อวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข Available: <http://epid.moph.go.th>
- [13] E.K.Leah., *Mathematical models in biology*; 1988, Random House, Inc.
- [14] M.Robert, *Stability and complexity in model ecosystem*; 1973, Princeton university press.
- [15] H.N. Agiza, On the Analysis of Stability, Bifurcation, Chaos and Chaos Control of Kopel Map, *Chaos, Solitons, & Fractals*, 1999, **10**, pp.1909-1916.
- [16] M.T.Yassen, Chaos control of Chen chaotic dynamical system, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2003, **15**, pp.271-283.
- [17] B.D.Bassard, *Theory and application of Hopf bifurcation*, Cambridge U. Press, Cambridge 1981.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [18] B. Bamieh, Lecture 6: *Stability of Dynamic Systems Lyapunov's Direct Method*, University of California, 1999.
- [19] Lyapunov Stability Theory, Available: <http://control.ee.ethz.ch/~apnoco/Script/08.pdf>
- [20] J. LA Salle, & S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's direct method*. New York: Academic Press, 1961.
- [21] J.D.Hoffman, *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, Singapore: McGraw-Hill, 1993.
- [22] Geographic information system, Available: http://en.wikipedia.org/wiki/Geographic_information_system
- [23] What is GIS?, Available: <http://www.gis.com/whatisgis/>
- [24] W.O.Kermack and A.G.McKendrick, A contribution to the mathematical theory of epidemics, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, 1927, **115**, pp.700-721.
- [25] L.A. Rvachev, Modeling experiment of a large-scale epidemic by means of a computer. (In Russian), *Trans. USSR. Acad. Sci. Ser. Mathematics and Physics*, 1968, **180**, pp.294-296.
- [26] L.A. Rvachev and I.M. Longini, A mathematical model for the global spread of influenza, *Mat. Biosci.*, 1985, **75**, pp.3-22.
- [27] A.Flahault, S.Letrait et al., Modelling the 1985 influenza epidemic in France, *Stat. med.*, 1988, **7**, pp.1147-1155.
- [28] A.Flahault, S.Deguen et al., A mathematical model for the European spread of influenza, *Eur. J. Epidemiol.*, 1994, **10**, pp.471-474.
- [29] G.Chowell, M.A.Miller and C.Vibound, Seasonal influenza in the United States, France and Australia: transmission and prospects for control, *Epidemiol. Infect.*, 2007, **136**, pp.852-864.
- [30] O.V.Baroyan et al., Modelling of Influenza Epidemics for the Whole Country (USSR). (In Russian), *Adv. Appl. Probab.*, 1971, **3**, pp.224-226.
- [31] I.M.Longini, P.E.Fine and S.B.Thacker, Predicting the global spread of new infectious agents, *Am. J. Epidemiol.*, 1986, **123**, pp.383-391.
- [32] J.Lin, V.Andreasen et al., Dynamics of influenza A drift: the linear three-strain model, *Math. Biosci.*, 1999, **162**, pp.33-51.

เอกสารนี้เป็นลิขสิทธิ์ของ ร.ร.เทคโนโลยีพระยาภิรมย์เกล้า วัตถุประสงค์เพื่อใช้ในการเรียนการสอน
 ไม่ว่าการนำเนื้อหาไปใช้ในการค้าหรือการโฆษณา

- [34] C.E.Mills, J.M.Robins and M.Lipsitch, Transmissibility of 1918 pandemic influenza, *Nature*, 2004, **432**, pp.904-906.
- [35] D.Georgescu, Stochastic modeling of the spatial spread of Influenza in Germany, Available: <http://epub.ub.uni-muenchen.de/>, 2005.
- [36] G.Chowell, C.E.Ammon et al., Transmission dynamics of the great influenza pandemic of 1918 in Geneva, Switzerland: assessing the effects of hypothetical interventions, *J. Theor. Biol.*, 2006, **241**, pp.193-204.
- [37] R.Casagrandi, L.Bolzoni et al., The SIRC model and influenza A, *Math. Biosci.*, 2006, **200**, pp.152-169.
- [38] W.Chinviriyasit, Numerical Modeling of the Transmission Dynamics of Influenza, *The First International Symposium on Optimization and Systems Biology*, 2007, pp.52-59.
- [39] M.C.Bootsma and N.M.Ferguson, The effect of public health measures on the 1918 Influenza pandemic in US cities, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2007, **104**, pp.7313-7314.
- [40] E.Vynnycky and W.J.Edmunds, Analyses of the 1957 (Asian) influenza pandemic in the United Kingdom and the impact of school closures, *Epidemiol. Infect.*, 2008, **136**, pp.166-179.
- [41] G.Chowell, H.Nishiura, Quantifying the transmission potential of pandemic influenza, *Physics of Life Reviews*, 2008, **5**, pp.50-77.
- [42] BJ.Coburn, Multi-species influenza models with recombination:, *Phd dissertation Coral Gables*, University of Miami, FL, 2009.
- [43] J.Brian, G.Bradley and B.Sally, Modeling influenza epidemics and pandemics: insights into the future of swine flu (H1N1), *BMC Medicine*, Available: <http://www.biomedcentral.com/1741-7015/7/30>, 2009.
- [44] C.Fraser et.al, Pandemic potential of a strain of influenza A(H1N1): early finding, *Science*, 2009.
- [45]. P.Pongsumpun, D.Garcia Lopez, C.Favier, L.Torres, J.Llosa and MA.Dubois, Dynamics of dengue epidemics in urban contexts, *Trop. Med. Int. Health*, 2008, **13**, pp.1180-1187.
- [46] T.Smieszek et al., Model of epidemics: when contact repetition and clustering should be included, *Theor. Biol. Medical Mod.*, 2009, **6**, pp.1-15.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก

ผลงานตีพิมพ์ และประชุมวิชาการ

1. P.Pongsumpun, Mathematical model of Influenza A(H1N1) virus transmission, Proceedings of International Conference in Mathematics and Applications (UEL,VNU-HCMC 2011), Hochi Minh city, December 20-22, 2011, pp.184-194.
2. P.Pongsumpun, The Reinfectious Model of H1N1 Virus Transmission, *ICMSSC 2012 : International Conference on Mathematics, Statistics and Scientific Computing*, Copenhagen, Denmark, Issue 66, June 2012; pp.240-246.
3. P. Pongsumpun, Dynamical Network Transmission of H1N1 Virus at the local level, *ICMCSSE 2012 : International Conference on Mathematical, Computational and Statistical Sciences, and Engineering*, Perth, Australia, Issue 72, December 2012; pp.272-277.
4. T. Changpuek, P.Pongsumpun and I.M.Tang, Analysis of mathematical model for swine flu transmission by age group, *Far East Journal of Mathematical Sciences* 2013, 73(2), 201-229 (Scopus database).
5. T. Changpuek, P.Pongsumpun and I.M.Tang, Global stability of the age structural transmission model for Swine flu, *Far East Journal of Mathematical Sciences* 2013, 80(1), 55-84 (Scopus database).
6. Puntani Pongsumpun, Stability analysis of H1N1 transmission model between two population groups, *Proceedings of Asian Mathematical Conference* 2013, Bexco,Pusan, Korea, 30 June-4 July 2013.
7. P.Pongsumpun , Model for the transmission of Influenza Pandemic Due to a New-strain of the H1N1 Influenza A Virus with the risk of infection in human, *Journal of Basic and Applied Scientific Research* 2013, 3(7); pp.502-511 (Thomson Reuters ISI indexed).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

8. P. Pongsumpun and I-Ming Tang, Dynamics of a New-strain of the H1N1 Influenza A Virus Incorporating the Effects of Repetitive Contacts, Computational and Mathematical Methods in Medicine, 2014, in press (ISI database).



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Mathematical model of Influenza A(H1N1) virus transmission

P. Pongsumpun

Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalongkrung road, Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand.
kppuntan@kmitl.ac.th

Abstract

The viral infection due to an influenza A(H1N1) has been occurred in many countries worldwide. It has been continuously announced. The infection can transmit between the people through coughing or sneezing with the virus. In this paper, we formulate the SEIQRS model to describe the transmission of Influenza A(H1N1) virus transmission. We assume that after each person is infected, that person can be infected again. The standard dynamical modeling method is used in this study. The basic reproductive number is obtained to examine the stability of our model. The numerical solutions are shown to confirm the results. The results of this study should point the new alternative way to reduce the transmission of the influenza A(H1N1) virus.

Keywords: Inuenza, standard dynamical modeling, equilibrium states, basic reproductive number, local stability.

1. Introduction

A respiratory disease caused by influenza virus type A, so called Swine flu. In 2009, There was the outbreak of Swine flu due to infection with H1N1 influenza A and was first observed in Mexico. In 1976, there was an outbreak of swine flu at Fort Dix, New Jersey. This virus is not same as the 2009 outbreak, but it was similar to influenza virus type A. Swine flu also is an Emerging Infectious Disease (EID) because the Swine flu virus has not circulated previously in human; the virus is entirely new [1]. It usually spread among pigs and is not same as human flu virus. It does not often infect people, and the rare human cases that have occurred in the past have mainly affected people who had direct contact with pigs. But the current Swine flu outbreak is different. It is caused by a new Swine flu virus. It has changed in way of the transmission. The new Swine flu virus can spread from person to person, among people who have not had any contact with pigs. In the beginning of March 2009, An influenza outbreak of North America was found to be caused by a new strain of influenza virus, designated Influenza H1N1. On April 9, 2009 it became apparent to public health officials in Mexico City that an outbreak of influenza was in progress late in the influenza season. On April 17, 2009, two cases

University of Economics and Law(UEL), VNU-HCMC

in children were also reported in California near the Mexican border. As of April 27, 2009, the United States Government had reported 40 laboratory confirmed human cases of swine flu, with no deaths. Mexico has reported 26 confirmed human cases of infection with the same virus, including seven deaths. The current outbreak of swine influenza A (H1N1) evolved so rapidly that as on April 29, 2009, nine countries officially reported with confirmed cases of swine influenza A/H1N1 infection. Of these, Mexico, United State, Austria, Canada, Germany, Israel, New Zealand, Spain and the United Kingdom have reported laboratory confirmed human cases and deaths due to rapidly progressive pneumonia, respiratory failure and acute respiratory distress syndrome (ARDS) [2]. World Health Organization (WHO) declared ever high stages on its "pandemic" scale-alert 6, designating the Influenza H1N1 2009 a potential threat to worldwide health and declared the outbreak as Public Health Emergency of International Concern (PHEIC) [1]. The total report of swine flu cases worldwide more than 213 countries was 622,482 by November 27, 2009[3]. Updated data on swine flu deaths has reached a total of 16,931 deaths as of March 21, 2010 [4]. Instead of misleading case counts, CDC has estimated the number of cases, hospitalizations, and deaths between April 2009 and April 10, 2010. The CDC has estimated that between 43 million and 89 million cases of 2009 H1N1, between 195,000 and 403,000 H1N1 cases related hospitalizations, and between about 8,870 and 18,300 H1N1 cases related deaths [5]. D. Klinkenberg, A. Everts-van der Wind, et al. [6] studied the strategy for emergency vaccination during an epidemic of classical swine fever virus (CSFV) and presented a mathematical model of CSFV transmission between pig herds which quantify the effect of control strategies with and without vaccination and estimate the model parameters from data of the 1997/1998 CSFV epidemic in the Netherlands. In this paper, we study the transmission of Influenza A(H1N1) virus through mathematical modeling. The standard dynamical modeling method is used for analysis the behavior of solutions. In this paper, the formulation of model is presented in section 2. The analytical and numerical results are presented in section 3. Finally, the discussion and conclusion of our model are presented in section 4.

2. Mathematical model

We consider the transmission of influenza A (H1N1) virus between the people. The people are separated into 5 types such that susceptible, exposed, infectious, quarantine and recovered. We suppose that after each person is infected, that person can be infected again. The diagram of the transmission is presented in figure 1

University of Economics and Law(UEL), VNU-HCMC

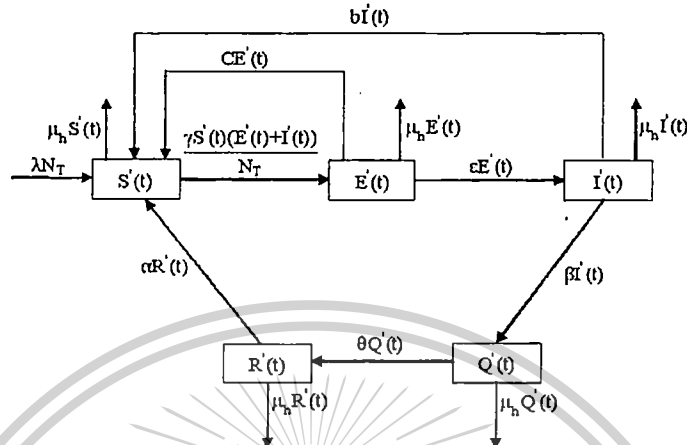


Figure 1: Flow chart of the model.

Let

$S'(t)$ be the number of susceptible human at time t ,
 $E'(t)$ be the number of exposed human at time t ,
 $I'(t)$ be the number of infectious human at time t ,
 $Q'(t)$ be the number of quarantine human at time t ,
 $R'(t)$ be the number of recovered human at time t .

The dynamical equation for each human can be described as follows:

$$\frac{dS'(t)}{dt} = \lambda N_T - \gamma \frac{S'(t)(E'(t) + I'(t))}{N_T} + cE'(t) + bI'(t) + \alpha R'(t) - \mu_h S'(t) \quad (2.28)$$

$$\frac{dE'(t)}{dt} = \gamma \frac{S'(t)(E'(t) + I'(t))}{N_T} - (c + \varepsilon + \mu_h)E'(t) \quad (2.29)$$

$$\frac{dI'(t)}{dt} = \varepsilon E'(t) - (\beta + b + \mu_h)I'(t) \quad (2.30)$$

$$\frac{dQ'(t)}{dt} = \beta I'(t) - (\theta + \mu_h)Q'(t) \quad (2.31)$$

$$\frac{dR'(t)}{dt} = \theta Q'(t) - (\alpha + \mu_h)R'(t) \quad (2.32)$$

with the conditions:

$$N_T = S'(t) + E'(t) + I'(t) + Q'(t) + R'(t)$$

where

λ = the birth rate of human population,

N_T = the total human population,

γ = the contact rate of H1N1 virus transmission,

c = the rate at which the exposed human become to be susceptible human again,

μ_h = the death rate of human population,

$\varepsilon = 1/IIP$ where IIP is the intrinsic incubation period of H1N1 virus,

University of Economics and Law(UEL), VNU-HCMC

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนชน พงศ์วิพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

b = the rate at which the infectious human become to be the susceptible human again,
 θ = the rate at which the quarantine human become to be the recovered human,
 α = the rate at which the recovered human become to be the susceptible human again,
 β = the rate at which the infectious human become to be the quarantine human,

The total size of population is assumed to be constant. Thus, the rate of change for each human group equals to zero. We set $\frac{dN_T}{dt} = 0$, then we obtain $\lambda = \mu_h$. We normalize our equations(1)-(5) by letting

$$S(t) = \frac{S'(t)}{N_T}, E(t) = \frac{E'(t)}{N_T}, I(t) = \frac{I'(t)}{N_T}, Q(t) = \frac{Q'(t)}{N_T}, R(t) = \frac{R'(t)}{N_T}$$

then the reduced equations become

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \mu_h - \gamma S(t)(E(t) + I(t) + cE(t) + bI(t) + \alpha(1 - S(t) - E(t) - I(t) - Q(t)) \\ &\quad - \mu_h S(t) \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \gamma S(t)(E(t) + I(t)) - (c + \varepsilon + \mu_h)E(t) \tag{2.34}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \varepsilon E(t) - (\beta + b + \mu_h)I(t) \tag{2.35}$$

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \beta I(t) - (\theta + \mu_h)Q(t) \tag{2.36}$$

with the conditions

$$1 = S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t) \tag{2.37}$$

3. Analysis of the mathematical model

-Analytical results

The steady states are obtained by setting the right hand sides of equations (6) to (9) equals to zero, then the steady states are as follows:

- i) Disease free steady state: $E_0 = (1, 0, 0, 0)$.
- ii) Disease endemic steady state: $E_1 = (S^*, E^*, I^*, Q^*)$.

where

$$I^* = \frac{(R_0 - 1)}{R_0} \frac{(\varepsilon L_3 L_4)}{[L_4(\mu_h L_1 + (\beta + \mu_h)\varepsilon + \alpha(L_1 + \varepsilon)) + \beta\varepsilon\alpha]}, \tag{3.38}$$

$$S^* = \frac{\mu_h + I^* \left(b + c \frac{L_1}{\varepsilon} + \frac{\alpha\beta\theta}{L_3 L_4} \right)}{\mu_h + I^* \frac{\gamma}{\varepsilon} (L_1 + \varepsilon)}, \tag{3.39}$$

$$E^* = I^* \left(\frac{L_1}{\varepsilon} \right), \tag{3.40}$$

$$Q^* = I^* \left(\frac{\beta}{L_4} \right), \tag{3.41}$$

where

$$R_0 = \frac{\gamma(b + \beta + \varepsilon + \mu_h)}{(b + \beta + \mu_h)(c + \varepsilon + \mu_h)} = \frac{\gamma(L_1 + \varepsilon)}{L_1 L_2}, \tag{3.42}$$

$$L_1 = b + \beta + \mu_h, \tag{3.43}$$

$$L_2 = c + \varepsilon + \mu_h, \tag{3.44}$$

$$L_3 = \alpha + \mu_h \text{ and} \tag{3.45}$$

$$L_4 = \theta + \mu_h. \tag{3.46}$$

Theorem 1. The disease-free steady state E_0 of equations (6)-(9) is locally asymptotically stable in D if $R_0 < 1$, and is unstable if $R_0 > 1$, where

$$D = \{(S, E, I, Q) | S \geq 0, E \geq 0, I \geq 0, Q \geq 0, S + E + I + Q \leq 1\}.$$

Proof. To determine the local stable of the disease-free steady state E_0 , we evaluate the Jacobian matrix $J(E_0)$ as follows:

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -\alpha - \mu_h & -\gamma + c - \alpha & -\gamma + b - \alpha & -\alpha \\ 0 & \gamma - (c + \varepsilon + \mu_h) & \gamma & 0 \\ 0 & \varepsilon & -(\beta + b + \mu_h) & 0 \\ 0 & 0 & \beta & -(\theta + \mu_h) \end{bmatrix}$$

The eigenvalues of the above Jacobian matrix are

$$\eta_1 = -L_3, \eta_2 = -L_4, \eta_{3,4} = \frac{1}{2}[(\gamma - L_1 - L_2) \pm \sqrt{\Delta}]$$

where $\Delta = 4\varepsilon\gamma + \gamma^2 + 2\gamma L_1 + L_1^2 - 2\gamma L_2 - 2L_1 L_2 + L_2^2$

If $R_0 < 1$, then we have

$$\gamma L_1 - L_1 L_2 + \gamma\varepsilon < 0.$$

Consider

$$\Delta = (L_1 L_2 - \gamma)^2 + 4(\gamma L_1 - L_1 L_2 + \gamma\varepsilon) < (L_1 L_2 - \gamma)^2.$$

That is

$$\sqrt{\Delta} < L_1 + L_2 - \gamma \text{ when } L_1 + L_2 - \gamma \geq 0.$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}[(\gamma - L_1 - L_2) + \sqrt{\Delta}] < \frac{1}{2}[(\gamma - L_1 - L_2) + L_1 + L_2 - \gamma] = 0,$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2}[(\gamma - L_1 - L_2) + \sqrt{\Delta}] < \frac{1}{2}[(\gamma - L_1 - L_2) - (L_1 + L_2 - \gamma)] \leq 0.$$

Therefore all roots of the characteristic equations have negative real parts for $R_0 < 1$. Thus, the disease-free steady state E_0 is locally asymptotically stable for $R_0 < 1$ and unstable for $R_0 > 1$.

Theorem 2. The disease-endemic steady state E_1 of equations (6)-(9) is locally asymptotically stable in D for $R_0 > 1$

Proof. The Jacobian matrix at E_1 is given by:

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} -\gamma(E^* + I^*) - \alpha - \mu_h & -\gamma + S^* + c - \alpha & -\gamma S^* + b - \alpha & -\alpha \\ \gamma(E^* + I^*) & \gamma S^* - (c + \varepsilon + \mu_h) & \gamma S^* & 0 \\ 0 & \varepsilon & -(\beta + b + \mu_h) & 0 \\ 0 & 0 & \beta & -(\theta + \mu_h) \end{bmatrix}$$

The characteristic equation is

$$\eta^4 + a_3\eta^3 + a_2\eta^2 + a_1\eta + a_0 = 0 \tag{3.47}$$

where

$$a_3 = \alpha + b + x_4 + \gamma X_h^* + \theta \tag{3.48}$$

$$a_2 = \beta(c + \varepsilon) + \beta E_h^* \gamma + \varepsilon E_h^* \gamma + \beta \gamma I_h^* + \varepsilon \gamma I_h^* + 3\beta \mu_h + 3c\mu_h + 3\varepsilon \mu_h + 3E_h^* \gamma \mu_h + 3\gamma I_h^* \mu_h + 6\mu_h^2 + \beta \gamma S_h^* + \varepsilon \gamma S_h^* + 3\gamma \mu_h S_h^* + x_3 \theta + \gamma X_h^* \theta + b(c + \varepsilon + 3\mu_h) + \gamma X_h^* + \theta + \alpha(b + x_3 + \gamma X_h^* + \theta) \tag{3.49}$$

$$a_1 = \mu_h(\mu_h(3(c + \varepsilon) + 4\mu_h) + \gamma(2\varepsilon + 3\mu_h)X_h^* + b(2(c + \varepsilon + \gamma X_h^*) + 3\mu_h + 2\gamma X_h^*)) + (bm_2 + \mu_h(2(c + \varepsilon) + 3\mu_h) + \gamma(\varepsilon + 2\mu)X_h^*)\theta + \alpha((b + \beta)m_2 + \mu_h(2(c + \varepsilon) + 3\mu_h) + \gamma(\varepsilon + 2\mu_h)X_h^* + (b + \beta + m_2)\theta) + \beta(\mu_h(2c + 3\mu_h + 2\gamma X_h^* + (c + 2\mu_h + \gamma X_h^*)\theta + \varepsilon(\gamma(E_h^* + I_h^*) + 2\mu_h + \theta))) \tag{3.50}$$

$$a_0 = (\beta(c\mu_h + m_4(\gamma(E_h^* + I_h^*) + \mu_h) + \gamma\mu_h S_h^*) + \mu_h(b(\varepsilon + m_3) + (c + m_4)\mu_h + \gamma m_4 X_h^*))(\mu_h + \theta) + \alpha((b(\varepsilon + m_3) + (c + m_4)\mu_h + \gamma m_4 X_h^*)(\mu_h + \theta) + \beta(m_3(\mu_h + \theta) + \varepsilon(\gamma(E_h^* + I_h^*) + \mu_h + \theta))) \tag{3.51}$$

where

$$X_h^* = S_h^* + E_h^* + I_h^*, x_3 = \beta + c + \varepsilon + 3\mu_h, x_4 = \beta + c + \varepsilon + 4\mu_h, m_2 = c + \varepsilon + 2\mu_h + \gamma X_h^*, m_3 = c + \mu_h + \gamma X_h^*, m_4 = \varepsilon + \mu_h$$

From the Routh-hurwitz criteria, the Disease-endemic steady state is local stability when

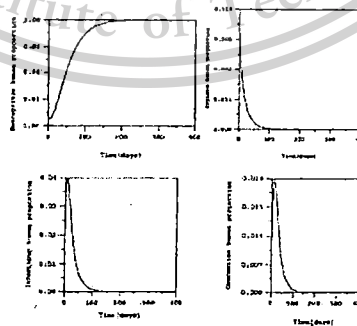
it satisfied the following conditions:

$$\begin{aligned}
 & i) a_3 > 0 \\
 & ii) a_1 > 0 \\
 & iii) a_0 > 0 \\
 & iv) a_1 a_2 a_3 - a_1^2 - a_3^2 a_0 > 0
 \end{aligned}
 \tag{3.52}$$

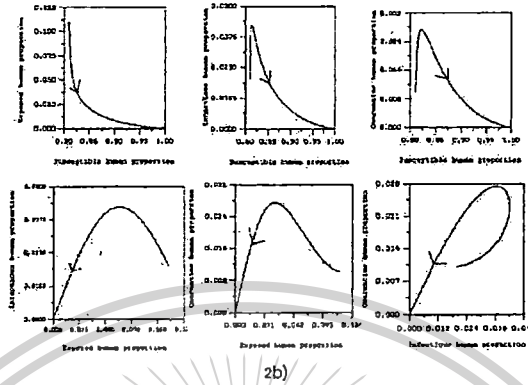
By using MATHEMATICA, the above conditions are satisfied when $R_0 > 1$. Thus, the endemic disease steady state is locally asymptotically stable for $R_0 < 1$.

- Numerical results

In this section, we analyze the model given by equations (6)-(9). The parameters are define by $c = \frac{1}{30}$ per day satisfies to the 30 days of the exposed human become to be the susceptible human again, $\mu_h = \frac{1}{365 \times 65}$ corresponds to the average life time of 65 years for human population, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ per day means the duration of intrinsic incubation of H1N1 is 10 days, $b = \frac{1}{40}$ per day satisfies to the 40 days of infectious human become to be susceptible human again, $\theta = \frac{1}{6}$ per day corresponds to the 6 days of quarantine human become to be recovered human, $\alpha = \frac{1}{30}$ per day corresponds to the 30 days of recovered human become to be susceptible human again, $\beta = \frac{1}{8}$ per day corresponds to the 8 days of infectious human become to be quarantine human, the contact rate of H1N1 virus transmission (γ) is arbitrarily chosen. The trajectories of the solutions when the parameter values will lead to a disease free steady state and when they will lead to the endemic steady state are shown in the following figures.



2a)

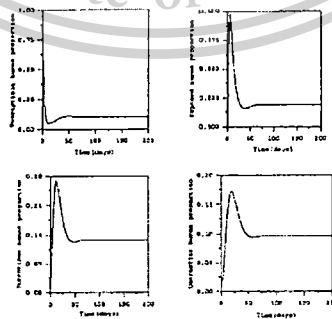


2b)

Figure 2: Behaviors of our model for $R_0 < 1$. The values of parameters are $c = \frac{1}{30}$ per day, $\mu_h = \frac{1}{365 \times 65}$ per day, $\epsilon = \frac{1}{10}$ per day, $b = \frac{1}{40}$ per day, $\theta = \frac{1}{6}$ per day, $\alpha = \frac{1}{30}$ per day, $\beta = \frac{1}{8}$ per day, $\gamma = 0.05$ and $R_0 = 0.625$.

2a) Time series solutions of susceptible, exposed, infectious and quarantine human proportions, respectively.

2b) The trajectories of the solutions projected onto the (S,E), (S,I), (S,Q), (E,I), (E,Q) and (I,Q) planes. The fractions of populations (S^*, E^*, I^*, Q^*) approach to the disease free steady state(1,0,0,0).



3a)

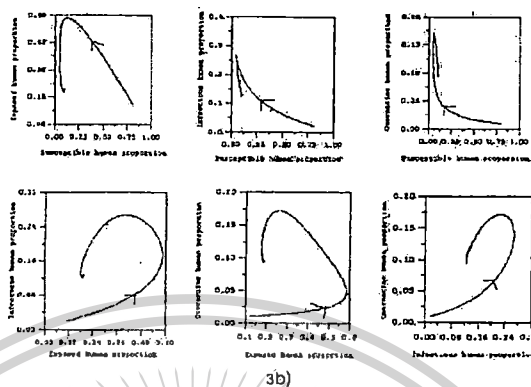


Figure 3: Behaviors of our model for $R_0 > 1$. The values of parameters are $c = \frac{1}{30}$ per day, $\mu_h = \frac{1}{365 \times 65}$ per day, $\epsilon = \frac{1}{10}$ per day, $b = \frac{1}{40}$ per day, $\theta = \frac{1}{6}$ per day, $\alpha = \frac{1}{30}$ per day, $\beta = \frac{1}{8}$ per day, $\gamma = 0.8$ and $R_0 = 10$.

3a) Time series solutions of susceptible, exposed, infectious and quarantine human proportions, respectively.

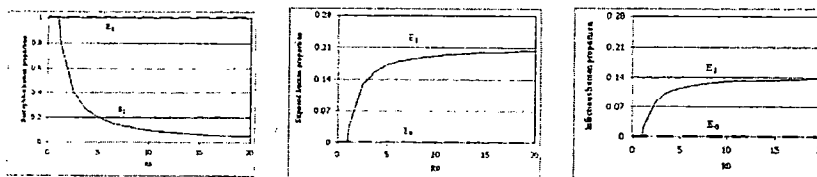
3b) The trajectories of the solutions projected onto the (S,E), (S,I), (S,Q), (E,I), (E,Q) and (I,Q) planes. The fractions of populations (S^*, E^*, I^*, Q^*) approach to the endemic disease steady state $(0.100043, 0.193052, 0.128665, 0.0964747)$.

4. Discussion and conclusion

In this study, the mathematical model of H1N1 transmission is analyzed, the threshold number is defined by

$$R_0 = \frac{\gamma(b + \beta + \epsilon + \mu_h)}{(b + \beta + \mu_h)(c + \epsilon + \mu_h)}$$

If the threshold number (R_0) is less than one, then the disease free state is local stability. The endemic disease state is local stability for R_0 is greater than one. The bifurcation diagrams are shown in figure 4.



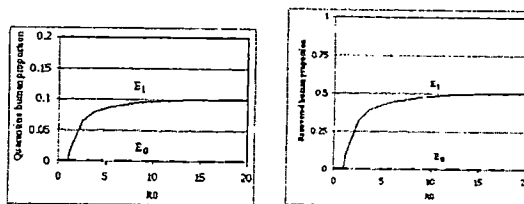


Figure 4: Bifurcation diagram of equations (6)-(9) demonstrate the steady state solutions of susceptible, exposed, infectious, quarantine and recovered human proportions for the different values of R_0 with $c = \frac{1}{30}$ per day, $\mu_h = \frac{1}{365 \times 65}$ per day, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ per day, $b = \frac{1}{40}$ per day, $\theta = \frac{1}{6}$ per day, $\alpha = \frac{1}{30}$ per day, $\beta = \frac{1}{8}$ per day. — represents the stable solutions and - - - represents the unstable solutions. For $R_0 < 1$, E_0 will be stable. For $R_0 > 1$, E_1 will be stable.

The basic reproductive number is defined by $R = \sqrt{R_0}$ [7]-[8]. It represents the average number of secondary patients that one patient can produce if introduced into a susceptible population. From the bifurcation diagram, if the basic reproductive number is less than or equal to one, then an infective replace itself with less than one new infective, the disease die out. If the basic reproductive number is more than one, then the proportion of susceptible classes decrease and the proportion of infectious classes increase. These behaviors occur because there are enough susceptible human to be infected from H1N1 infectious human. Seasonal influenza occurs every year and the viruses change in each year, but many people have some immunity to the circulating virus that helps limit infections. By contrast, the pandemic swine flu virus was a new virus when it emerged and most people had no or little immunity to it [9]. The results of this study should point the way for decreasing the outbreak of this disease.

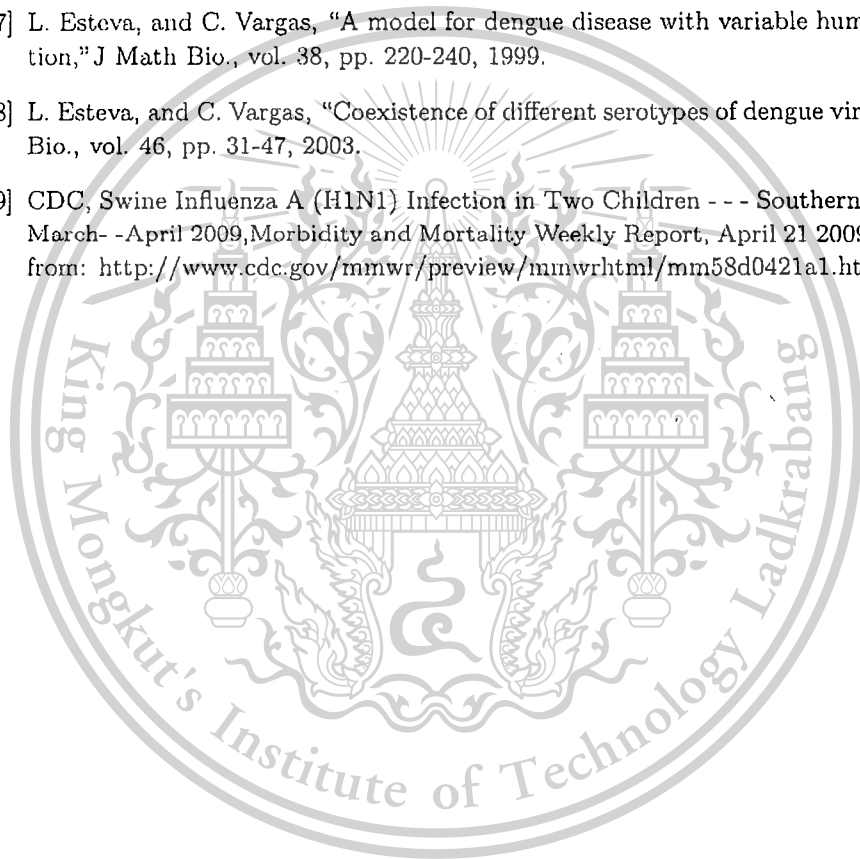
5. Acknowledgement

This work is supported by King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang Research Fund, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand. The author would like to thank Prof.Dr.I-Ming Tang at Mahidol University, Thailand.

References

- [1] WHO, World now at the started of 2009 influenza pandemic, Available from: http://www.who.int/mediacentre/news/statements/2009/h1n1_pandemic_phase6_20090611.
- [2] SA. Mir, V.R.Tandon et al., "History of swine flu", JK Science, Vol. 11 No. 4, 163-164, (2009).
- [3] WHO, Pandemic (H1N1) 2009 - update 76, Available from: http://www.who.int/csr/don/2009_11_27a/en/index.html.

- [4] WHO, Pandemic (H1N1) 2009 - update 93, Available from: http://www.who.int/csr/don/2010_03_26a/en/index.html.
- [5] CP.Davis, Swine Flu(Swine Influenza A [H1N1] Virus), Available from:http://www.medicinenet.com/swine_flu/article.htm:
- [6] D. Klinkenberg, A . Everts-van der Wind, et al., "Quantification of the effect of control strategies on classical swine fever epidemics," *Mathematical Biosciences* 186, 143-173, 2003.
- [7] L. Esteva, and C. Vargas, "A model for dengue disease with variable human population," *J Math Bio.*, vol. 38, pp. 220-240, 1999.
- [8] L. Esteva, and C. Vargas, "Coexistence of different serotypes of dengue virus," *J Math Bio.*, vol. 46, pp. 31-47, 2003.
- [9] CDC, Swine Influenza A (H1N1) Infection in Two Children - - - Southern California, March- -April 2009, *Morbidity and Mortality Weekly Report*, April 21 2009. Available from: <http://www.cdc.gov/mmwr/preview/mmwrhtml/mm58d0421a1.htm>.



The Re-infectious Model of H1N1 virus Transmission

Puntani Pongsumpun

Abstract—The H1N1 virus transmission is caused by a new strain of type A influenza virus. The transmission of H1N1 virus is studied through mathematical modeling. The human population is separated into susceptible, exposed, symptomatic infected, asymptomatic infected, quarantine and recovered human classes. After each human is infected, he/she can be infected again. The standard dynamical modeling method is used for analyzing of our model. The numerical solutions are presented for the different situations. The threshold condition is found to be the way for reducing the outbreak of this disease.

Keywords—H1N1 virus, local stability, mathematical modeling, standard dynamical modeling method.

I. INTRODUCTION

GENERALLY the three types of influenza viruses that cause human flu are influenza A, influenza B and influenza C. Influenza A viruses also infect both pigs and birds, influenza C viruses infect pigs but do not infect birds. Pigs can be infected with influenza strains that usually found in pigs, birds and humans. When influenza viruses from different species infect pigs, the virus can be reassortment, a process through two or more influenza viruses can swap genes, produce new and dangerous strains [1]. When reassortment occurs, the emergent virus will have some gene segments from each of the infected parent viruses and may have different characteristics than either of the parental viruses. Many reports of early analysis repeated that the swine influenza strain contained genes from five different flu viruses. Swine flu is caused by a new strain of type A influenza virus. The virus shows some similarities with a flu seen in pigs, although this new strain is transmitted from human to human. The transmission of a swine flu virus from pigs to humans is occasionally possible. However, sporadic human infections with swine flu have occurred. Most commonly, these cases occur in persons with direct exposure to pigs [2]. Risk factors that may contribute to swine-to-human transmission include smoking and, especially, not wearing gloves when working with sick animals. Swine influenza viruses are not transmitted by food. Eating properly handled and cooked pork products are safe. Cooking pork to an internal temperature of 160 °F kills the swine flu virus as it does with other bacteria and viruses [3]. This virus can spread from person to person mainly by infected people coughing and sneezing. The virus spreads when droplets from a cough or sneeze of an infected person are propelled through the air

and deposited on the mouth or nose of people nearby (within approximately one metre). The virus also settles on surfaces in the surrounding environment and can live on a hard surface for up to 24 hours and a soft surface for around 20 minutes. This virus transmission was first seen in Mexico, it was identified in the United States in April 2009. In just a few months, the virus spread throughout the world. Swine flu also is an Emerging Infectious Disease (EID) such as SARS, avian influenza and Chikungunya disease. Because the swine flu virus has not circulated previously in human; the virus is entirely new. For people, who experience flu-like symptoms, return home and stay at home to avoid spreading the disease to others. It is advised to remain at home for at least 7 days after the start of the illness. In addition: take plenty of rest, drink plenty of fluids, avoid smoking and eat nutritious food. Treatment with anti-viral medicine will be focused mainly on those people with severe symptoms or those in high risk groups. These symptoms include difficulty breathing or a high fever that lasts beyond three days [4]. D. Klinkenberg, A. Everts-van der Wind, et al. [5] proposed the strategy for emergency vaccination during an epidemic of classical swine fever virus (CSFV) and presented a mathematical model of CSFV transmission between pig herds which quantifies the effect of control strategies with and without vaccination and estimate the model parameters from data of the 1997-1998 CSFV epidemic in the Netherlands. P. Pongsumpun [6] analyzed the mathematical model of swine flu virus transmission but the re-infection of the swine flu cases was not considered.

II. TRANSMISSION MODEL

H1N1 transmission is studied through mathematical model. The repetitive infection of H1N1 is considered in this study. The population is separated into six classes; susceptible, exposed, symptomatic infected, asymptomatic infected, quarantine and recovered humans. The diagram of the transmission of H1N1 with repetitive infection is presented in fig. 1.

P. Pongsumpun is with the Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalokkrung road, Ladkrabang, Bangkok, THAILAND, 10520(phone: (662)-329-8400 ext.320; fax: (662)-329-8400 ext.284; e-mail: kppuntani@kmitl.ac.th).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พินธน์ พงศ์สัมพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

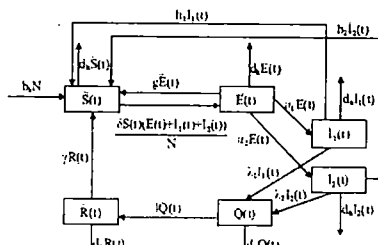


Fig.1 The compartment diagram

g is the rate at which the exposed human can be susceptible human,
 δ is the infection rate of H1N1 virus,
 α_1 is the rate at which the exposed human can be symptomatic human,
 α_2 is the rate at which the exposed human can be asymptomatic human,
 λ_1 is the rate at which the symptomatic infected human can be quarantine human,
 λ_2 is the rate at which the asymptomatic infected human can be quarantine human,
 l is the recovery rate,
 γ is the rate at which the recovered human can be susceptible human,

The total human population is supposed to be constant. The dynamical changes for human classes are described as follows:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{S}}(t) &= b_h N + h_1 \bar{I}_1(t) + h_2 \bar{I}_2(t) + g \bar{E}(t) \\ &- \delta \frac{\bar{S}(t)(\bar{E}(t) + \bar{I}_1(t) + \bar{I}_2(t))}{N} + \gamma \bar{R}(t) - d_h \bar{S}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{E}}(t) &= \delta \frac{\bar{S}(t)(\bar{E}(t) + \bar{I}_1(t) + \bar{I}_2(t))}{N} \\ &- (g + d_h + \alpha_1 + \alpha_2) \bar{E}(t) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\dot{\bar{I}}_1(t) = \alpha_1 \bar{E}(t) - (h_1 + \lambda_1 + d_h) \bar{I}_1(t) \quad (3)$$

$$\dot{\bar{I}}_2(t) = \alpha_2 \bar{E}(t) - (h_2 + \lambda_2 + d_h) \bar{I}_2(t) \quad (4)$$

$$\dot{\bar{Q}}(t) = \lambda_1 \bar{I}_1(t) + \lambda_2 \bar{I}_2(t) - (l + d_h) \bar{Q}(t) \quad (5)$$

$$\dot{\bar{R}}(t) = l \bar{Q}(t) - (\gamma + d_h) \bar{R}(t) \quad (6)$$

where $\bar{S}(t) + \bar{E}(t) + \bar{I}_1(t) + \bar{I}_2(t) + \bar{Q}(t) + \bar{R}(t) = N$.

The variables and parameters of our model are given as follows:

- $\bar{S}(t)$ is the number of susceptible human,
- $\bar{E}(t)$ is the number of exposed human,
- $\bar{I}_1(t)$ is the number of symptomatic infected human,
- $\bar{I}_2(t)$ is the number of asymptomatic infected human,
- $\bar{Q}(t)$ is the number of quarantine human,
- $\bar{R}(t)$ is the number of recovered human,
- b_h is the birth rate of human,
- d_h is the death rate of human,
- N is the total human size,
- h_1 is the rate at which the symptomatic infected human can be susceptible human,
- h_2 is rate at which the asymptomatic infected human can be susceptible human,

The total population is constant: $\frac{dN}{dt} = 0$ then the birth rate equals to death rate; $b_h = d_h$.

The above system is reduced by letting $S(t) = \frac{\bar{S}(t)}{N}$, $E(t) = \frac{\bar{E}(t)}{N}$, $I_1(t) = \frac{\bar{I}_1(t)}{N}$, $I_2(t) = \frac{\bar{I}_2(t)}{N}$,

$$Q(t) = \frac{\bar{Q}(t)}{N}, R(t) = \frac{\bar{R}(t)}{N}.$$

The normalized system is

$$\begin{aligned} S'(t) &= b_h + h_1 I_1(t) + h_2 I_2(t) + gE(t) \\ &- \delta S(t)(E(t) + I_1(t) + I_2(t)) + \gamma R(t) - b_h S(t) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} E'(t) &= \delta S(t)(E(t) + I_1(t) + I_2(t)) \\ &- (g + b_h + \alpha_1 + \alpha_2) E(t) \end{aligned} \quad (8)$$

$$I_1'(t) = \alpha_1 E(t) - (h_1 + \lambda_1 + b_h) I_1(t) \quad (9)$$

$$I_2'(t) = \alpha_2 E(t) - (h_2 + \lambda_2 + b_h) I_2(t) \quad (10)$$

$$Q'(t) = \lambda_1 I_1(t) + \lambda_2 I_2(t) - (l + b_h) Q(t) \quad (11)$$

$$\text{where } S(t) + E(t) + I_1(t) + I_2(t) + Q(t) + R(t) = 1. \quad (12)$$

III. ANALYSIS OF THE MODEL

A. Analytical Results

The steady states of (7) to (11) are found by setting the right hand side of (7) to (11) equal to zero. Then the results are given as follows:

i) the disease free steady state:

$$B_0 = (1, 0, 0, 0)$$

ii) the endemic steady state:

$$B_1 = (S^*, E^*, I_1^*, I_2^*, Q^*)$$

where

$$S^* = \frac{D_1 D_2 D_3}{(\alpha_2 D_2 + \alpha_1 D_3 + D_2 D_3)} \quad (13)$$

$$I_1^* = \frac{\alpha_1 E^*}{D_2} \quad (14)$$

$$I_2^* = \frac{\alpha_2 E^*}{D_3} \quad (15)$$

$$Q = \frac{\alpha_1 D_3 \gamma_1 + \alpha_2 D_2 \gamma_2}{D_2 D_3 D_4} E^* \quad (16)$$

$$E^* = \frac{X_1}{X_2} \quad (17)$$

where

$$X_1 = D_2 D_3 D_4 (D_1 D_2 D_3 - (\alpha_1 + \alpha_2) D_2 D_3) (b_h - \gamma), \quad (18)$$

$$X_2 = \alpha_2 D_2 + (\alpha_1 + D_2) D_3 (\delta (D_1 D_2 D_3 D_4 + \alpha_1 D_2 (D_4 (\gamma + h_1) + \gamma_1) + D_2 (D_3 D_4 (g + \gamma) + \alpha_2 (D_4 \gamma + D_4 h_2 + \gamma_2))) \quad (19)$$

and

$$D_1 = g + b_h + \alpha_1 + \alpha_2, \quad (20)$$

$$D_2 = h_1 + \lambda_1 + b_h, \quad (21)$$

$$D_3 = h_2 + \lambda_2 + b_h, \quad (22)$$

$$D_4 = l + b_h. \quad (23)$$

Theorem 1. The disease free steady state of (7)-(11) is locally asymptotically stable in σ , where

$$\sigma = \{(S, E, I_1, I_2, Q) | S \geq 0, E \geq 0, I_1 \geq 0, I_2 \geq 0, Q \geq 0\}$$

$$S | E + I_1 + I_2 + Q \leq l$$

Proof. Jacobian matrix at the disease free steady state is given as follows:

$$J_{B_0} = \begin{bmatrix} b_h - \gamma & \delta & \gamma & \delta & \gamma + h_1 & \delta & \gamma + h_2 & -\gamma \\ 0 & D_1 + \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & D_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & -D_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & D_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

The characteristic equation of the above Jacobian matrix is

$$(\lambda + D_4)(\lambda^3 + s_2 \lambda^2 + s_1 \lambda + s_0) = 0 \quad (24)$$

where

$$s_2 = D_1 + D_2 + D_3 + \delta, \quad (25)$$

$$s_1 = D_2 D_3 + D_1 (D_2 + D_3) + (\alpha_1 + \alpha_2 + D_2 + D_3) \delta, \quad (26)$$

$$s_0 = D_1 D_2 D_3 + (\alpha_2 D_2 + (\alpha_1 + D_2) D_3) \delta. \quad (27)$$

The eigenvalues $(\lambda_i; i = 1, 2, 3, 4)$ can be found by solving (24). Therefore $\lambda_1 = -D_4$. The remaining eigenvalues λ_2, λ_3 and λ_4 are obtained from $\lambda^3 + s_2 \lambda^2 + s_1 \lambda + s_0 = 0$. We can see that λ_1 has negative real part. We use Routh-Hurwitz criteria [7]-[8] to check the sign of the remaining eigenvalues. If it satisfy the following conditions, the eigenvalues will have negative real parts.

$$i) s_2 > 0 \quad (28)$$

$$ii) s_0 > 0 \quad (29)$$

$$iii) s_2 s_1 - s_0 > 0. \quad (30)$$

From our evaluation, we found that condition (28) to (30) are satisfied when $T_0 < 1$:

$$T_0 = \frac{\delta(\alpha_1(D_1 + D_2 + \delta) + \alpha_2(D_1 + D_3 + \delta) + (D_2 + D_3)(2D_1 + D_2 + D_3 + \delta))}{(D_1 + D_2)(D_1 + D_3)(D_2 + D_3)}$$

Therefore the disease free steady state is locally asymptotically stable for $T_0 < 1$, and unstable for $T_0 > 1$.

Theorem 2. The endemic equilibrium state of (7)-(11) is locally asymptotically stable in σ for $T_0 > 1$.

Proof. Consider the endemic equilibrium state, the Jacobian matrix at B_1 is

$$J_{B_1} = \begin{bmatrix} -D_5 - \delta(E^* + I_1^* + I_2^*) & D_6 - \delta S^* & D_7 - \delta S^* & D_8 - \delta S^* & -\gamma \\ \delta(E^* + I_1^* + I_2^*) & -D_1 + \delta S^* & \delta S^* & \delta S^* & 0 \\ 0 & \alpha_1 & -D_2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & -D_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & -D_4 \end{bmatrix}$$

The characteristic equation is

$$\lambda^5 + R_4 \lambda^4 + R_3 \lambda^3 + R_2 \lambda^2 + R_1 \lambda + R_0 = 0 \quad (31)$$

where

$$R_4 = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + \delta(E^* + I_1^* + I_2^* + S^*), \quad (32)$$

$$R_3 = D_3 D_4 + D_3 D_5 + D_4 D_5 (D_1 + D_4 + D_6) \delta E^* + (D_3 + D_4 + D_6) \delta (I_1^* + I_2^*) + D_1 (D_2 + D_3 + D_4 + D_6) \delta (E^* + I_1^* + I_2^*) + D_2 (D_3 + D_4 + D_5 + \delta(E^* + I_1^* + I_2^* + S^*)) + (\alpha_1 + \alpha_2 + D_3 + D_4 + D_5) \delta S^* \quad (33)$$

$$R_2 = D_3 D_4 D_5 + (D_3 D_4 + (D_3 + D_4) D_6 + \alpha_1 D_7 + \alpha_2 D_8) \delta E^* + (D_3 D_4 + (D_3 + D_4) D_6 + \alpha_1 D_7 + \alpha_2 D_8) \delta (I_1^* + I_2^*) + D_1 (D_4 (D_5 + \delta(E^* + I_1^* + I_2^*))) + D_3 (D_4 + D_5 + \delta(E^* + I_1^* + I_2^*)) + ((\alpha_2 + D_3) D_4 + (\alpha_2 + D_2 + D_4) D_5 + \alpha_1 (D_3 + D_4 + D_5)) \delta S^* + D_2 (D_6 \delta (E^* + I_1^* + I_2^*) + D_4 (D_5 + \delta(E^* + I_1^* + I_2^* + S^*))) + D_5 (D_4 + D_5 + \delta(E^* + I_1^* + I_2^* + S^*)) + (\alpha_2 + D_3) \delta S^* \quad (34)$$

$$R_1 = D_1 (D_3 D_4 (D_5 + \delta(E^* + I_1^* + I_2^*))) + D_2 (D_4 (D_5 + \delta(E^* + I_1^* + I_2^*))) + D_3 (D_4 + D_5 + \delta(E^* + I_1^* + I_2^*))) + \delta (E^* + I_1^* + I_2^*) (D_3 D_4 D_6 + \alpha_1 D_7 (D_3 + D_4) + \alpha_2 D_8 D_5 + \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2) + (\alpha_1 D_3 D_4 + (\alpha_2 + D_3) D_4 D_5 + \alpha_1 (D_3 + D_4) D_5) S^* + D_3 (D_4 (D_5 + \delta(E^* + I_1^* + I_2^* + S^*))) + \delta (D_6 (E^* + I_1^* + I_2^* + D_5 S^*))) \quad (35)$$

$$R_0 = D_1 D_2 D_3 D_4 (D_5 + \delta(E^* + I_1^* + I_2^* + S^*)) + (\alpha_1 D_3 D_4 D_5 + \alpha_2 D_4 D_8 + (\alpha_2 \gamma_2)) + (\alpha_2 D_2 + (\alpha_1 + D_2) D_3) D_4 D_5 \delta S^* \quad (36)$$

where D_1, D_2, D_3 and D_4 are defined in (20) to (23) and D_5, D_6, D_7 and D_8 are define as follows: $D_5 = b_h - \gamma$, $D_6 = g + \gamma$, $D_7 = \gamma + h_1$ and $D_8 = \gamma + h_2$. To test the local asymptotically stable, we use the Routh-hurwitz criteria [7]-[8]. The conditions are

$$i) R_1 > 0; j = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (37)$$

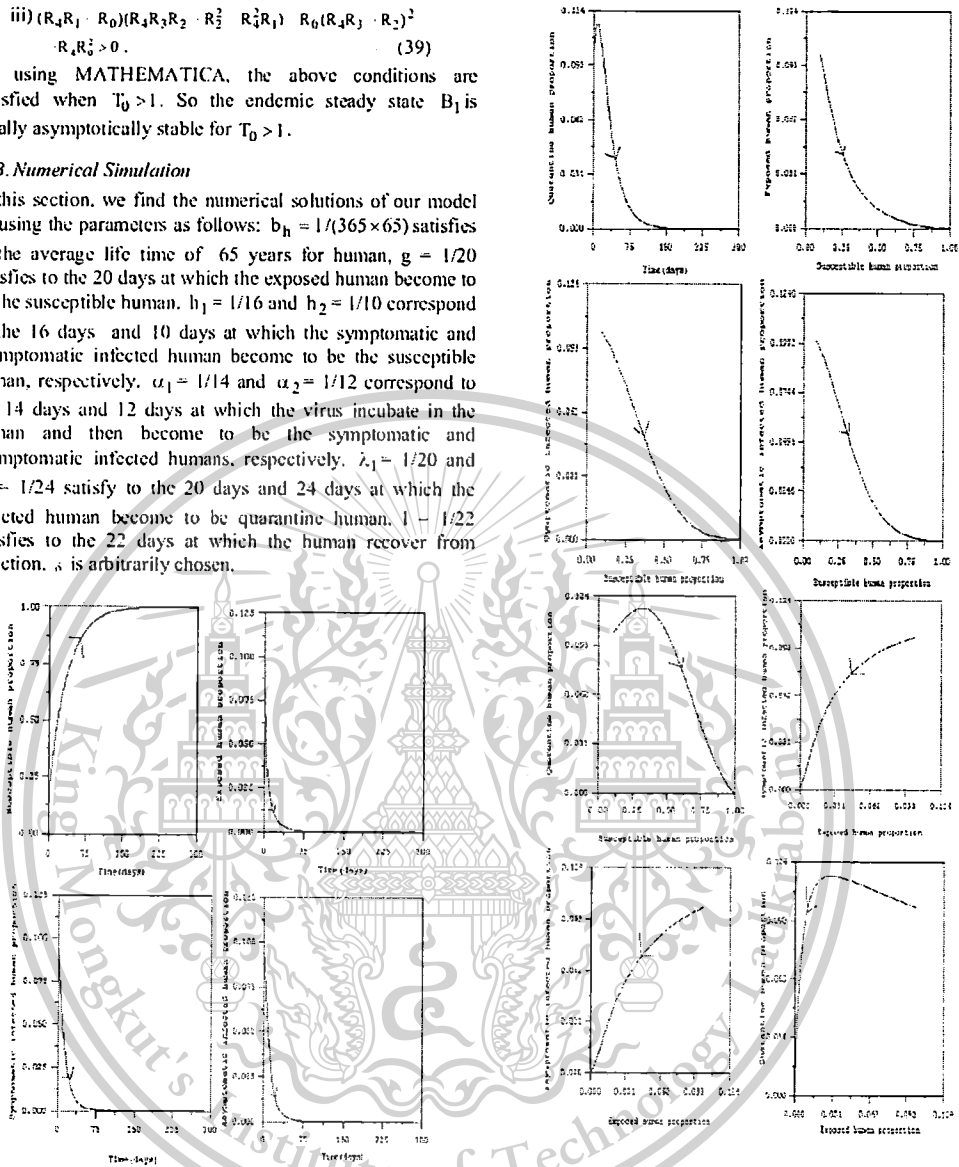
$$ii) R_4 R_1 R_2 - (R_3^2 + R_4^2 R_1) > 0 \quad (38)$$

$$\text{iii) } (R_4 R_1 - R_0)(R_4 R_3 R_2 - R_2^2 - R_4^2 R_1) - R_0(R_4 R_1 - R_2)^2 - R_4 R_2^2 > 0. \quad (39)$$

By using MATHEMATICA, the above conditions are satisfied when $T_0 > 1$. So the endemic steady state B_1 is locally asymptotically stable for $T_0 > 1$.

B. Numerical Simulation

In this section, we find the numerical solutions of our model by using the parameters as follows: $b_h = 1/(365 \times 65)$ satisfies to the average life time of 65 years for human, $g = 1/20$ satisfies to the 20 days at which the exposed human become to be the susceptible human. $h_1 = 1/16$ and $h_2 = 1/10$ correspond to the 16 days and 10 days at which the symptomatic and asymptomatic infected human become to be the susceptible human, respectively. $\alpha_1 = 1/14$ and $\alpha_2 = 1/12$ correspond to the 14 days and 12 days at which the virus incubate in the human and then become to be the symptomatic and asymptomatic infected humans, respectively. $\lambda_1 = 1/20$ and $\lambda_2 = 1/24$ satisfy to the 20 days and 24 days at which the infected human become to be quarantine human. $1 - \delta$ satisfies to the 22 days at which the human recover from infection. s is arbitrarily chosen.



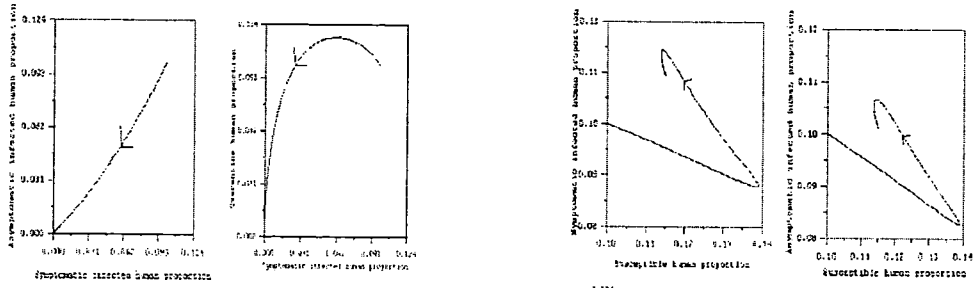


Fig. 2 Numerical solutions of our model for $T_0 < 1$. The values of parameters are $b_h = 1/(365 \times 65)$, $g = 1/20$, $h_1 = 1/16$, $h_2 = 1/10$, $\alpha_1 = 1/14$, $\alpha_2 = 1/12$, $\lambda_1 = 1/20$, $\lambda_2 = 1/24$, $l = 1/22$, $\delta = 0.05$, $T_0 = 0.43$. The fractions of populations $(S^*, E^*, I_1^*, I_2^*, Q^*)$ approach to the disease free steady state $B_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$

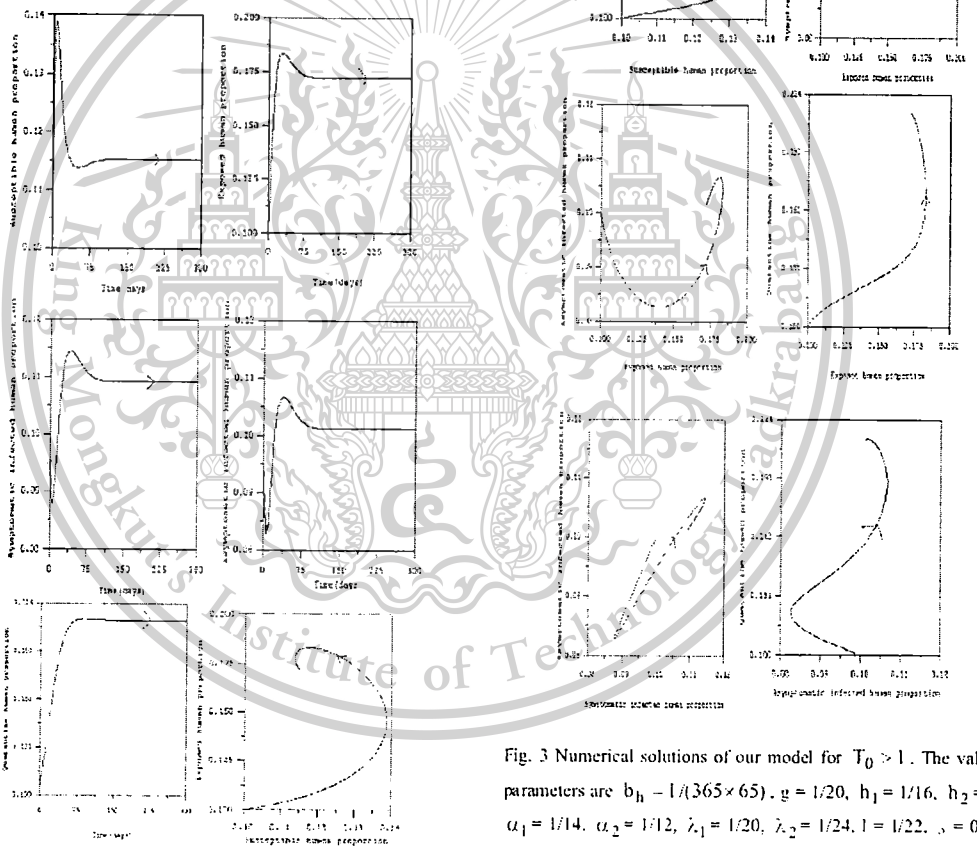


Fig. 3 Numerical solutions of our model for $T_0 > 1$. The values of parameters are $b_h = 1/(365 \times 65)$, $g = 1/20$, $h_1 = 1/16$, $h_2 = 1/10$, $\alpha_1 = 1/14$, $\alpha_2 = 1/12$, $\lambda_1 = 1/20$, $\lambda_2 = 1/24$, $l = 1/22$, $\delta = 0.8$ and $T_0 = 15.67$. The fractions of populations $(S^*, E^*, I_1^*, I_2^*, Q^*)$ converge to the endemic steady state $(0.115, 0.172, 0.109, 0.101, 0.213)$

IV. DISCUSSION AND CONCLUSION

The H1N1 transmission is studied by constructing the mathematical model and analyzing the results by using standard dynamical modeling method. The Threshold condition is defined by

$$T_0 = \frac{\beta_1(D_1 + D_2 + \delta) + \beta_2(D_1 + D_3 + \delta) + (D_2 + D_3)(\beta D_1 + D_2 + D_3 + \delta)}{(D_1 + D_2)(D_1 + D_3)(D_2 + D_3)}$$

If T_0 is less than one, then the disease free steady state is local stability. The endemic equilibrium state is local stability for T_0 is more than one. The Threshold condition is used for controlling the outbreak for many diseases [9]-[10].

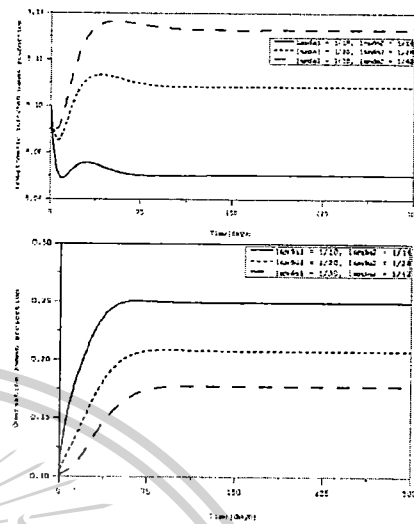
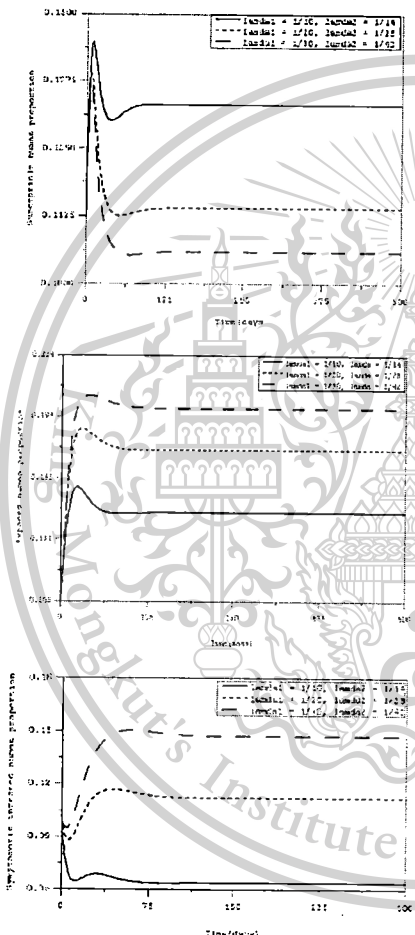


Fig. 4 Numerical solutions of our model for the different durations of quarantine

We simulate the fraction of each human class for the different durations at which the infected human is quarantined. We can see that if the longer periods of quarantine, then the steady state solutions of exposed, symptomatic infected and asymptomatic infected human classes are increasing but the steady state solutions of susceptible and recovered human classes are decreasing. The time of outbreak is increasing. Because if we don't quarantine the infected human suddenly after we know that person is infected, that infected person can transmit the disease to the other susceptible human and the H1N1 cases will be higher, this effects to the outbreak of H1N1 transmission.

ACKNOWLEDGMENT

This work is supported by King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang Research Fund, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand. The author would like to thank Prof.Dr.I-Ming Tang at Mahidol University, Thailand.

REFERENCES

- [1] E. Thacker, and B. Janke, "Swine influenza virus: zoonotic potential and vaccination strategies for the control of avian and swine influenzas," *J. Infect. Dis.* vol. 197 Suppl 1, pp. S19-24, 2008.
- [2] CDC, Influenza (Flu): Key Facts about Swine Influenza (Swine Flu), December 6, 2006. Available from: <http://www.cdc.gov/H1N1flu/ga.htm>.
- [3] Massachusetts Department of Public Health, "H1N1 Flu (Swine Flu)", Public Health Fact Sheet, November 6, 2009.
- [4] WHO, Antiviral drugs for pandemic (H1N1) 2009: definitions and use. Available from: <http://www.who.int/em/disease/swineflu/frequently-asked-questions/antivirals/definitions-use/en/index.html>.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ของศูนย์วิจัย ดร.พนภน พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
 This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.
 Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

- [5] D. Klinkenberg, A. Everts-van der Wind, and et al., "Quantification of the effect of control strategies on classical swine fever epidemics," *Math. Biosci.*, vol. 186, pp.143-173, 2003.
- [6] P.Pongsumpun, "Mathematical model of the symptomatic and asymptomatic infections of Swine flu," *Int. J. Math. Model and methods in applied Sciences*, vol. 2, pp. 247-254, 2011.
- [7] M. Robert, *Stability and complexity in model ecosystem*, Princeton university press, 1973.
- [8] L. Esteve, and C. Vargas, "A model for dengue disease with variable human population," *J. Math. Bio.*, vol. 38, pp. 220-240, 1999.
- [9] L. Esteve, and C. Vargas, "Coexistence of different serotypes of dengue virus," *J Math Bio.*, vol. 46, pp. 31-47, 2003.
- [10] P.Pongsumpun, and I. M . Tang, "Limit Cycle and Chaotic Behaviors for the Transmission Model of Plasmodium Vivax Malaria", *Int. J. Math. Model and methods in applied Sciences*, vol.2, pp.563-570, 2008.

P. Pongsumpun received her B.Sc. degree in Mathematics(second class honors), Mahidol University, Thailand, in 1998, and her Ph.D. degree in Mathematics(International Programme), Mahidol University, Thailand, in 2004. From 2004 till date she is an assistant Professor of Mathematics, Ph.D.Thesis and M.Sc.advisors in King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand. Her research interests are Mathematical modelling in medical science, differential equation and numerical analysis.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ทำซ้ำได้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนธ์พงษ์ พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Dynamical Network Transmission of H1N1 Virus at the Local Level Transmission Model

P. Pongsumpun

Abstract—A new strain of Type A influenza virus can cause the transmission of H1N1 virus. This virus can spread between the people by coughing and sneezing. Because the people are always movement, so this virus can be easily spread. In this study, we construct the dynamical network model of H1N1 virus by separating the human into five groups: susceptible, exposed, infectious, quarantine and recovered groups. The movement of people between houses (local level) is considered. The behaviors of solutions to our dynamical model are shown for the different parameters.

Keywords—Dynamical network, H1N1 virus, local level, simulation.

I. INTRODUCTION

H1N1 virus is an orthomyxovirus. This virus has three groups, called as type A, type B or type C. Only type A viruses can infect pigs. This type of virus is also can be subdivided into subtypes based on their hemagglutinin (H) and neuraminidases (N). In humans, there are 15 hemagglutinins (H) and 9 neuraminidases (N) that have been identified in humans, animals and birds. Because it is an RNA virus, antigenic drift can occur as genetic material is exchanged between viruses. The pig populations can be infected with three main subtypes of classical swine influenza virus: H1N1, H3N2, and H1N2 [1]. "Pandemic Influenza", "Novel Influenza" or "Swine Flu" is occurred from the subtype identified H1N1 (2009). This type of influenza virus can cause respiratory disease in human. The spread of a swine flu virus from pigs to humans is occasionally possible. However, sporadic human infections with swine flu have occurred. Generally, these cases occur in persons with direct exposure to pigs [2]. Factors that may influence to the transmission of swine flu between human include smoking and, especially, not wearing gloves when working with infected animals. However, food is not the factor of H1N1 virus transmission. Eating cooked pork products are not risk to the infection of this disease. Cooking pork to an internal temperature of 160 °F can kill the swine flu virus as it can kill other bacteria and viruses. The swine flu virus can spread between the human by coughing and sneezing of the infected people. The virus transmits when droplets from a cough or sneeze of an infected person are propelled through the air and deposited on the mouth or nose of people nearby (within approximately one

metre). The virus also is on surfaces in the surrounding environment and can live on a hard surface for up to 24 hours and a soft surface for about 20 minutes.

When the person touches droplets of the virus on surfaces and then touches their own mouth or nose before washing their hand, it usually takes 1 to 4 days before each person is sick. Infected adults may transmit the disease to the others people for one day before symptoms appear and up to seven or more days after becoming sick. The younger children might be contagious for longer periods [3]. The swine flu virus has symptoms similarly to the general influenza-like illness. Fever, cough, sore throat, muscle pain, headache, runny nose, chills and fatigue are symptoms of this disease. Some people with swine flu also have reported vomiting and diarrhea associated with swine flu. Swine flu may take chronic medical conditions worse [4-8]. This influenza virus was first proposed to be a disease related to human influenza during the 1918 flu pandemic, when pigs become sick at the same time as human. Ten years later, the first identification of an influenza virus as a cause of disease in pigs occurred in the United States in 1930 [9]. Since that time, they have become an economically important cause of respiratory disease in pigs throughout the world and a human public health risk. For the next 60 years, swine influenza strains were almost exclusively H1N1. Then, between 1997 and 2002, new strains of three different subtypes and five different genotypes appeared as causes of influenza among pigs in North America. In 2009, the first case of the current H1N1 (2009) virus reported to WHO on 24 April 2009 on the American continent. The virus has spread in 160 countries and territories. By mid-year of 2009, there were 135,000 cases and 816 deaths recorded. The H1N1 (2009) virus has spread from the American continent to their world regions, including Europe, the Middle East, Asia, the Pacific and Africa. In 2003, D. Klinkenberg, A. Everts-van der Wind, et al. [10] assessed the effect of control strategies with and without vaccination by presenting a mathematical model of CSFV transmission between pig herds. In 2011 [11], we analyzed the mathematical model of H1N1 virus by classifying the patients into symptomatic and asymptomatic cases. Recently [12], we modified the transmission model of H1N1 virus by including the effect of re-infection and presented the way for reducing the outbreak of this disease. In this paper, we formulate the dynamical model for the transmission of H1N1 virus when there is the movement of people between houses.

II. TRANSMISSION MODEL

Transmission of H1N1 virus is studied through dynamical modeling with the movement of people. The human

P. Pongsumpun is with the Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalalongkrong road, Ladkrabang, Bangkok, Thailand, 10520(phone: (662)-329-8400 ext.320; fax: (662)-329-8400 ext.284; e-mail: kppumtan@kmitl.ac.th).

population is divided into five classes: susceptible, exposed, infectious, quarantine and recovered classes. The transmission of H1N1 virus at the local level (between houses) is studied. The movement of human between houses is satisfied the following assumptions:

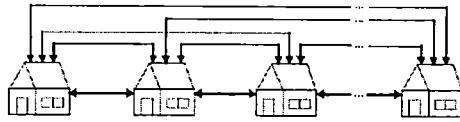


Fig. 1 The diagram shows the movement of human between houses

We assume that in each village has N populations. The movement of people is considered by random process. This process is done by random the 1^{th} person to the N^{th} person (with uniformly distribution) travel between houses everyday. This village, all people can go only one time in one house per day. Everybody has the same probability of visiting to each house. There is no person come from the outside of this village. Each person who stays in any house at the beginning time will come back to his/her house at the ending time. At the first day, there is only one infected human in one house and there is no infected human for the other houses in the village. Our dynamical model considers the transmission of H1N1 virus between the people. The people are divided into 5 classes; susceptible, exposed, infectious, quarantine and recovered humans.

The variables and parameters in our model are defined as follows:

- $S_{t,i}$ is number of susceptible persons in the i^{th} house after visited at day t .
- $E_{t,i}$ is number of exposed persons in the i^{th} house after visited at day t .
- $I_{t,i}$ is number of infectious persons in the i^{th} house after visited at day t .
- $Q_{t,i}$ is number of quarantine persons in the i^{th} house after visited at day t .
- $R_{t,i}$ is number of recovered persons in the i^{th} house after visited at day t .
- M is the total number of persons.
- n is the total number of houses.
- γ is the transmission rate of H1N1 virus between people.
- IIP is the incubation period of H1N1 virus.
- a is rate at which the infectious human change to be the quarantine human.
- b is rate at which the quarantine human change to be the recovered human.
- f is rate at which the infectious human change to be the recovered human.
- c is rate at which the exposed human change to be the recovered human.

We assume that the total human is constant. The dynamical changes for human classes are described as follows:

$$\Delta S_{t,i} = -\gamma S_{t,i} (E_{t,i} + I_{t,i}) \quad (1)$$

$$\Delta E_{t,i} = \gamma S_{t,i} (E_{t,i} + I_{t,i}) - \frac{1}{IIP} E_{t,i} - c E_{t,i} \quad (2)$$

$$\Delta I_{t,i} = \frac{1}{IIP} E_{t,i} - f I_{t,i} - a I_{t,i} \quad (3)$$

$$\Delta Q_{t,i} = a I_{t,i} - b Q_{t,i} \quad (4)$$

$$\Delta R_{t,i} = f I_{t,i} + b Q_{t,i} + c E_{t,i} \quad (5)$$

III. NUMERICAL SOLUTIONS

We simulate the results by using numerical analysis. Simulations of the model are calculated to see the time distributions of this disease. The time distributions of exposed and dormant humans for the different situations are shown in the following figures.

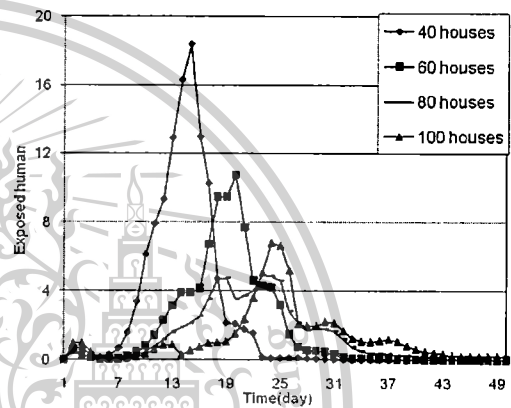


Fig. 2 Model outputs display the time distribution of exposed human for the different number of house in each village. The parameters used in this study are $N = 100$, $\gamma = 0.25$, $IIP = 5$, $a = 1/8$, $b = 1/6$, $c = 1/7$, $f = 1/10$

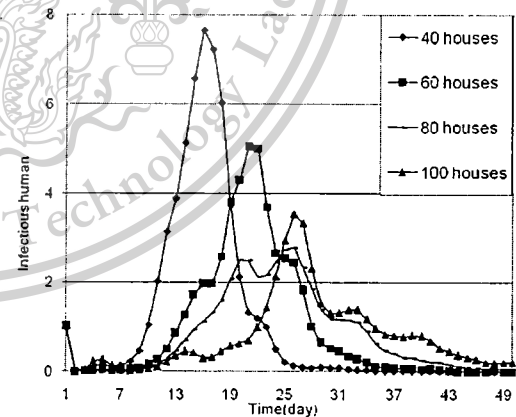


Fig. 3 Model outputs display the time distribution of infectious human for the different number of house in each village. The parameters are same as in Fig. 2

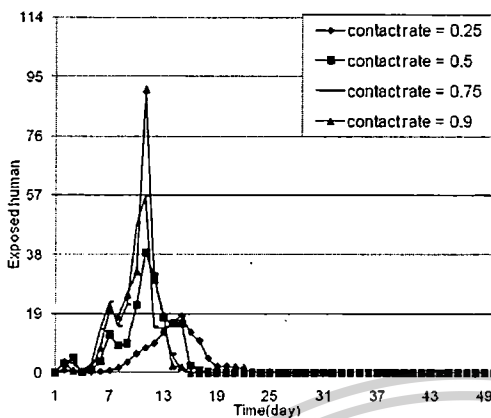


Fig. 4 Model outputs display the time distribution of exposed human for the different contact rate in each village. The parameters used in this study are $N = 100$, $n = 40$, $PIP = 5$, $a = 1/8$, $b = 1/6$, $c = 1/7$, $f = 1/10$

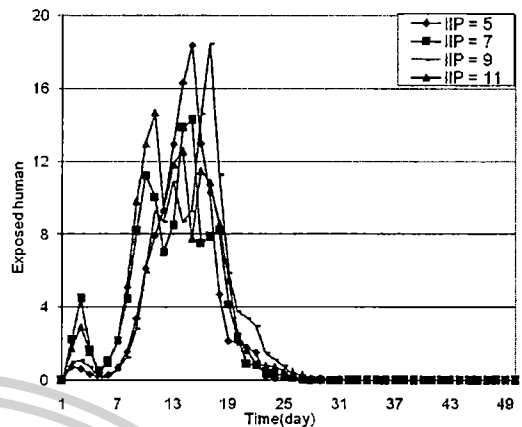


Fig. 6 Model outputs display the time distribution of exposed human for the different incubation period of H1N1 virus in each village. The parameters used in this study are $N = 100$, $n = 40$, $\gamma = 0.25$, $a = 1/8$, $b = 1/6$, $c = 1/7$, $f = 1/10$

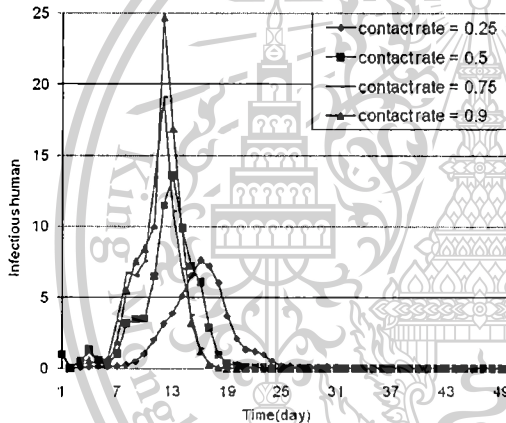


Fig. 5 Model outputs display the time distribution of infectious human for the different contact rate in each village. The parameters are same as in Fig. 4

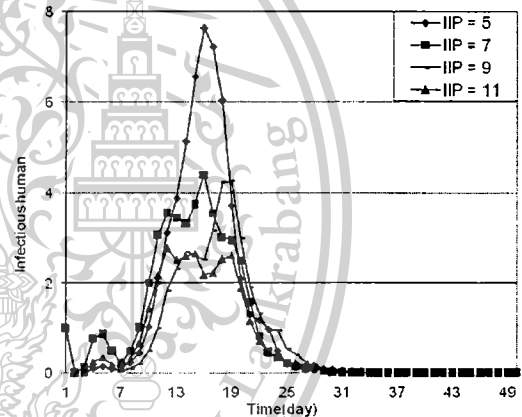


Fig. 7 Model outputs display the time distribution of infectious human for the different incubation period of H1N1 virus in each village. The parameters are same as in Fig. 6

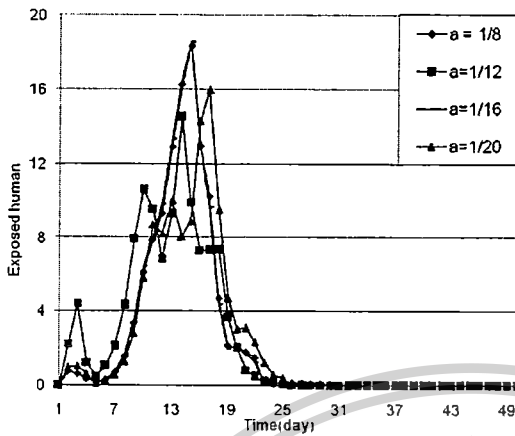


Fig. 8 Model outputs display the time distribution of exposed human for the different rate at which the infectious human change to be the quarantine human in each village. The parameters used in this study are $N = 100$, $n = 40$, $\gamma = 0.25$, $IIP = 5$, $b = 1/6$, $c = 1/7$, $f = 1/10$

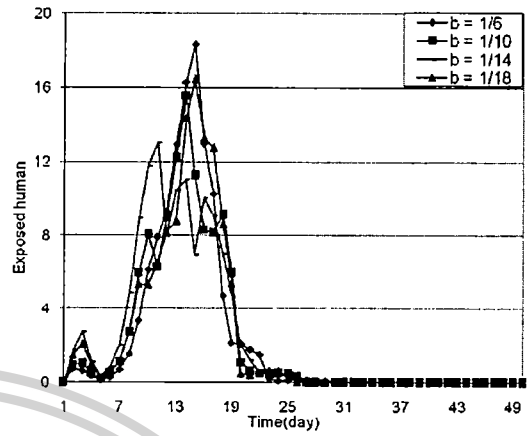


Fig. 10 Model outputs display the time distribution of exposed human for the different rate at which the quarantine human change to be the recovered human in each village. The parameters used in this study are $N = 100$, $n = 40$, $\gamma = 0.25$, $IIP = 5$, $a = 1/8$, $c = 1/7$, $f = 1/10$

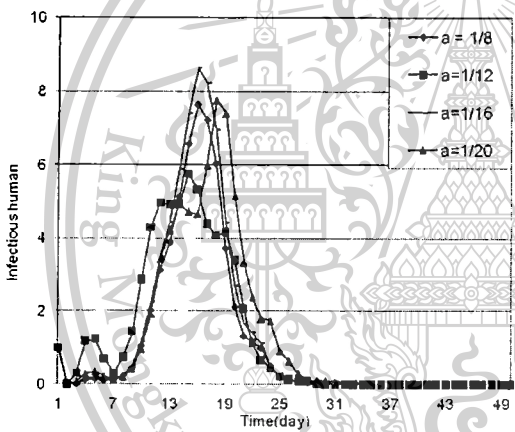


Fig. 9 Model outputs display the time distribution of infectious human for the different rate at which the infectious human change to be the quarantine human in each village. The parameters are same as in Fig. 8

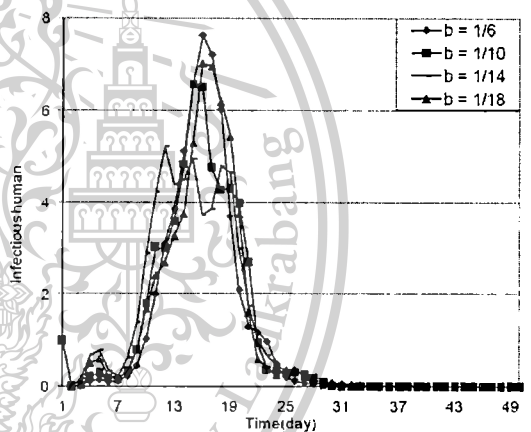


Fig. 11 Model outputs display the time distribution of infectious human for the different rate at which the quarantine human change to be the recovered human in each village. The parameters are same as in Fig. 10

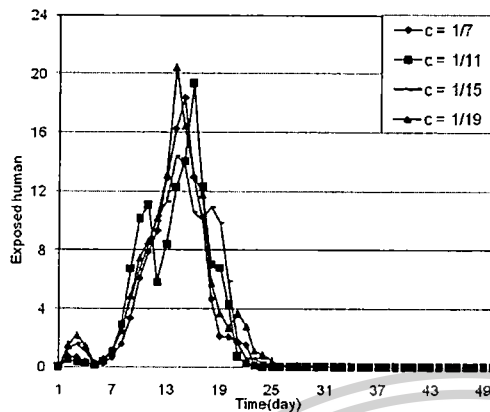


Fig. 12 Model outputs display the time distribution of exposed human for the different rate at which the exposed human change to be the recovered human in each village. The parameters used in this study are $N = 100$, $n = 40$, $\gamma = 0.25$, $PIP = 5$, $a = 1/8$, $b = 1/6$, $f = 1/10$

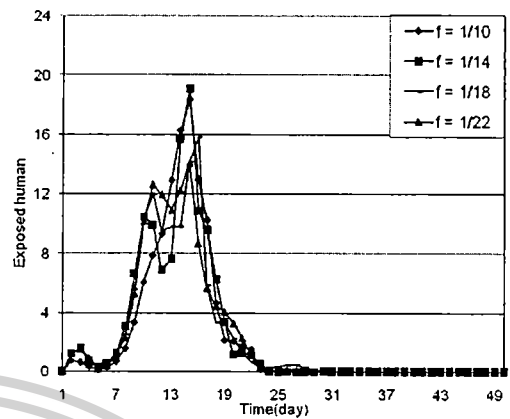


Fig. 14 Model outputs display the time distribution of exposed human for the different rate at which the infectious human change to be the recovered human in each village. The parameters used in this study are $N = 100$, $n = 40$, $\gamma = 0.25$, $PIP = 5$, $a = 1/8$, $b = 1/6$, $c = 1/7$, $f = 1/10$

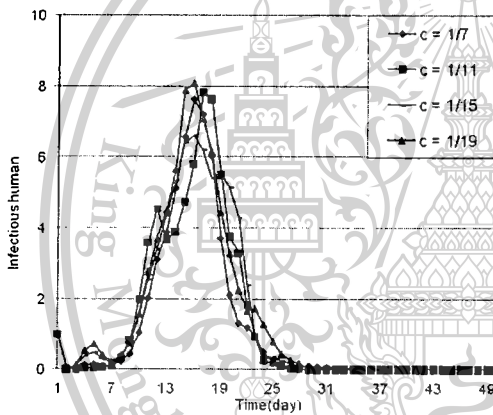


Fig. 13 Model outputs display the time distribution of infectious human for the different rate at which the exposed human change to be the recovered human in each village. The parameters are same as in Fig. 12

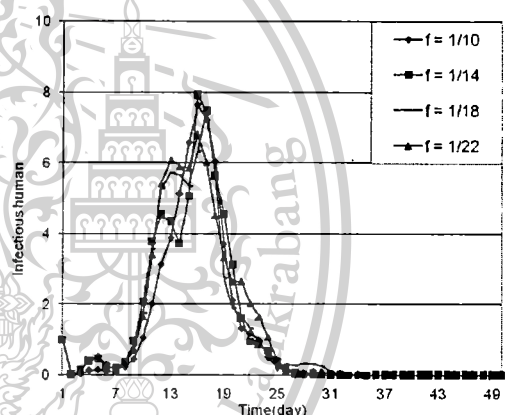


Fig. 15 Model outputs display the time distribution of infectious human for the different rate at which the infectious human change to be the recovered human in each village. The parameters are same as in Fig. 14

IV. DISCUSSION AND CONCLUSION

The results of the simulations are shown when different values of several parameters are used. Fig. 2 to 3 show the time distributions of exposed and infectious human when the number of houses in each village is difference. Fig. 4 to 5 show the time distributions of exposed and infectious human when the contact rate in each village is difference. Fig. 6 to 7 show the time distributions of exposed and infectious human when the different incubation period of H1N1 virus in each village is difference. Fig. 8 to 9 show the time distributions of exposed and infectious human when the different rate at which the infectious human change to be the quarantine

human in each village is difference. Fig. 10 to 11 show the time distributions of exposed and infectious human when the different rate at which the quarantine human change to be the recovered human in each village is difference. Fig. 12 to 13 show the time distributions of exposed and infectious human when the different rate at which the exposed human change to be the recovered human in each village is difference. Fig. 14 to 15 show the time distributions of exposed and infectious human when the different rate at which the infectious human change to be the recovered human in each village is difference. We will see that the epidemic sizes are higher when the smaller number of households, the higher contact rates, the smaller incubation period of H1N1 virus, the smaller day at which the infectious human change to be the quarantine human, the smaller day at which the quarantine human change to be the recovered human. But when the higher day at which the exposed human change to be the recovered human and the higher day at which the infectious human change to be the recovered human, the outburst of epidemic are longer. The next step in this study is to formulate a network of villages in a province and perform similar simulations of dynamics of the transmission of H1N1 at the next level. The results of this study will be the way for finding the parameters which effects to the epidemic of H1N1 virus when there is the movement of people.

ACKNOWLEDGMENT

This work is supported by King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang Research Fund, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand. The author would like to thank Prof. Dr. I-Ming Tang at Mahidol University, Thailand.

REFERENCES

- [1] S. A. Dee. "Respiratory Disease of Pigs." In *The Merck Veterinary Manual* 9th edition. Pennsylvania, National Publishing Inc. 2005, pp. 1228.
- [2] CDC. Influenza (Flu): Key Facts about Swine Influenza (Swine Flu). December 6, 2006 Available: <http://www.cdc.gov/H1N1flu/qa.htm>.
- [3] Massachusetts Department of Public Health. "H1N1 Flu (Swine Flu)." Public Health Fact Sheet, 2009.
- [4] Massachusetts Department of Public Health. "H1N1 Flu (Swine Flu)." Public Health Fact Sheet, 2009.
- [5] Centers for Disease Control and Prevention (April 26, 2009). CDC Health Update: Swine Influenza A (H1N1) Update: New Interim Recommendations and Guidance for Health Directors about Strategic National Stockpile, Materiel, Health Alert Network. Available: <http://www.cdc.gov/swineflu/HAN/042609.htm>.
- [6] WHO. What is the pandemic (H1N1) 2009 virus?. Available: http://www.who.int/csr/disease/swineflu/frequently_asked_questions/about_disease/en/index.html
- [7] WHO. Antiviral drugs for pandemic (H1N1) 2009: definitions and use. Available: http://www.who.int/csr/disease/swineflu/frequently_asked_questions/antivirals/definitions_use/en/index.html
- [8] BMJ Group. Swine flu. Available: <http://besttreatments.bmj.com/bmk/about/12.html>.
- [9] WHO. Pandemic (H1N1) 2009-update 70. (Online) 2009. Available: <http://www.who.int/csr/disease/swinflu/en/>.
- [10] D. Klinkenberg, A. J. Evers-van der Wind, and et al., "Quantification of the effect of control strategies on classical swine fever epidemics." *Math BioSci.* vol 2, pp. 145-173, 2003.

- [11] P.Pongsumpun. "Mathematical model of the symptomatic and asymptomatic infections of Swine flu." *Int. J. Math. Model and methods in applied Sciences*, vol. 2, pp. 247-254, 2011.
- [12] P.Pongsumpun. "The Reinfectious Model of H1N1 Virus Transmission." *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, Issue 66, pp.240-246, 2012.

P. Pongsumpun received her B.Sc. degree in Mathematics (second class honors), Mahidol University, Thailand, in 1998, and her Ph.D. degree in Mathematics (International Programme), Mahidol University, Thailand, in 2004. From 2004 till date she is an assistant Professor of Mathematics, Ph.D.Thesis and M.Sc.advisors in King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand. Her research interests are Mathematical modelling in medical science, differential equation and numerical analysis.



Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)
Volume 73, Number 2, 2013, Pages 201-229
Available online at <http://pphmj.com/journals/fjms.htm>
Published by Pushpa Publishing House, Allahabad, INDIA

ANALYSIS OF MATHEMATICAL MODEL FOR SWINE FLU TRANSMISSION BY AGE GROUP

T. Changpuek¹, P. Pongsumpun^{1,*} and I-Ming Tang²

¹Department of Mathematics
Faculty of Science
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Chalongkrung Road, Ladkrabang, Bangkok 10520
Thailand
e-mail: kppuntan@kmitl.ac.th*

²Department of Mathematics
Faculty of Science
Silpakorn University
Nakorn Pathom 73000
Thailand

Abstract

Effect of age group in the human population is considered for the transmission of swine flu. Susceptible-Exposed-Infected-Quarantined-Recovered (SEIQR) model is used for describing the transmission of this disease. From the swine flu data in Thailand, age of patients is influenced to the transmission of this disease. The human population is separated into three groups such as 1-10 years, 11-20 years, and more than 20 years, respectively. The transmission rates of the disease in all

© 2013 Pushpa Publishing House

2010 Mathematics Subject Classification: 97Mxx.

Keywords and phrases: age structure, SEIQR model, swine flu, locally asymptotically stable, Routh-Hurwitz conditions.

Submitted by K. K. Azad

Received May 21, 2012

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ในเชิงพาณิชย์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธวี พงศ์สมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

202

T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

age groups are assumed to be different. Local stability analysis of this model is given. Four equilibrium states are found and the conditions for stability of these four equilibrium states are established. Numerical solutions are shown to confirm the analytical results. The bifurcation diagrams are shown. The basic reproductive number is found and the alternative way to control the disease is discussed.

I. Introduction

The swine flu was an outbreak of a new strain of H1N1 influenza virus, derived originally from a strain which lived in pigs, and this origin gave rise to the common name of "swine flu". The outbreak began in the state of Veracruz, Mexico in April 2009, and it continued to spread globally. In June 2009, the World Health Organization (WHO) and US Centers for Disease Control (CDC) stopped counting cases and declared the outbreak as pandemic [1]. The total report of swine flu cases worldwide more than 213 countries was 622,482 by 27 November 2009 [2]. Updated data on swine flu deaths has reached a total of 16,931 deaths as on 21 March 2010 [3]. The virulence of swine flu virus is mild and the mortality rates are very low compared with bird flu virus. The H5N1 virus has a mortality rate between 60% and 70% [4], but the H1N1 virus has a mortality rate 3% [5].

The swine flu virus appeared to be a new strain of H1N1 which resulted when a previous triple reassortment of bird, swine and human flu viruses further combined with a Eurasian pig flu virus [6]. It has been determined that the strain contains genes from five different flu viruses: North American swine influenza, North American avian influenza, human influenza, and two swine influenza viruses typically found in Asia and Europe. Pigs have been termed the mixing vessel of flu because they can be infected both by avian flu viruses, which rarely directly infect people, and by human viruses. When pigs become simultaneously infected with more than one virus, the viruses can swap genes, producing new variants which can pass to humans and sometimes spread amongst them [7].

Despite being informally called "swine flu", the H1N1 flu virus cannot be spread by eating pork or pork products; [8, 9] similar to other influenza

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้เผยแพร่สู่สาธารณะ
รองศาสตราจารย์ ดร. พันชน พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Analysis of Mathematical Model for Swine Flu Transmission ... 203

virus; it is typically contracted by person to person transmission through respiratory droplets [10]. Sometimes people may become infected by touching something such as a surface or object with flu viruses on it and then touching their face. The symptoms of H1N1 flu are similar to those of other influenzas, and may include a fever, cough (typically a “dry cough”), headache, muscle or joint pain, sore throat, chills, fatigue, and runny nose. Diarrhea, vomiting, and neurological problems have also been reported in some cases [11, 12]. People at higher risk of serious complications include those aged over 65, children younger than 5, children with neurodevelopment conditions, pregnant women [13] and those of any age with underlying medical conditions, such as asthma, diabetes, obesity, heart disease, or a weakened immune system (e.g., taking immunosuppressive medications or infected with HIV) [14].

The virus was found to be a novel strain of influenza for which extant vaccines against seasonal flu provided little protection. A study at CDC published in May 2009 found that children had no preexisting immunity to the new strain but that adults aged 18 to 64 had 6–9%, and older adults had some degree of immunity 33% [15, 16]. While it has been thought that these findings suggest the partial immunity in older adults may be due to previous exposure to similar seasonal influenza viruses. The H1N1 vaccine was initially in short supply and in the U.S., the CDC recommended that initial doses should go to priority groups such as pregnant women, people who live with or care for babies under six months old, children six months to four years old and health-care workers [17].

People in at-risk groups should be treated with antiviral (oseltamivir or zanamivir) as soon as possible when they first experience flu symptoms. The risk groups include pregnant and post partum women, children under two years old, and people with underlying conditions such as respiratory problems [18]. People who are not in an at-risk group who have persistent or rapidly worsening symptoms should also be treated with antiviral. Antiviral drugs are most useful if they are given within 48 hours of the start of symptoms and may improve outcomes in hospitalized patients [19]. Both medications have known side effects, including lightheadedness, chills,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้ทำซ้ำในเชิงพาณิชย์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนชนิ พงษ์พิมพ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

204

T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

nausea, vomiting, loss of appetite and trouble breathing [20]. The CDC warned that the indiscriminate use of antiviral medications to prevent and treat influenza could ease the way for drug-resistant strains to emerge, which would make the fight against the pandemic that much harder. According to WHO, the reported 314 samples of the swine flu cases tested worldwide have shown resistance to oseltamivir (Tamiflu) [21], but no circulating flu has yet shown any resistance to zanamivir (Relenza) [22]. The epidemic models are used for predicting many emerging infectious diseases through human population. Zhou and Ma [23] analyzed an SEIQJR model for SARS transmission and control in China. Iwami et al. [24] considered an avian-human influenza epidemic model based on SI-SIR model. Dumont et al. [25] constructed an SEIR-LSEI model to investigate the spread of the chikungunya disease. In this paper, we analyze the mathematical model of swine flu in Thailand. The data of swine flu in Thailand is shown in Figure 1.

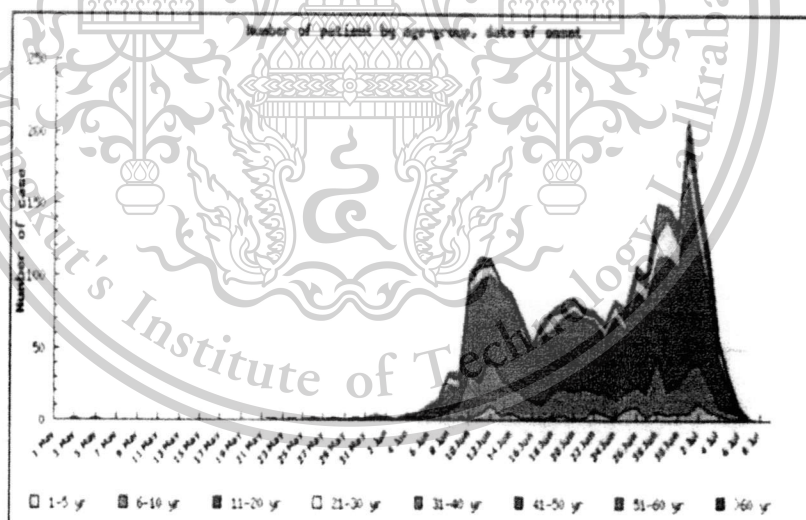


Figure 1. The data of swine flu in Thailand between April 28 and July 8, 2010.

From Figure 1, we can see that there is the different distribution of this disease in each age group. In this paper, we modified the model of Jumpen et al. [26] by incorporating the age structure of human population. The report of Ministry of Public Health, Thailand has showed that the most swine flu cases

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Analysis of Mathematical Model for Swine Flu Transmission ... 205

in Thailand occur in children under the age of 10, 11-20 and the people above the age of 21, respectively. The purpose of this paper is to study the age structural model of swine flu. In Section 2, we introduce a mathematical model to describe the transmission of this disease. In Section 3, we analyze our model and give the local stability analysis of the equilibriums states and also the numerical results. In the last section, we discuss the basic reproductive number of this disease and the bifurcation diagrams are shown.

II. Mathematical Model

We formulate a mathematical model to study the transmission of swine flu by introducing age structure into the SEIQR model. The human population is divided into three age groups such as groups of the people 1-10 years, 11-20 years, and more than 20 years, respectively. Each group is constant in size and is sub-divided into five classes, i.e., S' , individuals susceptible to the disease; E' , individuals who are latently infected (exposed); I' , infectious individuals; Q' , isolated or quarantined individuals; and R' , individuals that have recovered and immune to the disease. The age structural SEIQR model is described by the following system of differential equations:

$$\frac{dS'_1}{dt} = \mu_b N_T - \frac{\delta_1 S'_1 (E'_1 + I'_1)}{N_T} - (\mu + \kappa) S'_1, \quad (1)$$

$$\frac{dE'_1}{dt} = \frac{\delta_1 S'_1 (E'_1 + I'_1)}{N_T} - (\mu + \eta + \alpha + \kappa) E'_1, \quad (2)$$

$$\frac{dI'_1}{dt} = \eta E'_1 - (\mu + \varepsilon + \beta + \kappa) I'_1, \quad (3)$$

$$\frac{dQ'_1}{dt} = \varepsilon I'_1 - (\mu + \gamma + \kappa) Q'_1, \quad (4)$$

$$\frac{dR'_1}{dt} = \alpha E'_1 + \beta I'_1 + \gamma Q'_1 - (\mu + \kappa) R'_1, \quad (5)$$

$$\frac{dS'_2}{dt} = \kappa S'_1 - \frac{\delta_2 S'_2 (E'_2 + I'_2)}{N_T} - (\mu + \kappa) S'_2, \quad (6)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธวี พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

206 T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

$$\frac{dE'_2}{dt} = \kappa E'_1 + \frac{\delta_2 S'_2 (E'_2 + I'_2)}{N_T} - (\mu + \eta + \alpha + \kappa) E'_2, \quad (7)$$

$$\frac{dI'_2}{dt} = \kappa I'_1 + \eta E'_2 - (\mu + \varepsilon + \beta + \kappa) I'_2, \quad (8)$$

$$\frac{dQ'_2}{dt} = \kappa Q'_1 + \varepsilon I'_2 - (\mu + \gamma + \kappa) Q'_2, \quad (9)$$

$$\frac{dR'_2}{dt} = \kappa R'_1 + \alpha E'_2 + \beta I'_2 + \gamma Q'_2 - (\mu + \kappa) R'_2, \quad (10)$$

$$\frac{dS'_3}{dt} = \kappa S'_2 - \frac{\delta_3 S'_3 (E'_3 + I'_3)}{N_T} - \mu S'_3, \quad (11)$$

$$\frac{dE'_3}{dt} = \kappa E'_2 + \frac{\delta_3 S'_3 (E'_3 + I'_3)}{N_T} - (\mu + \eta + \alpha) E'_3, \quad (12)$$

$$\frac{dI'_3}{dt} = \kappa I'_2 + \eta E'_3 - (\mu + \varepsilon + \beta) I'_3, \quad (13)$$

$$\frac{dQ'_3}{dt} = \kappa Q'_2 + \varepsilon I'_3 - (\mu + \gamma) Q'_3, \quad (14)$$

$$\frac{dR'_3}{dt} = \kappa R'_2 + \alpha E'_3 + \beta I'_3 + \gamma Q'_3 - \mu R'_3. \quad (15)$$

with the conditions $N_T = N_{T_1} + N_{T_2} + N_{T_3}$, $N_{T_1} = S'_1 + E'_1 + I'_1 + Q'_1 + R'_1$, $N_{T_2} = S'_2 + E'_2 + I'_2 + Q'_2 + R'_2$ and $N_{T_3} = S'_3 + E'_3 + I'_3 + Q'_3 + R'_3$, where subscripts 1, 2 and 3 denote the first age group, the second age group and the third age group, respectively.

The parameters are defined as follows: N_T is the total population, N_{T_1} is the total number of first age group, N_{T_2} is the total number of second age group, N_{T_3} is the total number of third age group, μ_b is the natural birth rate, μ is the natural mortality rate, κ is the rate at which the first age group passes into the second age group and also the second age group passes into the third age group, δ_1 is equal to $\psi_1 \phi_n$ in which ψ_1 is the probability of

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนธ์นี้ พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Analysis of Mathematical Model for Swine Flu Transmission ... 207

catching the disease per contact to the infected/exposed person and ϕ_n is the average number of people contacted by each person per day, δ_2 is equal to $\psi_2\phi_n$ in which ψ_2 is the probability of catching the disease per contact to the infected/exposed person and ϕ_n is the average number of people contacted by each person per day, δ_3 is equal to $\psi_3\vartheta_n$ in which ψ_3 is the probability of catching the disease per contact to the infected/exposed person and ϑ_n is the average number of people contacted by each person per day, η is the rate at which the exposed individuals E become the infected individuals I , ε is the rate at which the individuals leave the infective individuals I for the quarantined individuals Q , α , β , γ are the rates at which individuals in the E , I and Q classes recover from the disease or die.

If we add (1)-(15), (1)-(5), (6)-(10), and (11)-(15), then we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{dN_T}{dt} &= \mu_b N_T - \mu N_T, & \frac{dN_{T_1}}{dt} &= \mu_b N_T - (\mu + \kappa) N_{T_1}, \\ \frac{dN_{T_2}}{dt} &= \kappa N_{T_1} - (\mu + \kappa) N_{T_2}, & \frac{dN_{T_3}}{dt} &= \kappa N_{T_2} - \mu N_{T_3}. \end{aligned} \tag{16}$$

We assume that total population, total number of the first age group, total number of the second age group, and total number of the third age group remain constant. Therefore $\frac{dN_T}{dt} = 0$ and $\frac{dN_{T_1}}{dt} = \frac{dN_{T_2}}{dt} = \frac{dN_{T_3}}{dt} = 0$. Setting the right hand side of (16) to be zero, we obtain the following four relations:

$$\begin{aligned} \mu_b &= \mu \text{ (birth rate equals to mortality rate), } & \frac{N_{T_1}}{N_T} &= \frac{\mu}{\mu + \kappa} \text{ (ratio between} \\ & & & \text{total number of the first age group and total population), } & \frac{N_{T_2}}{N_T} &= \frac{\mu\kappa}{(\mu + \kappa)^2} \\ & & & \text{(ratio between total number of the second age group and total population)} \\ \text{and } & \frac{N_{T_3}}{N_T} &= \frac{\kappa^2}{(\mu + \kappa)^2} \text{ (the ratio between total number of the third age group} \\ & & & \text{and total population).} \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนิตน์ พงศ์สัมพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

208

T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

We normalize (1)-(15) by letting

$$S_1 = \frac{S'_1}{N_{T_1}}, E_1 = \frac{E'_1}{N_{T_1}}, I_1 = \frac{I'_1}{N_{T_1}}, Q_1 = \frac{Q'_1}{N_{T_1}}, R_1 = \frac{R'_1}{N_{T_1}},$$

$$S_2 = \frac{S'_2}{N_{T_2}}, E_2 = \frac{E'_2}{N_{T_2}}, I_2 = \frac{I'_2}{N_{T_2}}, Q_2 = \frac{Q'_2}{N_{T_2}}, R_2 = \frac{R'_2}{N_{T_2}},$$

$$S_3 = \frac{S'_3}{N_{T_3}}, E_3 = \frac{E'_3}{N_{T_3}}, I_3 = \frac{I'_3}{N_{T_3}}, Q_3 = \frac{Q'_3}{N_{T_3}}, R_3 = \frac{R'_3}{N_{T_3}}.$$

The normalized variables satisfy the following new conditions: $S_1 + E_1 + I_1 + Q_1 + R_1 = 1$, $S_2 + E_2 + I_2 + Q_2 + R_2 = 1$, and $S_3 + E_3 + I_3 + Q_3 + R_3 = 1$. Hence equations (1)-(15) can be rewritten as

$$\frac{dS_1}{dt} = \theta_1(1 - S_1) - \theta_2 S_1(E_1 + I_1), \tag{17}$$

$$\frac{dE_1}{dt} = \theta_2 S_1(E_1 + I_1) - \theta_3 E_1, \tag{18}$$

$$\frac{dI_1}{dt} = \eta E_1 - \theta_4 I_1, \tag{19}$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = \varepsilon I_1 - \theta_5 Q_1, \tag{20}$$

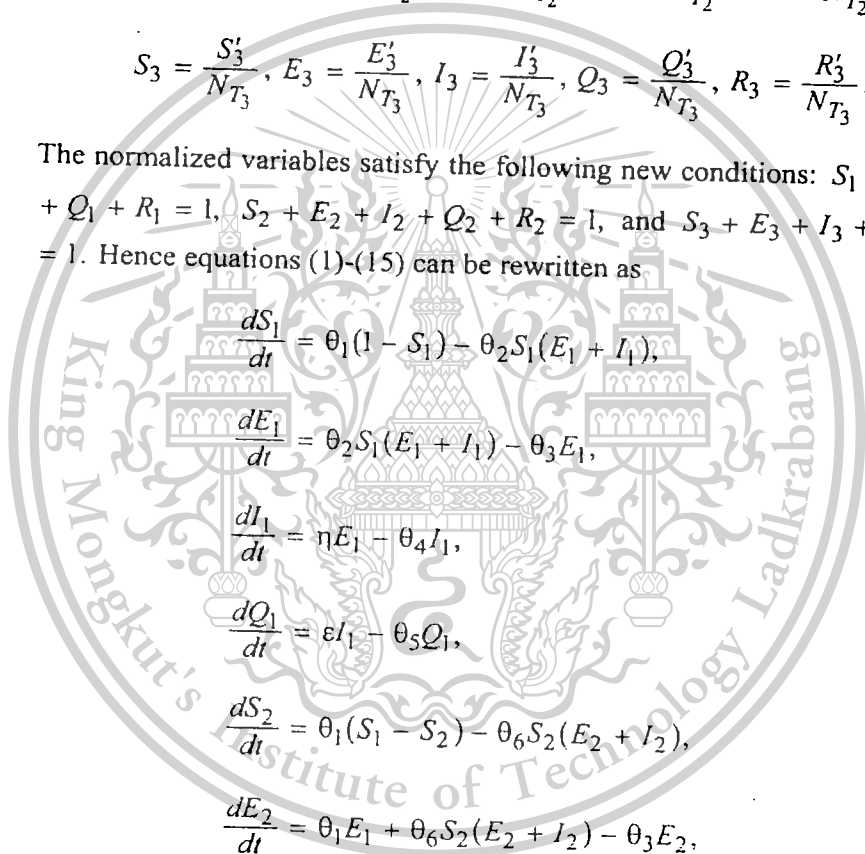
$$\frac{dS_2}{dt} = \theta_1(S_1 - S_2) - \theta_6 S_2(E_2 + I_2), \tag{21}$$

$$\frac{dE_2}{dt} = \theta_1 E_1 + \theta_6 S_2(E_2 + I_2) - \theta_3 E_2, \tag{22}$$

$$\frac{dI_2}{dt} = \theta_1 I_1 + \eta E_2 - \theta_4 I_2, \tag{23}$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = \theta_1 Q_1 + \varepsilon I_2 - \theta_5 Q_2, \tag{24}$$

$$\frac{dS_3}{dt} = \mu(S_2 - S_3) - \theta_7 S_3(E_3 + I_3), \tag{25}$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนชนัน พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Analysis of Mathematical Model for Swine Flu Transmission ... 209

$$\frac{dE_3}{dt} = \mu E_2 + \theta_7 S_3 (E_3 + I_3) - \theta_8 E_3, \quad (26)$$

$$\frac{dI_3}{dt} = \mu I_2 + \eta E_3 - \theta_9 I_3, \quad (27)$$

$$\frac{dQ_3}{dt} = \mu Q_2 + \varepsilon I_3 - \theta_{10} Q_3, \quad (28)$$

where $\theta_1 = \mu + \kappa$, $\theta_2 = \frac{\delta_1 \mu}{\mu + \kappa}$, $\theta_3 = \mu + \eta + \alpha + \kappa$, $\theta_4 = \mu + \varepsilon + \beta + \kappa$,
 $\theta_5 = \mu + \gamma + \kappa$, $\theta_6 = \frac{\delta_2 \mu \kappa}{(\mu + \kappa)^2}$, $\theta_7 = \frac{\delta_3 \kappa^2}{(\mu + \kappa)^2}$, $\theta_8 = \mu + \eta + \alpha$, $\theta_9 = \mu + \varepsilon + \beta$, and $\theta_{10} = \mu + \gamma$.

III. Analysis of the Mathematical Model

A. Analysis of models

The equilibrium points are obtained by setting the right hand side of equations (17)-(28) equal to zero. We get four equilibrium states:

(i) The disease free equilibrium state

$$P_0 = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0).$$

(ii) The third age group endemic equilibrium state

$$\hat{P} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \hat{S}_3, \hat{E}_3, \hat{I}_3, \hat{Q}_3),$$

where

$$\hat{S}_3 = \frac{1}{\hat{L}_0}, \quad \hat{E}_3 = \frac{\mu}{\theta_8 \hat{L}_0} [\hat{L}_0 - 1], \quad \hat{I}_3 = \frac{\mu \eta}{\theta_8 \theta_9 \hat{L}_0} [\hat{L}_0 - 1],$$

$$\hat{Q}_3 = \frac{\mu \eta \varepsilon}{\theta_8 \theta_9 \theta_{10} \hat{L}_0} [\hat{L}_0 - 1], \quad \text{with } \hat{L}_0 = \frac{\theta_7 (\eta + \theta_9)}{\theta_8 \theta_9}.$$

(iii) The second and third age group endemic equilibrium state $\tilde{P} = (1, 0, 0, 0, \tilde{S}_2, \tilde{E}_2, \tilde{I}_2, \tilde{Q}_2, \tilde{S}_3, \tilde{E}_3, \tilde{I}_3, \tilde{Q}_3)$, where

210 T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

$$\tilde{S}_2 = \frac{1}{\tilde{L}_0}, \quad \tilde{E}_2 = \frac{\theta_1}{\theta_3 \tilde{L}_0} [\tilde{L}_0 - 1], \quad \tilde{I}_2 = \frac{\theta_1 \eta}{\theta_3 \theta_4 \tilde{L}_0} [\tilde{L}_0 - 1],$$

$$\tilde{Q}_2 = \frac{\theta_1 \eta \epsilon}{\theta_3 \theta_4 \theta_5 \tilde{L}_0} [\tilde{L}_0 - 1], \quad \tilde{S}_3 = \frac{\mu \tilde{S}_2}{\theta_7 (\tilde{E}_3 + \tilde{I}_3) + \mu},$$

$$\tilde{E}_3 = \frac{-X_2 + \sqrt{X_2^2 - 4X_1 X_3}}{2X_1}, \quad \tilde{I}_3 = \frac{\mu \tilde{I}_2 + \eta \tilde{E}_3}{\theta_9}, \quad \tilde{Q}_3 = \frac{\mu \tilde{Q}_2 + \epsilon \tilde{I}_3}{\theta_{10}}$$

with

$$\tilde{L}_0 = \frac{\theta_6 (\eta + \theta_4)}{\theta_3 \theta_4}, \quad X_1 = \theta_7 \theta_8 (\eta + \theta_9),$$

$$X_2 = \mu \theta_8 \theta_9 + \mu \theta_7 (\theta_8 \tilde{I}_2 - (\eta + \theta_9) \tilde{S}_2 - (\eta + \theta_9) \tilde{E}_2),$$

$$\text{and } X_3 = -[\mu^2 \theta_7 \tilde{I}_2 (\tilde{S}_2 + \tilde{E}_2) + \mu^2 \theta_9 \tilde{E}_2].$$

(iv) The full endemic equilibrium state

$$P^* = (S_1^*, E_1^*, I_1^*, Q_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, Q_2^*, S_3^*, E_3^*, I_3^*, Q_3^*),$$

where

$$S_1^* = \frac{1}{L_0^*}, \quad E_1^* = \frac{\theta_1}{\theta_3 L_0^*} [L_0^* - 1], \quad I_1^* = \frac{\theta_1 \eta}{\theta_3 \theta_4 L_0^*} [L_0^* - 1],$$

$$Q_1^* = \frac{\theta_1 \eta \epsilon}{\theta_3 \theta_4 \theta_5 L_0^*} [L_0^* - 1], \quad S_2^* = \frac{\theta_1 S_1^*}{\theta_6 (E_2^* + I_2^*) + \theta_1},$$

$$E_2^* = \frac{-Y_2 + \sqrt{Y_2^2 - 4Y_1 Y_3}}{2Y_1}, \quad I_2^* = \frac{\theta_1 I_1^* + \eta E_2^*}{\theta_4}, \quad Q_2^* = \frac{\theta_1 Q_1^* + \epsilon I_2^*}{\theta_5},$$

$$S_3^* = \frac{\mu S_2^*}{\theta_7 (E_3^* + I_3^*) + \mu}, \quad E_3^* = \frac{-Z_2 + \sqrt{Z_2^2 - 4Z_1 Z_3}}{2Z_1},$$

$$I_3^* = \frac{\mu I_2^* + \eta E_3^*}{\theta_9}, \quad Q_3^* = \frac{\mu Q_2^* + \epsilon I_3^*}{\theta_{10}},$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนรัตน์ พงศ์สัมพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

with

$$L_0^* = \frac{\theta_2(\eta + \theta_4)}{\theta_3\theta_4}, \quad Y_1 = \theta_3\theta_6(\eta + \theta_4),$$

$$Y_2 = \theta_1\theta_3\theta_4 + \theta_1\theta_6(\theta_3I_1^* - (\eta + \theta_4)S_1^* - (\eta + \theta_4)E_1^*),$$

$$Y_3 = -[\theta_1^2\theta_6I_1^*(S_1^* + E_1^*) + \theta_1^2\theta_4E_1^*], \quad Z_1 = \theta_7\theta_8(\eta + \theta_9),$$

$$Z_2 = \mu\theta_8\theta_9 + \mu\theta_7(\theta_8I_2^* - (\eta + \theta_9)S_2^* - (\eta + \theta_9)E_2^*)$$

and

$$Z_3 = -[\mu^2\theta_7I_2^*(S_2^* + E_2^*) + \mu^2\theta_9E_2^*].$$

B. Analysis of stability

The local stability of the equilibrium solutions is determined from the Jacobian matrix of the RHS of the above set of differential equations evaluated at the equilibrium solutions. The eigenvalues are obtained by solving the characteristic equations; $\det(J(p) - \lambda I_{12}) = 0$, where $J(p)$ is the Jacobian matrix at equilibrium point p , I_{12} is the identity matrix dimension 12×12 . If all eigenvalues have negative real parts, then the equilibrium solution is locally stable [27, 28]. The local stability analysis of each equilibrium state is given in the following propositions.

Proposition 1. *If $L_0^* < 1$, $\tilde{L}_0 < 1$ and $\hat{L}_0 < 1$, then the equilibrium P_0 is locally asymptotically stable.*

Proof. For the disease free equilibrium state $P_0 = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$, we obtain the characteristic equation

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \theta_1)^2(\lambda + \theta_5)^2(\lambda + \theta_{10})[\lambda^2 + a_1\lambda + a_2][\lambda^2 + b_1\lambda + b_2] \cdot [\lambda^2 + c_1\lambda + c_2] = 0, \tag{29}$$

212 T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

where

$$a_1 = \frac{(1 - L_0^*)\theta_3\theta_4 + \eta\theta_3}{\eta + \theta_4} + \theta_4, \quad a_2 = \theta_3\theta_4(1 - L_0^*),$$

$$b_1 = \frac{(1 - \tilde{L}_0)\theta_3\theta_4 + \eta\theta_3}{\eta + \theta_4} + \theta_4, \quad b_2 = \theta_3\theta_4(1 - \tilde{L}_0),$$

$$c_1 = \frac{(1 - \hat{L}_0)\theta_8\theta_9 + \eta\theta_8}{\eta + \theta_9} + \theta_9 \text{ and } c_2 = \theta_8\theta_9(1 - \hat{L}_0).$$

From the characteristic equation (29), we see that the first six eigenvalues are $\lambda_1 = -\mu$, $\lambda_{2,3} = -\theta_1$, $\lambda_{4,5} = -\theta_5$ and $\lambda_6 = -\theta_{10}$, all of these eigenvalues are negative. The remaining eigenvalues are found by solving $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, $\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0$ and $\lambda^2 + c_1\lambda + c_2 = 0$. But for stability, we only need the sign of the eigenvalues to be negative. Thus, we apply the Routh-Hurwitz criteria to the equation in form $\lambda^2 + A\lambda + B = 0$, the stability holds if and only if $A > 0$ and $B > 0$.

For $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, $a_1 > 0$ and $a_2 > 0$, if $L_0^* < 1$. For $\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0$, $b_1 > 0$ and $b_2 > 0$, if $\tilde{L}_0 < 1$. For $\lambda^2 + c_1\lambda + c_2 = 0$, $c_1 > 0$ and $c_2 > 0$, if $\hat{L}_0 < 1$. Thus, all the roots of the three characteristic equations have negative real parts if $L_0^* < 1$, $\tilde{L}_0 < 1$ and $\hat{L}_0 < 1$, respectively.

Proposition 2. *If $L_0^* < 1$, $\tilde{L}_0 < 1$ and $\hat{L}_0 > 1$, then the equilibrium \hat{P} is locally asymptotically stable.*

Proof. For the third age group endemic equilibrium state $\hat{P} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \hat{S}_3, \hat{E}_3, \hat{I}_3, \hat{Q}_3)$, we obtain the characteristic equation

$$(\lambda + \theta_1)^2(\lambda + \theta_5)^2(\lambda + \theta_{10})[\lambda^2 + a_1\lambda + a_2][\lambda^2 + b_1\lambda + b_2] \cdot [\lambda^3 + d_1\lambda^2 + d_2\lambda + d_3] = 0, \tag{30}$$

where

$$d_1 = \mu + \theta_9 + \frac{\eta\theta_7}{\theta_9\tilde{R}_0} + \theta_7(\hat{E}_3 + \hat{I}_3),$$

$$d_2 = \mu\theta_9 + \frac{\mu\eta\theta_7}{\theta_9\tilde{R}_0} + \theta_7\theta_8(\hat{E}_3 + \hat{I}_3) + \theta_7\theta_9(\hat{E}_3 + \hat{I}_3),$$

$$d_3 = \theta_7\theta_8\theta_9(\hat{E}_3 + \hat{I}_3),$$

with $\hat{E}_3 = \frac{\mu}{\theta_8\tilde{L}_0}[\tilde{L}_0 - 1]$ and $\hat{I}_3 = \frac{\mu\eta}{\theta_8\theta_9\tilde{L}_0}[\tilde{L}_0 - 1]$.

From the characteristic equation (30), we see that the first five eigenvalues are $\lambda_{1,2} = -\theta_1$, $\lambda_{3,4} = -\theta_5$ and $\lambda_5 = -\theta_{10}$, all of these eigenvalues are negative. The remaining eigenvalues are found by solving $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, $\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0$ and $\lambda^3 + d_1\lambda^2 + d_2\lambda + d_3 = 0$. For $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ and $\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0$, all roots of these two characteristic equations have negative real parts if $L_0^* < 1$ and $\tilde{L}_0 < 1$, respectively. Thus, we apply the Routh-Hurwitz criteria to the equation in the form $\lambda^3 + d_1\lambda^2 + d_2\lambda + d_3 = 0$, the stability holds iff $d_1 > 0$, $d_3 > 0$ and $d_1d_2 - d_3 > 0$. If $\tilde{L}_0 > 1$, then we have $d_1 > 0$, and $d_3 > 0$, and it can be easily seen that $d_1d_2 - d_3 > 0$ as the term of $-d_3$ can be cleared with the product of the second term of d_1 and the third term of d_2 . Hence the Routh-Hurwitz conditions are satisfied.

Proposition 3. *If $L_0^* < 1$ and $\tilde{L}_0 > 1$, then the equilibrium \tilde{P} is locally asymptotically stable.*

Proof. For the second and third group endemic equilibrium point $\tilde{P} = (1, 0, 0, 0, \tilde{S}_2, \tilde{E}_2, \tilde{I}_2, \tilde{Q}_2, \tilde{S}_3, \tilde{E}_3, \tilde{I}_3, \tilde{Q}_3)$, we obtain the characteristic equation

214 T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

$$(\lambda + \theta_1)(\lambda + \theta_5)^2(\lambda + \theta_{10})[\lambda^2 + a_1\lambda + a_2][\lambda^3 + e_1\lambda^2 + e_2\lambda + e_3] \cdot [\lambda^3 + f_1\lambda^2 + f_2\lambda + f_3] = 0, \tag{31}$$

where

$$e_1 = \theta_1 + \theta_4 + \frac{\eta\theta_6}{\theta_4\tilde{R}_0} + \theta_6(\tilde{E}_2 + \tilde{I}_2),$$

$$e_2 = \theta_1\theta_4 + \frac{\eta\theta_1\theta_6}{\theta_4\tilde{R}_0} + \theta_6\theta_3(\tilde{E}_2 + \tilde{I}_2) + \theta_6\theta_4(\tilde{E}_2 + \tilde{I}_2),$$

$$e_3 = \theta_6\theta_3\theta_4(\tilde{E}_2 + \tilde{I}_2),$$

$$f_1 = \mu + \theta_8 + \theta_9 + \theta_7(\tilde{E}_3 + \tilde{I}_3 - \tilde{S}_3),$$

$$f_2 = \mu(\theta_8 + \theta_9) + \theta_8\theta_9 + \theta_7(\theta_8 + \theta_9)(\tilde{E}_3 + \tilde{I}_3) - \theta_7\tilde{S}_3(\mu + \eta + \theta_9),$$

$$f_3 = \mu\theta_8\theta_9 + \theta_7\theta_8\theta_9(\tilde{E}_3 + \tilde{I}_3) - \mu\theta_7(\eta + \theta_9)\tilde{S}_3,$$

with $\tilde{E}_2 = \frac{\theta_1}{\theta_3\tilde{L}_0}[\tilde{L}_0 - 1]$ and $\tilde{I}_2 = \frac{\theta_1\eta}{\theta_3\theta_4\tilde{L}_0}[\tilde{L}_0 - 1]$.

From the characteristic equation (31), we see that the first four eigenvalues are $\lambda_1 = -\theta_1$, $\lambda_{2,3} = -\theta_5$ and $\lambda_4 = -\theta_{10}$, all of these eigenvalues are negative. The remaining eigenvalues are found by solving $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, $\lambda^3 + e_1\lambda^2 + e_2\lambda + e_3 = 0$ and $\lambda^3 + f_1\lambda^2 + f_2\lambda + f_3 = 0$.

For $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$, all roots of the characteristic equations have negative real parts if $L_0^* < 1$. For $\lambda^3 + e_1\lambda^2 + e_2\lambda + e_3 = 0$, if $\tilde{L}_0 > 1$, then we have $e_1 > 0$ and $e_3 > 0$, and it can be easily seen that $e_1e_2 - e_3 > 0$ as the term of $-e_3$ can be cleared with the product of the second term of e_1 and the third term of e_2 . Hence the Routh-Hurwitz conditions are satisfied. For $\lambda^3 + f_1\lambda^2 + f_2\lambda + f_3 = 0$, since \tilde{E}_3 , \tilde{I}_3 and \tilde{S}_3 are defined in terms of \tilde{E}_2 , \tilde{I}_2 and \tilde{S}_2 as before, hence f_1 , f_2 and f_3 are also in the forms of \tilde{E}_2 ,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธ์ พงศ์สัมพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Analysis of Mathematical Model for Swine Flu Transmission ... 215

\tilde{I}_2 and \tilde{S}_2 . It might be complicated to show by hand that equation $\lambda^3 + f_1\lambda^2 + f_2\lambda + f_3 = 0$ satisfies the Routh-Hurwitz conditions. We use *MATLAB* to show the conditions in the following figures by assigning various values of δ_2 in which $\tilde{L}_0 > 1$ and the other parameters are fixed.

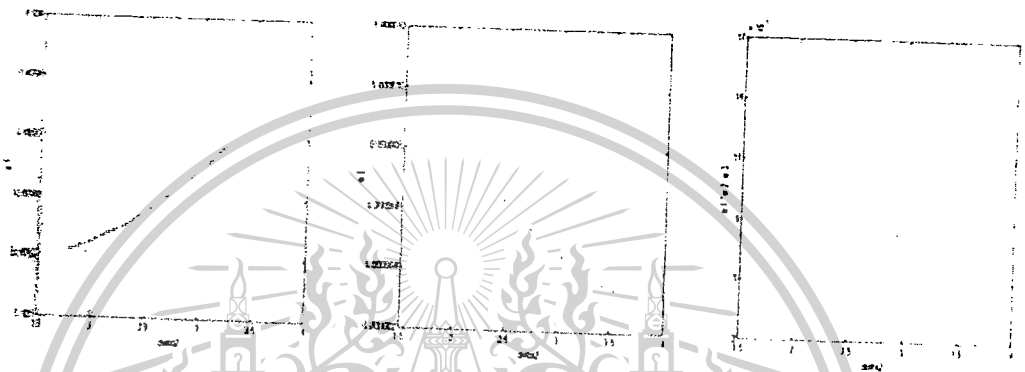


Figure 2. The parameter space for equation $\lambda^3 + f_1\lambda^2 + f_2\lambda + f_3 = 0$ which satisfies the Routh-Hurwitz conditions, plotted onto (f_1, δ_2) , (f_3, δ_2) , $(f_1f_2 - f_3, \delta_2)$, respectively. The values of parameters are $\rho = 0.000273973$, $\mu = 0.000039139$, $\eta = 0.111111$, $\alpha = 0.142857$, $\varepsilon = 0.2$, $\beta = 0.142857$, $\gamma = 0.7$ and $\delta_3 = 1$. From the above figure, the Routh-Hurwitz conditions are satisfied for $\tilde{L}_0 > 1$.

Proposition 4. *If $L_0^* > 1$, then the equilibrium P^* is locally asymptotically stable.*

Proof. For the full endemic equilibrium point $P^* = (S_1^*, E_1^*, I_1^*, Q_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, Q_2^*, S_3^*, E_3^*, I_3^*, Q_3^*)$, we obtain the characteristic equation

$$(\lambda + \theta_5)^2(\lambda + \theta_{10})[\lambda^3 + g_1\lambda^2 + g_2\lambda + g_3][\lambda^3 + h_1\lambda^2 + h_2\lambda + h_3] \cdot [\lambda^3 + i_1\lambda^2 + i_2\lambda + i_3] = 0, \tag{32}$$

where

$$g_1 = \theta_1 + \theta_4 + \frac{\eta\theta_2}{\theta_4 L_0^*} + \theta_2(E_1^* + I_1^*),$$

216 T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

$$g_2 = \theta_1\theta_4 + \frac{\eta\theta_1\theta_2}{\theta_4L_0^*} + \theta_2\theta_3(E_1^* + I_1^*) + \theta_2\theta_4(E_1^* + I_1^*),$$

$$g_3 = \theta_2\theta_3\theta_4(E_1^* + I_1^*),$$

$$h_1 = \theta_1 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_6(E_2^* + I_2^* - S_2^*),$$

$$h_2 = \theta_1\theta_3 + \theta_1\theta_4 + \theta_3\theta_4 + \theta_6(\theta_3 + \theta_4)(E_2^* + I_2^*) - \theta_6S_2^*(\theta_1 + \eta + \theta_4),$$

$$h_3 = \theta_1\theta_3\theta_4 + \theta_6\theta_3\theta_4(E_2^* + I_2^*) - \theta_1\theta_6(\eta + \theta_4)S_2^*,$$

$$i_1 = \mu + \theta_8 + \theta_9 + \theta_7(E_3^* + I_3^* - S_3^*),$$

$$i_2 = \mu(\theta_8 + \theta_9) + \theta_8\theta_9 + \theta_7(\theta_8 + \theta_9)(E_3^* + I_3^*) - \theta_7S_3^*(\mu + \eta + \theta_9),$$

$$i_3 = \mu\theta_8\theta_9 + \theta_7\theta_8\theta_9(E_3^* + I_3^*) - \mu\theta_7(\eta + \theta_9)S_3^*,$$

$$\text{with } E_1^* = \frac{\theta_1}{\theta_3L_0^*} [L_0^* - 1] \text{ and } I_1^* = \frac{\theta_1\eta}{\theta_3\theta_4L_0^*} [L_0^* - 1].$$

From the characteristic equation (32), we see that the first three eigenvalues are $\lambda_{1,2} = -\theta_5$ and $\lambda_3 = -\theta_{10}$, all of these are negative. The remaining eigenvalues are found by solving $\lambda^3 + g_1\lambda^2 + g_2\lambda + g_3 = 0$, $\lambda^3 + h_1\lambda^2 + h_2\lambda + h_3 = 0$ and $\lambda^3 + i_1\lambda^2 + i_2\lambda + i_3 = 0$.

For $\lambda^3 + g_1\lambda^2 + g_2\lambda + g_3 = 0$, if $L_0^* > 1$, then we have $g_1 > 0$ and $g_3 > 0$, and it can be easily seen that $g_1g_2 - g_3 > 0$ as the term of $-g_3$ can be cleared with the product of the second term of g_1 and the third term of g_2 . Hence, the Routh-Hurwitz conditions are satisfied. For $\lambda^3 + h_1\lambda^2 + h_2\lambda + h_3 = 0$ and $\lambda^3 + i_1\lambda^2 + i_2\lambda + i_3 = 0$, since E_2^* , I_2^* , S_2^* , E_3^* , I_3^* and S_3^* are defined in terms of E_1^* , I_1^* and S_1^* as before, hence h_1 , h_2 , h_3 , i_1 , i_2 and i_3 are also in the forms of E_1^* , I_1^* and S_1^* . Proceeding with the same manner

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนิต พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

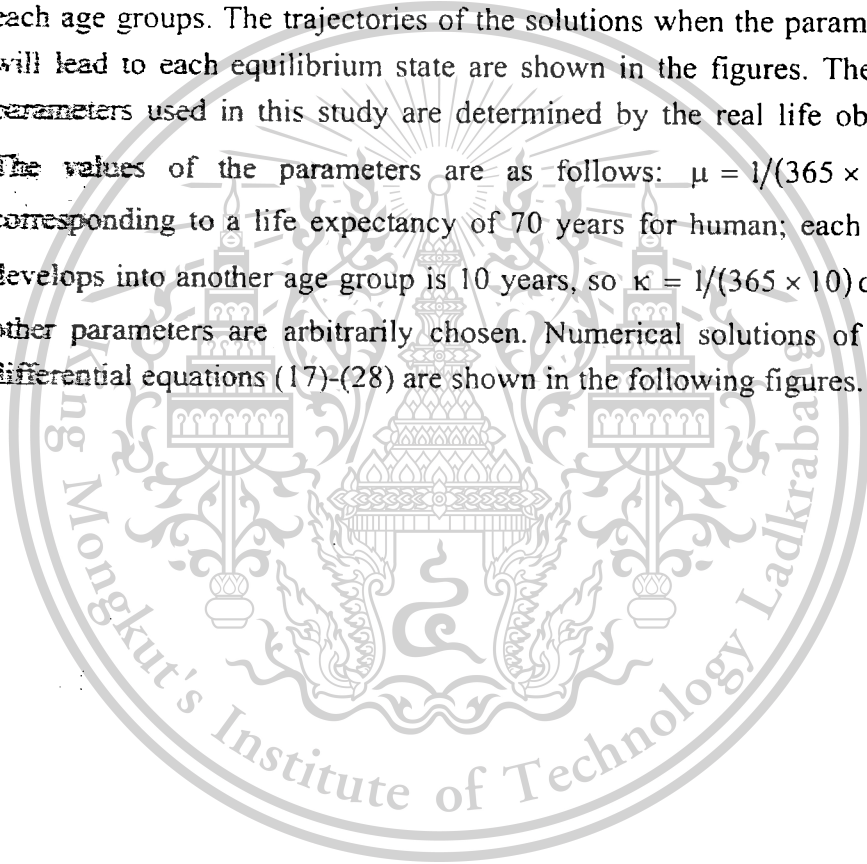
Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Analysis of Mathematical Model for Swine Flu Transmission ... 217

as above, use *MATLAB* to graph the conditions of the Routh-Hurwitz, by assigning various values of δ_1 in which $L_0^* > 1$ and the other parameters are fixed. The Routh-Hurwitz conditions are satisfied for $L_0^* > 1$.

C. Numerical results

We consider the numerical solutions for the transmission of swine flu in each age groups. The trajectories of the solutions when the parameter values will lead to each equilibrium state are shown in the figures. The values of parameters used in this study are determined by the real life observations. The values of the parameters are as follows: $\mu = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$, corresponding to a life expectancy of 70 years for human; each age group develops into another age group is 10 years, so $\kappa = 1/(365 \times 10) \text{ day}^{-1}$. The other parameters are arbitrarily chosen. Numerical solutions of system of differential equations (17)-(28) are shown in the following figures.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนชน พงศ์สมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

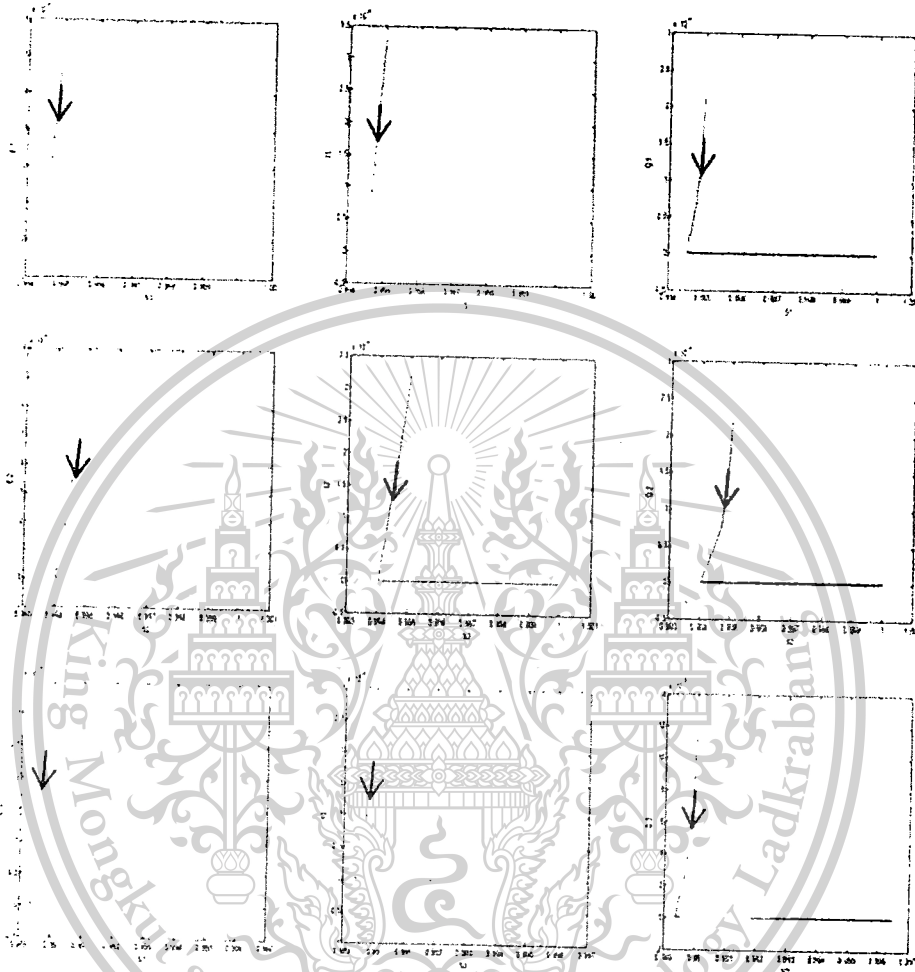


Figure 3. Numerical solutions demonstrate the solution trajectories, projected onto (S_1, E_1) , (S_1, I_1) , (S_1, Q_1) , (S_2, E_2) , (S_2, I_2) , (S_2, Q_2) , (S_3, E_3) , (S_3, I_3) , (S_3, Q_3) , respectively. For $L_0^* < 1$, $\tilde{L}_0 < 1$ and $\hat{L}_0 < 1$ with values of parameters are $\mu = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$, $\kappa = 1/(365 \times 10) \text{ day}^{-1}$, $\eta = 1/9 \text{ day}^{-1}$, $\alpha = 1/7 \text{ day}^{-1}$, $\epsilon = 1/5 \text{ day}^{-1}$, $\beta = 1/7 \text{ day}^{-1}$, $\gamma = 0.7 \text{ day}^{-1}$, $\delta_1 = 0.6$, $\delta_2 = 0.9$, $\delta_3 = 0.15$. $L_0^* = 0.39044693$, $\tilde{L}_0 = 0.51246160$ and $\hat{L}_0 = 0.59863369$. The proportions of population $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ approach to the disease free equilibrium state $(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนชน พงศ์สมพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Analysis of Mathematical Model for Swine Flu Transmission ... 219

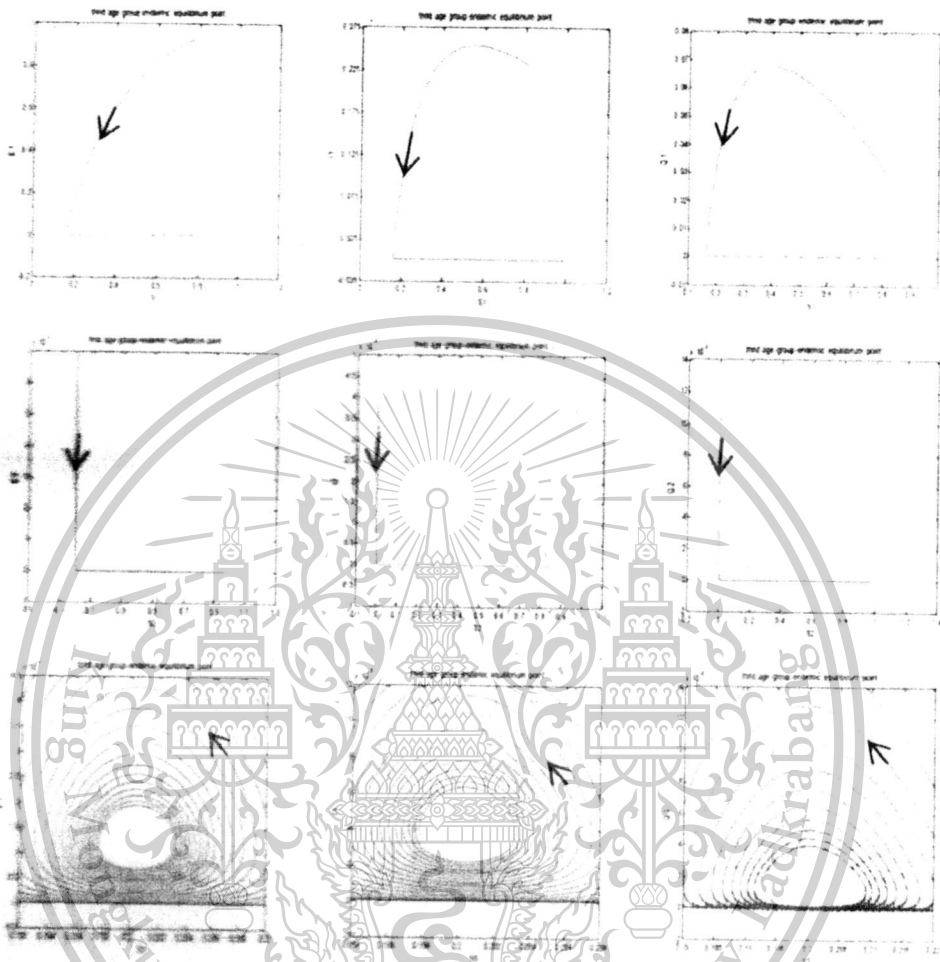


Figure 4. Numerical solutions demonstrate the solution trajectories, projected onto (S_1, E_1) , (S_1, I_1) , (S_1, Q_1) , (S_2, E_2) , (S_2, I_2) , (S_2, Q_2) , (S_3, E_3) , (S_3, I_3) , (S_3, Q_3) , respectively. For $L_0^* < 1$, $\tilde{L}_0 < 1$ and $\hat{L}_0 > 1$ with values of parameters are $\delta_1 = 1.45$, $\delta_2 = 1.65$, $\delta_3 = 1.25$, $L_0^* = 0.94358008$, $\tilde{L}_0 = 0.93951293$, and $\hat{L}_0 = 4.98861411$ but the other parameters are same as in Figure 3. The proportions of population $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ spiral into the third age group endemic equilibrium state $(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0.20045647, 0.00012320, 0.00003992, 0.00001141)$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธัน พงศ์มพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

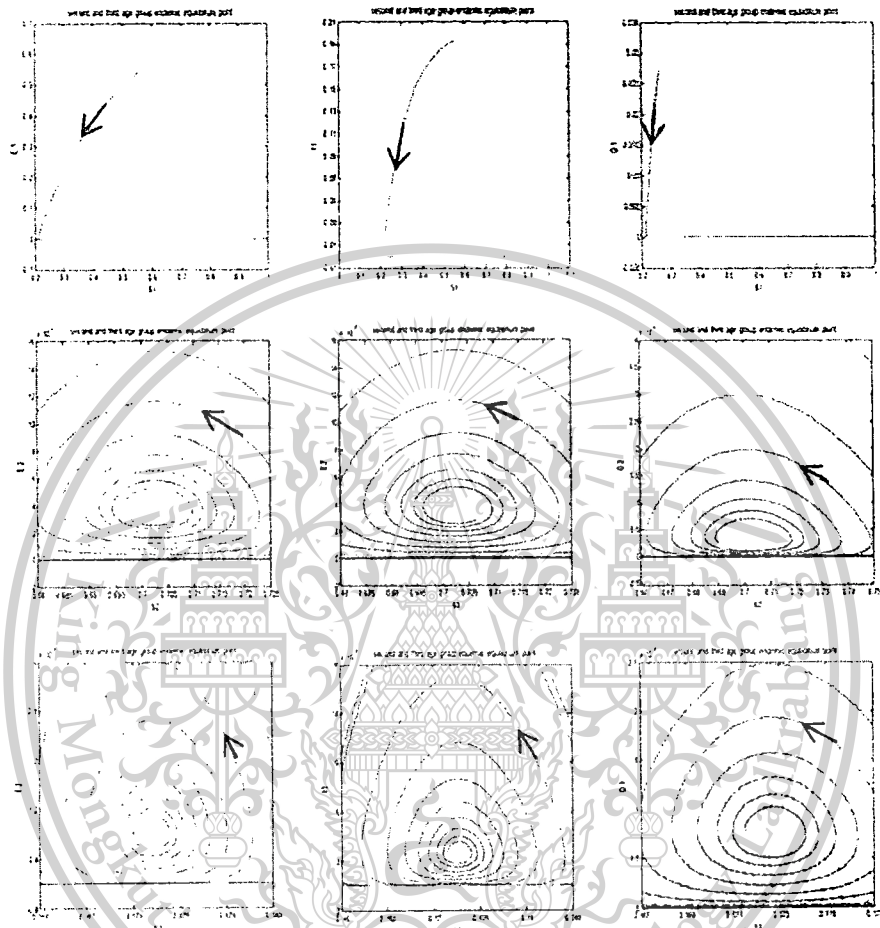


Figure 5. Numerical solutions demonstrate the solution trajectories, projected onto (S_1, E_1) , (S_1, I_1) , (S_1, Q_1) , (S_2, E_2) , (S_2, I_2) , (S_2, Q_2) , (S_3, E_3) , (S_3, I_3) , (S_3, Q_3) , respectively. For $L_0^* < 1$, $\tilde{L}_0 > 1$ with values of parameters are $\delta_1 = 1.52$, $\delta_2 = 2.5$, $\delta_3 = 1.45$, $L_0^* = 0.98913223$, $\tilde{L}_0 = 1.42350444$ but the other parameters are same as in Figure 3. The proportions of population $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ spiral into the second and the third age group endemic equilibrium state $(1, 0, 0, 0, 0.70249166, 0.00036634, 0.00011861, 0.00003387, 0.17266629, 0.00008170, 0.00002649, 0.00000757)$.

Analysis of Mathematical Model for Swine Flu Transmission ... 221

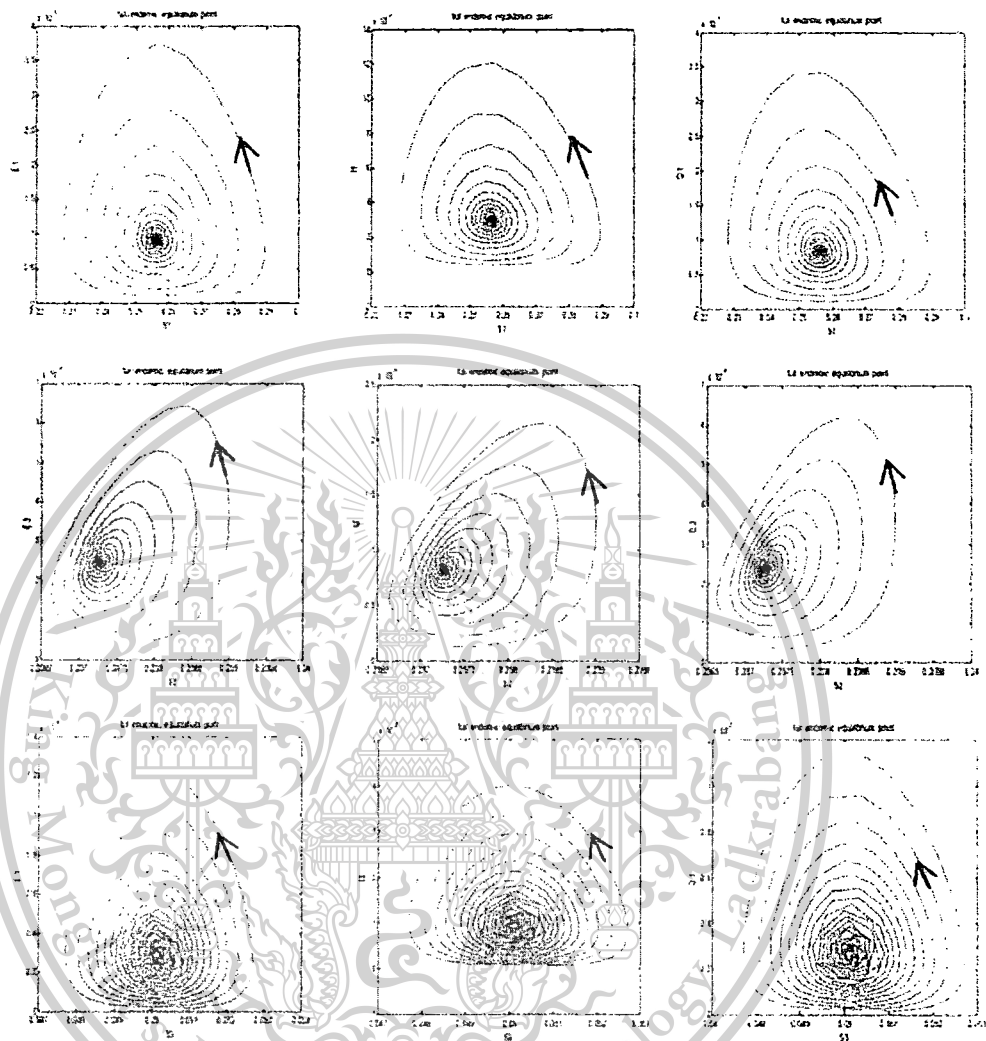


Figure 6. Numerical solutions demonstrate the solution trajectories, projected onto (S_1, E_1) , (S_1, I_1) , (S_1, Q_1) , (S_2, E_2) , (S_2, I_2) , (S_2, Q_2) , (S_3, E_3) , (S_3, I_3) , (S_3, Q_3) , respectively. For $L_0^* > 1$ with values of parameters are $\delta_1 = 6$, $\delta_2 = 7$, $\delta_3 = 5$ and $L_0^* = 3.90446932$ but the other parameters are same as in Figure 3. The proportions of population $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ spiral into the full endemic equilibrium state $(0.25611675, 0.00091599, 0.00029658, 0.00008470, 0.23726898, 0.00002434, 0.00000815, 0.00000237, 0.05010638, 0.00002884, 0.00000935, 0.00000267)$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 วิศวกรรมศาสตราจารย์ ดร.พนชน พงศ์สัมพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

IV. Discussion and Conclusion

In this study, we get four equilibrium points P_0, \hat{P}, \tilde{P} and P^* . The first point is the disease free equilibrium $P_0 = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ represents the state in which swine flu is not endemic in the human and it is local stability for $L_0^* < 1, \tilde{L}_0 < 1$ and $\hat{L}_0 < 1$. Figure 3 shows the proportions of population $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ approach to the disease free state $(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ when $L_0^* < 1, \tilde{L}_0 < 1$ and $\hat{L}_0 < 1$.

For $\hat{P} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \hat{S}_3, \hat{E}_3, \hat{I}_3, \hat{Q}_3)$, the second point is the third age group endemic equilibrium which represents the state in which swine flu is endemic only in the third age group and it is local stability for $L_0^* < 1, \tilde{L}_0 < 1$ and $\hat{L}_0 > 1$. Figure 4 shows the proportions of population $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ spirals into the third age group endemic equilibrium state $(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0.20045647, 0.00012320, 0.00003992, 0.00001141)$ when $L_0^* < 1, \tilde{L}_0 < 1$ and $\hat{L}_0 > 1$.

For $\tilde{P} = (1, 0, 0, 0, \tilde{S}_2, \tilde{E}_2, \tilde{I}_2, \tilde{Q}_2, \tilde{S}_3, \tilde{E}_3, \tilde{I}_3, \tilde{Q}_3)$, the third point is the second and the third age group endemic equilibrium which represents the state in which swine flu is endemic in both the second age group and the third age group and it is local stability for $L_0^* < 1$ and $\tilde{L}_0 > 1$. Figure 5 shows the proportions of population $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ spiral into the second and the third age group endemic equilibrium state $(1, 0, 0, 0, 0.70249166, 0.00036634, 0.00011861, 0.00003387, 0.17266629, 0.00008170, 0.00002649, 0.00000757)$ when $L_0^* < 1$ and $\tilde{L}_0 > 1$.

The fourth point is the full endemic equilibrium $P^* = (S_1^*, E_1^*, I_1^*, Q_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, Q_2^*, S_3^*, E_3^*, I_3^*, Q_3^*)$ which represents the state in which swine flu is endemic in all age groups and it is local stability for $L_0^* > 1$. Figure 6

Analysis of Mathematical Model for Swine Flu Transmission ... 223

shows the proportions of population $(S_1, E_1, I_1, Q_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, S_3, E_3, I_3, Q_3)$ spiral into the full endemic equilibrium state $(0.25611675, 0.00091599, 0.00029658, 0.00008470, 0.23726898, 0.00002434, 0.00000815, 0.00000237, 0.05010638, 0.00002884, 0.00000935, 0.00000267)$ when $L_0^* > 1$.

The biological meaning of the basic reproductive numbers L_0^* , \tilde{L}_0 and L_0 are explained as follows:

$$L_0^* = \left(\frac{\delta_1 \mu}{\mu + \kappa} \right) \left[\left(\frac{\eta}{\mu + \eta + \alpha + \kappa} \right) \left(\frac{1}{\mu + \varepsilon + \beta + \kappa} \right) + \frac{1}{\mu + \eta + \alpha + \kappa} \right]$$

is the reproductive number for swine flu in the first age group, where δ_1 is the transmission rate per day of the first age group, $\frac{\mu}{\mu + \kappa}$ is the ratio between the total number of the first age group and the total population, $\frac{\eta}{\mu + \eta + \alpha + \kappa}$ is the fraction of exposed members who move to the infective class, $\frac{1}{\mu + \varepsilon + \beta + \kappa}$ is the average time that an infective individual remains in the class I, and $\frac{1}{\mu + \eta + \alpha + \kappa}$ is the average time that an exposed member remains in that class.

The term

$$\tilde{L}_0 = \frac{\delta_2 \mu \kappa}{(\mu + \kappa)^2} \left[\left(\frac{\eta}{\mu + \eta + \alpha + \kappa} \right) \left(\frac{1}{\mu + \varepsilon + \beta + \kappa} \right) + \frac{1}{\mu + \eta + \alpha + \kappa} \right]$$

is the reproductive number for swine flu in the second age group, where δ_2 is the transmission rate per day of the second age group, $\frac{\mu \kappa}{(\mu + \kappa)^2}$ is the ratio between the total number of second age group and the total population, the other terms are defined as before.

The term $\hat{L}_0 = \frac{\delta_3 \kappa^2}{(\mu + \kappa)^2} \left[\left(\frac{\eta}{\mu + \eta + \alpha} \right) \left(\frac{1}{\mu + \varepsilon + \beta} \right) + \frac{1}{\mu + \eta + \alpha} \right]$ is the reproductive number for swine flu in the third age group, where δ_3 is the transmission rate per day of the third age group, $\frac{\kappa^2}{(\mu + \kappa)^2}$ is the ratio between the total number of third age group and the total population, the other terms are defined in the same manner as before.

The bifurcation diagrams of (17)-(28) are shown in the following figures:

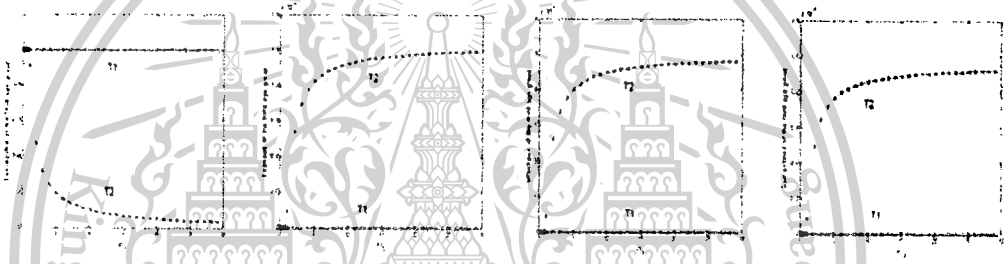


Figure 7. Bifurcation diagrams of the solutions of (17)-(28), plotted onto (\hat{L}_0, S_3) , (\hat{L}_0, E_3) , (\hat{L}_0, I_3) , (\hat{L}_0, Q_3) , respectively for the different values of \hat{L}_0 . *-*-* denote the stable solutions and 0-0-0 denote the unstable solutions.

We can see that when $\hat{L}_0 < 1$, T_1 will be stable and for $\hat{L}_0 > 1$, T_2 will be stable. If the threshold number of the third age group is greater than one, then the third age group susceptible decreases. The third age group infectious, quarantined and recovered increase.

Analysis of Mathematical Model for Swine Flu Transmission ... 225

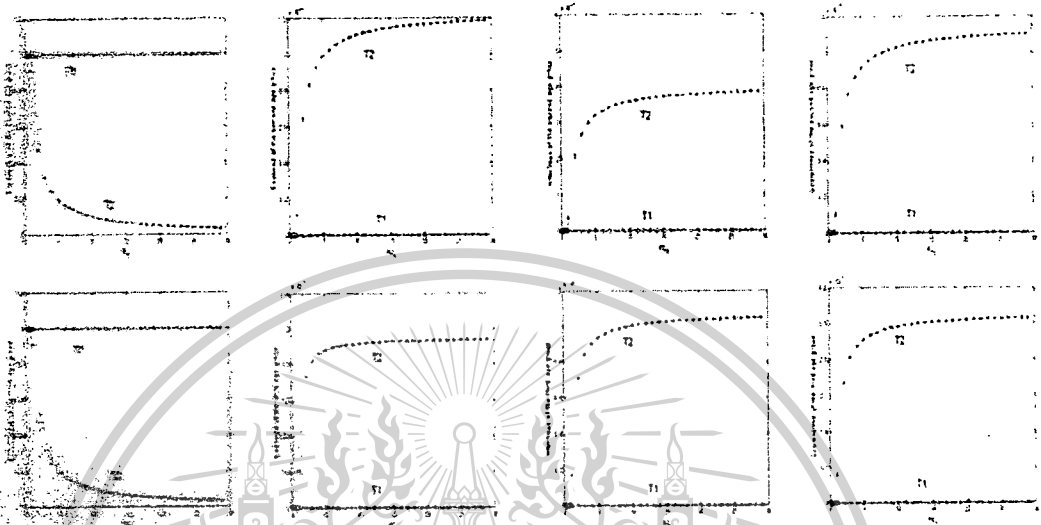


Figure 8. Bifurcation diagrams of the solutions of (17)-(28) plotted onto (\tilde{L}_0, S_2) , (\tilde{L}_0, E_2) , (\tilde{L}_0, I_2) , (\tilde{L}_0, Q_2) , (\tilde{L}_0, S_3) , (\tilde{L}_0, E_3) , (\tilde{L}_0, I_3) , (\tilde{L}_0, Q_3) , respectively, for the different values of \tilde{L}_0 . *-*-* denote the stable solutions and 0-0-0 denote the unstable solutions.

We can see that when $\tilde{L}_0 < 1$, T_1 will be stable and for $\tilde{L}_0 > 1$, T_2 will be stable. If the threshold number of the second age group is greater than one, the susceptible of the second age group and the third age group decreases. The second age group infectious, quarantined and recovered increase. The third age group infectious, quarantined and recovered increase.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนัสวี พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

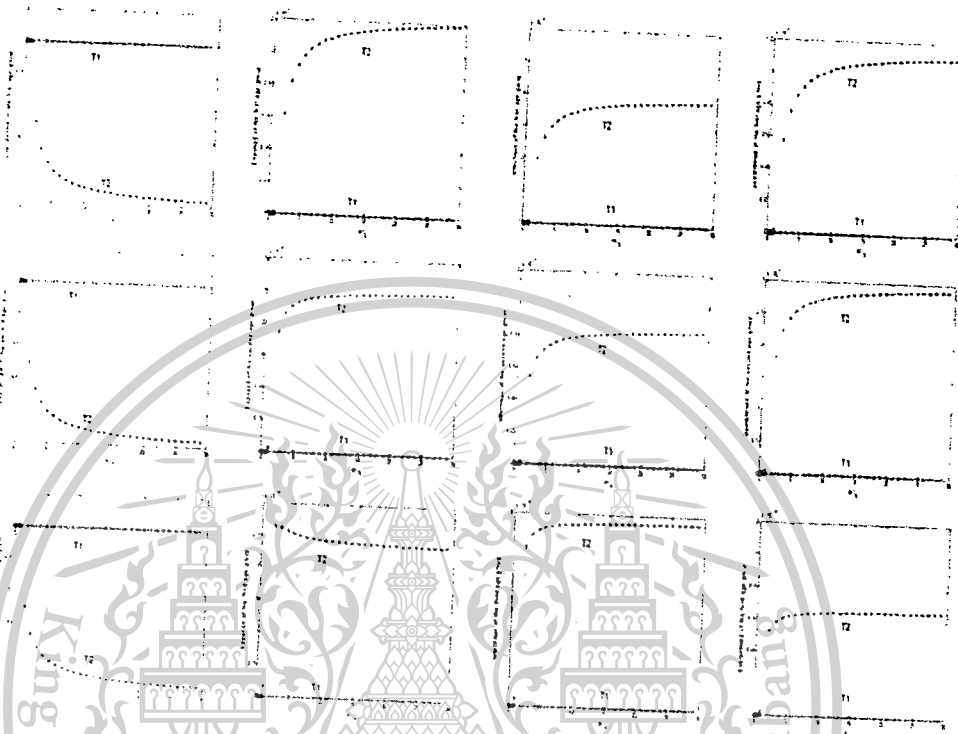


Figure 9. Bifurcation diagrams of the solutions of (17)-(28), plotted onto (L_0^*, S_1) , (L_0^*, E_1) , (L_0^*, I_1) , (L_0^*, Q_1) , (L_0^*, S_2) , (L_0^*, E_2) , (L_0^*, I_2) , (L_0^*, Q_2) , (L_0^*, S_3) , (L_0^*, E_3) , (L_0^*, I_3) , (L_0^*, Q_3) , respectively, for the different values of L_0^* . *-*- denote the stable solutions and 0-0-0 denote the unstable solutions.

We can see that when $L_0^* < 1$, T_1 will be stable and for $L_0^* > 1$, T_2 will be stable. If the threshold number of the first age group is greater than one, the susceptible of the first age group, the second age group and the third age group decreases. The first age group infectious, quarantined and recovered increase. The second age group infectious, quarantined and recovered increase. The third age group infectious, quarantined and recovered increase.

The local stability of all equilibrium states is determined by the threshold numbers L_0^* , \tilde{L}_0 and \hat{L}_0 . To reduce the transmission of this disease, we should control the above threshold numbers. The threshold numbers are used

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธ์น พงศ์สัมพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Analysis of Mathematical Model for Swine Flu Transmission ... 227

for controlling many diseases [29-31]. The results of this study should be the alternative way for controlling the transmission of swine flu in Thailand.

Acknowledgement

This work is supported by King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang Research Fund, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand.

References

- [1] Margaret Chan, World Now at the Start of 2009 Influenza Pandemic, World Health Organization, 2009-06-11.
http://www.who.int/mediacentre/news/statements/2009/h1n1_pandemic_phase6_20090611/en/index.html. Retrieved 2009-10-25.
- [2] WHO. Pandemic (H1N1) 2009 - update 76,
http://www.who.int/csr/don/2009_11_27a/en/index.html.
- [3] WHO. Pandemic (H1N1) 2009 - update 93,
http://www.who.int/csr/don/2010_03_26a/en/index.html.
- [4] D. A. Fitzgerald, Human swine influenza A [H1N1]: practical advice for clinicians early in the pandemic, Paediatr. Respir. Rev. 10(3) (2009), 154-158.
- [5] Mark Tingle, Swine flu less lethal than feared, BBC News (BBC), (2009-12-10),
<http://news.bbc.co.uk/2/hi/health/8406723.stm>. Retrieved 2009-12-10.
- [6] Vladimir Trifonov, Hossein Khiabani and Raul Rabadan, Geographic dependence, surveillance, and origins of the 2009 influenza A (H1N1) virus, New England J. Medicine 61(2) (July 9, 2009), 115-119.
- [7] D. Vijaykrishna, L. L. M. Poon, H. C. Zhu, S. K. Ma, O. T. W. Li, C. L. Cheung, G. J. D. Smith, J. S. M. Peiris and Y. Guan. Reassortment of pandemic H1N1/2009 influenza A virus in swine, Science 328(5985) (18 June 2010), 1529.
- [8] 2009 H1N1 Flu ("Swine Flu") and You, Centers for Disease Control and Prevention. 2010-02-10.
<http://www.cdc.gov/H1N1flu/qa.htm>. Retrieved 2010-02-26.
- [9] P. J. Huffstutter, Don't call it 'swine flu', farmers implore, Los Angeles Times, 2009-12-05.
<http://www.latimes.com/news/nation-and-world/la-na-pigs-flu5-2009dec05.0.6902061.story>. Retrieved 2009-12-05.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธวี พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

228 T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

- [10] "Updated Interim Recommendations for the Use of Antiviral Medications in the Treatment and Prevention of Influenza for the 2009-2010 Season." H1N1 Flu. Centers for Disease Control and Prevention (CDC). 7 December 2009. Archived from the original on 10 December 2009. <http://www.cdc.gov/h1n1flu/recommendations.htm>. Retrieved 10 December 2009.
- [11] CDC Briefing on Investigation of Human Cases of H1N1 Flu, Centers for Disease Control and Prevention, 2009-07-24. <http://www.webcitation.org/5jeG7e0IC>. Retrieved 2009-07-28.
- [12] Interim Guidance for 2009 H1N1 Flu (Swine Flu): Taking Care of a Sick Person in Your Home, Centers for Disease Control and Prevention, 2009-08-05. http://www.cdc.gov/h1n1flu/guidance_homecare.htm. Retrieved 2009-11-01.
- [13] Andre Picard, Reader questions on H1N1 answered, The Globe and Mail (Toronto, Canada), 2009-11-01. <http://www.theglobeandmail.com/life/health/h1n1-swine-flu/updated-reader-questions-on-h1n1-answered/article1329448/>. Retrieved 2009-11-02.
- [14] Anemona Hartocollis, Underlying conditions may add to flu worries, The New York Times, 2009-05-27. <http://www.nytimes.com/2009/05/28/health/policy/28flu.html>. Retrieved 2009-09-26.
- [15] Lisa Chnirring, Some immunity to novel H1N1 flu found in seniors, Center for Infectious Disease Research and Policy, 2009-05-21. <http://www.cidrap.umn.edu/cidrap/content/influenza/swineflu/news/may2109serum-jw.html>. Retrieved 2009-09-26.
- [16] Swine Influenza A (H1N1) Infection in Two Children - Southern California, March-April 2009, Morbidity and Mortality Weekly Report (Centers for Disease Control and Prevention), 21 April 2009. <http://www.cdc.gov/mmwr/preview/mmwrhtml/mm58d0421a1.htm>. Retrieved 2009-09-26.
- [17] Use of Influenza A (H1N1) 2009 Monovalent Vaccine: Recommendations of the Advisory Committee on Immunization Practices (ACIP), 2009, Morbidity and Mortality Weekly Report, Centers for Disease Control and Prevention, 2009-11-28. <http://www.cdc.gov/mmWR/PDF/wr/rr5810.pdf>. Retrieved 2009-11-02.
- [18] Updated Interim Recommendations for the Use of Antiviral Medications in the Treatment and Prevention of Influenza for the 2009-2010 Season, Centers for Disease Control and Prevention, 2009-09-08. <http://www.cdc.gov/h1n1flu/recommendations.htm>. Retrieved 2009-09-17.
- [19] S. Jain, L. Kamimoto, A. M. Bramley, A. M. Schmitz, S. R. Benoit, J. Louie, D.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนธน์ พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Analysis of Mathematical Model for Swine Flu Transmission ... 229

- E. Sugerman, J. K. Druckenmiller, K. A. Ritger, R. Chugh, S. Jasuja, M. Deutscher, S. Chen, J. D. Walker, J. S. Duchin, S. Lett, S. Soliva, E. V. Wells, D. Swerdlow, T. M. Uyeki, A. E. Fiore, S. J. Olsen, A. M. Fry, C. B. Bridges and L. Finelli, Hospitalized patients with 2009 H1N1 influenza in the United States, April-June 2009, *New England J. Medicine* 361(20) (2009), 1935-1944.
- [20] Mayo Clinic Staff. Influenza (flu) treatments and drugs. *Diseases and Conditions*, Mayo Clinic.
<http://www.webcitation.org/5jeG5VTNF>. Retrieved 2009-05-20.
- [21] Update on oseltamivir resistance to influenza H1N1 (2009) viruses, WHO, December 15, 2010.
http://www.who.int/csr/disease/influenza/2010_12_15_weekly_web_update_oseltamivir_resistance.pdf. Retrieved December 30, 2010.
- [22] 2008-2009 Influenza Season Week 32 ending August 15, 2009, Flu Activity and Surveillance, Centers for Disease Control and Prevention, 2009-08-21.
<http://www.cdc.gov/flu/weekly/weeklyarchives2008-2009/weekly32.htm>. Retrieved 2009-12-04.
- [23] Y. Zhou and Z. Ma, A discrete epidemic model for SARS transmission and control in China, *Math. Comput. Model.* 40 (2004), 1491-1506.
- [24] S. Iwami, Y. Takeuchi and X. Liu, Avian-human influenza epidemic model, *Math. Biosci.* 207 (2007), 1-25.
- [25] Y. Dumont, F. Chiroleu and C. Domerg, On a temporal model for the chikungunya disease: modeling, theory and numerics, *Math. Biosci.* 213 (2008), 80-91.
- [26] W. Jumpen, B. Wiwatanapalaphee, Y. H. Wu and I. M. Tang, A SEIQR model for pandemic influenza and its parameter identification, *Int. J. Pure Appl. Math.* 52(2) (2009), 247-265.
- [27] M. Robert, *Stability and Complexity in Model Ecosystem*, Princeton University Press, 1973.
- [28] E. K. Leah, *Mathematical Models in Biology*, Random House, Inc., 1988.
- [29] L. Esteva and C. Vargas, Analysis of a dengue disease transmission model, *Math. Biosci.* 150 (1998), 131-151.
- [30] P. Pongsumpun and I. M. Tang, Mathematical model for the transmission of Plasmodium Vivax Malaria, *Inter. J. Math. Mod. Meth. Appl. Sci.* 3 (2007), 117-121.
- [31] R. Kongnuy and P. Pongsumpun, Mathematical modeling for dengue transmission with the effect of season, *Inter. J. Biol. Med. Sci.* 5(2) (2010), 74-78.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ว่าจะหาแต่เราเอง คร.พนรณ พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)
© 2013 Pushpa Publishing House, Allahabad, India
Available online at <http://pphmj.com/journals/fjms.htm>
Volume 80, Number 1, 2013, Pages 55-84

GLOBAL STABILITY OF THE AGE STRUCTURAL TRANSMISSION MODEL FOR SWINE FLU

T. Changpuek¹, P. Pongsumpun^{1,*} and I-Ming Tang²

¹Department of Mathematics

Faculty of Science

King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

Chalongkrung Road, Ladkrabang

Bangkok 10520

Thailand

e-mail: kppuntan@kmitl.ac.th

²Department of Mathematics

Faculty of Science

Silpakorn University

Nakorn Pathom 73000

Thailand

Abstract

In this paper, we examine the global stability of swine flu transmission model incorporated the age structure of human population based on SEIQR (susceptible-exposed-infected-quarantined-recovered) model. The human population is divided into three groups such as 1-10 years, 11-20 years and more than 20 years, respectively. We obtain four equilibrium states and then construct Lyapunov functions with the conditions for global stability of these four equilibrium states.

Received: May 8, 2013; Accepted: June 24, 2013

2010 Mathematics Subject Classification: 97Mxx.

Keywords and phrases: age structure, global stability, Lyapunov functions, SEIQR model, swine flu.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธุมภ์ พงศ์สัมพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

I. Introduction

Swine flu is defined as an outbreak of a contagious disease that is rapid and widespread. The swine flu outbreak is due to infection with the H1N1 virus. The swine flu caused by type A influenza virus designated as H1N1, because of the two major antigens, H1 (hemagglutinin type 1) and N1 (neuraminidase type 1) are detected on its surface. Early in the spring of 2009, H1N1 virus was first seen in Mexico, it began increasing during the summer 2009 and rapidly spread to the United States and to Europe and throughout the world [1]. As of June 11, 2009, WHO raised the pandemic alert to level 6 (the highest level of a pandemic alert) and declared the first flu pandemic. It indicates that human-to-human spread of the virus is causing community-level outbreaks in at least two regions of the world [2]. The total report of swine flu cases worldwide more than 213 countries was 622,482 by 27 November, 2009 [3]. Updated data on swine flu deaths has reached a total of 16,931 deaths as of 21 March, 2010 [4]. On May 13, 2009, Thailand confirmed two cases of swine flu, both of the individuals confirmed as having swine flu had recently traveled back from Mexico [5]. Thailand was the 31st country in the world with reported cases of the H1N1 flu. From 13 May 2009 to 10 March 2010, the accumulated number of confirmed H1N1 flu patients was 35,446 persons. The number of deaths amounted to 208 persons, 105 males and 113 females [6].

In 2011, Pongsumpun and Kongmy [7] studied the dynamics for dengue disease transmission in population containing mother and infant with maternal antibody and used Lyapunov function to demonstrate the stability of endemic equilibrium state. Recently, Changpuek and Pongsumpun [8] modified SEIQR model for describing the transmission of swine flu by considering the effect of age group in the human population for the transmission of this disease. We found four equilibrium states and established the conditions for local stability of these states.

In this paper, the global dynamics of the fifteen-dimensional model of swine flu transmission model incorporated the age structure of the human population is resolved. We proved the global asymptotic stability of the

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร. พันธุ์ พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Global Stability of the Age Structural Transmission Model ... 57

equilibrium states and established the conditions for stability by using Lyapunov functions.

II. Formulation of the Model and Global Stability Analysis

We use the susceptible-exposed-infected-quarantined-recovered or SEIQR model to study the transmission of swine flu by introducing age structure into the SEIQR model. The human population is divided into three age groups such as group of people 1-10 years, 11-20 years, and greater than 20 years, respectively. The size of each group is constant and it is separated into five classes, i.e., S , individuals susceptible to the disease; E , individuals who are latently infected (exposed); I , infectious individuals; Q , isolated or quarantined individuals; and R , individuals who have recovered and immune to the disease.

A. Parameter of the model

Let N_T , N_1 , N_2 and N_3 represent the total population, the total number of first age group, second age group and third age group, where $N_T = N_1 + N_2 + N_3$. Each group population has size N_1 , N_2 and N_3 formed the susceptible ($S(t)$), exposed ($E(t)$), infectious ($I(t)$), quarantined ($Q(t)$) and recovered ($R(t)$), where $N_1 = S_1 + E_1 + I_1 + Q_1 + R_1$, $N_2 = S_2 + E_2 + I_2 + Q_2 + R_2$, $N_3 = S_3 + E_3 + I_3 + Q_3 + R_3$ and subscripts 1, 2 and 3 denote the first age group, the second age group and the third age group, respectively.

The other parameters are defined as follows: b is the natural birth rate, μ is the natural mortality rate, k is the rate at which the first age group pass into the second age group and also the second age group pass into the third age group, a_1 is equivalent to $\theta_1 \sigma_n$, a_2 is equivalent to $\theta_2 \tau_n$ and a_3 is equivalent to $\theta_3 \omega_n$, in which θ_1 , θ_2 and θ_3 are the probabilities of catching the disease per each contact to the infected/exposed person, σ_n , τ_n and ω_n is the average number of people contacted by each person per day, c is the rate at which the exposed individuals E become the infected individuals I , e

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธ์นัฐ พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

58 T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

is the rate at which the individuals leave the infective individuals I to become the quarantined individuals Q . The parameters d, f and g are the rate at which individuals in the E, I and Q classes recover from the disease.

B. Equations of the model

The age structural SEIQR model is described by the following system of differential equations:

$$S_1'(t) = bN_T - \left(\frac{a_1(E_1 + I_1)}{N_T} + \mu + k \right) S_1, \tag{1}$$

$$E_1'(t) = \frac{a_1 S_1 (E_1 + I_1)}{N_T} - (\mu + c + d + k) E_1, \tag{2}$$

$$I_1'(t) = cE_1 - (\mu + e + f + k) I_1, \tag{3}$$

$$Q_1'(t) = eI_1 - (\mu + g + k) Q_1, \tag{4}$$

$$R_1'(t) = dE_1 + fI_1 + gQ_1 - (\mu + k) R_1, \tag{5}$$

$$S_2'(t) = kS_1 - \left(\frac{a_2(E_2 + I_2)}{N_T} + \mu + k \right) S_2, \tag{6}$$

$$E_2'(t) = kE_1 + \frac{a_2 S_2 (E_2 + I_2)}{N_T} - (\mu + c + d + k) E_2, \tag{7}$$

$$I_2'(t) = kI_1 + cE_2 - (\mu + e + f + k) I_2, \tag{8}$$

$$Q_2'(t) = kQ_1 + eI_2 - (\mu + g + k) Q_2, \tag{9}$$

$$R_2'(t) = kR_1 + dE_2 + fI_2 + gQ_2 - (\mu + k) R_2, \tag{10}$$

$$S_3'(t) = kS_2 - \left(\frac{a_3(E_3 + I_3)}{N_T} + \mu \right) S_3, \tag{11}$$

$$E_3'(t) = kE_2 + \frac{a_3 S_3 (E_3 + I_3)}{N_T} - (\mu + c + d) E_3, \tag{12}$$

$$I_3'(t) = kI_2 + cE_3 - (\mu + e + f) I_3, \tag{13}$$

$$Q_3'(t) = kQ_2 + eI_3 - (\mu + g) Q_3, \tag{14}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนชน พงศ์สัมพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Global Stability of the Age Structural Transmission Model ... 59

$$R'_3(t) = kR_2 + dE_3 + fI_3 + gQ_3 - \mu R_3. \tag{15}$$

If we add (1)-(15), (1)-(5), (6)-(10) and (11)-(15), then

$$\begin{aligned} N'_T(t) &= bN_T - \mu N_T, \quad N'_1(t) = bN_T - (\mu + k)N_1, \\ N'_2(t) &= kN_1 - (\mu + k)N_2, \quad N'_3(t) = kN_2 - \mu N_3. \end{aligned} \tag{16}$$

In this paper, we assume that the total population, total number of the first age group, the second age group and the third age group remain constant. Therefore $N'_T(t) = N'_1(t) = N'_2(t) = N'_3(t) = 0$. Setting the right hand side of (16) to be zero, we obtain the following four relations: $b = \mu$,

$$\frac{N_1}{N_T} = \frac{b}{b+k}, \quad \frac{N_2}{N_T} = \frac{bk}{(b+k)^2} \quad \text{and} \quad \frac{N_3}{N_T} = \frac{k^2}{(b+k)^2}.$$

C. The epidemic

We can see that all equations described by (1)-(15), the non-negative octant R_+^{15} is positively invariant (where R_+^{15} denotes the non-negative region). With respect to (1)-(15), we have the following results:

Proposition 1. Let $(S_1(t), E_1(t), I_1(t), Q_1(t), R_1(t), S_2(t), E_2(t), I_2(t), Q_2(t), R_2(t), S_3(t), E_3(t), I_3(t), Q_3(t), R_3(t))$ be the solution of (1)-(15) with the initial condition $(S_1(0), E_1(0), I_1(0), Q_1(0), R_1(0), S_2(0), E_2(0), I_2(0), Q_2(0), R_2(0), S_3(0), E_3(0), I_3(0), Q_3(0), R_3(0))$ and the compact set

$$\Omega_1 = \left\{ (S_1, E_1, I_1, Q_1, R_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, R_2, S_3, E_3, I_3, Q_3, R_3) \in R_+^{15}, \right.$$

$$J_1 \leq N_1 = \left(\frac{b}{b+k} \right) N_T, \quad J_2 \leq N_2 = \left(\frac{bk}{(b+k)^2} \right) N_T,$$

$$J_3 \leq N_3 = \left(\frac{k^2}{(b+k)^2} \right) N_T \left. \right\}.$$

Then, under the flow described by (1)-(15), Ω_1 is positively invariant set that attracts all solutions in R_+^{15} .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ราชอาณาจักรไทย
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

60 T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

Proof. We choose the Lyapunov function

$$\begin{aligned} J(t) &= (J_1(t), J_2(t), J_3(t)) \\ &= (S_1 + E_1 + I_1 + Q_1 + R_1, S_2 + E_2 + I_2 + Q_2 + R_2, \\ &\quad S_3 + E_3 + I_3 + Q_3 + R_3) \end{aligned}$$

positive definite on R_+^{15} and we have

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \left(\frac{dJ_1}{dt}, \frac{dJ_2}{dt}, \frac{dJ_3}{dt} \right) \\ &= \left(\frac{d}{dt} S_1 + \frac{d}{dt} E_1 + \frac{d}{dt} I_1 + \frac{d}{dt} Q_1 + \frac{d}{dt} R_1, \frac{d}{dt} S_2 + \frac{d}{dt} E_2 + \frac{d}{dt} I_2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{d}{dt} Q_2 + \frac{d}{dt} R_2, \frac{d}{dt} S_3 + \frac{d}{dt} E_3 + \frac{d}{dt} I_3 + \frac{d}{dt} Q_3 + \frac{d}{dt} R_3 \right) \\ &= (bN_T - (b+k)(S_1 + E_1 + I_1 + Q_1 + R_1), \\ &\quad k(S_1 + E_1 + I_1 + Q_1 + R_1) - (b+k)(S_2 + E_2 + I_2 + Q_2 + R_2), \\ &\quad k(S_2 + E_2 + I_2 + Q_2 + R_2) - b(S_3 + E_3 + I_3 + Q_3 + R_3)) \\ &= (bN_T - (b+k)N_1, kN_1 - (b+k)N_2, kN_2 - bN_3). \end{aligned}$$

We use the fact that $N_1 = \frac{b}{b+k} N_T$, $N_2 = \frac{bk}{(b+k)^2} N_T$, and $N_3 = \frac{k^2}{(b+k)^2} N_T$, then we can prove that

$$\frac{dJ_1}{dt} = bN_T - (b+k)J_1 \leq 0, \text{ for } J_1 \geq \frac{bN_T}{b+k}, \quad (17)$$

$$\frac{dJ_2}{dt} = \frac{bk}{b+k} N_T - (b+k)J_2 \leq 0, \text{ for } J_2 \geq \frac{bkN_T}{(b+k)^2}, \quad (18)$$

$$\frac{dJ_3}{dt} = \frac{bk^2}{(b+k)^2} N_T - bJ_3 \leq 0, \text{ for } J_3 \geq \frac{k^2 N_T}{(b+k)^2}. \quad (19)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธวี พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Global Stability of the Age Structural Transmission Model ... 61

From (17)-(19), one has $\frac{dJ}{dt} \leq 0$ which implies that Ω_1 is a positively invariant set. In other words, by solving (17)-(19), we obtain

$$0 \leq (J_1(t), J_2(t), J_3(t)) \leq (bN_T/(b+k)) + J_1(0)e^{-(b+k)t},$$

$$(bkN_T/(b+k)^2) + J_2(0)e^{-(b+k)t}, (k^2N_T/(b+k)^2) + J_3(0)e^{-bt},$$

where $J_1(0)$, $J_2(0)$ and $J_3(0)$ are the initial conditions of $J_1(t)$, $J_2(t)$ and $J_3(t)$. Thus, as $t \rightarrow \infty$, $0 \leq (J_1(t), J_2(t), J_3(t)) \leq (bN_T/(b+k), bkN_T/(b+k)^2, k^2N_T/(b+k)^2) = (N_1, N_2, N_3)$ and one can conclude that Ω_1 is an attractive set.

D. Equilibrium points

The equilibrium points are obtained by setting the right hand side of (1)-(15) to zero. We obtain four equilibrium points:

(i) The disease free equilibrium point

$$P_1(\bar{S}_1, \bar{E}_1, \bar{I}_1, \bar{Q}_1, \bar{R}_1, \bar{S}_2, \bar{E}_2, \bar{I}_2, \bar{Q}_2, \bar{R}_2, \bar{S}_3, \bar{E}_3, \bar{I}_3, \bar{Q}_3, \bar{R}_3)$$

$$= P_1\left(\frac{bN_T}{b+k}, 0, 0, 0, 0, \frac{bkN_T}{(b+k)^2}, 0, 0, 0, 0, \frac{k^2N_T}{(b+k)^2}, 0, 0, 0, 0\right).$$

(ii) The third age group endemic equilibrium point

$$P_2(\hat{S}_1, \hat{E}_1, \hat{I}_1, \hat{Q}_1, \hat{R}_1, \hat{S}_2, \hat{E}_2, \hat{I}_2, \hat{Q}_2, \hat{R}_2, \hat{S}_3, \hat{E}_3, \hat{I}_3, \hat{Q}_3, \hat{R}_3)$$

$$= P_2\left(\frac{bN_T}{b+k}, 0, 0, 0, 0, \frac{bkN_T}{(b+k)^2}, 0, 0, 0, 0, \hat{S}_3, \hat{E}_3, \hat{I}_3, \hat{Q}_3, \hat{R}_3\right).$$

where

$$\hat{S}_3 = \frac{k^2N_T}{(b+k)^2} \left(\frac{1}{\hat{R}_0} \right), \quad \hat{E}_3 = \frac{bk^2N_T}{(b+k)^2(b+c+d)} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0} \right),$$

$$\hat{I}_3 = \frac{bck^2N_T}{(b+k)^2(b+c+d)(b+e+f)} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0} \right),$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนรัตน์ พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

62 T. Changpuek, P. Pongsumpum and I-Ming Tang

$$\hat{Q}_3 = \frac{bcek^2N_T}{(b+k)^2(b+c+d)(b+e+f)(b+g)} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0}\right),$$

$$\hat{R}_3 = \frac{(b+e+f)(b+g)d + cf(b+g) + ceg}{b(b+e+f)(b+g)} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0}\right)$$

with

$$\hat{R}_0 = \frac{a_3k^2(b+c+e+f)}{(b+k)^2(b+c+d)(b+e+f)}.$$

(iii) The second and third age group endemic equilibrium point

$$R_1(S_1, E_1, I_1, Q_1, R_1, S_2, E_2, I_2, Q_2, R_2, S_3, E_3, I_3, Q_3, R_3) \\ = R_3 \left(\frac{bN_T}{b+k}, 0, 0, 0, 0, S_2, E_2, I_2, Q_2, R_2, S_3, E_3, I_3, Q_3, R_3 \right).$$

where

$$S_2 = \frac{bkN_T}{(b+k)^2} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0}\right), \quad E_2 = \frac{bkN_T}{(b+k)(b+c+d+k)} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0}\right),$$

$$I_2 = \frac{bckN_T}{(b+k)(b+c+d+k)(b+e+f+k)} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0}\right),$$

$$Q_3 = \frac{bcekN_T}{(b+k)(b+c+d+k)(b+e+f+k)(b+g+k)} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0}\right),$$

$$R_2 = \frac{(b+e+f+k)(b+g+k)d + cf(b+g+k) + ceg}{(b+k)(b+e+f+k)(b+g+k)} \left(1 - \frac{1}{\hat{R}_0}\right),$$

$$S_3 = \frac{kS_2}{\frac{a_3}{N_T}(E_3 + I_3) + b}, \quad E_3 = \frac{-L_2 + \sqrt{L_2^2 - 4L_1L_3}}{2L_1},$$

$$I_3 = \frac{kI_2 + cE_3}{b+e+f}, \quad Q_3 = \frac{kQ_2 + eI_3}{b+g}, \quad R_3 = \frac{kR_2 + dE_3 + fI_3 + gQ_3}{b}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนชนิ พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Global Stability of the Age Structural Transmission Model ... 63

with

$$\tilde{R}_0 = \frac{a_2 bk(b+c+e+f+k)}{(b+k)^2(b+c+d+k)(b+e+f+k)},$$

$$L_1 = \frac{a_3}{N_T}(b+c+d)(b+c+e+f),$$

$$L_2 = b(b+c+d)(b+e+f) + \frac{a_3 k}{N_T}((b+c+d)I_2 - (b+c+e+f)(S_2 + E_2)),$$

and

$$L_3 = \left[\frac{k^2 a_3}{N_T} I_2 (S_2 + E_2) + bk(b+e+f)E_2 \right].$$

(iv) The full endemic equilibrium point $P_4(S_1^*, E_1^*, I_1^*, Q_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, Q_2^*, S_3^*, E_3^*, I_3^*, Q_3^*)$, where

$$S_1^* = \frac{bN_T}{b+k} \left(1 - \frac{1}{R_0^*} \right), \quad E_1^* = \frac{bN_T}{(b+c+d+k)} \left(1 - \frac{1}{R_0^*} \right),$$

$$I_1^* = \frac{bcN_T}{(b+c+d+k)(b+e+f+k)} \left(1 - \frac{1}{R_0^*} \right),$$

$$Q_1^* = \frac{bcN_T}{(b+c+d+k)(b+e+f+k)(b+g+k)} \left(1 - \frac{1}{R_0^*} \right),$$

$$R_1^* = \frac{(b+e+f+k)(b+g+k)d + cf(b+g+k) + ceg}{(b+k)(b+e+f+k)(b+g+k)} \left(1 - \frac{1}{R_0^*} \right),$$

$$S_2^* = \frac{kS_1^*}{\frac{a_2}{N_T}(E_2^* + I_2^*) + (b+k)}, \quad E_2^* = \frac{-L_2 + \sqrt{L_2^2 - 4L_1L_3}}{2L_1},$$

$$I_2^* = \frac{kI_1^* + cE_2^*}{b+e+f+k}, \quad Q_2^* = \frac{kQ_1^* + eI_2^*}{b+g+k}, \quad R_2^* = \frac{kR_1^* + dE_2^* + fI_2^* + gQ_2^*}{b+k},$$

$$S_3^* = \frac{kS_2^*}{\frac{a_3}{N_T}(E_3^* + I_3^*) + b}, \quad E_3^* = \frac{-M_2 + \sqrt{M_2^2 - 4M_1M_3}}{2M_1},$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธวี พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

64 T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

$$I_3^* = \frac{kI_2^* + cE_3^*}{b + e + f}, \quad Q_3^* = \frac{kQ_2^* + aI_3^*}{b + g}, \quad R_3^* = \frac{kR_2^* + dE_3^* + fI_3^* + gQ_3^*}{b}$$

with

$$R_0^* = \frac{a_1 b(b + c + e + f + k)}{(b + k)(b + c + d + k)(b + e + f + k)},$$

$$L_1 = \frac{a_2}{N_T} (b + c + d + k)(b + c + e + f + k),$$

$$L_2 = (b + k)(b + c + d + k)(b + e + f + k) + \frac{a_2 k}{N_T} ((b + c + d + k)I_1^* - (b + c + e + f + k)(S_1^* + E_1^*)),$$

$$L_3 = \left[\frac{a_3 k^2}{N_T} I_1^*(S_1^* + E_1^*) + k(b + k)(b + e + f + k)E_1^* \right],$$

$$M_1 = \frac{a_3}{N_T} (b + c + d)(b + c + e + f),$$

$$M_2 = b(b + c + d)(b + e + f) + \frac{a_3 k}{N_T} ((b + c + d)I_2^* - (b + c + e + f)(S_2^* + E_2^*)), \text{ and}$$

$$M_3 = \left[\frac{k^2 a_3}{N_T} I_2^*(S_2^* + E_2^*) + bk(b + e + f)E_2^* \right]$$

E. Global stability of the equilibrium states

The global behavior of the equilibrium states for equations (1)-(15) is determined from Lyapunov techniques.

Theorem 1. Assume that

$$\begin{cases} a_1 = \frac{bN_T}{S_1} \\ a_2 = \frac{bN_T}{S_2} \\ a_3 = \frac{bN_T}{S_3} \end{cases} \quad (20)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร. พันธุ์ พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Global Stability of the Age Structural Transmission Model ... 65

For $\hat{R}_0 < 1$, $\bar{R}_0 < 1$ and $R_0^* < 1$, the disease free equilibrium point R_1 is globally asymptotically stable on Ω_1 .

Proof. Let us consider on Ω_1 the Lyapunov function

$$\rho(t) = (S_1 - \bar{S}_1 \ln S_1) + E_1 + I_1 + Q_1 + R_1 + (S_2 - \bar{S}_2 \ln S_2) \\ + E_2 + I_2 + Q_2 + R_2 + (S_3 - \bar{S}_3 \ln S_3) + E_3 + I_3 + Q_3 + R_3.$$

The derivative with respect to time yields

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(t) &= \frac{d}{dt} S_1 \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{S_1}\right) + \frac{d}{dt} E_1 + \frac{d}{dt} I_1 + \frac{d}{dt} Q_1 + \frac{d}{dt} R_1 \\ &+ \frac{d}{dt} S_2 \left(1 - \frac{\bar{S}_2}{S_2}\right) + \frac{d}{dt} E_2 + \frac{d}{dt} I_2 + \frac{d}{dt} Q_2 + \frac{d}{dt} R_2 \\ &+ \frac{d}{dt} S_3 \left(1 - \frac{\bar{S}_3}{S_3}\right) + \frac{d}{dt} E_3 + \frac{d}{dt} I_3 + \frac{d}{dt} Q_3 + \frac{d}{dt} R_3 \\ &= \left(bN_T - \left(\frac{a_1(E_1 + I_1)}{N_T} + b + k \right) S_1 \right) \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{S_1} \right) \\ &+ \left(\frac{a_1 S_1 (E_1 + I_1)}{N_T} - (b + c + d + k) E_1 \right) + (cE_1 - (b + e + f + k) I_1) \\ &+ (eI_1 - (b + g + k) Q_1) + (dE_1 + fI_1 + gQ_1 - (b + k) R_1) \\ &= \left(kS_1 - \left(\frac{a_2(E_2 + I_2)}{N_T} + b + k \right) S_2 \right) \left(1 - \frac{\bar{S}_2}{S_2} \right) \\ &+ \left(kE_1 + \frac{a_2 S_2 (E_2 + I_2)}{N_T} - (b + c + d + k) E_2 \right) \\ &+ (kI_1 + cE_2 - (b + e + f + k) I_2) + (kQ_1 + eI_2 - (b + g + k) Q_2) \\ &+ (kR_1 + dE_2 + fI_2 + gQ_2 - (b + k) R_2) \\ &+ \left(kS_2 - \left(\frac{a_3(E_3 + I_3)}{N_T} + b \right) S_3 \right) \left(1 - \frac{\bar{S}_3}{S_3} \right) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนชนัน พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

66

T. Changpuek, P. Pongsumpum and I-Ming Tang

$$\begin{aligned}
 & + \left(kE_2 + \frac{a_3 S_3 (E_3 + I_3)}{N_T} - (b + c + d)E_3 \right) \\
 & + (kI_2 + cE_3 - (b + e + f)I_3) + (kQ_2 + eI_3 - (b + g)Q_3) \\
 & + (kR_2 + dE_3 + fI_3 + gQ_3 - bR_3) \\
 = & bN_T \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{S_1} \right) + (b + k)\bar{S}_1 - bS_1 - k \frac{S_1}{S_2} \bar{S}_2 + (b + k)\bar{S}_2 - bS_2 \\
 & - k \frac{S_2}{S_3} \bar{S}_3 + b\bar{S}_3 - bS_3 + (E_1 + I_1) \left(\frac{a_1 \bar{S}_1}{N_T} - b \right) \\
 & + (E_2 + I_2) \left(\frac{a_2 \bar{S}_2}{N_T} - b \right) + (E_3 + I_3) \left(\frac{a_3 \bar{S}_3}{N_T} - b \right) \\
 & - bQ_1 - bR_1 - bQ_2 - bR_2 - bQ_3 - bR_3. \tag{21}
 \end{aligned}$$

By using conditions in (20), we obtain

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \rho(t) = & bN_T \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{S_1} \right) + (b + k)\bar{S}_1 \left(1 - \frac{S_1}{\bar{S}_1} \right) + kS_1 \left(1 - \frac{\bar{S}_2}{S_2} \right) \\
 & + (b + k)\bar{S}_2 \left(1 - \frac{S_2}{\bar{S}_2} \right) + kS_2 \left(1 - \frac{\bar{S}_3}{S_3} \right) \\
 & + b\bar{S}_3 \left(1 - \frac{S_3}{\bar{S}_3} \right) - bQ_1 - bR_1 - bQ_2 - bR_2 - bQ_3 - bR_3 \\
 = & bN_T \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{S_1} \right) + (b + k)\bar{S}_1 \left(1 - \frac{S_1}{\bar{S}_1} \right) + kS_1 \left(\frac{S_1}{\bar{S}_1} - \frac{S_1 \bar{S}_2}{\bar{S}_1 S_2} \right) \\
 & + (b + k)\bar{S}_2 \left(1 - \frac{S_2}{\bar{S}_2} \right) + kS_2 \left(\frac{S_2}{\bar{S}_2} - \frac{S_2 \bar{S}_3}{\bar{S}_2 S_3} \right) \\
 & + b\bar{S}_3 \left(1 - \frac{S_3}{\bar{S}_3} \right) - bQ_1 - bR_1 - bQ_2 - bR_2 - bQ_3 - bR_3. \tag{22}
 \end{aligned}$$

Noting that on Ω_1 , we have $\bar{S}_1 = \frac{bN_T}{b+k}$, $\bar{S}_2 = \frac{k}{b+k} \bar{S}_1$ and $\bar{S}_3 = \frac{k}{b} \bar{S}_2$. The above equation becomes

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร. พันธณี พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Global Stability of the Age Structural Transmission Model ... 67

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(t) &= bN_T \left(1 - \frac{\bar{S}_1}{S_1}\right) + bN_T \left(1 - \frac{S_1}{\bar{S}_1}\right) + k\bar{S}_1 \left(\frac{S_1}{\bar{S}_1} - \frac{S_1 \bar{S}_2}{\bar{S}_1 S_2}\right) + k\bar{S}_1 \left(1 - \frac{S_2}{\bar{S}_2}\right) \\ &\quad + k\bar{S}_2 \left(\frac{S_2}{\bar{S}_2} - \frac{S_2 \bar{S}_3}{\bar{S}_2 S_3}\right) + k\bar{S}_2 \left(1 - \frac{S_3}{\bar{S}_3}\right) \\ &\quad - bQ_1 - bR_1 - bQ_2 - bR_2 - bQ_3 - bR_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(t) &= bN_T \left(2 - \frac{\bar{S}_1}{S_1} - \frac{S_1}{\bar{S}_1}\right) + k\bar{S}_1 \left(\frac{S_1}{\bar{S}_1} - \frac{S_1 \bar{S}_2}{\bar{S}_1 S_2} + 1 - \frac{S_2}{\bar{S}_2}\right) \\ &\quad + k\bar{S}_2 \left(\frac{S_2}{\bar{S}_2} - \frac{S_2 \bar{S}_3}{\bar{S}_2 S_3} + 1 - \frac{S_3}{\bar{S}_3}\right) - bQ_1 - bR_1 - bQ_2 - bR_2 \\ &\quad - bQ_3 - bR_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho(t) &= -bN_T \frac{(\bar{S}_1 - S_1)^2}{S_1 \bar{S}_1} - k\bar{S}_1 \left(\left(1 - \frac{\bar{S}_2}{S_2}\right) \left(\frac{S_2}{\bar{S}_2} - \frac{S_1}{\bar{S}_1}\right) \right) \\ &\quad - k\bar{S}_2 \left(\left(1 - \frac{\bar{S}_3}{S_3}\right) \left(\frac{S_3}{\bar{S}_3} - \frac{S_2}{\bar{S}_2}\right) \right) - bQ_1 - bR_1 - bQ_2 - bR_2 \\ &\quad - bQ_3 - bR_3. \end{aligned} \tag{23}$$

If $\frac{S_2}{\bar{S}_2} \geq \frac{S_1}{\bar{S}_1}$ for all $S_1 \geq \bar{S}_1$ and $\frac{S_2}{\bar{S}_2} \leq \frac{S_1}{\bar{S}_1}$ for all $0 < S_1 \leq \bar{S}_1$, then

$$-k\bar{S}_1 \left(\left(1 - \frac{\bar{S}_2}{S_2}\right) \left(\frac{S_2}{\bar{S}_2} - \frac{S_1}{\bar{S}_1}\right) \right) \leq 0.$$

If $\frac{S_3}{\bar{S}_3} \geq \frac{S_2}{\bar{S}_2}$ for all $S_2 \geq \bar{S}_2$ and $\frac{S_3}{\bar{S}_3} \leq \frac{S_2}{\bar{S}_2}$ for all $0 < S_2 \leq \bar{S}_2$, then

$$-k\bar{S}_2 \left(\left(1 - \frac{\bar{S}_3}{S_3}\right) \left(\frac{S_3}{\bar{S}_3} - \frac{S_2}{\bar{S}_2}\right) \right) \leq 0.$$

We can see that all of the terms in (23) are always non-positive. From equation (23), $\frac{d}{dt} \rho(t) \leq 0$, then the function $\frac{d}{dt} \rho(t)$ is negative definite.

The limit set of each solution is contained in the largest invariant set for

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร. พันธนี พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

68 T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

which $S_1 = \bar{S}_1$, $S_2 = \bar{S}_2$, $S_3 = \bar{S}_3$, $Q_1 = 0$, $R_1 = 0$, $Q_2 = 0$, $R_2 = 0$, $Q_3 = 0$ and $R_3 = 0$ which is singleton $\{R_1\}$. LaSalle's invariant principle [ref] implies that the disease free equilibrium R_1 is globally asymptotically stable on Ω_1 .

To prove the global stability of the third age group endemic equilibrium point P_2 , we consider the following theorem.

Theorem 2. *If $\hat{R}_0 > 1$, $\bar{R}_0 < 1$ and $R_0^* < 1$, then the third age group endemic equilibrium state $P_2(\hat{S}_1, \hat{E}_1, \hat{I}_1, \hat{Q}_1, \hat{R}_1, \hat{S}_2, \hat{E}_2, \hat{I}_2, \hat{Q}_2, \hat{R}_2, \hat{S}_3, \hat{E}_3, \hat{I}_3, \hat{Q}_3, \hat{R}_3) \in \Omega_1$ exists and is globally asymptotically stable on Ω_1 if*

$$\begin{cases} a_1 = \frac{bN_I}{\hat{S}_1} \\ a_2 = \frac{bN_I}{\hat{S}_2} \\ a_3 = \frac{(b+d)N_I}{\hat{S}_3} \\ d = e + f. \end{cases} \quad (24)$$

Proof. The Lyapunov function of the form

$$\begin{aligned} \psi(t) = & (S_1 - \hat{S}_1 \ln S_1) + E_1 + I_1 + Q_1 + R_1 + (S_2 - \hat{S}_2 \ln S_2) \\ & + E_2 + I_2 + Q_2 + R_2 + (S_3 - \hat{S}_3 \ln S_3) + E_3 + I_3 + (Q_3 - \hat{Q}_3 \ln Q_3). \end{aligned}$$

Its derivative along the trajectories of (1)-(15),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi(t) = & \frac{d}{dt} S_1 \left(1 - \frac{\hat{S}_1}{S_1} \right) + \frac{d}{dt} E_1 + \frac{d}{dt} I_1 + \frac{d}{dt} Q_1 + \frac{d}{dt} R_1 \\ & + \frac{d}{dt} S_2 \left(1 - \frac{\hat{S}_2}{S_2} \right) + \frac{d}{dt} E_2 + \frac{d}{dt} I_2 + \frac{d}{dt} Q_2 + \frac{d}{dt} R_2 \\ & + \frac{d}{dt} S_3 \left(1 - \frac{\hat{S}_3}{S_3} \right) + \frac{d}{dt} E_3 + \frac{d}{dt} I_3 + \frac{d}{dt} Q_3 \left(1 - \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนชนิ พงศ์สัมพันธ
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Global Stability of the Age Structural Transmission Model ... 69

$$\begin{aligned}
&= \left(bN_T - \left(\frac{a_1(E_1 + I_1)}{N_T} + b + k \right) S_1 \right) \left(1 - \frac{\dot{S}_1}{S_1} \right) \\
&\quad + \left(\frac{a_1 S_1 (E_1 + I_1)}{N_T} - (b + c + d + k) E_1 \right) + (cE_1 - (b + e + f + k) I_1) \\
&\quad + (eI_1 - (b + g + k) Q_1) + (dE_1 + fI_1 + gQ_1 - (b + k) R_1) \\
&\quad + \left(kS_1 - \left(\frac{a_2(E_2 + I_2)}{N_T} + b + k \right) S_2 \right) \left(1 - \frac{\dot{S}_2}{S_2} \right) \\
&\quad + \left(kE_1 + \frac{a_2 S_2 (E_2 + I_2)}{N_T} - (b + c + d + k) E_2 \right) \\
&\quad + (kI_1 + cE_2 - (b + e + f + k) I_2) \\
&\quad + (kQ_1 + eI_2 - (b + g + k) Q_2) \\
&\quad + (kR_1 + dE_2 + fI_2 + gQ_2 - (b + k) R_2) \\
&\quad + \left(kS_2 - \left(\frac{a_3(E_3 + I_3)}{N_T} + b \right) S_3 \right) \left(1 - \frac{\dot{S}_3}{S_3} \right) \\
&\quad + \left(kE_2 + \frac{a_3 S_3 (E_3 + I_3)}{N_T} - (b + c + d) E_3 \right) \\
&\quad + (kI_2 + cE_3 - (b + e + f) I_3) \\
&\quad + (kQ_2 + eI_3 - (b + g) Q_3) \left(1 - \frac{\dot{Q}_3}{Q_3} \right) \\
&= bN_T \left(1 - \frac{\dot{S}_1}{S_1} \right) + (b + k) \dot{S}_1 - bS_1 - k \frac{S_1}{S_2} \dot{S}_2 + (b + k) \dot{S}_2 - bS_2 \\
&\quad - k \frac{S_2}{S_3} \dot{S}_3 + b \dot{S}_3 - bS_3 + (E_1 + I_1) \left(\frac{a_1 \dot{S}_1}{N_T} - b \right) \\
&\quad + (E_2 + I_2) \left(\frac{a_2 \dot{S}_2}{N_T} - b \right) + \left(\frac{a_3 \dot{S}_3}{N_T} - b - d \right) E_3
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 วิทยาศาสตร์ราชภัฏ ดร.พนชนัน พงศ์สัมพันธ
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

70

T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{a_3 \hat{S}_3}{N_T} - b - e - f \right) I_3 \\
 & - bQ_1 - bR_1 - \left(b + k \frac{\hat{Q}_3}{\hat{Q}_3} \right) Q_2 - (b + k)R_2 \\
 & + eI_3 \left(1 - \frac{\hat{Q}_3}{\hat{Q}_3} \right) + (b + g)\hat{Q}_3 \left(1 - \frac{Q_3}{\hat{Q}_3} \right). \tag{25}
 \end{aligned}$$

Substituting four conditions of (24) into (25), we have

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \psi(t) & = bN_T \left(1 - \frac{\hat{S}_1}{S_1} \right) + (b + k)\hat{S}_1 - bS_1 - k \frac{S_1}{S_2} \hat{S}_2 + (b + k)\hat{S}_2 - bS_2 \\
 & - k \frac{S_2}{S_3} \hat{S}_3 + b\hat{S}_3 - bS_3 - bQ_1 - bR_1 - \left(b + k \frac{\hat{Q}_3}{\hat{Q}_3} \right) Q_2 \\
 & - (b + k)R_2 \\
 & + eI_3 \left(1 - \frac{\hat{Q}_3}{\hat{Q}_3} \right) + (b + g)\hat{Q}_3 \left(1 - \frac{Q_3}{\hat{Q}_3} \right) \\
 & = bN_T \left(1 - \frac{\hat{S}_1}{S_1} \right) + (b + k)\hat{S}_1 \left(1 - \frac{S_1}{\hat{S}_1} \right) + k\hat{S}_1 \left(\frac{S_1}{\hat{S}_1} - \frac{S_1}{\hat{S}_1} \frac{S_2}{S_2} \right) \\
 & + (b + k)\hat{S}_2 \left(1 - \frac{S_2}{\hat{S}_2} \right) + k \frac{\hat{S}_2}{R_0} \left(\frac{S_2}{\hat{S}_2/R_0} - \frac{S_2}{\hat{S}_2/R_0} \frac{S_3}{S_3} \right) \\
 & + b\hat{S}_3 \left(1 - \frac{S_3}{\hat{S}_3} \right) \\
 & - bQ_1 - bR_1 - \left(b + k \frac{\hat{Q}_3}{\hat{Q}_3} \right) Q_2 - (b + k)R_2 \\
 & + eI_3 \left(\frac{I_3}{I_3} - \frac{I_3}{I_3} \frac{\hat{Q}_3}{\hat{Q}_3} \right) + (b + g)\hat{Q}_3 \left(1 - \frac{Q_3}{\hat{Q}_3} \right). \tag{26}
 \end{aligned}$$

Next, using the endemic relations in the third age group endemic equilibrium

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร. พันธุ์ พิเศษสัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Global Stability of the Age Structural Transmission Model ... 71

state, we have $\hat{S}_1 = \frac{bN_T}{b+k}$, $\hat{S}_2 = \frac{k}{b+k} \hat{S}_1$, $b\hat{S}_3 = \frac{k\hat{S}_2}{R_0}$ and $e\hat{I}_3 = (b+g)\hat{Q}_3$,

equation (26) becomes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \psi(t) &= bN_T \left(1 - \frac{\hat{S}_1}{S_1}\right) + bN_T \left(1 - \frac{S_1}{\hat{S}_1}\right) + k\hat{S}_1 \left(\frac{S_1}{\hat{S}_1} - \frac{S_1 \hat{S}_2}{\hat{S}_1 S_2}\right) + k\hat{S}_1 \left(1 - \frac{S_2}{\hat{S}_2}\right) \\ &\quad + k\hat{S}_3 \left(\frac{S_2}{\hat{S}_2/R_0} - \frac{S_2 \hat{S}_3}{\hat{S}_2/R_0 S_3}\right) + b\hat{S}_3 \left(1 - \frac{S_3}{\hat{S}_3}\right) - bQ_1 - bR_1 \\ &\quad - \left(b + k \frac{\hat{Q}_3}{Q_3}\right) Q_2 - (b+k)R_2 + e\hat{I}_3 \left(\frac{I_3}{\hat{I}_3} - \frac{I_3 \hat{Q}_3}{\hat{I}_3 Q_3}\right) + e\hat{I}_3 \left(1 - \frac{Q_3}{\hat{Q}_3}\right), \\ \frac{d}{dt} \psi(t) &= bN_T \left(2 - \frac{\hat{S}_1}{S_1} - \frac{S_1}{\hat{S}_1}\right) + k\hat{S}_1 \left(\frac{S_1}{\hat{S}_1} - \frac{S_1 \hat{S}_2}{\hat{S}_1 S_2} + 1 - \frac{S_2}{\hat{S}_2}\right) \\ &\quad + b\hat{S}_3 \left(\frac{S_2}{\hat{S}_2/R_0} - \frac{S_2 \hat{S}_3}{\hat{S}_2/R_0 S_3} + 1 - \frac{S_3}{\hat{S}_3}\right) - bQ_1 - bR_1 - \left(b + k \frac{\hat{Q}_3}{Q_3}\right) Q_2 \\ &\quad - (b+k)R_2 + e\hat{I}_3 \left(\frac{I_3}{\hat{I}_3} - \frac{I_3 \hat{Q}_3}{\hat{I}_3 Q_3} + 1 - \frac{Q_3}{\hat{Q}_3}\right), \\ \frac{d}{dt} \psi(t) &= -bN_T \frac{(\hat{S}_1 - S_1)^2}{S_1 \hat{S}_1} - k\hat{S}_1 \left(\left(1 - \frac{\hat{S}_2}{S_2}\right) \left(\frac{S_2}{\hat{S}_2} - \frac{S_1}{\hat{S}_1}\right)\right) \\ &\quad - b\hat{S}_3 \left(\left(1 - \frac{\hat{S}_3}{S_3}\right) \left(\frac{S_3}{\hat{S}_3} - \frac{S_2}{\hat{S}_2/R_0}\right)\right) - bQ_1 - bR_1 - \left(b + k \frac{\hat{Q}_3}{Q_3}\right) Q_2 \\ &\quad - (b+k)R_2 - e\hat{I}_3 \left(\left(1 - \frac{\hat{Q}_3}{Q_3}\right) \left(\frac{Q_3}{\hat{Q}_3} - \frac{I_3}{\hat{I}_3}\right)\right). \end{aligned} \tag{27}$$

Proceeding with the same manner as above for the second term of (27),

for the third term, we see that, if $\frac{S_3}{S_3} \geq \frac{S_2}{S_2/R_0}$ for all $S_2 \geq \hat{S}_2/R_0$ and

$$\frac{S_3}{S_3} \leq \frac{S_2}{S_2/R_0} \text{ for all } 0 < S_2 \leq \hat{S}_2/R_0, \text{ therefore,}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนชนู พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$-b\hat{S}_3 \left(\left(1 - \frac{\hat{S}_3}{S_3} \right) \left(\frac{S_3}{\hat{S}_3} - \frac{S_2}{S_2/\hat{R}_0} \right) \right) \leq 0.$$

For the last term, if $\frac{Q_3}{\hat{Q}_3} \geq \frac{I_3}{\hat{I}_3}$ for all $I_3 \geq \hat{I}_3$ and $\frac{Q_3}{\hat{Q}_3} \leq \frac{I_3}{\hat{I}_3}$ for all

$$0 < I_3 \leq \hat{I}_3 \text{ thus } -e\hat{I}_3 \left(\left(1 - \frac{\hat{Q}_3}{Q_3} \right) \left(\frac{Q_3}{\hat{Q}_3} - \frac{I_3}{\hat{I}_3} \right) \right) \leq 0.$$

Therefore, all of the terms in (27) are always non-positive and $\frac{d}{dt} \psi(t) \leq 0$. The limit set of each solution is contained in the largest invariant set for which $S_1 = \hat{S}_1$, $S_2 = \hat{S}_2$, $S_3 = \hat{S}_3$, $Q_1 = 0$, $R_1 = 0$, $Q_2 = 0$, $R_2 = 0$ and $Q_3 = \hat{Q}_3$ which is singleton $\{P_2\}$. Hence, by LaSalle's invariant principle, the third age group endemic equilibrium P_2 is globally asymptotically stable on Ω_1 .

Next, we consider the global stability of the second and third age group endemic equilibrium point P_3 .

Theorem 3. *If $\hat{R}_0 > 1$ and $R_0^* < 1$, then the second and third age group endemic equilibrium state $P_3(\hat{S}_1, \hat{E}_1, \hat{I}_1, \hat{Q}_1, \hat{R}_1, \hat{S}_2, \hat{E}_2, \hat{I}_2, \hat{Q}_2, \hat{R}_2, \hat{S}_3, \hat{E}_3, \hat{I}_3, \hat{Q}_3, \hat{R}_3) \in \Omega_1$ exists and is globally asymptotically stable on Ω_1 if*

$$\begin{cases} a_1 = \frac{bN_T}{\hat{S}_1} \\ a_2 = \frac{(b+d)N_T}{\hat{S}_2} \\ a_3 = \frac{(b+d)N_T}{\hat{S}_3} \\ d = e + f. \end{cases} \tag{28}$$

Proof. The Lyapunov function of the form

$$\begin{aligned} \eta(t) = & (S_1 - \hat{S}_1 \ln S_1) + E_1 + I_1 + Q_1 + R_1 + (S_2 - \hat{S}_2 \ln S_2) + E_2 + I_2 \\ & + (Q_2 - \hat{Q}_2 \ln Q_2) + (S_3 - \hat{S}_3 \ln S_3) + E_3 + I_3 + (Q_3 - \hat{Q}_3 \ln Q_3). \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 วิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Global Stability of the Age Structural Transmission Model ... 73

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \eta(t) &= \frac{d}{dt} S_1 \left(1 - \frac{\tilde{S}_1}{S_1} \right) + \frac{d}{dt} E_1 + \frac{d}{dt} I_1 + \frac{d}{dt} Q_1 + \frac{d}{dt} R_1 \\
 &+ \frac{d}{dt} S_2 \left(1 - \frac{\tilde{S}_2}{S_2} \right) + \frac{d}{dt} E_2 + \frac{d}{dt} I_2 + \frac{d}{dt} Q_2 \left(1 - \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) \\
 &+ \frac{d}{dt} S_3 \left(1 - \frac{\tilde{S}_3}{S_3} \right) + \frac{d}{dt} E_3 + \frac{d}{dt} I_3 + \frac{d}{dt} Q_3 \left(1 - \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3} \right) \\
 &= \left(bN_T - \left(\frac{a_1(E_1 + I_1)}{N_T} + b + k \right) S_1 \right) \left(1 - \frac{\tilde{S}_1}{S_1} \right) \\
 &+ \left(\frac{a_1 S_1 (E_1 + I_1)}{N_T} - (b + c + d + k) E_1 \right) \\
 &+ (cE_1 - (b + e + f + k) I_1) \\
 &+ (eI_1 - (b + g + k) Q_1) + (dE_1 + fI_1 + gQ_1 - (b + k) R_1) \\
 &+ \left(kS_1 - \left(\frac{a_2(E_2 + I_2)}{N_T} + b + k \right) S_2 \right) \left(1 - \frac{\tilde{S}_2}{S_2} \right) \\
 &+ \left(kE_1 + \frac{a_2 S_2 (E_2 + I_2)}{N_T} - (b + c + d + k) E_2 \right) \\
 &+ (kI_1 + cE_2 - (b + e + f + k) I_2) \\
 &+ (kQ_1 + eI_2 - (b + g + k) Q_2) \left(1 - \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) \\
 &+ \left(kS_2 - \left(\frac{a_3(E_3 + I_3)}{N_T} + b \right) S_3 \right) \left(1 - \frac{\tilde{S}_3}{S_3} \right) \\
 &+ \left(kE_2 + \frac{a_3 S_3 (E_3 + I_3)}{N_T} - (b + c + d) E_3 \right) \\
 &+ (kI_2 + cE_3 - (b + e + f) I_3) \\
 &+ (kQ_2 + eI_3 - (b + g) Q_3) \left(1 - \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3} \right)
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 วิศวกรรมศาสตราจารย์ ดร.พนธวี พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

74. T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

$$\begin{aligned}
 &= bN_T \left(1 - \frac{\tilde{S}_1}{S_1}\right) + (b+k)\tilde{S}_1 - bS_1 - k\frac{S_1}{S_2}\tilde{S}_2 + (b+k)\tilde{S}_2 - bS_2 \\
 &\quad - k\frac{S_2}{S_3}\tilde{S}_3 + b\tilde{S}_3 - bS_3 + (E_1 + I_1) \left(\frac{a_1\tilde{S}_1}{N_T} - b\right) - \left(b + k\frac{\tilde{Q}_2}{Q_2}\right) Q_1 \\
 &\quad - (b+k)R_1 + E_2 \left(\frac{a_2\tilde{S}_2}{N_T} - b - d\right) + I_2 \left(\frac{a_2\tilde{S}_2}{N_T} - b - e - f\right) \\
 &\quad + (b+g+k)\tilde{Q}_2 \left(1 - \frac{Q_2}{\tilde{Q}_2}\right) + e\tilde{I}_2 \left(1 - \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2}\right) + \left(\frac{a_3\tilde{S}_3}{N_T} - b - d\right) E_3 \\
 &\quad + \left(\frac{a_3\tilde{S}_3}{N_T} - b - e - f\right) I_3 + (kQ_2 + eI_3) \left(1 - \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3}\right) \\
 &\quad + (b+g)\tilde{Q}_3 \left(1 - \frac{Q_3}{\tilde{Q}_3}\right). \tag{29}
 \end{aligned}$$

Substituting four conditions of (28) into (29), we have

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \eta(t) &= bN_T \left(1 - \frac{\tilde{S}_1}{S_1}\right) + (b+k)\tilde{S}_1 - bS_1 - k\frac{S_1}{S_2}\tilde{S}_2 + (b+k)\tilde{S}_2 - bS_2 \\
 &\quad - k\frac{S_2}{S_3}\tilde{S}_3 + b\tilde{S}_3 - bS_3 - \left(b + k\frac{Q_2}{\tilde{Q}_2}\right) Q_1 - (b+k)R_1 \\
 &\quad + (b+g+k)\tilde{Q}_2 \left(1 - \frac{Q_2}{\tilde{Q}_2}\right) + e\tilde{I}_2 \left(1 - \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2}\right) \\
 &\quad + (kQ_2 + eI_3) \left(1 - \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3}\right) + (b+g)\tilde{Q}_3 \left(1 - \frac{Q_3}{\tilde{Q}_3}\right) \\
 &= bN_T \left(1 - \frac{\tilde{S}_1}{S_1}\right) + (b+k)\tilde{S}_1 \left(1 - \frac{S_1}{\tilde{S}_1}\right) + k\frac{\tilde{S}_1}{R_0} \left(\frac{S_1}{\tilde{S}_1/R_0} - \frac{S_1}{\tilde{S}_1/R_0} \frac{\tilde{S}_2}{S_2}\right) \\
 &\quad + (b+k)\tilde{S}_2 \left(1 - \frac{S_2}{\tilde{S}_2}\right) + k\tilde{S}_2 \left(\frac{S_2}{\tilde{S}_2} - \frac{S_2}{\tilde{S}_2} \frac{\tilde{S}_3}{S_3}\right) \\
 &\quad + \left(b\tilde{S}_3 + \frac{a_3}{N_T} (\tilde{E}_3 + \tilde{I}_3)\tilde{S}_3\right) \left(1 - \frac{S_3}{\tilde{S}_3}\right) - \frac{a_3}{N_T} (\tilde{E}_3 + \tilde{I}_3)\tilde{S}_3 \left(1 - \frac{S_3}{\tilde{S}_3}\right)
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนธ์นิ พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Global Stability of the Age Structural Transmission Model ... 75

$$\begin{aligned}
 & - \left(b + k \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) Q_1 - (b + k) R_1 + (b + g + k) \tilde{Q}_2 \left(1 - \frac{Q_2}{Q_2} \right) \\
 & + e \tilde{I}_2 \left(\frac{I_2}{I_2} - \frac{I_2}{I_2} \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) + (k \tilde{Q}_2 + e \tilde{I}_3) \left(\frac{k Q_2 + e I_3}{k \tilde{Q}_2 + e \tilde{I}_3} - \frac{k Q_2 + e I_3}{k \tilde{Q}_2 + e \tilde{I}_3} \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3} \right) \\
 & + (b + g) \tilde{Q}_3 \left(1 - \frac{Q_3}{Q_3} \right). \tag{30}
 \end{aligned}$$

Next, using the endemic relations in the second and third age group endemic equilibrium state, we have $\tilde{S}_1 = \frac{b N_T}{b + k}$, $(b + k) \tilde{S}_2 = \frac{k \tilde{S}_1}{R_0}$, $b \tilde{S}_3 + \frac{a_3}{N_T} (\tilde{E}_3 + \tilde{I}_3) \tilde{S}_3 = k \tilde{S}_2$, $e \tilde{I}_2 = (b + g + k) \tilde{Q}_2$ and $k \tilde{Q}_2 + e \tilde{I}_3 = (b + g) \tilde{Q}_3$, equation (30) becomes

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \eta(t) &= b N_T \left(1 - \frac{\tilde{S}_1}{S_1} \right) + b N_T \left(1 - \frac{S_1}{\tilde{S}_1} \right) + (b + k) \tilde{S}_2 \left(\frac{S_1}{\tilde{S}_1 / R_0} - \frac{S_1}{\tilde{S}_1 / R_0} \frac{\tilde{S}_2}{S_2} \right) \\
 & + (b + k) \tilde{S}_2 \left(1 - \frac{S_2}{\tilde{S}_2} \right) + k \tilde{S}_2 \left(\frac{S_2}{\tilde{S}_2} - \frac{S_2}{\tilde{S}_2} \frac{\tilde{S}_3}{S_3} \right) + k \tilde{S}_2 \left(1 - \frac{S_3}{\tilde{S}_3} \right) \\
 & - (k \tilde{S}_2 - b \tilde{S}_3) \left(1 - \frac{S_3}{\tilde{S}_3} \right) - \left(b + k \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) Q_1 - (b + k) R_1 \\
 & + e \tilde{I}_2 \left(1 - \frac{Q_2}{Q_2} \right) + e \tilde{I}_2 \left(\frac{I_2}{I_2} - \frac{I_2}{I_2} \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) \\
 & + (b + g) \tilde{Q}_3 \left(\frac{k Q_2 + e I_3}{k \tilde{Q}_2 + e \tilde{I}_3} - \frac{k Q_2 + e I_3}{k \tilde{Q}_2 + e \tilde{I}_3} \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3} \right) + (b + g) \tilde{Q}_3 \left(1 - \frac{Q_3}{Q_3} \right), \\
 \frac{d}{dt} \eta(t) &= b N_T \left(2 - \frac{\tilde{S}_1}{S_1} - \frac{S_1}{\tilde{S}_1} \right) + (b + k) \tilde{S}_2 \left(\frac{S_1}{\tilde{S}_1 / R_0} - \frac{S_1}{\tilde{S}_1 / R_0} \frac{\tilde{S}_2}{S_2} + 1 - \frac{S_2}{\tilde{S}_2} \right) \\
 & + k \tilde{S}_2 \left(\frac{S_2}{\tilde{S}_2} - \frac{S_2}{\tilde{S}_2} \frac{\tilde{S}_3}{S_3} + 1 - \frac{S_3}{\tilde{S}_3} \right) - b \left(\frac{k \tilde{S}_2}{b} - \tilde{S}_3 \right) \left(1 - \frac{S_3}{\tilde{S}_3} \right) \\
 & - \left(b + k \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) Q_1 - (b + k) R_1 + e \tilde{I}_2 \left(\frac{I_2}{I_2} - \frac{I_2}{I_2} \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} + 1 - \frac{Q_2}{Q_2} \right)
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนธวี พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

76 T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

$$\begin{aligned}
 & + (b + g) \tilde{Q}_3 \left(\frac{kQ_2 + eI_3}{k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3} - \frac{kQ_2 + eI_3}{k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3} \frac{\tilde{Q}_3}{\tilde{Q}_3} + 1 - \frac{Q_3}{\tilde{Q}_3} \right), \\
 \frac{d}{dt} \eta(t) = & -bN_T \frac{(\tilde{S}_1 - S_1)^2}{S_1 \tilde{S}_1} - (b + k) \tilde{S}_2 \left(\left(1 - \frac{\tilde{S}_2}{S_2} \right) \left(\frac{S_2}{\tilde{S}_2} - \frac{S_1}{\tilde{S}_1/R_0} \right) \right) \\
 & - k\tilde{S}_2 \left(\left(1 - \frac{\tilde{S}_3}{S_3} \right) \left(\frac{S_3}{\tilde{S}_3} - \frac{S_1}{\tilde{S}_2} \right) \right) - b \left(\frac{k\tilde{S}_2}{b} - \tilde{S}_3 \right) \left(1 - \frac{S_3}{\tilde{S}_3} \right) \\
 & - \left(b + k \frac{Q_2}{\tilde{Q}_2} \right) Q_1 - (b + k) R_1 - e\tilde{I}_2 \left(\left(1 - \frac{Q_2}{\tilde{Q}_2} \right) \left(\frac{Q_2}{\tilde{Q}_2} - \frac{I_2}{\tilde{I}_2} \right) \right) \\
 & - (b + g) \tilde{Q}_3 \left(\left(1 - \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3} \right) \left(\frac{Q_3}{\tilde{Q}_3} - \frac{kQ_2 + eI_3}{k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3} \right) \right). \tag{31}
 \end{aligned}$$

Proceeding with the same manner as Theorem 1 for the third term of (31), for the second term, if $\frac{S_2}{\tilde{S}_2} \geq \frac{S_1}{\tilde{S}_1/R_0}$ for all $S_1 \geq \tilde{S}_1/R_0$ and $\frac{S_3}{\tilde{S}_3} \leq \frac{S_1}{\tilde{S}_1/R_0}$ for all $0 < S_1 \leq \tilde{S}_1/R_0$, therefore

$$-(b + k) \tilde{S}_2 \left(\left(1 - \frac{\tilde{S}_2}{S_2} \right) \left(\frac{S_2}{\tilde{S}_2} - \frac{S_1}{\tilde{S}_1/R_0} \right) \right) \leq 0.$$

For the fourth term, if $\frac{k\tilde{S}_2}{b} \leq \tilde{S}_3$ for all $S_3 \geq \tilde{S}_3$ and $\frac{k\tilde{S}_2}{b} \geq \tilde{S}_3$ for all $0 < S_3 \leq \tilde{S}_3$, then $-b \left(\frac{k\tilde{S}_2}{b} - \tilde{S}_3 \right) \left(1 - \frac{S_3}{\tilde{S}_3} \right) \leq 0$.

For the seventh term, if $\frac{Q_2}{\tilde{Q}_2} \geq \frac{I_2}{\tilde{I}_2}$ for all $I_2 \geq \tilde{I}_2$ and $\frac{Q_2}{\tilde{Q}_2} \leq \frac{I_2}{\tilde{I}_2}$ for all $0 < I_2 \leq \tilde{I}_2$, then $-e\tilde{I}_2 \left(\left(1 - \frac{\tilde{Q}_2}{Q_2} \right) \left(\frac{Q_2}{\tilde{Q}_2} - \frac{I_2}{\tilde{I}_2} \right) \right) \leq 0$.

For the last term, if $\frac{Q_3}{\tilde{Q}_3} \geq \frac{kQ_2 + eI_3}{k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3}$ for all $Q_2 \geq \tilde{Q}_2$ and $I_3 \geq \tilde{I}_3$,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Global Stability of the Age Structural Transmission Model ... 77

$\frac{Q_3}{\tilde{Q}_3} \leq \frac{kQ_2 + eI_3}{k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3}$ for all $0 < Q_2 \leq \tilde{Q}_2$ and $0 < I_3 \leq \tilde{I}_3$, then

$$-(b + g)\tilde{Q}_3 \left(\left(1 - \frac{\tilde{Q}_3}{Q_3} \right) \left(\frac{Q_3}{\tilde{Q}_3} - \frac{kQ_2 + eI_3}{k\tilde{Q}_2 + e\tilde{I}_3} \right) \right) \leq 0.$$

Therefore, all of terms in (31) are always non-positive and $\frac{d}{dt}\eta(r) \leq 0$. The limit set of each solution is contained in the largest invariant set for which $S_1 = \tilde{S}_1, S_2 = \tilde{S}_2, S_3 = \tilde{S}_3, Q_1 = 0, R_1 = 0, Q_2 = \tilde{Q}_2$, and $Q_3 = \tilde{Q}_3$ which is singleton $\{P_3\}$. Hence, by LaSalle's invariant principle, the second and third age group endemic equilibrium P_3 is globally asymptotically stable on Ω_1 .

Last, we consider the global stability of the full endemic equilibrium point P_4 .

Theorem 4. *If $R_0^* > 1$, then the full endemic equilibrium state*

$$P_4(S_1^*, E_1^*, I_1^*, Q_1^*, R_1^*, S_2^*, E_2^*, I_2^*, Q_2^*, R_2^*, S_3^*, E_3^*, I_3^*, Q_3^*, R_3^*) \in \Omega_1$$

exists and is globally asymptotically stable on Ω_1 if

$$\begin{cases} a_1 = \frac{(b+d)N_I}{S_1^*} \\ a_2 = \frac{(b+d)N_I}{S_2^*} \\ a_3 = \frac{(b+d)N_I}{S_3^*} \\ d = e + f. \end{cases} \tag{32}$$

Proof. The Lyapunov function of the form

$$\begin{aligned} \kappa(r) = & (S_1 - S_1^* \ln S_1) + E_1 + I_1 + (Q_1 - Q_1^* \ln Q_1) + (S_2 - S_2^* \ln S_2) + E_2 \\ & + I_2 + (Q_2 - Q_2^* \ln Q_2) + (S_3 - S_3^* \ln S_3) + E_3 + I_3 \\ & + (Q_3 - Q_3^* \ln Q_3). \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนชน พงศ์สมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

78

T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \kappa(t) &= \frac{d}{dt} S_1 \left(1 - \frac{S_1^*}{S_1}\right) + \frac{d}{dt} E_1 + \frac{d}{dt} I_1 + \frac{d}{dt} Q_1 \left(1 - \frac{Q_1^*}{Q_1}\right) \\
&\quad + \frac{d}{dt} S_2 \left(1 - \frac{S_2^*}{S_2}\right) + \frac{d}{dt} E_2 + \frac{d}{dt} I_2 + \frac{d}{dt} Q_2 \left(1 - \frac{Q_2^*}{Q_2}\right) \\
&\quad + \frac{d}{dt} S_3 \left(1 - \frac{S_3^*}{S_3}\right) + \frac{d}{dt} E_3 + \frac{d}{dt} I_3 + \frac{d}{dt} Q_3 \left(1 - \frac{Q_3^*}{Q_3}\right) \\
&= \left(bN_T - \left(\frac{a_1(E_1 + I_1)}{N_T} + b + k \right) S_1 \right) \left(1 - \frac{S_1^*}{S_1}\right) \\
&\quad + \left(\frac{a_1 S_1 (E_1 + I_1)}{N_T} - (b + c + d + k) E_1 \right) \\
&\quad + (cE_1 - (b + e + f + k) I_1) + (eI_1 - (b + g + k) Q_1) \left(1 - \frac{Q_1^*}{Q_1}\right) \\
&\quad - \left(kS_1 - \left(\frac{a_2(E_2 + I_2)}{N_T} + b + k \right) S_2 \right) \left(1 - \frac{S_2^*}{S_2}\right) \\
&\quad + \left(kE_1 + \frac{a_2 S_2 (E_2 + I_2)}{N_T} - (b + c + d + k) E_2 \right) \\
&\quad + (kI_1 + cE_2 - (b + e + f + k) I_2) \\
&\quad + (kQ_1 + eI_2 - (b + g + k) Q_2) \left(1 - \frac{Q_2^*}{Q_2}\right) \\
&\quad - \left(kS_2 - \left(\frac{a_3(E_3 + I_3)}{N_T} + b \right) S_3 \right) \left(1 - \frac{S_3^*}{S_3}\right) \\
&\quad - \left(kE_2 + \frac{a_3 S_3 (E_3 + I_3)}{N_T} - (b + c + d) E_3 \right) \\
&\quad + (kI_2 + cE_3 - (b + e + f) I_3) \\
&\quad + (kQ_2 + eI_3 - (b + g) Q_3) \left(1 - \frac{Q_3^*}{Q_3}\right)
\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ภาควิชาคณิตศาสตร์ วิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี กรุงเทพมหานคร
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Global Stability of the Age Structural Transmission Model ... 79

$$\begin{aligned}
 &= bN_T \left(1 - \frac{S_1^*}{S_1} \right) + (b+k)S_1^* - bS_1 - k \frac{S_1}{S_2} S_2^* + (b+k)S_2^* - bS_2 \\
 &\quad - k \frac{S_2}{S_3} S_3^* + bS_3^* - bS_3 + \left(\frac{a_1 S_1^*}{N_T} - b - d \right) E_1 \\
 &\quad + \left(\frac{a_1 S_1^*}{N_T} - b - e - f \right) I_1 \\
 &\quad + eI_1 \left(1 - \frac{Q_1^*}{Q_1} \right) + (b+g+k)Q_1^* \left(1 - \frac{Q_1}{Q_1^*} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{a_2 S_2^*}{N_T} - b - d \right) E_2 + \left(\frac{a_2 S_2^*}{N_T} - b - e - f \right) I_2 \\
 &\quad + (kQ_1 + eI_2) \left(1 - \frac{Q_2^*}{Q_2} \right) + (b+g+k)Q_2^* \left(1 - \frac{Q_2}{Q_2^*} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{a_3 S_3^*}{N_T} - b - d \right) E_3 + \left(\frac{a_3 S_3^*}{N_T} - b - e - f \right) I_3 \\
 &\quad + (kQ_2 + eI_3) \left(1 - \frac{Q_3^*}{Q_3} \right) + (b+g)Q_3^* \left(1 - \frac{Q_3}{Q_3^*} \right) \tag{33}
 \end{aligned}$$

Substituting four conditions of (32) into (33), we have

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \kappa(t) &= bN_T \left(1 - \frac{S_1^*}{S_1} \right) + (b+k)S_1^* - bS_1 - k \frac{S_1}{S_2} S_2^* + (b+k)S_2^* - bS_2 \\
 &\quad - k \frac{S_2}{S_3} S_3^* + bS_3^* - bS_3 + eI_1 \left(1 - \frac{Q_1^*}{Q_1} \right) + (b+g+k)Q_1^* \left(1 - \frac{Q_1}{Q_1^*} \right) \\
 &\quad + (kQ_1 + eI_2) \left(1 - \frac{Q_2^*}{Q_2} \right) + (b+g+k)Q_2^* \left(1 - \frac{Q_2}{Q_2^*} \right) \\
 &\quad + (kQ_2 + eI_3) \left(1 - \frac{Q_3^*}{Q_3} \right) + (b+g)Q_3^* \left(1 - \frac{Q_3}{Q_3^*} \right)
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนธ์นันทน์ พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

80 T. Changpuek, P. Pongsumpum and I-Ming Tang

$$\begin{aligned}
 &= bN_T \left(1 - \frac{S_1^*}{S_1}\right) + (b+k)R_0^* S_1^* \left(\frac{1}{R_0^*} - \frac{S_1}{R_0^* S_1^*}\right) \\
 &+ kS_1^* \left(\frac{S_1}{S_1^*} - \frac{S_1 S_2^*}{S_1^* S_2}\right) + \left((b+k)S_2^* + \frac{a_2}{N_T}(E_2^* + I_2^*)S_2^*\right) \left(1 - \frac{S_2}{S_2^*}\right) \\
 &- \frac{a_2}{N_T}(E_2^* + I_2^*)S_2^* \left(1 - \frac{S_2}{S_2^*}\right) + kS_2^* \left(\frac{S_2}{S_2^*} - \frac{S_2 S_3^*}{S_2^* S_3}\right) \\
 &+ \left(bS_3^* + \frac{a_3}{N_T}(E_3^* + I_3^*)S_3^*\right) \left(1 - \frac{S_3}{S_3^*}\right) - \frac{a_3}{N_T}(E_3^* + I_3^*)S_3^* \left(1 - \frac{S_3}{S_3^*}\right) \\
 &+ eI_1^* \left(\frac{I_1}{I_1^*} - \frac{I_1 Q_1^*}{I_1^* Q_1}\right) + (b+g+k)Q_1^* \left(1 - \frac{Q_1}{Q_1^*}\right) \\
 &+ (kQ_1^* + eI_2^*) \left(\frac{kQ_2 + eI_2}{kQ_1^* + eI_2^*} - \frac{kQ_1 + eI_1}{kQ_1^* + eI_2^*} \frac{Q_2^*}{Q_2}\right) \\
 &+ (b+g+k)Q_2^* \left(1 - \frac{Q_2}{Q_2^*}\right) \\
 &+ (kQ_2^* + eI_3^*) \left(\frac{kQ_2 + eI_3}{kQ_2^* + eI_3^*} - \frac{kQ_1 + eI_1}{kQ_2^* + eI_3^*} \frac{Q_3^*}{Q_3}\right) \\
 &+ (b+g)Q_3^* \left(1 - \frac{Q_3}{Q_3^*}\right). \tag{34}
 \end{aligned}$$

Next, using the endemic relations in the full endemic equilibrium state, we have $bN_T = (b+k)R_0^* S_1^*$, $(b+k)S_2^* + \frac{a_2}{N_T}(E_2^* + I_2^*)S_2^* = kS_1^*$, $bS_3^* + \frac{a_3}{N_T}(E_3^* + I_3^*)S_3^* = kS_2^*$, $eI_1^* = (b+g+k)Q_1^*$, $kQ_1^* + eI_2^* = (b+g+k)Q_2^*$ and $kQ_2^* + eI_3^* = (b+g)Q_3^*$, equation (34) becomes

Global Stability of the Age Structural Transmission Model ... 81

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \kappa(t) &= bN_T \left(1 - \frac{S_1^*}{S_1} \right) + bN_T \left(\frac{1}{R_0^*} - \frac{S_1}{R_0^* S_1^*} \right) + kS_1^* \left(\frac{S_1}{S_1^*} - \frac{S_1 S_2^*}{S_1^* S_2} \right) \\
 &+ kS_1^* \left(1 - \frac{S_2}{S_2^*} \right) - (kS_1^* - (b+k)S_2^*) \left(1 - \frac{S_2}{S_2^*} \right) + kS_2^* \left(\frac{S_2}{S_2^*} - \frac{S_2 S_3^*}{S_2^* S_3} \right) \\
 &+ kS_2^* \left(1 - \frac{S_3}{S_3^*} \right) - (kS_2^* - bS_3^*) \left(1 - \frac{S_3}{S_3^*} \right) + eI_1^* \left(\frac{I_1}{I_1^*} - \frac{I_1 Q_1^*}{I_1^* Q_1} \right) \\
 &+ eI_1^* \left(1 - \frac{Q_1}{Q_1^*} \right) + (b+g+k)Q_2^* \left(\frac{kQ_1 + eI_2}{kQ_1^* + eI_2^*} - \frac{kQ_1 + eI_2}{kQ_1^* + eI_2^*} \frac{Q_2^*}{Q_2} \right) \\
 &+ (b+g+k)Q_2^* \left(1 - \frac{Q_2}{Q_2^*} \right) \\
 &+ (b+g)Q_3^* \left(\frac{kQ_2 + eI_3}{kQ_2^* + eI_3^*} - \frac{kQ_2 + eI_3}{kQ_2^* + eI_3^*} \frac{Q_3^*}{Q_3} \right) \\
 &+ (b+g)Q_3^* \left(1 - \frac{Q_3}{Q_3^*} \right) \\
 \frac{d}{dt} \kappa(\tau) &= bN_T \left(1 - \frac{S_1^*}{S_1} + \frac{1}{R_0^*} - \frac{S_1}{R_0^* S_1^*} \right) + kS_1^* \left(\frac{S_1}{S_1^*} - \frac{S_1 S_2^*}{S_1^* S_2} + 1 - \frac{S_2}{S_2^*} \right) \\
 &- (b+k) \left(\frac{kS_1^*}{b+k} - S_2^* \right) \left(1 - \frac{S_2}{S_2^*} \right) + kS_2^* \left(\frac{S_2}{S_2^*} - \frac{S_2 S_3^*}{S_2^* S_3} + 1 - \frac{S_3}{S_3^*} \right) \\
 &- b \left(\frac{kS_2^*}{b} - S_3^* \right) \left(1 - \frac{S_3}{S_3^*} \right) + eI_1^* \left(\frac{I_1}{I_1^*} - \frac{I_1 Q_1^*}{I_1^* Q_1} + 1 - \frac{Q_1}{Q_1^*} \right) \\
 &+ (b+g+k)Q_2^* \left(\frac{kQ_1 + eI_2}{kQ_1^* + eI_2^*} - \frac{kQ_1 + eI_2}{kQ_1^* + eI_2^*} \frac{Q_2^*}{Q_2} + 1 - \frac{Q_2}{Q_2^*} \right) \\
 &+ (b+g)Q_3^* \left(\frac{kQ_2 + eI_3}{kQ_2^* + eI_3^*} - \frac{kQ_2 + eI_3}{kQ_2^* + eI_3^*} \frac{Q_3^*}{Q_3} + 1 - \frac{Q_3}{Q_3^*} \right)
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 วิศวกรรมศาสตราจารย์ ดร.พนิต พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

82 T. Changpuak, P. Pongsumpum and I-Ming Tang

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \kappa(t) = & -bN_T \left(1 - \frac{S_1}{S_1^*}\right) \left(\frac{S_1^*}{S_1} - \frac{1}{R_0^*}\right) - kS_1^* \left(\left(1 - \frac{S_2^*}{S_2}\right) \left(\frac{S_2}{S_2^*} - \frac{S_1}{S_1^*}\right)\right) \\ & - (b+k) \left(\frac{kS_1^*}{b+k} - S_2^*\right) \left(1 - \frac{S_2}{S_2^*}\right) - kS_2^* \left(\left(1 - \frac{S_3^*}{S_3}\right) \left(\frac{S_3}{S_3^*} - \frac{S_2}{S_2^*}\right)\right) \\ & - b \left(\frac{kS_2^*}{b} - S_3^*\right) \left(1 - \frac{S_3}{S_3^*}\right) - eI_1^* \left(\left(1 - \frac{Q_1^*}{Q_1}\right) \left(\frac{Q_1}{Q_1^*} - \frac{I_1}{I_1^*}\right)\right) \\ & - (b+g+k)Q_2^* \left(\left(1 - \frac{Q_2^*}{Q_2}\right) \left(\frac{Q_2}{Q_2^*} - \frac{kQ_1 + eI_2}{kQ_1^* + eI_2^*}\right)\right) \\ & - (b+g)Q_3^* \left(\left(1 - \frac{Q_3^*}{Q_3}\right) \left(\frac{Q_3}{Q_3^*} - \frac{kQ_2 + eI_3}{kQ_2^* + eI_3^*}\right)\right) \end{aligned} \quad (35)$$

If $\frac{S_1^*}{S_1} \leq \frac{1}{R_0^*}$ for all $S_1 \geq S_1^*$ and $\frac{S_1^*}{S_1} \geq \frac{1}{R_0^*}$ for all $0 < S_1 \leq S_1^*$, therefore

$$-bN_T \left(1 - \frac{S_1}{S_1^*}\right) \left(\frac{S_1^*}{S_1} - \frac{1}{R_0^*}\right) \leq 0.$$

If $\frac{kS_1^*}{b+k} \leq S_2^*$ for all $S_2 \geq S_2^*$ and $\frac{kS_1^*}{b+k} \geq S_2^*$ for all $0 < S_2 \leq S_2^*$,

$$\text{thus } -(b+k) \left(\frac{kS_1^*}{b+k} - S_2^*\right) \left(1 - \frac{S_2}{S_2^*}\right) \leq 0.$$

Proceeding with the same manner as above for remaining terms. Therefore, all of terms in (35) are always non-positive and $\frac{d}{dt} \kappa(t) \leq 0$. The limit set of each solution is contained in the largest invariant set for which $S_1 = S_1^*$, $S_2 = S_2^*$, $S_3 = S_3^*$, $Q_1 = Q_1^*$, $Q_2 = Q_2^*$, and $Q_3 = Q_3^*$ which is singleton $\{P_4\}$. Hence, by LaSalle's invariant principle, the second and third age group endemic equilibrium P_4 is globally asymptotically stable on Ω_1 .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนชนัน พงศ์สัมพันธ
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

III. Conclusion

We define

$$\hat{R}_0 = \frac{a_3 k^2 (b + c + e + f)}{(b + k)^2 (b + c + d) (b + e + f)},$$

$$\tilde{R}_0 = \frac{a_2 b k (b + c + e + f + k)}{(b + k)^2 (b + c + d + k) (b + e + f + k)}$$

and $R_0^* = \frac{a_1 b (b + c + e + f + k)}{(b + k) (b + c + d + k) (b + e + f + k)}$ as the threshold parameters.

These parameters are called the *basic reproductive number*. It represents the average number of secondary cases caused by an infectious individual in a totally susceptible population. It depends on the transmissibility, contact rates and the expected duration of infection. It can determine the disease can spread through a population whether or not and also associates the persistence of endemic levels.

The global stability of our model has been resolved by using Lyapunov functions. If $\hat{R}_0 < 1$, $\tilde{R}_0 < 1$ and $R_0^* < 1$, then the disease free equilibrium state is globally asymptotically stable and the disease will die out. If $\hat{R}_0 > 1$, $\tilde{R}_0 < 1$ and $R_0^* < 1$, then the third age group endemic equilibrium state is globally asymptotically stable and the disease is endemic only in the third age group. If $\hat{R}_0 > 1$ and $R_0^* < 1$, then the second and the third age group endemic equilibrium state is globally asymptotically stable and the disease is endemic in both the second and the third age group. If $R_0^* > 1$ then the full endemic equilibrium state is globally asymptotically stable and the disease is endemic in all age groups.

Acknowledgement

This work is supported by King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang Research Fund, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธวี พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

84 T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang

References

- [1] Charles Patrick Davis, Swine Flu (Swine Influenza A [H1N1] Virus), MedicineNet. http://www.medicinenet.com/swine_flu/article.htm.
- [2] Diane Griffith, The 6 Phases of Pandemic Alerts: What Do They Mean?, Complete Wellness Center. <http://cerner.healthstoz.com/Atoz/dc/caz/inf/vir/hz581.asp>.
- [3] WHO, Pandemic (H1N1) 2009 - update 76. http://www.who.int/csr/don/2009_11_27a/en/index.html.
- [4] WHO, Pandemic (H1N1) 2009 - update 93. http://www.who.int/csr/don/2010_03_26a/en/index.html.
- [5] Daily updates on H1N1 flu scrapped, Bangkok Post, 2009-07-16. Retrieved 2009-07-16.
- [6] Thailand and the H1N1 flu. http://www.hiso.or.th/hiso/picture/reportHealth/ThaiHealth2010/eng2010_17.pdf.
- [7] P. Pongsumpun and R. Kongmuy, Lyapunov function of dengue model in infant with maternal antibody, Far East J. Appl. Math. 57(2) (2011), 73-102.
- [8] T. Changpuek, P. Pongsumpun and I-Ming Tang, Analysis of mathematical model for swine flu transmission by age group, Far East J. Math. Sci. (FJMS) 73(2) (2013), 201-229.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนธ์นี้ พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

The Asian Mathematical Conference 2013

Program Abstracts

June 30(Sun)-July 4(Thu), 2013
BEXCO (Convention Hall), Busan, Korea

- Hosted by : KMS (Korean Mathematical Society)
SEAMS (Southeast Asian Mathematical Society)
- Organized by : KIAS (Korea Institute for Advanced Study)
NIMS (National Institute for Mathematical Sciences)
IBS CGP (Institute for Basic Science, Center for Geometry and Physics)
Organizing Committee for Seoul ICM 2014
- Supported by : CIMPA (Centre International de Mathematiques Pures et Appliquees)
NRF (National Research Foundation of Korea)
KOFST (Korean Federation of Science and Technology Societies)
KARC (Korea Academic Research Council)
KTO (Korea Tourism Organization)
BTO(Busan Tourism Organization)
- Special Session Supported by : ASARC (Algebraic Structure and its Applications Research Center)
ICME-12 (The 12th International Congress on Mathematical Education)
PARC (PDE and Functional Analysis Research Center)
SRC-GAIA (The Center for Geometry and its Applications)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนิตวี พงศ์ทวีวัฒน์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Contents

About this Book and the Schedule

A. Words of Welcome	
B. Introduction of Plenary Speakers	5
C. Time Schedule	12
D. Program	
The program day by day	19
Plenary Lectures	33
Schedule of Sessions SS-01 – SS-15	34
SS-01: Logic / Foundations / History of Mathematics / Mathematics Education	34
SS-02: Algebra / Representation Theory / Lie Theory	37
SS-03: Number Theory	43
SS-04: Algebraic Geometry / Complex Geometry	45
SS-05: Combinatorics / Graph Theory / Cryptography / Coding Theory	
• Combinatorics / Graph Theory	47
• Cryptography / Coding Theory	51
SS-06: Geometry	54
SS-07: Topology	58
SS-08: Analysis (Real / Complex / Harmonic Analysis)	60
SS-09: Functional Analysis and Applications	64
SS-10: Ordinary Differential Equations / Dynamical Systems	67
SS-11: Partial Differential Equations	71
SS-12: Probability / Stochastic Process / Statistics	74
SS-13: Control Theory / Optimization	80
SS-14: Numerical Analysis / Scientific Computations	
/ Mathematics in Science and Technology	83
SS-15: Variational Methods in Nonlinear Problems	90
E. Special Activities	92
F. Abstracts	97
G. List of Authors	307
H. Other Information	
Committees	319
Social Activities	322
Practical Information	325
Accommodations	329
Co-operating organizations, institutions, sponsors and donators	330
Exhibitions	331
Map of Convention Hall and BEXCO	334

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนุชนิ พงศ์สัมพันธ

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

SS-10. Ordinary Differential Equations / Dynamical Systems

Time: July 2 (Tue.) 16:30 – 16:50, Room. 201

CT-17. Stability analysis of H1N1 transmission model between two population groups

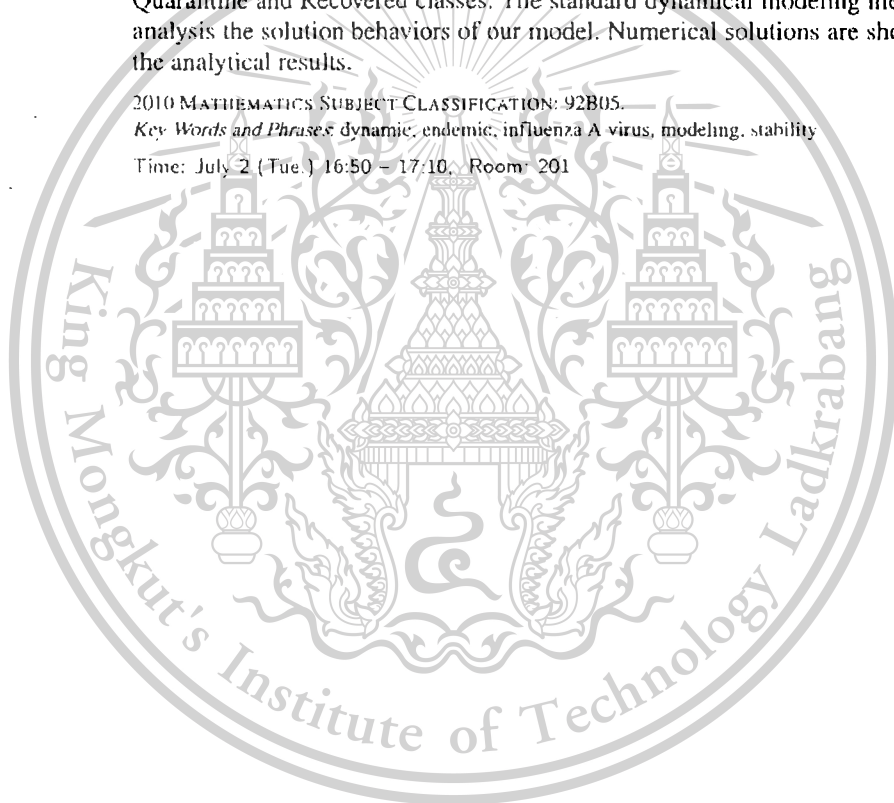
Puntani Pongsumpun, Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

Influenza A (H1N1) virus is endemic in humans and can be found worldwide. This disease is spread between the people through coughing or sneezing. Some people may also become infected by touching something, contaminated with flu viruses and then touching their eyes, nose or mouth. Mathematical model of this disease is formulated by separating the human into two groups depending on the chance of getting infected with this disease. In each group, the human is subdivided into 5 classes, ie. Susceptible, Exposed, Infectious, Quarantine and Recovered classes. The standard dynamical modeling method is used for analysis the solution behaviors of our model. Numerical solutions are showed to confirm the analytical results.

2010 MATHEMATICS SUBJECT CLASSIFICATION: 92B05.

Key Words and Phrases: dynamic, endemic, influenza A virus, modeling, stability

Time: July 2 (Tue.) 16:50 – 17:10, Room. 201



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รongศาสตราจารย์ ดร.พนธวี พงศ์สัมพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



Model for the Transmission of Influenza Pandemic Due to a New-Strain of the H1N1 Influenza a Virus with the Risk of Infection in Human

Puntani Pongsumpun

Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang,
Chalongkrung road, Ladkrabang, Bangkok, THAILAND

ABSTRACT

A New-strain of the H1N1 Influenza A Virus is transmitted between the people through coughing and sneezing. The virus spreads when droplets from a cough or sneeze of an infected person are propelled through the air and deposited on the mouth or nose of people nearby. This virus can also be contacted by touching something, contaminated with flu viruses and then touching their eyes. We study the transmission of this disease by constructing the mathematical model. The model is formulated by dividing the human into 5 groups such that Susceptible, Exposed, Infectious, Quarantine and Recovered classes. The contact between risk and non-risk groups is considered. Analysis of our dynamical model is done by using standard dynamical modeling method. The analytical and numerical results are given.

KEYWORDS: Basic reproductive number, Influenza A virus, model, risk, Routh-Hurwitz, SEIQR model, standard dynamical modeling method.

INTRODUCTION

H1N1 virus transmission is usually found in many countries of the world. The most active areas of pandemic influenza virus transmission currently are in parts of Southeast Asia, West Africa, and in tropical zone of the Americas [1]. Influenza A, influenza B and influenza C are sub three types of Influenza virus. Three types of influenza can cause human flu. Influenza A viruses also infect both pigs and birds, influenza C virus infects pigs but do not infect birds. When influenza virus from different species infects pigs, the virus can be reassortment, a process through two or more influenza viruses can swap genes, produce new and dangerous strains [2]. When reassortment occurs, the emergent virus will have some gene segments from each of the infecting parent viruses and may have different characteristics than either of the parental viruses. It has been determined that the swine flu strain contains genes from five different flu viruses: North American swine influenza, North American avian influenza, human influenza and two swine influenza viruses typically found in Asia and Europe [3]. Over the years, different variations of swine flu viruses have emerged. At this time, there are four main influenza A subtypes that have been isolated in pigs: H1N1, H1N2, H3N2, and H3N1. However, most of the recently isolated influenza virus from pigs is H1N1 virus [4]. The H1N1 influenza virus is "very unstable", meaning it could mix and swap genetic material (reassortment) when exposed to other viruses, whereas a stable (seasonal flu) virus is less likely to take on genetic material. The H1N1 swine flu virus is a human virus spread by people and not by pigs. The only way to get the new swine flu is from another person. The cross-species infectious (swine virus to man or human flu virus to pigs) have remained in local areas and have not caused national or worldwide infections in either pigs or humans. The symptoms of H1N1 patients are fever, cough, sore throat, body aches, headache, chills and fatigue, diarrhea and vomiting (may possible) in children, signs of severe disease include apnea, tachypnea, dyspnea, cyanosis, dehydration, altered mental status, and extreme irritability [5], [6]. The virus can transmit when a person touches droplets on surface and then touches their own mouth or nose before washing their hands. After infection it usually takes 1 to 4 days before each person becomes ill. H1N1 cases can start spread flu germs up to a day before symptoms start, and for up to seven days after getting sick [7]. Seasonal influenza occurs every year and the viruses change in each year, but many people have some immunity to the circulating virus that helps limit infections. By contrast, the pandemic swine flu virus was a new virus when it emerged and most people had no or little immunity to it. Therefore, vaccines from human seasonal flu would not provide protection from H1N1 swine flu viruses. A study at the CDC published in May 2009 found that children had no preexisting immunity to the new strain but that adults, particularly those over 60, had some degree of immunity. Children showed no cross-reactive antibody reaction to the new strain, adults aged 18 to 64 had 6-9%, and older adults 33%. New vaccines against H1N1 virus are made by growing virus particles in eggs. A serious side effect to vaccines can occur in people who are allergic to eggs: these people should not get flu vaccines. Individuals with active infections or diseases of the nervous system are also not recommended to get flu vaccines. Kids under age 10 years old will need two vaccinations, given apart three weeks [8]. The people who have already been infected with the virus will not receive the vaccine.

*Corresponding Author: Puntani Pongsumpun, Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalongkrung Road, Ladkrabang, Bangkok, THAILAND, 10520 kppuntan@kmutl.ac.th

Pongsumpun, 2013

Neil M Ferguson and et al. [9] formulated the model of influenza transmission to simulate the impact of neuraminidase inhibitor therapy on infectious rates and transmission of drug-resistant viral strains. D. Klinkenberg, A. Everts-van der Wind and et al. [10] presented a model of CSFV transmission between pig herds which quantifies the effect of control strategies with and without vaccination and estimate the model parameters from data of the 1997/1998 CSFV epidemic in the Netherlands. Fraser et al. [11] constructed the dynamics of influenza A (H1N1) in the human population, but they did not include cross-species transmission. In 2010, P.Pongsumpun [12] formulated the dynamical model of swine flu transmission of H1N1 but the contact rate between risk and non-risk humans was not considered. In this study, H1N1 virus transmission is studied by constructing the mathematical model considering the chance of getting infected with this disease. The remainder of the paper is organized as follows: In section II. Model equations are given. In section III. Analytical results of our model equations are shown. In section IV, Numerical results are presented to confirm analytical results. Finally, in section IV. Discussion and conclusion are given.

MODEL EQUATIONS

In this study, we consider the transmission of H1N1 between two population groups: risk and non-risk groups. Each group is divided into four classes such as susceptible, exposed, infectious, quarantine and recovered classes. We define the variables as follows:

$S_i(t)$ be the number of susceptible human class i^{th} at time t ,

$E_i(t)$ be the number of exposed human class i^{th} at time t ,

$I_i(t)$ be the number of infectious human class i^{th} at time t ,

$Q_i(t)$ be the number of quarantine human class i^{th} at time t ,

$R_i(t)$ be the number of recovered human class i^{th} at time t ,

where $i = 1$ and 2 denote risk and non-risk classes, respectively. The idea of formulating our model is given in fig.1.

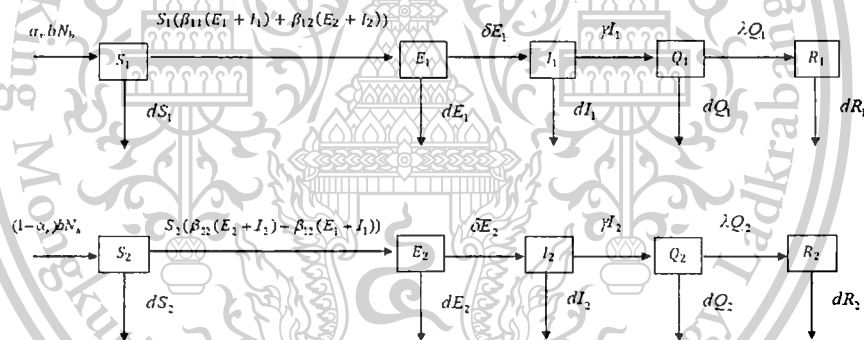


Fig.1 Transmission diagram of H1N1

The dynamical equations are described as follows:
 For the risk human class:

$$\frac{d}{dt} S_1(t) = \alpha, bN_1 - S_1(t)(\beta_{11}(E_1(t) + I_1(t)) + \beta_{12}(E_2(t) + I_2(t))) - dS_1(t). \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt} E_1(t) = S_1(t)(\beta_{11}(E_1(t) + I_1(t)) + \beta_{12}(E_2(t) + I_2(t))) - (\delta + d)E_1(t). \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt} I_1(t) = \delta E_1(t) - (\gamma + d)I_1(t), \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt} Q_1(t) = \gamma I_1(t) - (\lambda + d)Q_1(t), \tag{4}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 วิศวกรรมศาสตราจารย์ ดร. พงษ์พันธ์ พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$\frac{d}{dt} R_1(t) = \lambda Q_1(t) - dR_1(t) \tag{5}$$

For the non-risk human class:

$$\frac{d}{dt} S_2(t) = (1 - \alpha_r) b N_h - S_2(t) (\beta_{22}(E_2(t) + I_2(t)) + \beta_{12}(E_1(t) + I_1(t))) - dS_2(t), \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt} E_2(t) = S_2(t) (\beta_{22}(E_2(t) + I_2(t)) + \beta_{12}(E_1(t) + I_1(t))) - (\delta + d) E_2(t), \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt} I_2(t) = \delta E_2(t) - (\gamma + d) I_2(t). \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt} Q_2(t) = \gamma I_2(t) - (\lambda + d) Q_2(t). \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt} R_2(t) = \lambda Q_2(t) - dR_2(t). \tag{10}$$

where the parameters are defined as follows:

b is the birth rate of human populations.

α_r is the risk probability of human populations to be infected with H_1N_1 .

β_{11} is the contact rate of H_1N_1 between risk human classes.

β_{12} is the contact rate of H_1N_1 between risk and non-risk human classes.

β_{22} is the contact rate of H_1N_1 between non-risk human classes.

δ is the rate at which exposed human change to be infectious human.

γ is the rate at which infectious human change to be quarantine human.

λ is the rate at which quarantine human change to be recovered human.

N_h is the total human population.

d is the death rate of human population.

We define N_1 is the total risk human class, N_2 is the total non-risk human class and N_h is the total population. Suppose that the total risk group, non-risk group and total population are constant. So rate of change for each group equals to zero. We obtain the relations as follows:

$$b = d, N_1 = \alpha_r N_h \text{ and } N_2 = (1 - \alpha_r) N_h.$$

We normalize our model equations by letting

$$s_j = S_j / N_j, e_j = E_j / N_j, i_j = I_j / N_j, q_j = Q_j / N_j, r_j = R_j / N_j \quad j = 1, 2. \text{ The reduced equations become}$$

$$\frac{d}{dt} s_1(t) = \alpha_r b (1 - \frac{N_2}{N_1}) - (d + \beta_{11}(e_1 + i_1)N_1 + \beta_{12}(e_2 + i_2)N_2) s_1. \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt} e_1(t) = (\beta_{11}(e_1 + i_1)N_1 + \beta_{12}(e_2 + i_2)N_2) s_1 - (d + \delta) e_1, \tag{12}$$

$$\frac{d}{dt} i_1(t) = \delta e_1 - (d + \gamma) i_1, \tag{13}$$

$$\frac{d}{dt} q_1(t) = \gamma i_1 - (d + \lambda) q_1, \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt} s_2(t) = b(1 - \alpha_r) + (1 - \alpha_r) b \frac{N_1}{N_2} - (d + \beta_{12}(e_1 + i_1)N_1 + \beta_{22}(e_2 + i_2)N_2) s_2, \tag{15}$$

$$\frac{d}{dt} e_2(t) = \beta_{12}(e_1 + i_1)N_1 s_2 + \beta_{22}(e_2 + i_2)N_2 s_2 - (d + \delta) e_2, \tag{16}$$

$$\frac{d}{dt} i_2(t) = \delta e_2 - (d + \gamma) i_2, \tag{17}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนธวี พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Pongsumpun, 2013

$$\frac{d}{dt} q_2(t) = \gamma i_2 - (d + \lambda) q_2, \tag{18}$$

with the conditions :

$$s_j + e_j + i_j + q_j + r_j = 1; j = 1, 2. \tag{19}$$

ANALYTICAL RESULTS

We use standard dynamical modeling method for analysis our model. To find steady states of our equations, we set the dynamical change of each population class equivalent to zero: ie.

$$\frac{d}{dt} s_j(t) = \frac{d}{dt} e_j(t) = \frac{d}{dt} i_j(t) = \frac{d}{dt} q_j(t) = 0, j = 1, 2.$$

The steady states are given as follows:

i) Disease free steady state: $M_1 = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ (20)

ii) Disease endemic state: $M_2 = (s_1^*, e_1^*, i_1^*, q_1^*, s_2^*, e_2^*, i_2^*, q_2^*)$ (21)

where $s_j^* = \frac{b - (b + \delta) e_j^*}{b}, e_j^* = \frac{(b + \gamma) i_j^*}{\delta}, q_j^* = \frac{\gamma}{b + \lambda} i_j^*; j = 1, 2$ (22)

and $i_j^*; j = 1, 2$ are found by solving equations

$$2(d\delta + (d + \delta)(d + \gamma)i_1^* + (d + \delta + \gamma)(-b\delta + (d + \delta)(d + \gamma)i_1^*)(\alpha_r\beta_1i_1^* + \beta_1i_2^* - \alpha_r\beta_2i_2^*)N_h) = 0 \text{ and} \tag{23}$$

$$2(d\delta + (d + \delta)(d + \gamma)i_2^* + (d + \delta + \gamma)(-b\delta + (d + \delta)(d + \gamma)i_2^*)(\alpha_r\beta_1i_1^* + \beta_2i_2^* - \alpha_r\beta_2i_2^*)N_h) = 0 \tag{24}$$

The locally asymptotical stable of each steady state is determined by the sign of eigenvalues for each steady state. If all eigenvalues have negative real parts, then that steady state is local stability [13]. The eigenvalues are obtained by solving the following characteristic equation

$$\det(J_{M_j} - \lambda I_8) = 0; j = 1, 2. \tag{25}$$

where I_8 is the identity matrix dimension 8×8 and J_{M_j} is the Jacobian matrix of the steady state $M_j; j = 1, 2$.

For the disease free steady state $M_1 = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$, the Jacobian matrix is given by

$$J_{M_1} = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & j_{14} & j_{15} & j_{16} & j_{17} & j_{18} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & j_{24} & j_{25} & j_{26} & j_{27} & j_{28} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & j_{34} & j_{35} & j_{36} & j_{37} & j_{38} \\ j_{41} & j_{42} & j_{43} & j_{44} & j_{45} & j_{46} & j_{47} & j_{48} \\ j_{51} & j_{52} & j_{53} & j_{54} & j_{55} & j_{56} & j_{57} & j_{58} \\ j_{61} & j_{62} & j_{63} & j_{64} & j_{65} & j_{66} & j_{67} & j_{68} \\ j_{71} & j_{72} & j_{73} & j_{74} & j_{75} & j_{76} & j_{77} & j_{78} \\ j_{81} & j_{82} & j_{83} & j_{84} & j_{85} & j_{86} & j_{87} & j_{88} \end{pmatrix}$$

where

$$j_{11} = -d, j_{12} = j_{13} = -\alpha_r\beta_{11}N_h, j_{14} = j_{15} = 0, j_{16} = j_{17} = (-1 + \alpha_r)\beta_{12}N_h, j_{18} = 0.$$

$$j_{21} = 0, j_{22} = -d - \delta + \alpha_r\beta_{11}N_h, j_{23} = \alpha_r\beta_{11}N_h, j_{24} = j_{25} = 0, j_{26} = j_{27} = (1 - \alpha_r)\beta_{12}N_h, j_{28} = 0,$$

$$j_{31} = 0, j_{32} = \delta, j_{33} = -d - \gamma, j_{34} = j_{35} = j_{36} = j_{37} = j_{38} = 0,$$

$$j_{41} = j_{42} = 0, j_{43} = \gamma, j_{44} = -d - \lambda, j_{45} = j_{46} = j_{47} = j_{48} = 0.$$

$$j_{51} = 0, j_{52} = -\alpha_r\beta_{12}N_h, j_{53} = -\alpha_r\beta_{12}N_h, j_{54} = 0, j_{55} = -d, j_{56} = (-1 + \alpha_r)\beta_{22}N_h, j_{57} = (-1 + \alpha_r)\beta_{22}N_h, j_{58} =$$

$$j_{61} = 0, j_{62} = j_{63} = \alpha_r\beta_{12}N_h, j_{64} = j_{65} = 0, j_{66} = -d - \delta + (1 - \alpha_r)\beta_{22}N_h, j_{67} = (1 - \alpha_r)\beta_{22}N_h, j_{68} = 0.$$

$$j_{71} = j_{72} = j_{73} = j_{74} = j_{75} = 0, j_{76} = \delta, j_{77} = -d - \gamma, j_{78} = 0,$$

$$j_{81} = j_{82} = j_{83} = j_{84} = j_{85} = j_{86} = 0, j_{87} = \gamma, j_{88} = -d - \lambda.$$

The characteristic equation is defined by

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร. พันชนัน พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$(d + \eta)^2(d + \lambda + \eta)^2(\eta^4 + A_3\eta^3 + A_2\eta^2 + A_1\eta + A_0)$$

where

$$A_3 = 4d + 2(\delta + \gamma)(\alpha_r(\beta_{11} - \beta_{22}) + \beta_{22})N_h,$$

$$A_2 = 6d(d + \delta + \delta^2 + \gamma) + \gamma(4\delta + \gamma)(\alpha_r(\beta_{11} - \beta_{22}) + \beta_{22})(3d + 2(\delta + \gamma))N_h + (-1 + \alpha_r)\alpha_r,$$

$$A_1 = 2(d + \delta)(d + \gamma)(2d + \delta + \gamma)(\alpha_r(\beta_{11} - \beta_{22}) + \beta_{22})(3d^2 + \delta^2 + 3\delta\gamma + \gamma^2 + 4d(\delta + \gamma))N_h + 2(-1 + \alpha_r)\alpha_r(\beta_{12}^2 - \beta_{11}\beta_{22})(d + \delta + \gamma)N_h^2,$$

$$A_0 = (d + \delta)^2(d + \gamma)^2(\alpha_r(\beta_{11} - \beta_{22}) + \beta_{22})(d + \delta)(d + \gamma)(d + \delta + \gamma)N_h + (-1 + \alpha_r)\alpha_r(\beta_{12}^2 - \beta_{11}\beta_{22})(d + \delta + \gamma)^2N_h^2.$$

Routh Hurwitz criteria can ensure eigenvalues with negative real parts [13]. If the characteristic equation satisfy Routh Hurwitz criteria, we can say that the steady state is local stability. Thus, this disease free state will be

local stability when $\bar{V}_0 < 1$; where $\bar{V}_0 = \frac{(\alpha_r\beta_{11} + \beta_{22}(1 - \alpha_r))N_h}{2b(2b + \delta + \gamma)}$. (26)

On similarly method, we found that the disease endemic state will be local stability when $\bar{V}_0 > 1$;

NUMERICAL RESULTS

The output of our model are simulated for 2 cases. The parameters are given as follows; $b = 1/(365 \cdot 65)$ corresponds to the life expectancy of 65 years for human, $\delta = 1/5$ corresponds to the 5 days at which the exposed human can change to be infectious human, $\gamma = 1/10$ corresponds to the 10 days at which quarantine human change to be recovered human. The other parameters are arbitrary chosen.

Case1 for $\bar{V}_0 < 1$.

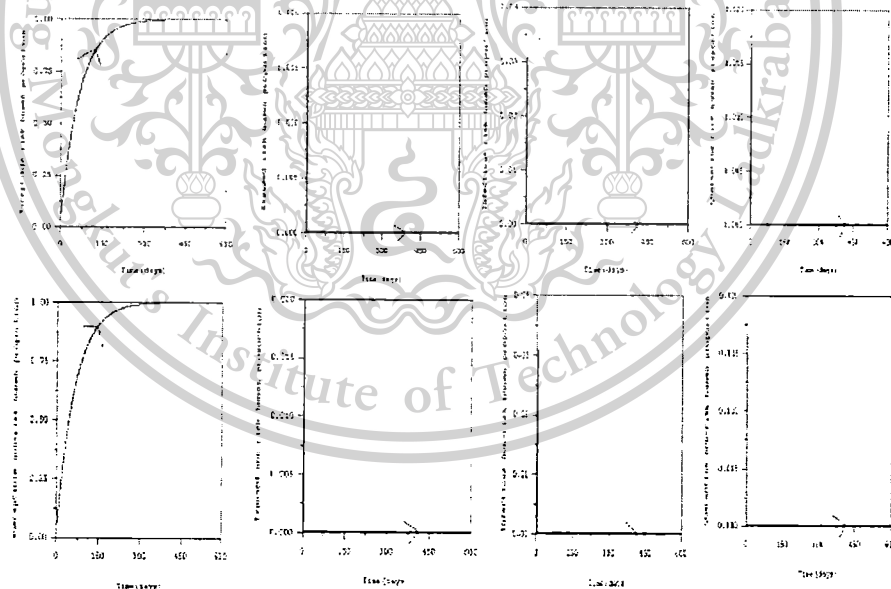


Fig.2 Time series solutions of susceptible, exposed, infectious and quarantine risk and non-risk human classes, respectively. The parameters are $\alpha_r = 0.5$, $b = 1/(365 \cdot 65)$,

$$\beta_{11} = 0.000001, \beta_{12} = 0.0000008, \beta_{22} = 0.0000002, \delta = 1/5, \gamma = 1/10.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนรัตน์ พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Pongsumpun, 2013

$$\lambda = 1/7, N_h = 1,000, \bar{V}_0 = 0.81.$$

Case2 for $\bar{V}_0 > 1$;

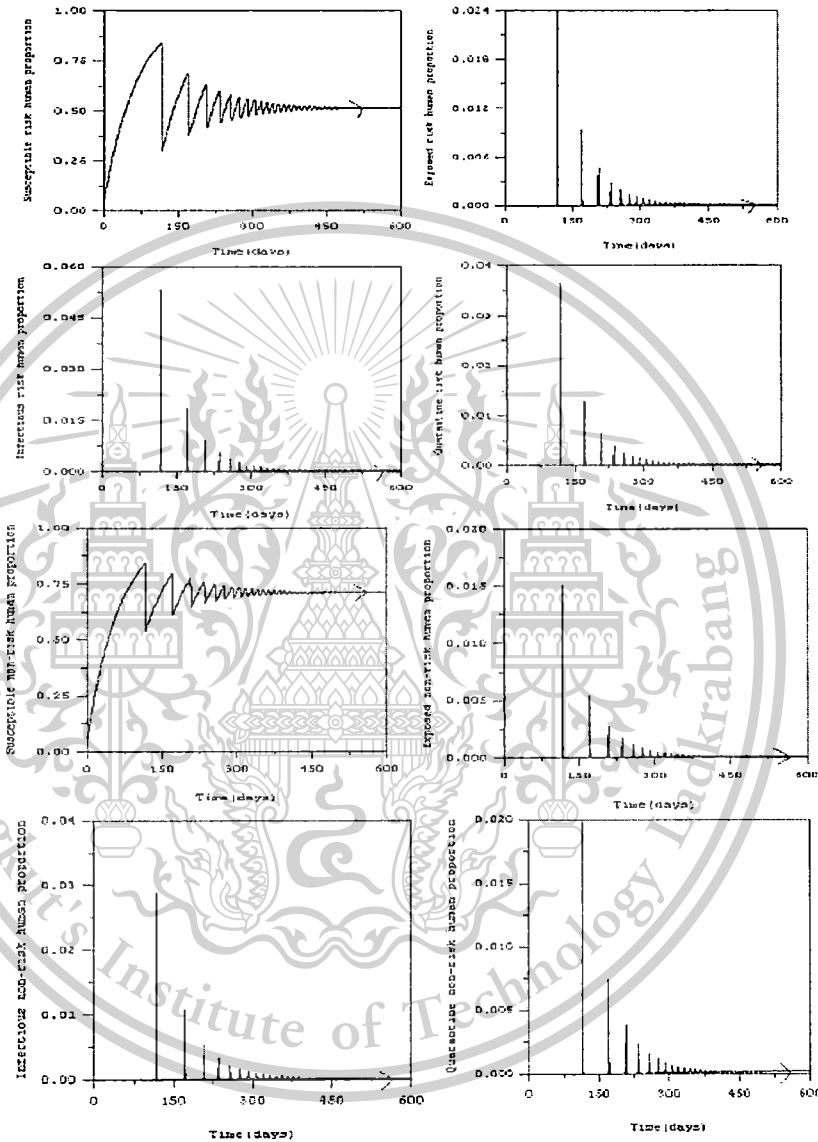


Fig.3 Time series solutions of susceptible, exposed, infectious and quarantine risk and non-risk human classes, respectively. The parameters are $\alpha_r = 0.5$, $b = 1/(365 \cdot 65)$,

$$\beta_{11} = 0.0002, \beta_{12} = 0.0001, \beta_{22} = 0.00002, \delta = 1/5, \gamma = 1/10, \lambda = 1/7, N_h = 1,000, \bar{V}_0 = 400.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนิตา พงศ์สัมพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

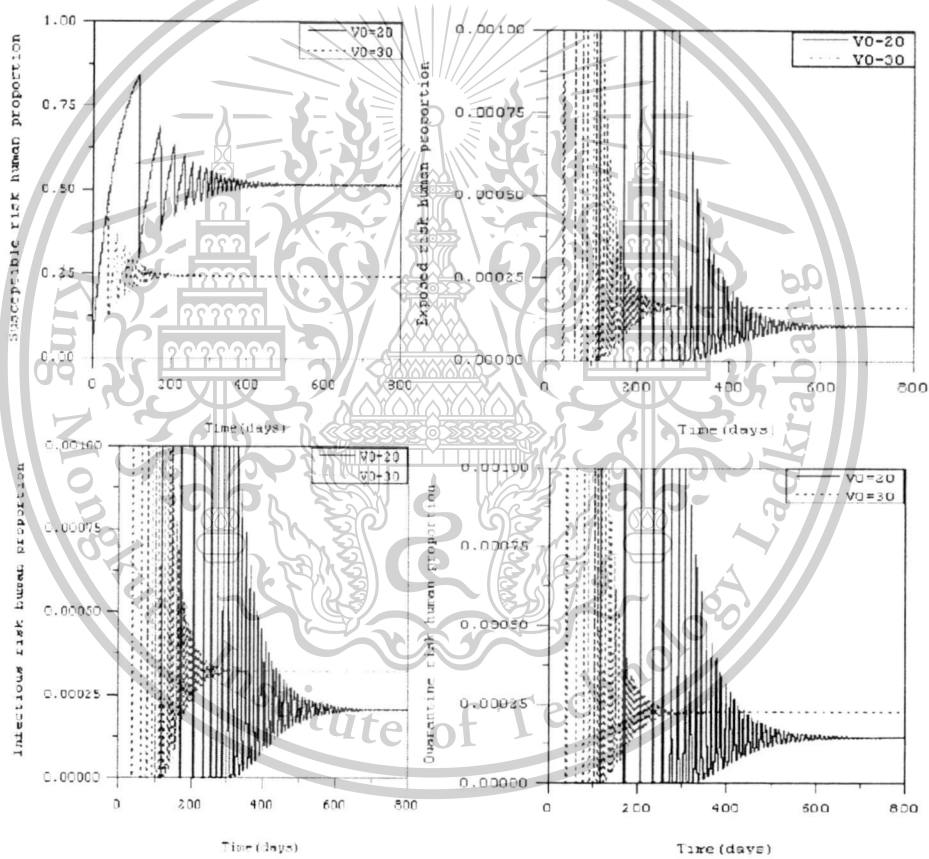
From fig.2 and fig 3, we can see that for $\bar{V}_0 < 1$, the fractions of populations converge to the disease free state $M_1 = (1,0,0,0,1,0,0,0)$. For $\bar{V}_0 > 1$, The fractions of populations oscillate to the endemic state $M_2 = (0.514,0.0001,0.0002,0.00014,0.710,0.00006,0.0001,0.00008)$

DISCUSSION AND CONCLUSION

In this study, we formulate the mathematical model of H1N1 virus and the chance of getting infected with this disease is considered. The threshold condition is defined by

$$\bar{V}_0 = \frac{(\alpha_r \beta_{11} + \beta_{22}(1-\alpha_r)N_h)}{2b(2b + \delta + \gamma)}$$

The basic reproductive number (V_0) is defined as the geometric mean of \bar{V}_0 [14]. It represents the number of secondary cases that one case can produce if introduced into a susceptible person. We compare the solution behaviors when there is the different basic reproductive numbers as shown in fig 4.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนธวี พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Pongsumpun, 2013

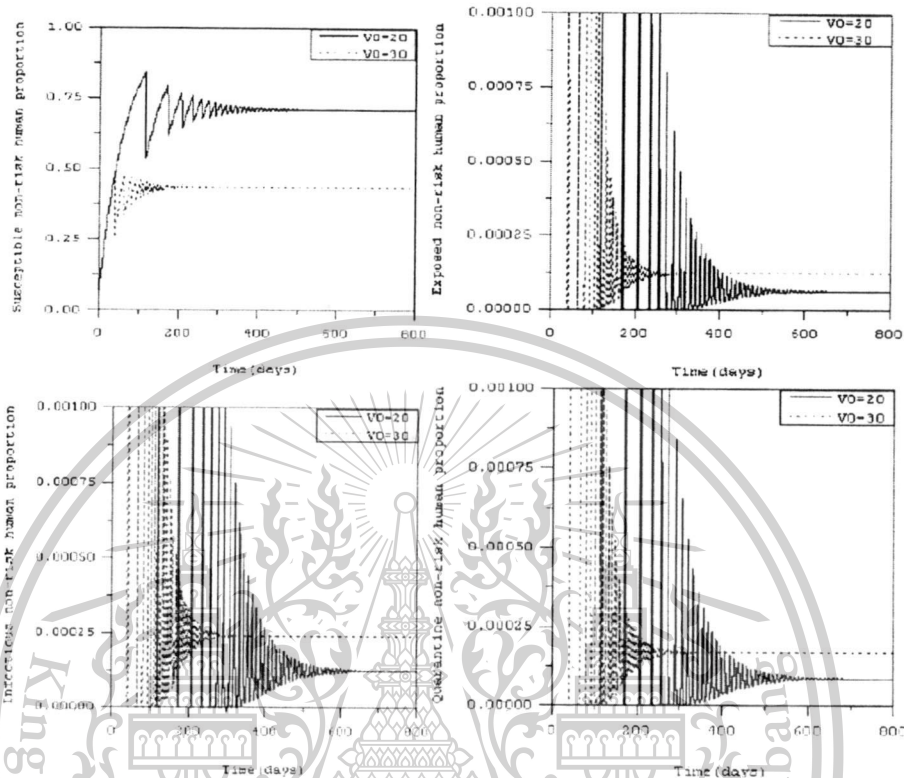


Fig 4 The comparison of solution behaviors when there is the different basic reproductive numbers.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนธวี พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

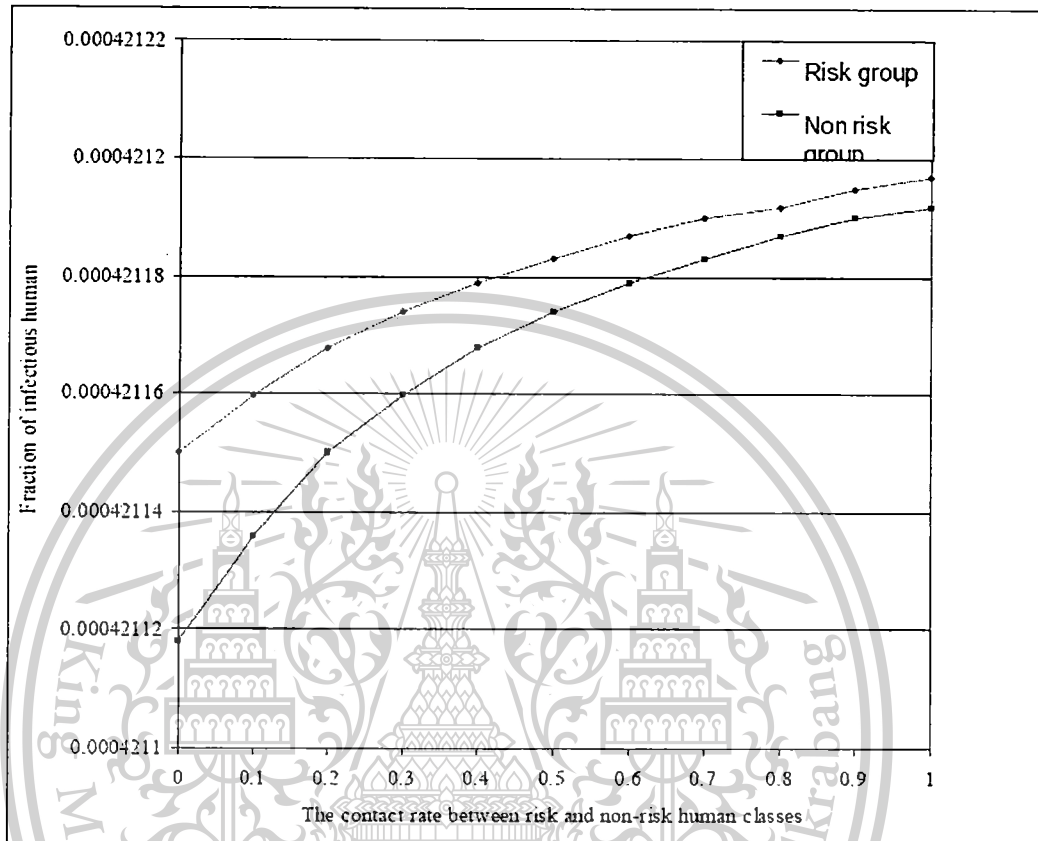


Fig.5 The fraction of infectious human versus the contact rate between risk and non-risk human classes.

From fig.4, we can see that the length of epidemic outburst is shorter and the fraction of populations is higher when the basic reproductive number is bigger. The period of oscillations as they oscillate to the endemic state by means of solutions of the linearized system are calculated, we get 9 days, 5 days for $V_0 = 20$ and $V_0 = 30$, respectively. This means that if the number of secondary infectious cases reproduced from primary cases is higher, then the time for controlling the epidemic outbreak is shorter. From fig.5, we can see that the fraction of infectious risk group is higher than the fraction of infectious non-risk group because the risk group has the higher chance of getting infected. The basic reproductive numbers are used for reducing the transmission of many diseases [15-18]. The simulated output of this model should introduce the way for reducing the transmission of this disease.

ACKNOWLEDGMENT

This work is supported by King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang Research Fund, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand. The author would like to thank Prof.Dr.I-Ming Tang at Mahidol University, Thailand.

REFERENCES

[1] WHO, Pandemic (H1N1) 2009 – update 93, Available: http://www.who.int/csr/don/2010_03_26a/en/index.html .
 [2] E Thacker, and B. Janke, "Swine influenza virus: zoonotic potential and vaccination strategies for the control of avian and swine influenzas." J.Infect. Dis. vol. 197 Suppl 1, pp. S19–24, 2008.

Pongsumpun, 2013

- [3] CDC, Origin of 2009 H1N1 Flu (Swine Flu): Questions and Answers, <http://www.cdc.gov/H1N1flu/qa.htm>.
- [4] CDC, Influenza (Flu): Key Facts about Swine Influenza (Swine Flu), December 6, 2006. <http://www.cdc.gov/H1N1flu/qa.htm>.
- [5] CDC, Interim Guidance for Clinicians on the Prevention and Treatment of Swine-Origin Influenza Virus Infection in Young Children. Centers for Disease Control and Prevention. Available at <http://www.cdc.gov/swineflu/childrentreatment.htm>.
- [6] CDC, Interim Guidance on Specimen Collection and Processing for Patients with Suspected Swine Influenza A (H1N1) Virus Infection. Centers for Disease Control and Prevention. Available at <http://www.cdc.gov/swineflu/specimencollection.htm>.
- [7] Massachusetts Department of Public Health, "H1N1 Flu (Swine Flu)". Public Health Fact Sheet, November 6, 2009.
- [8] CDC, Swine Influenza A (H1N1) Infection in Two Children -- Southern California, March--April 2009, *Morbidity and Mortality Weekly Report*, April 21 2009. <http://www.cdc.gov/mmwr/preview/mmwrhtml/mm58d0421a1.htm>.
- [9] M. F. Neil and et.al, "A population dynamic model for evaluating the potential spread of drug-resistant influenza virus infections during community-based use of antivirals", *Journal of Antimicrobial Chemotherapy*, 51, pp. 977-990, 2003.
- [10] D. Kliukenberg, A. Everts-van der Wind, et al., "Quantification of the effect of control strategies on classical swine fever epidemics", *Mathematical Biosciences* 186, 143-173, 2003.
- [11] C. Fraser and et.al, "Pandemic potential of a strain of influenza A(H1N1): early finding", *Science*, 2009.
- [12] P. Pongsumpun, "Swine flu transmission model in risk and non-risk human population", *World Academy of Science, Engineering and Technology* 68, 2010.
- [13] Leah E.K., *Mathematical models in biology*, Random House, Inc, 1998.
- [14] L. Esteva, and C. Vargas, "Analysis of dengue disease transmission model," *Math BioSci*, vol. 150, pp. 131-151, 1998.
- [15] R.M. Anderson, and R.M. May, *Infection Disease of Humans, Dynamics and Control*, Oxford U. Press: Oxford, 1991.
- [16] P. Pongsumpun, Age Structural Model of *Plasmodium Falciparum* Malaria Transmission, *Journal of Basic and Applied Scientific Research*, 2(7): pp 6358-6366, 2012.
- [17] P. Pongsumpun, Seasonal Transmission Model of Malaria by Age Group of Population, *Journal of Basic and Applied Scientific Research*, 2(7); pp.6657-6669, 2012.
- [18] P. Pongsumpun and S. Sangsawang, Local Stability Analysis for Age Structural Model of Chikungunya Disease, *Journal of Basic and Applied Scientific Research*, 3(3); pp.302-312, 2013.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนรัตน์ พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Subject 487974: Your manuscript has been accepted

Sender [Simeone Marino](#)

Recipient kppuntan@kmitl.ac.th

Copy simeonem@umich.edu, puntani_p@yahoo.com

Date 02.01.2014 01:30

Dear Dr. Pongsumpun,

The review of the Research Article 487974 titled "Dynamics of a New-strain of the H1N1 Influenza A Virus Incorporating the Effects of Repetitive Contacts," by Puntani Pongsumpun and I Ming Tang submitted to Computational and Mathematical Methods in Medicine, has been completed, and I am pleased to inform you that your manuscript has now been accepted for publication in the journal.

The publication process of your manuscript will be initiated upon the receipt of the electronic files. Please login to the Manuscript Tracking System at the link below using your username and password, and upload the electronic files of your final accepted version within the next 2-3 days.

<http://mts.hindawi.com/author/487974/upload.files/>

The electronic files should include the following:

- 1- Source file (Word or TeX/LaTeX).
- 2- Final PDF file of the accepted manuscript.
- 3- Editable Figure files (each figure in a separate eps/postscript/word file) if any, taking into consideration that tiff, jpg, jpeg, bmp formats are not editable.

Thank you again for submitting your manuscript to Computational and Mathematical Methods in Medicine.

Best regards,

Simeone Marino
simeonem@umich.edu

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธวี พงศ์ถิมาพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



Hindawi

Hindawi Publishing Corporation

[Puntani](#)

[Update My](#)

[Logout](#)



[Pongsumpun](#)

[Account](#)



- [Submit a Manuscript](#)
- [Author Activities](#)

Author Activities

MS Number	Title & Authors	Additional Files	Status
 487974 (Research Article)	Dynamics of a New-strain of the H1N1 Influenza A Virus Incorporating the Effects of Repetitive Contacts Puntani Pongsumpun, and I Ming Tang	 Reply to review reports	In Press

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนธ์ นพพิพัฒน์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

**ACCEPTED FOR PUBLICATION IN JOURNAL OF COMPUTATIONAL AND
MATHEMATICAL METHODS IN MEDICINE 2014**

Final Version Jan 3, 2014

**Dynamics of a New-strain of the H1N1 Influenza A Virus Incorporating
the Effects of Repetitive Contacts**

P. Pongsumpun¹, and I-Ming Tang^{2,3}

¹Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology
Ladkrabang

Chalongkrung road, Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand

²Department of Mathematics, Faculty of Science, Silpakorn University
Nakhon Pathom 73000, Thailand.

³Department of Physics, Faculty of Science, Mahidol University
Bangkok, 10400, Thailand.

ABSTRACT

The respiratory disease caused by the Influenza A Virus is occurring worldwide. The transmission for new-strain of the H1N1 Influenza A virus is studied by form-ulating a SEIQR (Susceptible-Exposed-Infectious-Quarantine-Recovered) model to describe its spread. In the present model, we have assumed that a fraction of the infected population will die from the disease. This changes the mathematical equations governing the transmission. The effect of repetitive contact is also included in the model. Analysis of the model by using standard dynamical modeling method is given. Conditions for the stability of equilibrium state are given. Numerical solutions are presented for different values of parameters. It is found that increasing the amount of repetitive contacts leads to a decrease in the peak numbers of exposed and infectious humans. A stability analysis shows that the solutions are robust.

Keywords: Disease transmission model, SEIQR model, Influenza A virus, repetitive contacts, standard dynamical analysis.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนุช นพศิริสัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

Corresponding author: Puntani Pongsumpun Email address: kppuntan@kmitl.ac.th

Introduction

Influenza virus can be divided into three types: influenza A, B and C. The virus is spread when droplets from a cough or sneeze of an infected person is propelled through the air and deposited on the mouth, nose or eye of persons nearby. The virus can also land on surfaces in the surrounding environment and survive on the surfaces for 24 hours if the surface is hard and around 20 minutes if the surface is soft. The subtype H1N1 (2009) influenza virus is one of the influenza viruses that can cause respiratory illnesses. It is related to the virus which caused the 1918 flu pandemic. It is now called the swine flu virus because the virus causing pigs in the United States to become sick shortly after the 1918 pandemic was identified as being the H1N1 virus [1].

Between 1997 and 2002, new strains of the H1N1 (three different subtypes and five different genotypes) started to emerge as the causes of influenza among pigs in North America. By 2009, a new virus began to spread among people in the American continent. It was identified as being related to the virus infecting the pigs in Mexico and was labeled as the H1N1 (2009) virus [WHO Bulletin, 24 April 2009]. This virus quickly spread to 160 countries and territories. By mid-2009, there were 135,000 cases and 816 deaths. The H1N1 (2009) virus has spread from the American continent to across the world, i.e., Europe, the Middle East, Asia, the Pacific and Africa, making this disease a pandemic.

In Thailand, H1N1 (2009) was isolated from pigs with an influenza-like symptom in 1990 [2]. In 2005, a new subtype of the virus H1N1 was isolated from pigs in Saraburi province [3]. Thai people quickly became sick with this virus. The most common clinical symptoms of the 2009 H1N1 influenza A pandemic was a fever, cough, sore throat, malaise, headache, vomiting and diarrhea. Other common symptoms are chills, myalgias and arthralgias [4-5]. These are also common to the symptoms of seasonal fever, so that proper diagnoses require laboratory tests. The most active areas of pandemic influenza virus transmission are now in parts of Southeast Asia, West Africa, and in the tropical zone of the Americas. The Centers for Disease Control and Prevention (CDC) recommends the antiviral drugs Tamiflu (oseltamivir) or Relenza (zanamivir)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พูนชน พงศ์ถวัลย์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

for treatment and prevention of infection with the swine flu virus. Antiviral drugs work best if started within 2 days of symptoms [6].

New strains of the influenza A virus constantly appear. For example, on March 29, 2013, the Chinese Center for Disease Control and Prevention discovered three human infections with an avian influenza A(H7N9) [7]. A total of 131 confirmed cases of human infection with avian influenza A (H7N9) virus have been reported to WHO by China National Health and Family Planning Commission and one case by the Taipei Centers for Disease Control (Taipei CDC). Although cases have been reported in both sexes and across a wide range of ages, most cases have occurred among middle-aged and older men. Thirty-two people have died, and most of the other cases are considered severe. In addition to the case reported by Taipei CDC (with a history of recent travel from Jiangsu), cases have been reported from Anhui, Fujian, Henan, Hunan, Jiangsu, Jiangxi, Shandong and Zhejiang, and the municipalities of Beijing and Shanghai. Seasonal Influenza A virus continues to spread among persons in area where H7N9 cases have been detected. The Chinese Centers for Disease Control and Prevention had reported that rates of influenza-like illness are consistent with expected seasonal flu levels.

Biological factors such as the duration of infectious period and social factors can influence the spread of this disease. Repetitiveness of contacts is also known to be the relevant factors effect to the transmission of droplet or contact transmitted diseases. In 2009, T.Smieszek, L.Fiebig and R.W.Scholz showed that random mixing models provide acceptable estimates of the total outbreak size if the number of contacts per day is high [8]. D. linkenberg, A .Everts-van der Wind, et al. [9] presented the strategy for emergency vaccination during an epidemic of classical swine fever virus (CSFV) and formulated a mathematical model of CSFV transmission between pig herds which quantifies the effect of control strategies with and without vaccination and estimate the model parameters from data of the 1997/1998 CSFV epidemic in the Netherlands.

Nishiura [10] that predictions based on mathematical modeling has two components; projections and forecasting. Projections involves the simulation of what would happen if certain assumptions and hypotheses are made while a forecasting is quantitative prediction of what will happen in the future. Weather forecasting is an attempt to predict what the weather at some times in the future will be. This can be done if the future is several days. Long term forecasting is

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนุชนัน พงศ์สัมพันธ์

ว่ากรรมใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

It is forbidden to modify the content, and cite the document when use.

impossible since the equations used for the forecasting are input sensitive equations meaning that the solutions depend on values of the initial values of the input which depend on random events. Prior to the 2009 pandemic, mathematical modeling offered projections on “what if” scenarios. Keeping this in mind, Chowell *et al.*, [11] used mathematical modeling to make projections on what would happen if nonmedical interventions such as school closing were used to control the spread of 2009 Influenza A/H1N1 pandemic in Mexico. Zhou and Guo [12] made projections on the spread of A/H1N1 virus when a vaccination program was used to control the pandemic. Jin *et al.*, [13] carried an analysis of an A/H1N1 epidemic if it occurred on a network and what it would be if different vaccination policies were applied at different points on the network. Prosper *et al.*, [14] looked at the control strategies for the pandemic H1N1 influenza in a background of seasonal influenza which affects a greater number of people.

In this paper, we study the transmission of a new H1N1 Influenza A Virus in human with the effect of repetitive contact taken into consideration. A statistical model was developed to estimate the social contact network within a high school using friendship network data and a survey of contact behavior [15]. We consider the transmission of a new-strain of the H1N1 Influenza A Virus with the effect of repetitive contact included by constructing the mathematical model. We employ an SEIQR model (S denoted susceptible human; E, exposed; I, infectious; Q, quarantine and R denotes a recovered human) [16] to describe the transmission of the new virus in the population. Any new strains of influenza pose a danger to society since the populace does not have any immunity to the virus and therefore there is a greater chance that some of the infected people will die. We have taken into account the possibility that some of the infected populace will die in the model. We have simulated the effects of varying the number of repetitive contacts, the percentage of infected individuals being put in quarantine and allowing for infected individuals to die from the disease.

Dynamical equations

We consider the transmission of H1N1 Influenza A Virus' in human. We have included the effect of repetitive contact and take into account that people having a prior illness have a higher mortality rate. We begin by defining

$S(t)$ as being the number of susceptible persons at time t ;

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร. พันธุ์ พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$E(t)$, the number of exposed persons at time t ;

$I(t)$, the number of infectious persons at time t ;

$Q(t)$, being the number of quarantine persons at time t ;

$R(t)$ be the number of recovered persons at time t ,

Our model is based on the standard SEIQR (susceptible, exposed, infected, quarantine, recovered) model for contact transmission. A susceptible human becomes an exposed person if he comes in contact, direct or indirect (i.e., by touching a surface on which the new strain of the H1N1 virus may lie). If C is the number of contacts a human makes with someone who could pass on the virus, then $C(E(t) + I(t))$ is the number of contacts which could result in a person being exposed to the virus. $S(t)/N(t)$ ($N(t)$ being the total number of humans at time t) is the probability that the person being contacted is a susceptible human. If a certain percentage of the contacts are repeated ones, then the increase in the number of exposed human is given by

$$(1-r_c)CS(t) \frac{E(t) + I(t)}{N(t)} \quad (1)$$

where r_c is the percentage of contacts which are repetitious. These contacts do not lead to a new exposed human. It should also be noted that just because a person comes in contact with an exposed person, he may not come in contact with the virus. We also do not know at what point a person exposed to a virus becomes infectious, we must assume that an exposed person could transmit the virus before he is placed in the infectious class.

The change in the number of humans in any group is equal to the number entering the group minus the number leaving the group. Thus the change in the number of susceptibles is equal to the number of people entering into the population (λ_h is the birth rate of humans) minus the number of susceptibles being exposed to people (given by eqn. (1)) and the number of susceptibles dying from natural causes.

$$\frac{d}{dt}S(t) = \lambda_h N(t) - (1-r_c)CS(t) \frac{E(t) + I(t)}{N(t)} - d_n S(t) \quad (2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธ์มี พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

The number of humans exposed to the N1H1 virus is equal to the number of susceptibles exposed (again given by eqn. (1)) to the virus minus those who recover,

who become infectious and who die (by a natural cause or an induced cause), i.e.,

$$\frac{d}{dt}E(t) = (1-r_c)CS(t)\frac{E(t)+I(t)}{N} - \left(\rho + \frac{1}{IP} + d_n + \delta d_h\right)E(t) \quad (3)$$

In this equation, δd_h is the additional death rate caused by the new virus for which the human population has no immunity. The change in the number of infectious humans is equal to the percentage of the exposed humans, who develop into infectious humans minus the number of infectious humans who are placed in quarantine, who die from any cause and who recover,

$$\frac{d}{dt}I(t) = \frac{1}{IP}E(t) - (\alpha + \gamma + d_n + \delta d_h)I(t) \quad (4)$$

The change in the number of humans who are quarantine is equal to the percentage of infectious humans who are placed into quarantine minus the number who die or recover.

$$\frac{d}{dt}Q(t) = \gamma I(t) - (k + d_n)Q(t) \quad (5)$$

Finally, the change in the number of recovered humans is equal to the number of exposed humans, infectious humans and quarantine humans recover minus the number of recovered who die from natural causes.

$$\frac{d}{dt}R(t) = \rho E(t) + \alpha I(t) + kQ(t) - d_n R(t) \quad (6)$$

The total number of humans is the sum of the five population groups at time t , i.e.,

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + Q(t) + R(t). \quad (7)$$

Then (7) becomes

$$\frac{d}{dt}N(t) = \lambda_h N(t) - d_n N(t) - \delta d_h (E(t) + I(t)). \quad (8)$$

With the assumption that $\lambda_h = d_n$, then we have

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร. พันธณี พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$\frac{d}{dt} N(t) = -\delta d_h (E(t) + I(t)) \tag{9}$$

If the summation of I_h and E_h are not equal to zero, the human population will decline.

The flow chart of this model is shown in Figure 1. A summary of the definitions of the parameters of our dynamical equations are given in table 1. We reduce our dynamical equations by introducing the new variables:

$$s(t) = \frac{S(t)}{N(t)}, e(t) = \frac{E(t)}{N(t)}, i(t) = \frac{I(t)}{N(t)}, q(t) = \frac{Q(t)}{N(t)}, r(t) = \frac{R(t)}{N(t)}. \tag{10}$$

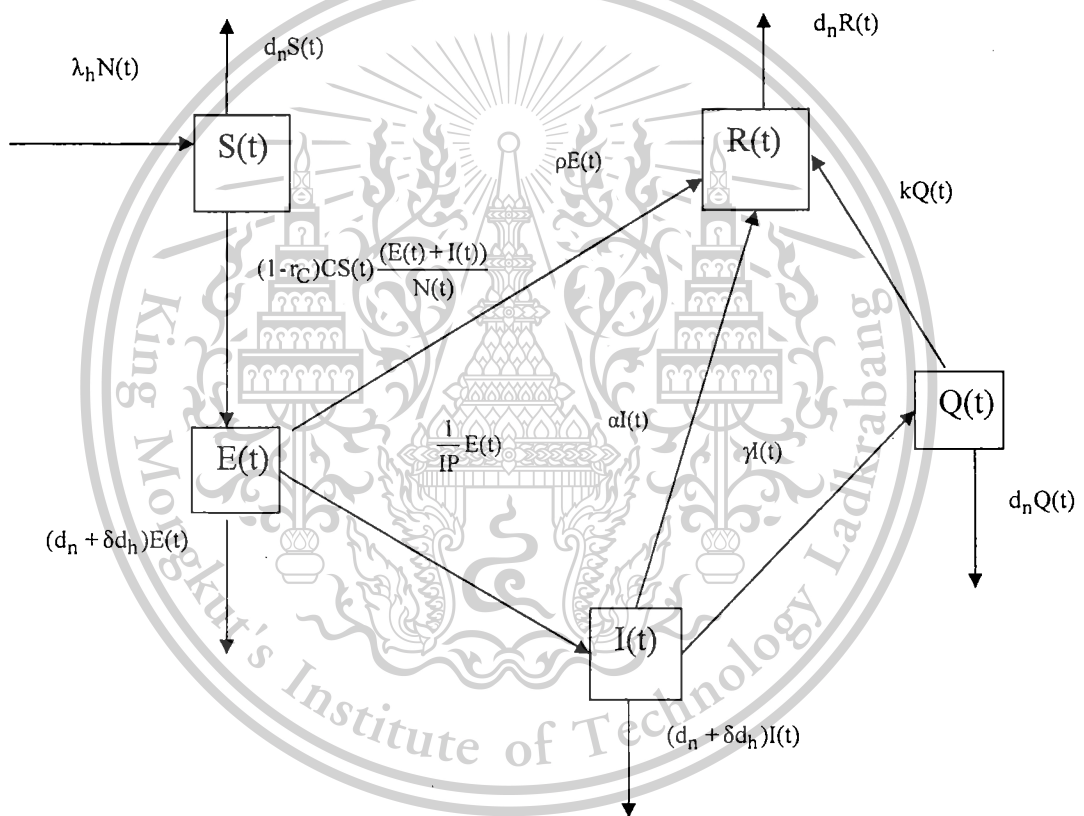


Fig.1 Flow chart of the dynamics in the model.

Table1: Definitions of our parameters in our dynamical equations

Parameters	Definition
λ_h	Birth rate of human population
r_c	Percentage of contacts which are repetitive
C	Contact rate of H1N1 between the human population
d_n	Natural mortality rate of human population
δd_h	Increase in the mortality rate of human population caused by the disease per 1 time infection
ρ	Rate at which exposed human change to be recovered human
IP	Incubation period of H1N1 in human population
K	Rate at which quarantine human change to be recovered human
α	Rate at which infectious human change to be recovered human
γ	Rate at which infectious human change to be quarantine human
$N(t)$	Total human population at time t

Taking the time derivative of a normalized population $x(t) = \frac{X(t)}{N(t)}$, then

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{d}{dt} \frac{X(t)}{N(t)} = \frac{1}{N(t)} \frac{d}{dt} X(t) - x(t) \frac{1}{N(t)} \frac{d}{dt} N(t) \quad (11)$$

Substituting $\frac{d}{dt} N(t) = -\delta d_h (E(t) + I(t))$ in (11), then we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= \frac{1}{N(t)} \frac{d}{dt} X(t) - x(t) \frac{1}{N(t)} (-\delta d_h (E(t) + I(t))) \\ &= \frac{1}{N(t)} \frac{d}{dt} X(t) - x(t) \frac{1}{N(t)} (-\delta d_h (e(t)N(t) + i(t)N(t))) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธ์นัฐ พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$= \frac{1}{N(t)} \frac{d}{dt} X(t) - x(t) (- \delta d_h (e(t) + i(t)))$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{N(t)} \frac{d}{dt} X(t) + x(t) (\delta d_h (e(t) + i(t))),$$

Therefore, we get $\frac{d}{dt} x(t) = \frac{1}{N(t)} \frac{d}{dt} X(t) + \delta d_h x(t) (e(t) + i(t)).$ (12)

With the above equation, the dynamical equations of the normalized populations are given by

$$\frac{d}{dt} s(t) = \lambda_h - (1 - r_c)Cs(t)(e(t) + i(t)) - d_n s(t) + \delta d_h s(t) (e(t) + i(t))$$
 (13)

$$\frac{d}{dt} e(t) = (1 - r_c)Cs(t)(e(t) + i(t)) - (\rho + \frac{1}{IP} + d_n + \delta d_h)e(t) + \delta d_h e(t) (e(t) + i(t))$$
 (14)

$$\frac{d}{dt} i(t) = \frac{1}{IP} e(t) - (\alpha + \gamma + d_n + \delta d_h)i(t) + \delta d_h i(t) (e(t) + i(t))$$
 (15)

$$\frac{d}{dt} q(t) = \gamma i(t) - (k + d_n)q(t) + \delta d_h q(t) (e(t) + i(t))$$
 (16)

$$\frac{d}{dt} r(t) = \rho e(t) + \alpha i(t) + kq(t) - d_n r(t) + \delta d_h r(t) (e(t) + i(t))$$
 (17)

ANALYTICAL SOLUTIONS

The steady state of our dynamical equations are given as follows:

- i) The disease free steady state $E_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$
- ii) The endemic steady state $E_I = (s^*, e^*, i^*, q^*, r^*)$ where

$$s^* = \frac{d_n (\delta d_h i^* + (1/IP))}{d_n (1/IP) - i^* (\delta^2 d_h^2 + \alpha (\delta d_h - C(1 - r_c)) + \delta d_h (\gamma + (1/IP) - C(1 - r_c))) - (d_n + \gamma + (1/IP)) C(1 - r_c)}$$
 (18)

$$e^* = \frac{i^* (\alpha + d_n + \gamma + \delta d_h (1 - i^*))}{\delta d_h i^* + (1/IP)}$$
 (19)

$$q^* = \frac{\gamma i^* (\delta d_h i^* + (1/IP))}{\delta d_h i^* (\alpha + \delta d_h + \gamma + k) + (d_n + k - \delta d_h i_h^*) (1/IP)}$$
 (20)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร. พันธณี พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

$$r^* = \frac{i^*(\delta d_h i^* + (1/IP))}{d_n(1/IP) - \delta d_h i^*(\alpha + \delta d_h + \gamma + (1/IP)) + \frac{(\alpha + d_n + \gamma + \delta d_h(1-i^*))\rho}{\delta d_h i^* + (1/IP)}} \left(\alpha \frac{\gamma k(\delta d_h i^* + (1/IP))}{\delta d_h i^*(\alpha + \delta d_h + \gamma - k) - (d_n - \delta d_h + k)(1/IP)} \right) \quad (21)$$

where i^* is the positive solution of the following equation:

$$\frac{\delta d_h i^*(\alpha + d_n + \gamma + \delta d_h(1-i^*))(\alpha + \delta d_h + d_n + \gamma + (1/IP))}{\delta d_h i^* + (1/IP)} - (\alpha + d_n + \gamma + \delta d_h(1-i^*))(\delta d_h + d_n + (1/IP)\rho) + \frac{d_n(\alpha + \delta d_h + d_n + \gamma + (1/IP))(\delta d_h i^* + (1/IP)C(1-r_c))}{d_n(1/IP) - i^*(\delta^2 d_h^2 + \alpha(\delta d_h - C(1-r_c)) + \delta d_h(\gamma + (1/IP)C(1-r_c)) - (d_n + \gamma + (1/IP)C(t_c))} \quad (22)$$

The local stability of each steady state is determined by the signs of all eigenvalues. The eigenvalues (λ) are solutions of the characteristic equation;

$$|J_E - \lambda I| = 0; \quad (23)$$

where J_E is the Jacobian matrix at the steady state and I is the identity matrix. If all eigenvalues produce the negative real parts, then the steady state is local stability.

For the disease free steady state E_0 :

The characteristic equation is given by

$$(\lambda + d_n)^2(\lambda + d_n + k)(\lambda^2 + s_1\lambda + s_0) = 0 \quad (24)$$

where

$$s_1 = \alpha + 2(\delta d_h + d_n) + \gamma + (1/IP) + \rho - C(1-r_c) \quad (25)$$

and

$$s_0 = \delta^2 d_h^2 + \gamma(1/IP) + (d_n + \gamma)\rho + (d_n + \gamma + (1/IP)(d_n - C(1-r_c)) + \alpha(\delta d_h + d_n + (1/IP)\rho - C(1-r_c))) + \delta d_h(2d_n + \gamma + (1/IP)\rho - C(1-r_c)). \quad (26)$$

The eigenvalues then become

$$\lambda_{1,2} = -d_h, \lambda_3 = -d_h - k, \lambda_{4,5} = \frac{1}{2}(-s_1 \pm \sqrt{s_1^2 - 4s_0}). \quad (27)$$

From calculation, all eigenvalues have negative real parts for $R_0 < 1$ where

$$R_0 = \frac{C(d_h + \gamma + \alpha(1/IP)C(1-r_c) + \delta d_h(1-r_c))}{(\alpha + \delta d_h + d_n + \gamma)(\delta d_h + d_n + (1/IP)\rho) + (d_n + \gamma + (1/IP))C r_c}. \quad (28)$$

For the endemic steady state E_1 :

The characteristic equation is given by

$$\begin{aligned} & (\lambda + d_n - \delta d_h(e^* + i^*)(\lambda + d_n - \delta d_h(e^* + i^*) + k) - (\delta d_h i^* + (1/IP)\delta^2 d_h^2 e^*(e^* + i^*) \\ & - \delta d_h e^*(d_n + \lambda + (e^* + i^*)C(1-r_c)) - (d_n + \lambda)C(1-r_c)s^*) + (-\alpha - \delta d_h - d_n + \delta d_h e^* - \gamma - \lambda + 2\delta d_h i^*) \\ & ((e^* + i^*)C(1-r_c)(-\delta d_h + C(1-r_c)s^* + (\lambda + d_n + (e^* + i^*)(C(1-r_c) - \delta d_h))(\lambda + d_n - \delta d_h(2e^* + i^* - 1) \\ & + (1/IP)\rho - C(1-r_c)s^*))) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

where s^*, e^*, i^*, q^* and r^* are defined in (18)-(22).

From evaluation, all eigenvalues have negative real parts for $R_0 > 1$ where

$$R_0 = \frac{C(d_h + \gamma + \alpha(1/IP)C(1-r_c) + \delta d_h(1-r_c))}{(\alpha + \delta d_h + d_n + \gamma)(\delta d_h + d_n + (1/IP)\rho) + (d_n + \gamma + (1/IP))C r_c}. \quad (30)$$

$\bar{R}_0 = \sqrt{R_0}$ is defined as the basic reproductive number of the disease because it represents the average number of secondary cases that one primary case can produce [11].

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธวี พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

NUMERICAL SOLUTIONS AND DISCUSSION.

In this paper, we are studying the effects of various effects of changing various on the transmission of the H1N1 Influenza A Virus. The factors we are interested in are the degree of repetitious, the increased death of the humans when infected by the virus and the degree of quarantine of the infectious humans. Wu *et al.*, [17] has estimated that the increase in the mortality rate due to the influenza virus during the pandemic was 11.1 per 100,000 each year. Most of the deaths occurred in people over 65 years old. Ejima *et al.*, [18] has cautioned against the use of data taken in the early stages of an outbreak of a novel strain of influenza to estimate the case fatality ratio of the disease. Nishiura, Chowell and Castillo-Chavez [19] that the early prediction of the transmission potential of the pandemic (2009 H1N1) virus were wrong because of the sample size. One should not use a small sample to arrive at values for the parameters of the model. This has not stop Nishiura, Mizumoto and Ejima [20] from making predictions about the latest scare concerning the novel A(H7N9) virus which just appeared in China in 2013. Based on 20 confirmed cases, they came up with basic production number of 0.28, meaning that this disease would not become epidemic.

We are interested in the endemic steady state of our dynamical equations. The initial values of parameters used in this study are

$$d_n = 1/(365 * 65), r_c = 10\%, C = 20, \delta = 3, d_h = \frac{1}{21}, IP = 5, \rho = \frac{1}{10}, \alpha = \frac{1}{14},$$

$$\gamma = \frac{1}{7}, k = \frac{1}{7}, \bar{R}_0 = 3.53$$

These may not be the true values, but since we are interested in the changes in the projections of the behaviors of the different time evolutions of the different populations when the values of the parameters are changes, they will do. The time evolution of the susceptible human population is shown in Fig.2. We see that this

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนรัตน์ พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

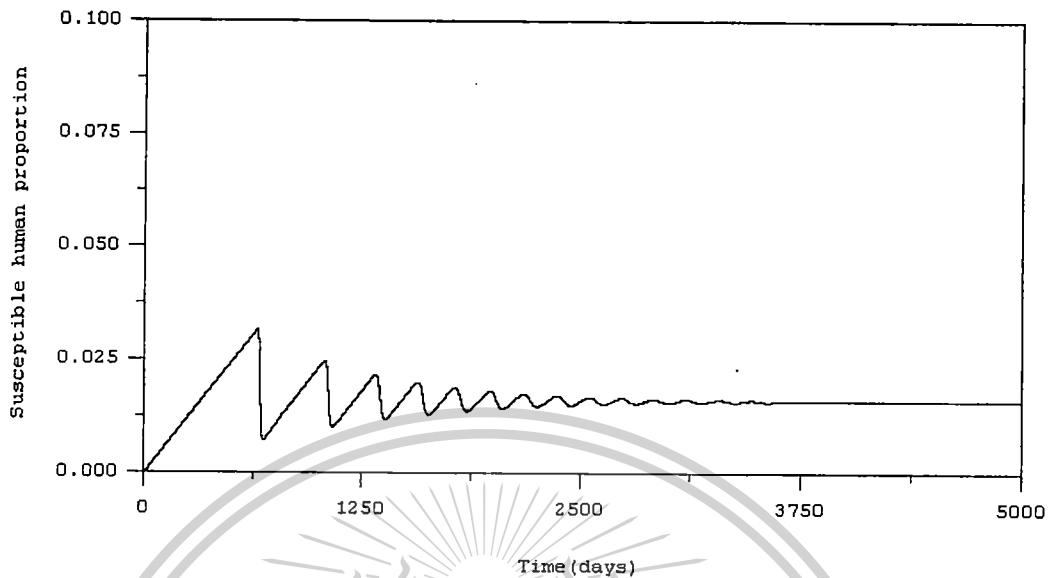


Fig. 2 Time evolution of the susceptible human population.

decreases as time passes, reaching an equilibrium value of 0.016, which is what is predicted by eqn. (13). Figures (3)–(6) shows the time evolutions of the exposed, infectious, quarantine and recovered populations. We can see that the solutions oscillate to the endemic steady state. As we see, the equilibrium values of the four populations are 0.0000935, 0.000054, 0.000053, 0.964, the values predicted by Eqns. (14), (15), (16) and (17).

With a mathematical model to describe the progression of a disease, we can simulate the time course of an epidemic when the values of various parameters are

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนรัตน์ พงศ์สัมพันธ
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

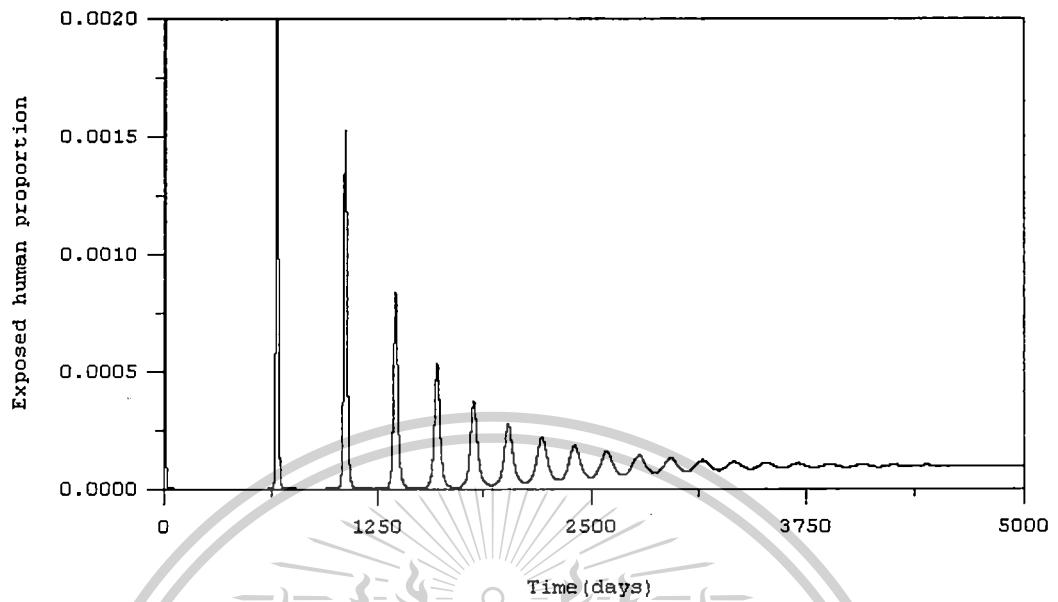


Fig. 3 Time evolution of the exposed human population.

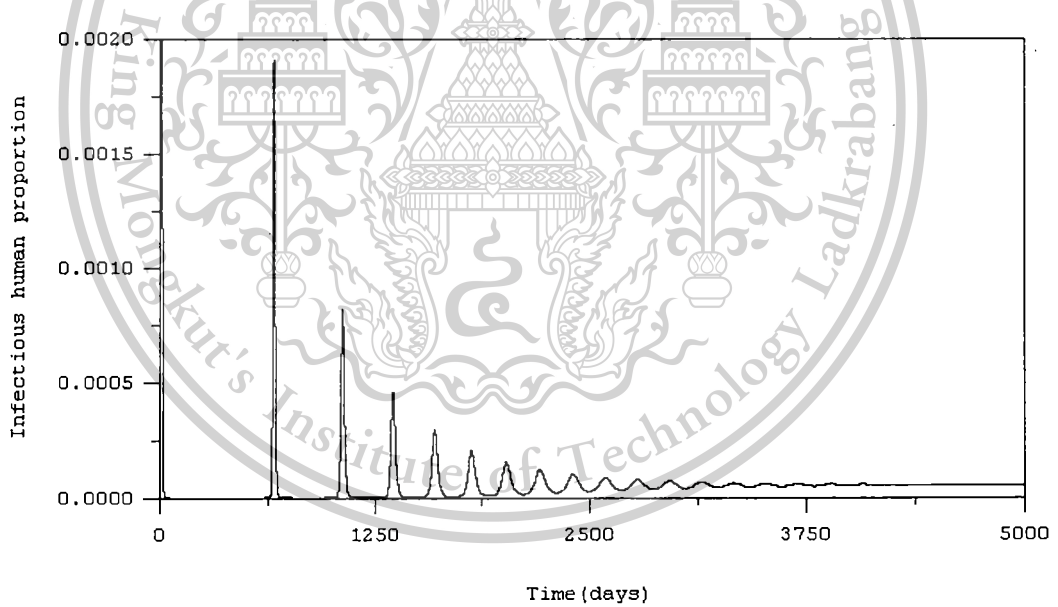


Fig. 4 Time evolution of the infectious human population.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รัชกาลที่ ๑๐ ทรงพระกรุณาโปรดเกล้าฯ แต่งตั้งให้ พล.ต.ท. พงษ์เทพรัตนากร
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

different. This would allow us to gain insights into how the epidemic might response

to change in the practices which could change the values of the parameters. Recently, Aldila, Götz and Soewono [21] in the context of another disease (dengue fever), used mathematical modeling to determine the best strategy to control the spread of that disease. In study, we look at the behaviors of the infectious humans when the per-centage of contacts which are repetitive is changed. i.e., r_c . We have set r_c to 10%,

30%, 50%, 70% and 90%. As r_c increases, the effective contact rate to create newly exposed susceptible decreases. This is clearly seen in Fig. 7 where the maximum numbers of infectious humans (the peaks in each curve) decreases as r_c increases. The lower frame in Fig. 7 is an expanded version of the top frame. It shows that increasing the value of r_c causes the equilibrium value of the infectious population to be lower. The equilibrium values are reached at an earlier time as r_c decreases (See bottom frame in Fig. 7). Fig. 8 shows the time evolutions of the infectious populations when the death rate due to the virus increases. This happens when the virulence of the virus increases. Since the death rate of an infectious person is given as $d_h + \delta d_i$, where $d_i = 1/21$, we have $\delta d_i \gg d_h$, death rates for the various curves are $1/21$, $1/7$, $5/21$, $1/3$ and $3/7 d^{-1}$. In Fig. 8, we have plotted the simulated time evolution of the infectious humans when the fraction (δ) of infected humans placed into quarantine is increased. Exposed human are not placed into quarantine since many of them will not

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธน์ พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

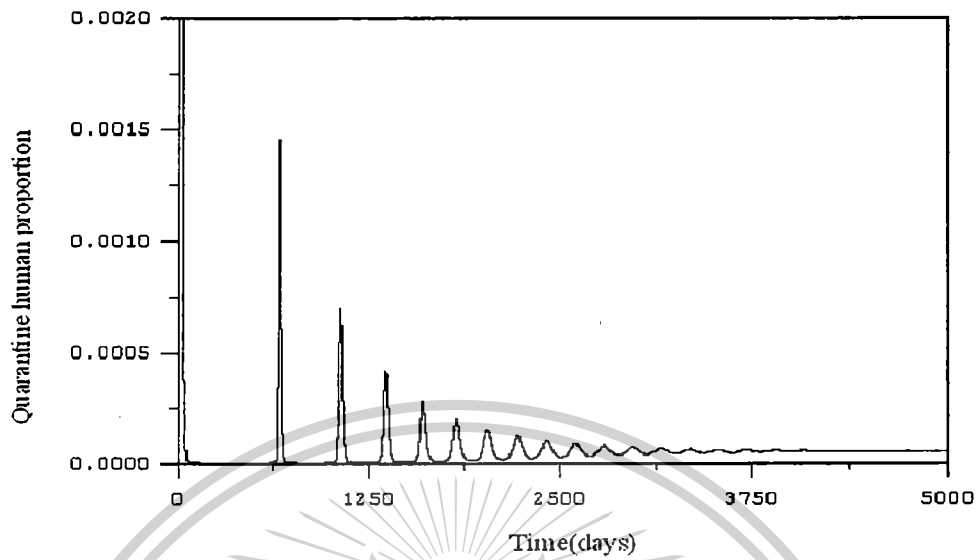


Fig. 5 Time evolutions of the quarantine human population.

become infectious and quarantine is a denial of a person's human rights. This denial can not be justified on the basis of maybe he could become infectious. Looking at

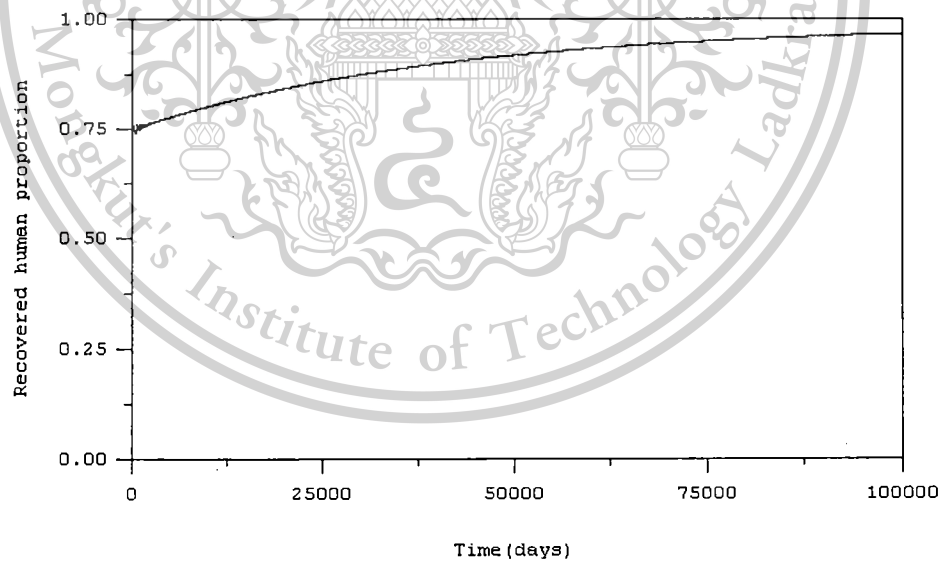


Fig. 6 Time evolutions of the recovered human population.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รองศาสตราจารย์ ดร.พนชน พงศ์สมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

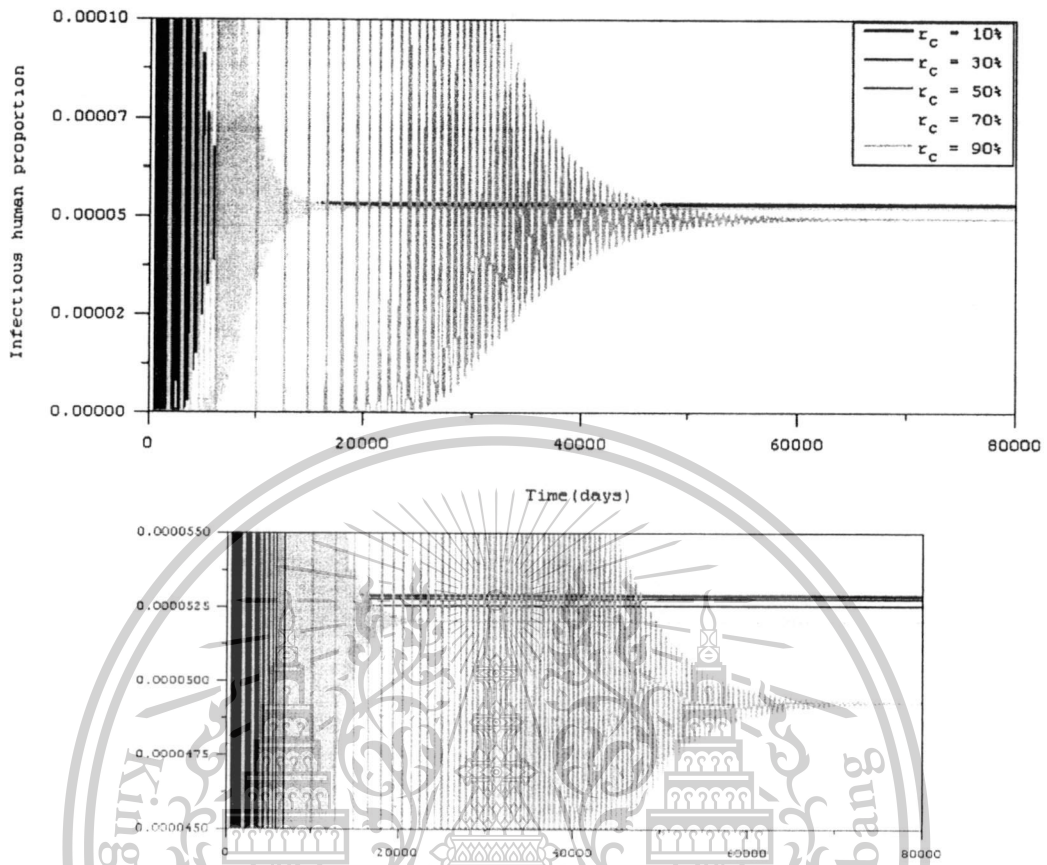


Fig.7 Time evolutions of the infectious human population for the different percentage of contact repetitions

the time evolution of this population group, we see that the peak in the number and the number in the equilibrium state decrease as the fraction of infectious humans is increased.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธน์ พงศ์สัมพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

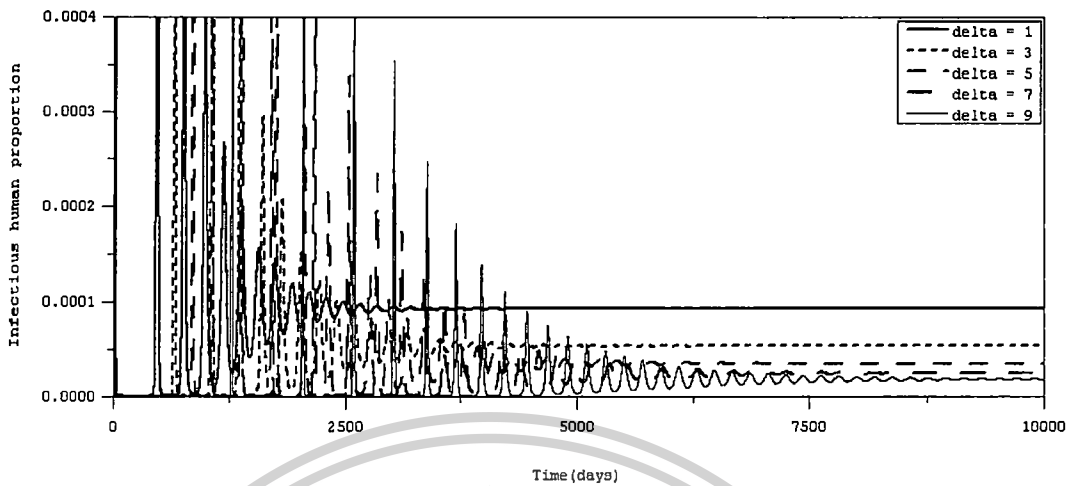


Fig. 8 Time evolutions of the infectious human population for different increase in the death rate caused by the illness.

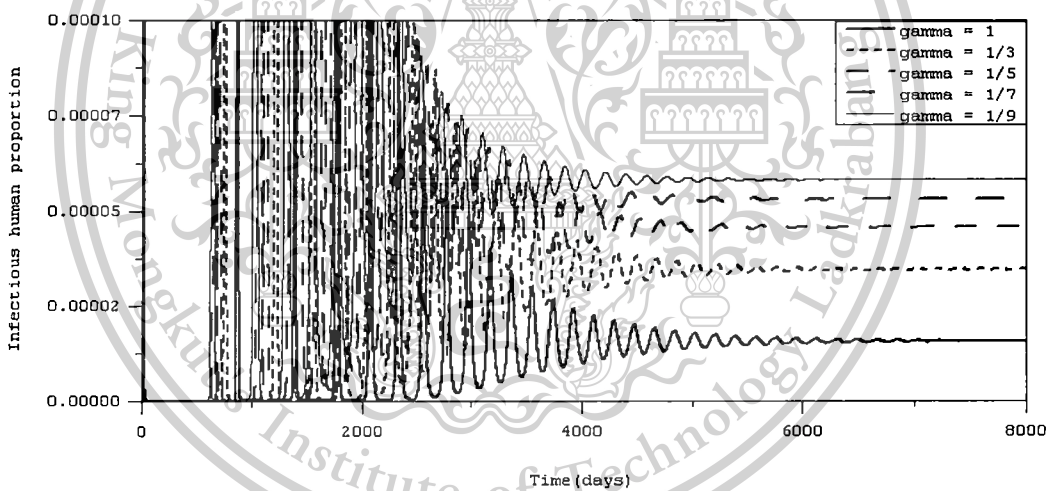


Fig. 9 Time evolutions of the infectious human population for the different percentage of infectious humans being put into quarantine.

Sensitivity Analysis

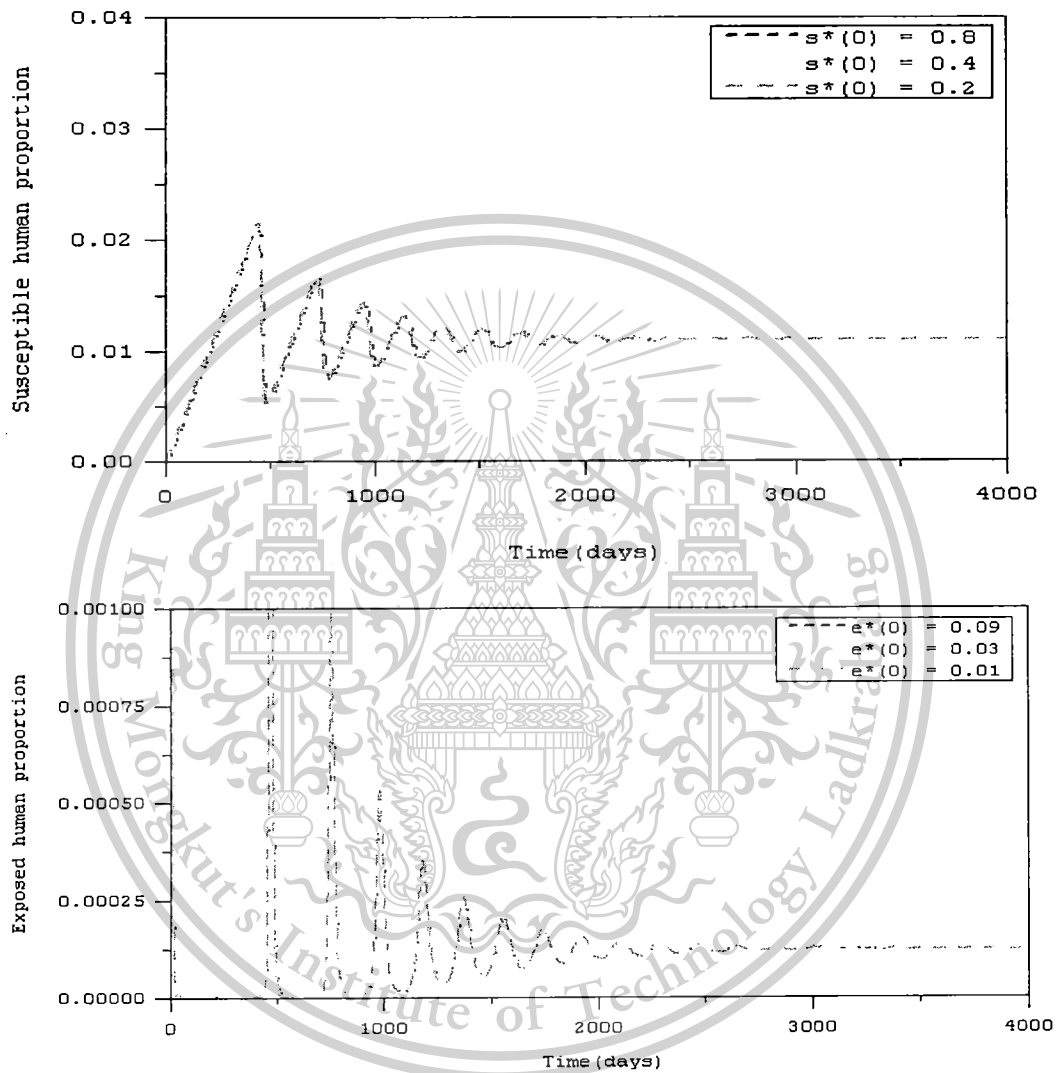
We apply the sensitivity analysis to show that the solutions are robust. We set all the parameters in the model to be the same but use different initial values of $s^*(0)$, $e^*(0)$, $i^*(0)$, $q^*(0)$, $r^*(0)$. As

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 รังสรรค์สารอารีย์ ดร.พนชนิ พงศ์สัมพันธ
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

we can see, all the trajectories(solutions) converge to the same epidemic equilibrium state $(s^*, e^*, i^*, q^*, r^*) = (0.0109, 0.00012, 0.000092, 0.000091, 0.98)$. The results are as follows:



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนชนิ พงศ์สมพันธ์

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

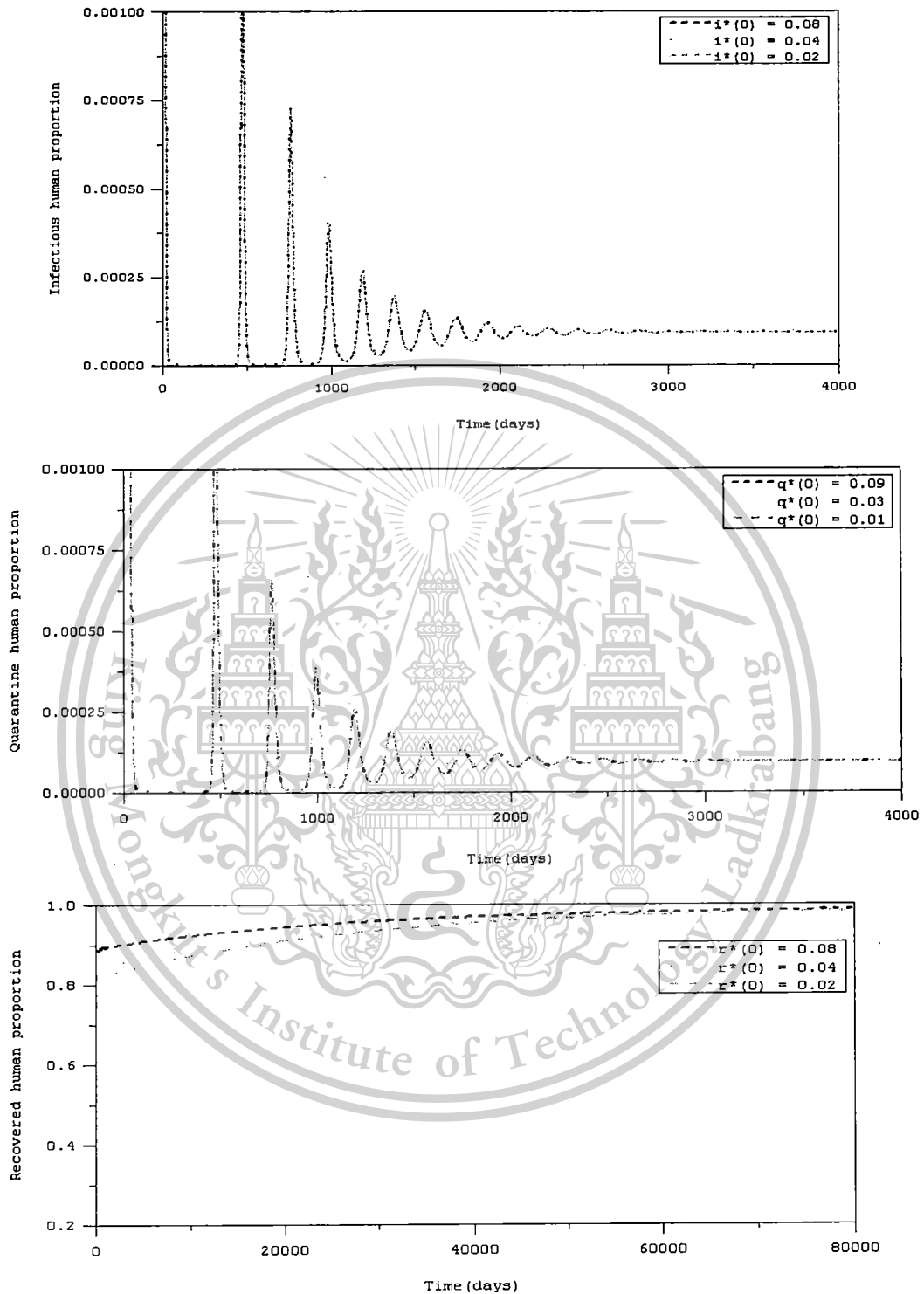


Fig.10 Trajectories of the different populations groups when different initial values are used in the numerical simulation of the time behaviors of the populations (sensitivity analysis).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ร้องศาสตราจารย์ ดร.พนรัตน์ พงศ์สัมพันธ์
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

CONCLUSION.

Figs. 7, 8 and 9 show the effects of changing the rate of repetitious contacts, the virulence of the virus and the fraction of infectious humans placed into quarantine. Fig. 7 shows that the number of infectious humans at equilibrium decreases as the rate repetition (r_c) increases. Figs. 8 and 9 indicate that the number of infectious humans at equilibrium decreases as the virulence or fraction of infectious humans increases. A further remark is that the repetition rate is difficult to control and that the increase or decrease of the virulence of the virus is beyond the control of public health officials. The only thing that can be controlled is the fraction of infectious humans that can be quarantine.

ACKNOWLEDGEMENT

This work is supported by King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang Research Fund, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand.

CONFLICT OF INTERESTS

The authors declare that there is no conflict of interest regarding this research.

REFERENCES

- [1] WHO. Pandemic (H1N1) 2009-update 70. (Online) 2009. Available at <http://www.who.int/csr/disease/swinfluenza/en/>.
- [2] S. Kupradinun, C. Bhodhikosoom, Y. Yoshioka, A. Endo, and K. Nerome, "The first isolation of swine H1N1 influenza viruses from pigs in Thailand," *Arch Virol*, vol. 118, pp. 289-297, 1991.
- [3] S. Damrongwatanapokin, W. Pinyachon, S. Parchariyanon, and T. Damrongwatanapokin, "Serological study and isolation of influenza A virus infection of pigs in Thailand," *Proceeding of the 19th IPVS Congress 16-19 July 2006, Denmark*, vol. 136, 2006.
- [4] Annual report H1N1. Available:<http://epid.moph.go.th>.
- [5] FS. Dawood, S. Jain, L. Finelli, MW. Shaw, S. Lindstrom, RJ. Garten, LV. Gubareva, X. Xu, CB. Bridges, and TM. Uyeki, "Emergence of a novel swine origin influenza A (H1N1) virus in human." *N. Engl J Med*, vol. 360, pp. 2605, 2009.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร. พันธณี พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

- [6] WHO, Antiviral drugs for pandemic (H1N1) 2009: definitions and use. Available from: http://www.who.int/csr/disease/swineflu/frequently_asked_questions/antivirals/definitions_use/en/index.html.
- [7] Centers for Disease Control and Prevention, "Emergence of Avian Influenza A(H7N9) Virus Causing Severe Human Illness-China, February-April 2013", Morbidity and Mortality Week Report, May 1, 2013.
- [8] T.Smieszek, L.Fiebig and R.W.Scholz, "Models of epidemic: when contact repetition and clustering should be included", Theoretical Biology and Medical Modelling, vol.6(No.11), doi:10.1186/1742-4682-6-11, 2009.
- [9] D. Klinkenberg, A. Everts-van der Wind, and et al., "Quantification of the effect of control strategies on classical swine fever epidemics," Math. Biosci., vol.186, pp.143–173, 2003.
- [10] H. Nishiura, "Prediction of pandemic influenza". Eur. J. Epidemiol. 26, 583-584, 2011.
- [11] G. Chowell et al., "Characterizing the Epidemiology of the 2009 Influenza A/H1N1 Pandemic in Mexico." PLOS Medicine 8,e1000436, 2011.
- [12] X.Y. Zhou, Z. Guo, "Analysis of an influenza A (H1N1) epidemic model with vaccination." Arab.J. Math. 1, 267-282, 2012.
- [13] Z. Jin et al., "Modelling and analysis of influenza A (H1N1) on networks." BMC Public Health 11 (Suppl 1), 59, 2011.
- [14] O. Prosper, et al., "Modeling control strategies for concurrent epidemics of seasonal and pandemic H1N1 influenza." Math. Biosci. Eng. 8, 141170, 2011.
- [15] G.E.Potter, M.S.Handcock, I.M.Longini and M.E.Halloran, "Estimating within-school contact Networks to understand influenza transmission." Ann. Appl. Stat. 6(1), 1-20, 2012.
- [16] L.Esteva, and C.Vargas, "Analysis of a dengue disease transmission model", Math.BioSci, vol.150, pp 131 – 151, 1998.
- [17] P. Wu, et al., "Excess Mortality Associated With Influenza A and B Virus in Hong Kong, 1998-2009." J. Infect. Dis. 206,18621871, 2012.
- [18] K. Ejima et al., "The time required to estimate the case fatality ration of influenza using only the tip of an iceberg: joint estimation of the virulence and the transmission potential." Comp. Math. Meth. Med. 2012, 978901, 2012.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้วางนิตยสารหรือตีพิมพ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

- [19] H. Nishiura, G. Chowell, C. Castillo-Chavez, "Did modeling overestimate the transmission potential of pandemic (H1N1-2009)? Sample size estimation for post-epidemic seroepidemiological studies." PLOS One 6, e17908, 2011.
- [20] H. Nishiura, K. Mizumoto, K. Ejima, "How to interpret the transmissibility of novel influenza A(H7N9): An analysis of initial epidemiological data of human cases from China." Theor. Bio. Med. Model. 10, 30, 2013.
- [21] D. Aldila, T. Götz, E. Soewono, "An optimal control problem arising from a dengue disease transmission Model." Math. Biosci. 242, 9-16, 2013.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
รองศาสตราจารย์ ดร.พนธน์ พงศ์สัมพันธ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.



ภาคผนวก ข

ข้อมูลประวัติผู้วิจัย

King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

ข้อมูลประวัติผู้วิจัย

ประวัติส่วนตัว

ชื่อ-สกุล รองศาสตราจารย์ ดร.พันธณี พงศ์สัมพันธ์

ประวัติการศึกษา

ชื่อย่อปริญญา	สาขา	สถาบันที่จบ	ปีที่จบ
ปร.ด.	คณิตศาสตร์ (หลักสูตรนานาชาติ)	มหาวิทยาลัยมหิดล	๒๕๔๗
วท.บ. (เกียรตินิยมอันดับ 2)	คณิตศาสตร์	มหาวิทยาลัยมหิดล	๒๕๔๑

สาขาวิจัยที่มีความชำนาญพิเศษ Mathematical model, Differential equations, Computer simulation และ Numerical Analysis

ทุนการศึกษาและทุนวิจัยที่เคยได้รับ

1. The Royal Golden Jubilee Ph.D. program (RGJ), Thailand Research Fund (TRF), Thailand, 2001-2004.
2. โครงการวิจัย “Spatial approach and mathematical modeling of emerging infectious disease Transmission” แหล่งผู้ให้ทุนคือ สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษาและประเทศฝรั่งเศส ปี 2548-2551
3. โครงการวิจัย “Transmission model for Plasmodium Vivax Malaria” แหล่งผู้ให้ทุนคือ สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย ปี 2550-2551
4. โครงการวิจัย “Mathematical model for the transmission by age structure and serotypes of Dengue disease” ทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ประจำปีงบประมาณ 2552 คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีกรณีย์ใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

5. โครงการวิจัย “Franco-Thai Network for Mathematical and Epidemiological Modeling of Infectious Diseases in Thailand” แหล่งผู้ให้ทุนคือ สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา และประเทศฝรั่งเศส ปี 2552-2553
6. โครงการวิจัย “Transmission model for Chikungunya Fever in Thailand” ทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ประจำปีงบประมาณ 2553 คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
7. โครงการวิจัย “Transmission model for Influenza Pandemic Due to a New-strain of the H1N1 Influenza A Virus” กองทุนวิจัยลาดกระบัง สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ปี 2554-2556
8. โครงการวิจัย “Mathematical model of Malaria transmission by age group of patients and season in Thailand ” ทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ประจำปีงบประมาณ 2555 คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
9. โครงการวิจัย “Using the techniques of formulating the mathematical model, stochastic process and geographic information system for studying the transmission of Malaria” ทุนสนับสนุนงานวิจัยจาก National Research Council of Thailand, 2011-2013.
10. โครงการวิจัย “Dynamical model for dengue epidemic of urban community in Thailand” ทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ประจำปีงบประมาณ 2556 คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
11. โครงการวิจัย “Studying the relation of human, rat and season for the spreading of Leptospirosis in Thailand by using Mathematical model” ทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ประจำปีงบประมาณ 2556 คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ผลงานตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับชาติ/นานาชาติ

1. P.Pongsumpun and I.M.Tang. A realistic age structured transmission model for dengue hemorrhagic fever in Thailand. *Southeast Asian Journal of Tropical Medicine and Public Health* 2001; 32, pp.336-340.
2. P.Pongsumpun, S.Yoksan and I.M.Tang. A comparison of the age distributions in the dengue hemorrhagic fever epidemics in Santiago de Cuba (1997) and Thailand (1998). *Southeast Asian Journal of Tropical Medicine and Public Health* 2002, 33, pp.255-258.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของลิขสิทธิ์/ผู้พิมพ์/ผู้พิมพ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

3. P. Pongsumpun, Y.Lenbury and I.M.Tang. Age structure in a model for the transmission of dengue haemorrhagic fever in Thailand. *East-West Journal of Mathematics* 2002; (Special Volume) 93, pp.93-103.
4. P.Pongsumpun and I.M.Tang. Transmission of dengue hemorrhagic fever in an age structured population. *Mathematical and Computer Modelling* 2003, 37,pp.949-961.
5. M. Sripom, P. Pongsumpun, S. Yoksan, P. Barbazan, JP Gonzalez and I.M. Tang. Dengue haemorrhagic fever in Thailand, 1998-2003: primary or secondary Infection. *Dengue Bulletin* 2003, 27,pp.39-45.
6. P. Pongsumpun, K. Patanarapelert, M. Sripom, S. Varamit and I.M. Tang. Infection risk to travelers going to dengue fever endemic regions. *Southeast Asian Journal of Tropical Medine and Public Health* 2004, 35,pp.155-159.
7. P. Pongsumpun, P.Barbazan, M.A.Dubois and I.M. Tang. Effect of age structure and tourists for the endemic region on the transmission of dengue disease, *KMITL Science Journal* 2005, 5, pp.151-160.
8. P. Pongsumpun and I.M. Tang. Risk of infection to tourists visiting an dengue fever endemic region, *KMITL Science Journal*, 5(2), pp.460-468.
9. P.Pongsumpun. Dengue disease model with the effect of extrinsic incubation period, *WSEAS Transaction on Biology and Biomedicine* 2006, 3, pp.139-144.
10. P.Pongsumpun and D.Samana. Mathematical model for Asymptomatic and Symptomatic infections of dengue disease. *WSEAS Transaction on Biology and Biomedicine* 2006, 3, pp.264-269.
11. P.Pongsumpun and D.Samana. Transmission model of dengue disease with the appearance of symptom. *KMITL Science Journal* 2006, 6(2a) no.2a, pp.391-399.
12. P.Pongsumpun and I.M.Tang, Mathematical Model for the transmission of *Plasmodium Vivax* Malaria, *International Journal of Mathematical models and methods in Applied Sciences* 2007, 3(1), pp.117-121.
13. P.Pongsumpun and R. Kongnuy, Model for the transmission of dengue disease in pregnant and non-pregnant patients, *International Journal of Mathematical models and methods in Applied Sciences* 2007, 3(1), pp.127-132.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งหากมีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

14. P.Pongsumpun, Age structured model for symptomatic and asymptomatic infections of dengue disease, *International Journal of Modeling and Simulation* 2009, 29, pp.199-205.
15. P.Pongsumpun, D.Garcia Lopez, C.Favier, L.Torres, J.Llosa, and M.A.Dubois Dynamics of dengue epidemics in urban contexts, *Tropical Medicine and International Health* 2008, 13(9), pp.1180-1187.
16. P.Pongsumpun and I.M.Tang, Transmission Model for *Plasmodium Vivax* Malaria: Conditions for Bifurcation , *International Journal of Biological and Medical Sciences* 2008, 3(3), pp.161-168.
17. P.Pongsumpun and I.M.Tang, Mathematical model for the transmission of *P.falciparum* and *P. vivax* malaria along the Thai-Myanmar border, *International Journal of Biological and Medical Sciences* 2008, 3(3), pp.200-207.
18. R.Kongnuy, P.Pongsumpun and I.M.Tang, Analysis of a Mathematical Model for Dengue Disease in Pregnant Cases, *International Journal of Biological and Medical Sciences* 2008, 3(3), 2008, pp.192-199.
19. P.Pongsumpun and I.M.Tang, Effect of the Seasonal Variation in the Extrinsic Incubation Period on the Long Term Behaviour of the Dengue Hemorrhagic Fever Epidemic, *International Journal of Biological and Medical Sciences* 2008, 3(3), pp.208-214.
20. P.Pongsumpun and I.M.Tang, Limit Cycle and Chaotic Behaviors for the Transmission Model of *Plasmodium Vivax* Malaria, *International Journal of Mathematical models and methods in Applied Sciences* 2008, 4(2), 2008, pp.563-570.
21. P.Pongsumpun and I.M.Tang, The Transmission Model of *P.falciparum* and *P. Vivax* Malaria between Thai and Burmese, *International Journal of Mathematical models and methods in Applied Sciences* 2009, 3, pp.19-26.
22. P.Pongsumpun and I.M.Tang, Transmission network dynamics of *Plasmodium Vivax* Malaria, *International Journal of Mathematical models and methods in Applied Sciences* 2009, 3(3), pp.275-282.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

23. P.Pongsumpun and I.M.Tang, Mathematical model of *Plasmodium Vivax* and *Plasmodium Falciparum* Malaria, *International Journal of Mathematical models and methods in Applied Sciences* 2009, 3(3), pp.283-290.
24. P.Pongsumpun, Influence of symptomatic and asymptomatic infections for the age structural model of dengue transmission, *International Journal of Mathematical Modeling, Simulation and Applications*, 2(1), 2009, pp.63-75
25. R.Kongnuy, P.Pongsumpun and I.M.Tang, Mathematical Model for Dengue Disease with Maternal Antibodies, *International Journal of Biological and Medical Sciences* 2010, 5(1), pp.5-14.
26. P.Pongsumpun, Mathematical model for the transmission of two Plasmodium Malaria, *International Journal of Biological and Medical Sciences* 2010, 5(2), pp.69-73.
27. R.Kongnuy, P.Pongsumpun, Mathematical modeling for dengue transmission with the effect of season, *International Journal of Biological and Medical Sciences* 2010, 5(2), pp.74-78.
28. P.Pongsumpun, I-Ming Tang, Impact of Cross Border Migration on Disease Epidemics: Case of the *P. falciparum* and *P. vivax* malaria Epidemic along the Thai-Myanmar border, *Journal of Biological system* 2010, 18(1), pp.55-73.
29. P.Pongsumpun, I-Ming Tang, Mathematical model of the symptomatic and asymptomatic infections of Swine flu, *International Journal of mathematical Models and method in Applied Sciences* 2011, 2(5), pp.247-254.
30. R.Kongnuy, E.Naowanich and P.Pongsumpun, Analysis of a dengue disease Transmission model with clinical diagnosis in Thailand, *International Journal of mathematical Models and method in Applied Sciences* 2011, 5, pp.594-601.
31. P. Pongsumpun and P.Mumtong, Mathematical model for the incubation of the *Plasmodium Vivax* Malaria, *International Journal on Applied Biomedical Engineering* 2011, 4(1), pp.42-48.
32. P.Pongsumpun, Seasonal Transmission Model of Dengue Virus Infection in Thailand, *Journal of Basic and Applied Scientific Research* 2011, 1(10), pp.1372-1379.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

33. P. Pongsumpun and R. Kongnuy, Lyapunov Function of Dengue Model in Infant with Maternal Antibody, *Far East Journal of Applied Mathematics* 2011, 57(2), pp.73-102.
34. P.Pongsumpun, Age Structural Model of *Plasmodium Falciparum* Malaria Transmission, *Journal of Basic and Applied Scientific Research* 2012, 2(7), pp.6358-6366.
35. P.Pongsumpun, Seasonal Transmission Model of Malaria by Age Group of Population, *Journal of Basic and Applied Scientific Research* 2012, 2(7); pp.6657-6669.
36. S.Sangsawang, T.Tanutpanit, W.Mumtong and P.Pongsumpun, Local Stability Analysis of Mathematical Model for Hemorrhagic Conjunctivitis Disease, *KMITL Science and Technology Journal* 2012, 12(2), pp.189-197.
37. P.Pongsumpun, Studying the dynamical network of Malaria at the local level with the effect of *Plasmodiums'* incubations, *Journal of Basic and Applied Scientific Research* 2012, 2(11), pp.11926-11935.
38. T. Changpuek, P.Pongsumpun and I.M.Tang, Analysis of mathematical model for swine flu transmission by age group, *Far East Journal of Mathematical Sciences* 2013, 73(2), pp.201-229.
39. P.Pongsumpun and S.Sangsawang, Local Stability Analysis for Age Structural Model of Chikungunya Disease, *Journal of Basic and Applied Scientific Research* 2013, 3(3), pp.302-312.
40. P.Pongsumpun, Model for the transmission of Influenza Pandemic Due to a New-strain of the H1N1 Influenza A Virus with the risk of infection in human, *Journal of Basic and Applied Scientific Research* 2013, 3(7), pp.502-511.
41. P.Pongsumpun, The household distribution of dengue epidemic, *Journal of Basic and Applied Scientific Research* 2013, 3(7), pp.56-65.
42. อรวรรณ ต้นสุข และ พันธณี พงศ์สัมพันธ์, แบบจำลองการระบาดของโรคอีสุกอีใสในประเทศไทย, *วารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง* 2013, 22(1); หน้า 39-52.
43. T. Changpuek, P.Pongsumpun and I.M.Tang, Global stability of the age structural transmission model for Swine flu, *Far East Journal of Mathematical Sciences* 2013, 80(1), 55-84.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้ารองศาสตราจารย์ ดร. พันธณี พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

44. P. Pongsumpun, R. Kongnuy, D.Garcia Lopez, I-Ming Tang, M.A. Dubois, Contact infection spread in an SEIR model, *ScienceAsia* 2013, 39;pp.410-415.
45. T.Tanutpanit, P.Pongsumpun and I.M.Tang, Stability and oscillations of time-delayed model for the testosterone regulation, *International Journal of Mathematics and Computers in simulation* 2013, 4(7);pp.355-362.
46. R. Sungchakit, P. Pongsumpun and I. M.Tang, Transmission Model of Dengue virus by *Aedes aegypti* and *Aedes albopictus*, , *Far East Journal of Mathematical Sciences* 2014, accepted.
47. P. Pongsumpun, Leptospirosis transmission model with the gender of human and season in Thailand, *Journal of Basic and Applied Scientific Research* 2014, accepted.
48. P. Pongsumpun and I.M.Tang, Dynamics of a New-strain of the H1N1 Influenza A Virus Incorporating the Effects of Repetitive Contacts, *Computational and Mathematical Methods in Medicine* 2014, accepted.
49. W.Mumtong, P. Pongsumpun and I. M.Tang, Studying Menstrual cycle by using Mathematical Model, *Far East Journal of Mathematical Sciences* 2014, accepted.

การเสนอผลงานในงานประชุมวิชาการระดับชาติ/นานาชาติ

1. P. Pongsumpun and I.M. Tang, Mathematical Modelling of Dengue Haemorrhagic Fever in Thailand. *An Annual Conference Progress in Mathematics*, 12-13 December 2000, Karnmanee Palace Hotel, Thailand.
2. P. Pongsumpun and I.M. Tang, Age Structure in a Model for the transmission of Dengue Haemorrhagic Fever in Thailand. *The fifth Annual National Symposium on Computational Science and Engineering*, 19-20 June 2001, Bangkok Convention Center, Central Plaza, Thailand.
3. P.Pongsumpun and I.M. Tang, Model for the Realistic Age Structured Transmission of Dengue Haemorrhagic Fever in Thailand. *International Conference Computational Mathematics and Modeling(CMM 2002)*, 22-24 May 2002, Century Park Hotel, Bangkok, Thailand.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

4. P. Pongsumpun and I.M. Tang, Age Distribution of Dengue Haemorrhagic Fever Epidemics: Real Data Comparison. *RGJ Seminar Series XXI, Research in Mathematics & Physics*, 12 December 2002, Chiang Mai University, Thailand.
5. P. Pongsumpun, Modelisation de la diffusion de la dengue. *Atelier de modelisation en epidemiologie*, 8-14 March 2004, Cargese, France.
6. P. Pongsumpun, A discrete transmission model for dengue disease in Thailand. *RGJ-Ph.D. Congress V*, 23-25 April 2004, Jomtien Palm Beach Resort Hotel, Pattaya, Thailand.
7. P.Pongsumpun and R.Kongnuy, Seasonality Transmission Model of Dengue Disease with and without Symptomatic and Asymptomatic Classes, *Proceeding of the International Conference on Engineering, Applied Sciences, and Technology*, November 21-23, 2007, pp.902-905.
8. R.Kongnuy and P.Pongsumpun, Analysis of Model in Pregnant and non-Pregnant Dengue patients, *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, Venice, Italy, Vol. 34, October 2008, pp.338-343.
9. R.Kongnuy and P.Pongsumpun, Dengue transmission model between infant and pregnant woman with antibody, *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, Venice, Italy, Vol. 34, October 2008, pp.344-350.
10. R. Kongnuy and P. Pongsumpun, Mathematical Model of Dengue Disease between Infant and Pregnant humans, *Proceeding of The 3rd International Symposium on Biomedical Engineering (ISBME 2008)*, November 10-11, 2008, Bangkok, Thailand, pp.395-400.
11. P.Pongsumpun, Dengue model with age structure and two different serotypes, *Proceeding of The 3rd International Symposium on Biomedical Engineering (ISBME 2008)*, November 10-11, 2008, Bangkok, Thailand, pp.401-405.
12. P.Pongsumpun and I.M.Tang, The transmission dynamics of Plasmodium vivax malaria at the local level, *Proceeding of The 3rd International Symposium on Biomedical Engineering (ISBME 2008)*, pp.406-410.
13. P. Pongsumpun, T. Manmai and R. Kongnuy, Age structural transmission model for Leptospirosis, *Proceeding of The 3rd International Symposium on Biomedical Engineering (ISBME 2008)*, November 10-11, 2008, Bangkok, Thailand, pp.411-416.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

14. R. Kongnuy and P. Pongsumpun, Limit cycle and chaotic behaviors on the Dengue model in pregnant patients *Proceeding of The 3rd International Symposium on Biomedical Engineering (ISBME 2008)*, November 10-11, 2008, Bangkok, Thailand, pp.417-422.
15. R.Kongnuy, P.Pongsumpun, Effect of dengue antibody to the transmission model of dengue disease, *Proceeding of The 2nd Biomedical Engineering International Conference (BMEiCON 2009)*, August 13-14, 2009, Phuket, Thailand, pp.205-211.
16. P.Pongsumpun, Age structural model with four serotypes of dengue disease, *Proceeding of The 2nd Biomedical Engineering International Conference (BMEiCON 2009)*, August 13-14, 2009, Phuket, Thailand, pp.212-217.
17. P.Pongsumpun and R.Kongnuy, A model of the transmission of dengue disease in infant population, *Proceeding of the International Workshops on Pure and Applied Mathematics*, February 22-24, 2010, Chiangmai, Thailand, pp.52-69.
18. ปรียาภรณ์ มุมทอง และพันธณี พงศ์สัมพันธ์, การวิเคราะห์การแพร่เชื้อพลาสติกโมเดียมไวแวกซ์ โดยใช้ตัวแบบจำลองทางคณิตศาสตร์, *The 15th Annual meeting in Mathematics: March 10- 12, 2010 Proceedings (AMM2010)*, หน้า 267-276.
19. R.Kongnuy and P.Pongsumpun, Local dynamics for a dengue disease with seasonal in Thailand, *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, Paris, France, Issue 68, July 2010, pp.435-440.
20. P.Pongsumpun, Swine flu transmission model in risk and non-risk human population, *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, Paris, France, Issue 68, July 2010, pp.704-709.
21. P.Pongsumpun, Dynamical transmission model of Chikungunya in Thailand, *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, Paris, France, Issue 68, July 2010, pp.710-714.
22. T.Changpuek and P.Pongsumpun, The Age structural Transmission Model of Swine Flu, *Proceeding of the 3rd Biomedical Engineering International Conference (BMEiCON 2010)*, August 27-28, 2010, Kyoto, Japan, pp.1-6.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

23. P.Pongsumpun, The Mathematical model of dengue disease classified by the characteristics of the patients, *Proceeding of the 3rd Biomedical Engineering International Conference (BMEiCON 2010)*, August 27-28, 2010, Kyoto, Japan, pp.7-12.
24. P.Pongsumpun and P.Mumtong, The monthly mathematical model of dengue disease in Thailand, *KMITL Math workshop I*, 2010, pp. 10.
25. P.Pongsumpun, The basic reproductive number for the transmission of four serotypes of dengue model, *Proceeding of the ISATED International Conference Modelling Identification and Control (MIC 2011)*, February 14-16, 2011, Innsbruck, Austria, pp.20-27.
26. P.Pongsumpun and R.Kongnuy, Mathematical model between mother and infant with antibodies, *Proceeding of the 16th Annual Meeting in Mathematics (AMM2011)*, March 10-11, 2011, Khon Kaen University, Khon Kaen, Thailand, pp.171-182.
27. สิริพัชร แสงสว่าง และ พันธนี พงศ์สัมพันธ์, แบบจำลองตามโครงสร้างอายุสำหรับการระบาดของโรคชิคุนกุนยา, *Proceeding of the 16th Annual Meeting in Mathematics (AMM2011)*, March 10-11, 2011, Khon Kaen University, Khon Kaen, Thailand, หน้า 327-340.
28. เชาวนิติ เทียมแพ, พันธนี พงศ์สัมพันธ์ และ ปริยาภรณ์ มุมทอง, แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเคลื่อนที่สำหรับโรคมาลาเรียชนิดเชื้อไวแวกซ์, *Proceeding of the 16th Annual Meeting in Mathematics (AMM2011)*, March 10-11, 2011, Khon Kaen University, Khon Kaen, Thailand; หน้า 363-372.
29. C.Teampae and P.Pongsumpun, The Relapsed Transmission Model of Plasmodium Vivax, *Proceedings of the 37th Congress on Science and Technology of Thailand*, October 10-12, 2011, A_A0031, pp.1-6.
30. S.Sangswang and P.Pongsumpun, Transmission Model of Chikungunya in Thailand, *Proceeding of the 37th Congress on Science and Technology of Thailand*, October 10-12, 2011, A_A0037, pp.1-6.
31. P.Pongsumpun, Mathematical model of Influenza A(H1N1) virus transmission, *Proceeding of International Conference in Mathematics and Applications (UEL, VNU-HCMC 2011)*, Hochi Minh city, December 20-22, 2011, pp.184-194.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

32. P.Pongsumpun and P.Mumtong, Malaria transmission model of juvenile and adult humans, Proceeding of The 4th Biomedical Engineering International Conference (BMEiCON-2011), Chiangmai, Thailand, January 29-31, 2012, pp.11-16.
33. P.Pongsumpun, Malaria transmission model of juvenile and adult humans, *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, Copenhagen, Denmark, Issue 66, June 2012, pp.234-239.
34. P.Pongsumpun, The Reinfectious Model of H1N1 Virus Transmission, *ICMSSC 2012 : International Conference on Mathematics, Statistics and Scientific Computing*, Copenhagen, Denmark, Issue 66, June 2012; pp.240-246.
35. R.Sungchakit and P.Pongsumpun, Transmission Model of Dengue Disease with the Different Contact Rates of three Seasons in Thailand, Proceedings of the 38th Congress on Science and Technology of Thailand, October 17-19, 2012, A_A0008, pp.1-7.
36. W.Mumtong and P.Pongsumpun, Local Stability Analysis of the Mathematical Model for Menstrual Cycle, Proceedings of the 1st Mae Fah Luang University International Conference 2012, November 29-December 1, 2012, P-SC-A_2, pp.1-10.
37. R.Sungchakit and P.Pongsumpun, Dengue Transmission Model with the Different Incubation Rate for each Season, Proceedings of the 1st Mae Fah Luang University International Conference 2012, November 29-December 1, 2012, P-SC-A_3, pp.1-12.
38. P. Pongsumpun, Dynamical Network Transmission of H1N1 Virus at the local level, *ICMCSSE 2012 : International Conference on Mathematical, Computational and Statistical Sciences, and Engineering*, Perth, Australia, Issue 72, December 2012; pp.272-277.
39. P.Pongsumpun, Mathematical Model for the Transmission of Leptospirosis in Juvenile and Adults Humans, *ICMCSSE 2012 : International Conference on Mathematical, Computational and Statistical Sciences, and Engineering*, Perth, Australia, Issue 72, December 2012, pp.266-271.
40. พันธณี พงศ์สัมพันธ์, เชาวนิติ เทียมแพ, แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการฟักตัวของเชื้อโรคมาลาเรียชนิดไวกเวซ, *Proceeding of the 18th Annual Meeting in Mathematics(AMM2013)* Thaksin University, Phatthalung, Thailand, march 14-16, 2013; pp.639-651.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้ารองศาสตราจารย์ ดร. พันธณี พงศ์สัมพันธ์

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.

41. P.Pongsumpun, Stability analysis of H1N1 transmission model between two population groups, *Proceedings of Asian Mathematical Conference 2013*, Bexco,Pusan, Korea, 30 June-4 July 2013.
42. P. Pongsumpun, Local Stability Analysis of Age Structural Model for Herpes Zoster in Thailand, *ICBCSB2013 : International Conference on Bioinformatics, Computational and Systems Biology*, Melbourne, Australia, Issue 84, December 2013; pp.1088-1094.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึง **รองศาสตราจารย์ ดร.พนชนิ พงศ์สัมพันธ์**

This material is reserved for educational use only, not allowed for commercial use.

Forbidden to modify the content, and cite the document when use.