รายงานการวิจัย

การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงปกติ

Statistical Hypotheses Testing Under Normal Distribution

รศ.สายชล สินสมบูรณ์ทอง

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2556

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

หัวข้อ การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงปกติ

Statistical Hypotheses Testing Under Normal Distribution

ผู้วิจัย รศ.สายชล สินสมบูรณ์ทอง

สาขา สถิติประยุกต์

พ.ศ. 2556

บทคัดย่อ

การศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงปกติ โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด และการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.01 และ 0.05

ผลการศึกษาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\mu=\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1:\mu=\mu_1,\ \mu_1<\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha=0.01$ และ $\alpha=0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\mu_0=12$ และ $\sigma_0^2=1$ ถ้า μ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 11 แล้ว c_1 และกำลังของการทดสอบ $(1-\beta)$ จะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1=11$ ซึ่งกำลังของการทดสอบจะมีค่าลดลง และในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\mu=\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1:\mu=\mu_1,\ \mu_1>\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha=0.01$ และ $\alpha=0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\mu_0=12$ และ $\sigma_0^2=1$ ถ้า μ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 13 ถึง 19 แล้ว c_2 และกำลังของการทดสอบจะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1=13$ ซึ่งกำลังของการทดสอบจะมีค่าลดลง

ส่วนในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\mu=\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1:\mu<\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha=0.01$ และ $\alpha=0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\sigma_0^2=1$ ถ้า μ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 12 ถึง 18 แล้ว c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น และในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\mu=\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1:\mu>\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha=0.01$ และ $\alpha=0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\sigma_0^2=1$ ถ้า μ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 12 ถึง 18 แล้ว c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

คำสำคัญ : การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย กำลังของการทดสอบและการแจกแจงปกติ

Thesis Title Statistical Hypotheses Testing Under Normal Distribution

Researcher Assoc.Prof. Saichon Sinsomboonthong

Programme Applied Statistics

Year 2013

Abstract

In this study, the most powerful test and uniformly most powerful test were investigated under Normal distribution and the test size of 0.01 and 0.05.

The result of the most powerful test for $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ versus $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ showed that at $\alpha = 0.01$ and $\alpha = 0.05$ for any n, $\mu_0 = 12$ and $\sigma_0^2 = 1$ when μ_1 increased from 5 to 11, c_1 and power of the test $(1-\beta)$ showed an certain constant value, while $\mu_1 = 11$, power of the test had an decrease. In addition, in the most powerful test for $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ versus $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ showed that at $\alpha = 0.01$ and $\alpha = 0.05$ for any n, $\mu_0 = 12$ and $\sigma_0^2 = 1$ when μ_1 increased from 13 to 19, c_2 and power of the test had constant value, while $\mu_1 = 13$, power of the test had an decrease.

In the uniformly most powerful test for $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ versus $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ showed that at $\alpha = 0.01$ and $\alpha = 0.05$ for any n and $\sigma_0^2 = 1$ when μ_0 increased from 12 to 18, while c_1 had an increase. In addition, in the uniformly most powerful test for $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ versus $H_1 : \mu > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ showed that at $\alpha = 0.01$ and $\alpha = 0.05$ for any n and $\sigma_0^2 = 1$ when μ_0 increased from 12 to 18, while c_2 had an increase.

Keywords : Most powerful test, Uniformly most powerful test, Power of the test and Normal distribution

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เนื่องจากผู้จัดทำได้รับความช่วยเหลือจากบุคคลผู้มีพระคุณหลายท่าน ดังนี้

ขอขอบพระคุณโครงการวิจัยที่เอื้อเฟื้อทุนสนับสนุนในการวิจัยครั้งนี้ โดยใช้เงินรายได้คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ขอขอบคุณนายศราวุธ สุวรรณอัตถ์ นักศึกษาปริญญาโท ชั้นปีที่ 2 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่คอยให้ความช่วยเหลือด้านการเขียนโปรแกรม

ขอขอบคุณทุกท่านที่มิได้เอ่ยนามในที่นี้ที่ให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่าง ๆ และคอยเป็นกำลังใจให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

....

รศ.สายชล สินสมบูรณ์ทอง

(หัวหน้าโครงการวิจัย)

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ในเรื่องของการอนุมานเชิงสถิตินั้นแบ่งออกเป็น 2 ส่วนสำคัญ ๆ คือ การประมาณค่าพารามิเตอร์และการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ จุดประสงค์ในการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติคือ หาข้อสรุปเกี่ยวกับค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงที่ผู้วิจัยสนใจศึกษา ในการดำเนินการทดสอบเมื่อกำหนดขนาดของการทดสอบ (size of the test) α ให้ และขนาดตัวอย่าง n คงที่ ผู้วิจัยจะหาการทดสอบ (test) ที่มีกำลังของการทดสอบ (power of the test) สูงที่สุด อย่างไรก็ตาม การทดสอบมีชื่อเรียกต่างกันไปขึ้นอยู่กับการตั้งสมมติฐานเชิงสถิติที่ต้องการทดสอบ (Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C. : 1974) มีผู้วิจัยหาการทดสอบแบบต่าง ๆ เช่น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายภายใต้การแจกแจงทวินาม (บรรทม สุระพร : 2541) การแจกแจงปัวส์ซง (รุจิเรข ดีเสียง : 2541) การแจกแจงเบอร์นูลลี (สายชล สินสมบูรณ์ทอง : 2554) และการแจกแจงทวินามลบ (สายชล สินสมบูรณ์ทอง : 2555) ซึ่งเป็นการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง ส่วนในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยมีวัตถุประสงค์ที่จะศึกษาการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ โดยการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด และการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ภายใต้การแจกแจงปกติ ซึ่งเป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่อง

ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาถึงการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงปกติ โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด และการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด

1.2.2 เพื่อศึกษาการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

โครงการวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงปกติ โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด และการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.01 และ 0.05 โดยในการวิจัยในครั้งนี้ใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATHLAB version 7.6 ช่วยในการคำนวณ รวมระยะเวลาดำเนินโครงการ 1 ปี

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

1.4.1 ทำให้ทราบถึงการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด

1.4.2 ทำให้ทราบถึงการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

1.5 นิยามคำศัพท์

Most powerful test หมายถึง การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด

Uniformly most powerful test หมายถึง การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

Power of the test หมายถึง กำลังการทดสอบ

Normal distribution หมายถึง การแจกแจงปกติ

บทที่ 2
ทฤษฎีและรายงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most Powerful Test) (ประชุม สุวัตถี : 2545)

ให้ $X_1,\dots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ โดยที่ $\theta \in \Omega = \{\theta_0, \theta_1\}$ และต้องการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ โดยที่ C เป็น**บริเวณวิกฤต (Critical region)**

บริเวณวิกฤต C เป็น**บริเวณวิกฤตที่ดีที่สุด (Best critical region : BCR)** ที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ ก็ต่อเมื่อ C มีขนาด α และกำลังของการทดสอบที่ใช้บริเวณวิกฤต C ไม่น้อยกว่ากำลังของการทดสอบที่ใช้บริเวณวิกฤตอื่นใดที่มีขนาด α ด้วยกัน

ถ้า C_1 เป็นบริเวณวิกฤตใด ๆ ที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ คือ ถ้า $P[(X_1,\dots,X_n) \in C_1 | H_0 : \theta = \theta_0 \text{ เป็นจริง}] = \alpha$ แล้ว C จะเป็นบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุด ที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ

1. $P[(X_1,\dots,X_n) \in C | H_0 : \theta = \theta_0 \text{ เป็นจริง}] = \alpha$

และ 2. $P[(X_1,\dots,X_n) \in C | H_1 : \theta = \theta_1 \text{ เป็นจริง}] \geq P[(X_1,\dots,X_n) \in C_1 | H_1 : \theta = \theta_1 \text{ เป็นจริง}]$

สถิติเพื่อการทดสอบ $T = T(X_1,\dots,X_n)$ ที่ใช้สำหรับบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุด C ที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ เรียกว่า **การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most powerful test : MP test) ที่มีขนาด** α

ถ้า $\beta_T(\theta)$ เป็นฟังก์ชันกำลังในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ โดยการใช้สถิติเพื่อการทดสอบ T และถ้า $\beta_{T_1}(\theta)$ เป็นฟังก์ชันกำลังในการทดสอบสมมติฐานเดียวกัน โดยการใช้สถิติเพื่อการทดสอบ T_1 แล้วจะกล่าวว่า T เป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ

1. $\beta_T(\theta_0) = \alpha$

และ 2. $\beta_T(\theta_1) \geq \beta_{T_1}(\theta_1)$ ไม่ว่า T_1 จะเป็นสถิติใด ๆ ที่ $\beta_{T_1}(\theta_0) = \alpha$

2.1.1.1 การทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยว (Simple Hypothesis Test)

ในการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดจะอาศัย**ทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน (Neyman – Pearson Lemma)** ดังนี้ (ประชุม สุวัตถี : 2545)

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ โดยที่ $\theta \in \Omega = \{\theta_0, \theta_1\}$ ให้ α เป็นค่าคงที่ที่ $0<\alpha<1$ ให้ c เป็นจำนวนจริงบวก และ C เป็นเซทย่อยของปริภูมิตัวอย่าง S ที่มีคุณสมบัติ

$$P[(X_1,\ldots,X_n)\in C|\theta=\theta_0 \text{ เป็นจริง}] = \alpha$$

และ

$$\frac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)} \le c \quad \text{เมื่อ} \quad (x_1,\ldots,x_n)\in C$$

$$\frac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)} \ge c \quad \text{เมื่อ} \quad (x_1,\ldots,x_n)\notin C$$

โดยที่ L เป็นฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood function) ของตัวอย่างสุ่ม แล้ว C จะเป็นบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุดที่มีขนาด α ในการทดสอบ $H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta=\theta_1$

วิธีหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Method of Finding Most Powerful Test)

ในการทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยว $H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับสมมติฐานเชิงเดี่ยว $H_1:\theta=\theta_1$ อาจใช้ทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันหา**บริเวณวิกฤตที่ดีที่สุด (Best critical region : BCR)** หรือหา**การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most powerful test : MP test)** ได้ กล่าวคือบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุดคือ

$$C = \left\{(x_1,\ldots,x_n): \frac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)} \le c\right\}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$P[(X_1,\ldots,X_n)\in C|\theta=\theta_0] = \int \cdots_C \int L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n = \alpha$$

ถ้าฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมของตัวอย่างสุ่ม $X_1,\ldots,X_n$ เป็น**ฟังก์ชันที่มีการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง** ความน่าจะเป็น $P\left[\frac{L(\theta_0;X_1,\ldots,X_n)}{L(\theta_1;X_1,\ldots,X_n)}=c\right]$ อาจมีค่าที่ต่างจาก 0 ได้

ในกรณีเช่นนี้ อาจหาค่าคงที่ c ที่ทำให้ขนาดของการทดสอบเท่ากับ $\alpha-q$ เมื่อ $0<q<p$ เมื่อต้องการหาการทดสอบที่มีขนาด α จะต้องใช้**การทดสอบสุ่ม (Randomized test)**

ดังนั้นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดคือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \dfrac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)}<c \\ \dfrac{q}{p} & \text{เมื่อ } \dfrac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)}=c \\ 0 & \text{เมื่อ } \dfrac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)}>c \end{cases}$$

โดยที่ $q = \alpha - P\left[\frac{L(\theta_0;X_1,\ldots,X_n)}{L(\theta_1;X_1,\ldots,X_n)} < c\right]$ และ $p = P\left[\frac{L(\theta_0;X_1,\ldots,X_n)}{L(\theta_1;X_1,\ldots,X_n)} = c\right]$

เมื่อ $P\left[\frac{L(\theta_0;X_1,\ldots,X_n)}{L(\theta_1;X_1,\ldots,X_n)} < c\right] < \alpha \le P\left[\frac{L(\theta_0;X_1,\ldots,X_n)}{L(\theta_1;X_1,\ldots,X_n)} \le c\right]$

ขนาดของการทดสอบคือ

$$\begin{aligned} E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta_0] &= (1)P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \left(\frac{q}{p}\right)P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right] \\ &= P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \frac{\alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right]}{P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right]}P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right] \\ &= P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] = \alpha \end{aligned}$$

ทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยายสำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ โดยที่ $\theta \in \Omega = \{\theta_0, \theta_1\}$ ในการทดสอบ $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ การทดสอบที่กำหนดให้ในรูปของ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c \\ \gamma & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c \\ 0 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} > c \end{cases}$$

โดยที่ $c > 0$ และ $0 \le \gamma \le 1$ เป็นการทดสอบสุ่มที่มีกำลังสูงสุดในบรรดาการทดสอบสมมติฐานเดียวกันที่มีขนาดไม่เกิน α

การทดสอบจะมีขนาด α ได้โดยการเลือก c และ γ ให้เหมาะสมดังนี้

1. ถ้ามีค่าคงที่ $c > 0$ ที่ทำให้ $P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] = \alpha$ ให้เลือกใช้ c นั้น และให้ $\gamma = 0$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดคือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \le c \\ 0 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} > c \end{cases}$$

2. ถ้าไม่มีค่าคงที่ $c > 0$ ใด ๆ ที่มีคุณสมบัติตามข้อ 1. ให้เลือก c ที่ทำให้

$$P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] < \alpha \le P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \le c\right]$$

และให้ $$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right]}{P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right]}$$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดคือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c \\ \gamma & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c \\ 0 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} > c \end{cases}$$

ขนาดของการทดสอบคือ

$$\begin{aligned} E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta_0] &= 1P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \gamma P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right] \\ &= P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \frac{\alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right]}{P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right]} P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right] \\ &= P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] \\ &= \alpha \end{aligned}$$

2.1.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly Most Powerful Test)

2.1.2.1 การทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยวเทียบกับสมมติฐานเชิงประกอบ (Simple Hypothesis Compare with Composite Hypothesis Test)

ในการทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยว H_0 เทียบกับสมมติฐานเชิงประกอบ H_1 บริเวณวิกฤต C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly most powerful critical region) ที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ C เป็นบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุดที่มีขนาด α ในการทดสอบ H_0 นั้น เทียบกับสมมติฐานเชิงเดี่ยวใด ๆ ใน H_1 (ประชุม สุวัตถี : 2545)

ในการทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยว $H_0 : \theta = \theta_0$, $\theta_0 \in \omega$ เทียบกับสมมติฐานเชิงประกอบ $H_1 : \theta \in \Omega - \omega$ เป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly most powerful test : UMP test) ที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อการทดสอบนั้นมีขนาด α และมีฟังก์ชันกำลังมากกว่าฟังก์ชันกำลังของการทดสอบอื่นใดที่มีขนาด α เมื่อ $\theta \in \Omega - \omega$

นั่นคือ $\phi(x_1,...,x_n)$ เป็นการทดสอบ UMP ที่มีขนาด α ในการทดสอบ $H_0:\theta=\theta_0$, $\theta_0\in\omega$ เทียบกับ $H_1:\theta\in\Omega-\omega$ ก็ต่อเมื่อ

1. $\beta_\phi(\theta_0)=\alpha$

และ 2. $\beta_\phi(\theta)\geq\beta_{\phi'}(\theta)$ ทุก $\theta\in\Omega-\omega$

ไม่ว่า $\phi'(x_1,...,x_n)$ จะเป็นการทดสอบใด ๆ ที่ $\beta_{\phi'}(\theta_0)=\alpha$ ในที่นี้ $\beta_\phi(\theta)$ คือฟังก์ชันกำลังของ ϕ และ $\beta_{\phi'}(\theta)$ คือฟังก์ชันกำลังของ ϕ'

ในการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (ถ้ามี) สำหรับการทดสอบ $H_0:\theta=\theta_0$, $\theta_0\in\omega$ เทียบกับ $H_1:\theta\in\Omega-\omega$ อาจใช้ทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันสำหรับ $H_0:\theta=\theta_0$, $\theta_0\in\omega$ เทียบกับ $H_1:\theta=\theta_1$, $\theta_1\in\Omega-\omega$ เพื่อหาการทดสอบได้ โดยกำหนด θ_1 ขึ้นมา 1 ตัว เช่น $\theta=\theta_1$ แล้วทำการทดสอบดู ถ้าการทดสอบที่หาได้ไม่เปลี่ยนแปลงรูปไปเมื่อเปลี่ยนค่า θ_1 ไป แต่ยังคงอยู่ใน $\Omega-\omega$ แสดงว่าการทดสอบนั้นเป็นการทดสอบ UMP แต่ถ้าการทดสอบเปลี่ยนแปลงรูปไป เมื่อเปลี่ยนค่า θ_1 ไป ก็แสดงว่าการทดสอบนั้นไม่ใช่การทดสอบ UMP ดังนั้นการทดสอบ UMP อาจจะมีหรือไม่มีก็ได้

2.1.2.2 การทดสอบสมมติฐานเชิงประกอบ (Composite Hypothesis Test)

การทดสอบสมมติฐานเชิงประกอบ $H_0:\theta\in\omega,\ \omega\subset\Omega$ เป็นการทดสอบที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ

$$\sup_{\theta\in\omega} P[\text{ปฏิเสธ } H_0 | H_0 \text{ เป็นจริง}] = \alpha$$

นั่นคือ
$$\alpha = \sup_{\theta\in\omega}\beta(\theta)$$

เมื่อ $\beta(\theta)$ คือ ฟังก์ชันกำลัง (ประชุม สุวัตถี : 2545)

การทดสอบ $\phi(x_1,...,x_n)$ สำหรับ $H_0:\theta\in\omega$ เทียบกับ $H_1:\theta\in\Omega-\omega$ เป็น**การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly most powerful test : UMP test)** ที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ

$$\sup_{\theta\in\omega}\beta_\phi(\theta) = \alpha$$

และ
$$\beta_\phi(\theta) \geq \beta_{\phi^*}(\theta)$$

ทุกค่า $\theta\in\Omega-\omega$

ไม่ว่า ϕ^* จะเป็นฟังก์ชันวิกฤตใด ๆ ที่มีขนาดไม่เกิน α กล่าวคือ

$$\sup_{\theta\in\omega}\beta_{\phi^*}(\theta) \leq \alpha$$

โดยที่ $\beta_\phi(\theta)$ เป็นฟังก์ชันกำลังของ ϕ และ $\beta_{\phi^*}(\theta)$ เป็นฟังก์ชันกำลังของ ϕ^*

การแจกแจงที่มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบเพิ่มอย่างเดียวหรือแบบลดอย่างเดียว (Distribution of monotone increasing or decreasing likelihood ratio)

วงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta):\theta\in\Omega\}$ โดยที่ Ω เป็นช่วงจำนวนจริง **มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบเพิ่มอย่างเดียว (Monotone increasing likelihood ratio)** ก็ต่อเมื่อมีสถิติ $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ ที่ทำให้อัตราส่วน $L(\theta_0;X_1,\ldots,X_n)/L(\theta_1;X_1,\ldots,X_n)$ เป็น**ฟังก์ชันไม่ลด (Nondecreasing function)** ของ $T(X_1,\ldots,X_n)$ สำหรับทุกค่าพารามิเตอร์ $\theta_0<\theta_1$

(ประชุม สุวัตถี : 2545)

วงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta):\theta\in\Omega\}$ โดยที่ Ω เป็นช่วงจำนวนจริงมี**อัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบลดอย่างเดียว (Monotone decreasing likelihood ratio)** ก็ต่อเมื่อมีสถิติ $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ ที่ทำให้อัตราส่วน $L(\theta_0;X_1,\ldots,X_n)/L(\theta_1;X_1,\ldots,X_n)$ เป็น**ฟังก์ชันไม่เพิ่ม (Nonincreasing function)** ของ $T(X_1,\ldots,X_n)$ สำหรับทุกค่าพารามิเตอร์ $\theta_0<\theta_1$

ถ้า $X_1,\ldots,X_n$ มีการแจกแจงที่มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น เราอาจใช้หาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายได้ดังนี้

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ และวงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta):\theta\in\Omega\}$ **มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบ<u>ไม่ลด</u>อย่างเดียว (Monotone nondecreasing likelihood ratio)** ของสถิติ $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ ให้ C เป็นบริเวณวิกฤตที่ได้จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน ในการทดสอบ $H_0:\theta=\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta=\theta_1$, $\theta_1>\theta_0$ หรือ $H_0:\theta\le\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta>\theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$C = \{(x_1,\ldots,x_n):T(x_1,\ldots,x_n)\le c\}$$

หรือมีการทดสอบ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n)<c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n)=c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n)>c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c>0,\ 0\le\gamma\le1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta=\theta_0]=\alpha$ แล้ว

1. ฟังก์ชันกำลังของ C เป็นฟังก์ชันเพิ่มของ θ
2. C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ในการ**ทดสอบ** $H_0:\theta=\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta>\theta_0$
3. C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ในการ**ทดสอบ** $H_0:\theta\le\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta>\theta_0$

ถ้าให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ และวงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta):\theta\in\Omega\}$ **มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบ<u>ไม่เพิ่ม</u>อย่างเดียว (Monotone nonincreasing likelihood ratio)** ของสถิติ $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ ให้ C เป็น

บริเวณวิกฤตที่ได้จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน ในการ**ทดสอบ** $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta = \theta_1$, $\theta_1 > \theta_0$ หรือ $H_0 : \theta \le \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta > \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$C = \{(x_1,\dots,x_n) : T(x_1,\dots,x_n) \ge c\}$$

หรือมีการทดสอบ

$$\phi(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1,\dots,x_n) > c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,\dots,x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,\dots,x_n) < c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c > 0,\ 0 \le \gamma \le 1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E[\phi(X_1,\dots,X_n)|\theta = \theta_0] = \alpha$ แล้ว

1. ฟังก์ชันกำลังของ C เป็นฟังก์ชันเพิ่มของ θ
2. C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ในการ**ทดสอบ** $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta > \theta_0$
3. C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ในการ**ทดสอบ** $H_0 : \theta \le \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta > \theta_0$

ถ้าให้ $X_1,\dots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ และวงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta) : \theta \in \Omega\}$ **มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบ<u>ไม่ลด</u>อย่างเดียว (Monotone nondecreasing likelihood ratio)** ของสถิติ $T = T(X_1,\dots,X_n)$ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ **หรือ** $H_0 : \theta \ge \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1,\dots,x_n) > c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,\dots,x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,\dots,x_n) < c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c > 0,\ 0 \le \gamma \le 1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E[\phi(X_1,\dots,X_n)|\theta = \theta_0] = \alpha$ หรือบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายคือ

$$C = \{(x_1,\dots,x_n) : T(x_1,\dots,x_n) \ge c\}$$

และถ้าให้ $X_1,\dots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ และในทำนองเดียวกัน วงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta) : \theta \in \Omega\}$ **มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบ<u>ไม่เพิ่ม</u>อย่างเดียว (Monotone nonincreasing likelihood ratio)** ของสถิติ $T = T(X_1,\dots,X_n)$ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ **หรือ** $H_0 : \theta \ge \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1,\dots,x_n) < c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,\dots,x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,\dots,x_n) > c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c > 0,\ 0 \le \gamma \le 1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta = \theta_0] = \alpha$ หรือบริเวณวิกฤต ที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายคือ

$$C = \{(x_1,\ldots,x_n) : T(x_1,\ldots,x_n) \le c\}$$

การแจกแจงในวงศ์ชี้กำลัง (Distribution of Exponential Family)

ถ้า $X_1,\ldots,X_n$ มีการแจกแจงในวงศ์ชี้กำลัง เราอาจใช้หาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ได้ดังนี้ (ประชุม สุวัตถี : 2545)

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta), \theta \in \Omega$ ซึ่งเป็นสมาชิกในวงศ์ชี้กำลัง **(Exponential family)** สามารถเขียนได้ในรูป

$$f(x;\theta) = c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

และให้ $T = T(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{i=1}^{n} q(X_i)$

1. ถ้า $p(\theta)$ **เป็นฟังก์ชัน<u>เพิ่ม</u>อย่างเดียวของ** θ แล้ว จะมีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0 : \theta \le \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta > \theta_0$ **หรือ**ทดสอบ $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta > \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n) > c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n) < c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c > 0\ , 0 \le \gamma \le 1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$\begin{aligned} E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta = \theta_0] &= P[T(X_1,\ldots,X_n) > c|\theta = \theta_0] + \gamma P[T(X_1,\ldots,X_n) = c|\theta = \theta_0] \\ &= \alpha \end{aligned}$$

และกำลังของการทดสอบ $= 1-\beta = P[T(X_1,\ldots,X_n) > c|\theta > \theta_0] + \gamma P[T(X_1,\ldots,X_n) = c|\theta > \theta_0]$

2. ถ้า $p(\theta)$ **เป็นฟังก์ชัน<u>ลด</u>อย่างเดียวของ** θ แล้ว จะมีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0 : \theta \le \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta > \theta_0$ **หรือทดสอบ** $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta > \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n) < c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n) > c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c > 0\ , 0 \le \gamma \le 1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$\begin{aligned} E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta = \theta_0] &= P[T(X_1,\ldots,X_n) < c|\theta = \theta_0] + \gamma P[T(X_1,\ldots,X_n) = c|\theta = \theta_0] \\ &= \alpha \end{aligned}$$

และกำลังของการทดสอบ $= 1-\beta = P[T(X_1,\ldots,X_n) < c|\theta > \theta_0] + \gamma P[T(X_1,\ldots,X_n) = c|\theta > \theta_0]$

ถ้าให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหน่าแน่น $f(x;\theta), \theta \in \Omega$ ซึ่งเป็นสมาชิกในวงศ์ชี้กำลัง สามารถเขียนได้ในรูป

$$f(x;\theta) = c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

และให้ $T = T(X_1,\ldots,X_n) = \sum_{i=1}^{n} q(X_i)$

1. ถ้า $p(\theta)$ **เป็นฟังก์ชัน<u>เพิ่ม</u>อย่างเดียวของ** θ แล้ว จะมีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0 : \theta \geq \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ **หรือทดสอบ** $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n) < c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n) > c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c > 0 \,,\, 0 \leq \gamma \leq 1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta = \theta_0] = P[T(X_1,\ldots X_n) < c|\theta = \theta_0] + \gamma P[T(X_1,\ldots X_n) = c|\theta = \theta_0]$$
$$= \alpha$$

และกำลังของการทดสอบ $= 1-\beta = P[T(X_1,\ldots X_n) < c|\theta < \theta_0] + \gamma P[T(X_1,\ldots X_n) = c|\theta < \theta_0]$

2. ถ้า $p(\theta)$ **เป็นฟังก์ชัน<u>ลด</u>อย่างเดียวของ** θ แล้ว จะมีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0 : \theta \geq \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ **หรือทดสอบ** $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n) > c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n) < c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c > 0 \,,\, 0 \leq \gamma \leq 1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta = \theta_0] = P[T(X_1,\ldots X_n) > c|\theta = \theta_0] + \gamma P[T(X_1,\ldots X_n) = c|\theta = \theta_0]$$
$$= \alpha$$

และกำลังของการทดสอบ $= 1-\beta = P[T(X_1,\ldots X_n) > c|\theta < \theta_0] + \gamma P[T(X_1,\ldots X_n) = c|\theta < \theta_0]$

2.2 รายงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บรรทม สุระพร (2541) ศึกษาการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบทวินาม โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.7$ เทียบกับ $H_1 : \theta = 0.3$ ขนาดตัวอย่างที่ใช้ n = 10, 20, 30, 40 และ 50 พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าลดลงจนถึง $n = 30$ หลังจากนั้น ค่าจะเพิ่มขึ้น ส่วนค่าวิกฤต C จะมีค่าเพิ่มขึ้น

โดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 50$ และค่าวิกฤต C จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด

การหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.3$ เทียบกับ $H_1 : \theta > 0.3$ พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าลดลงจนถึง $n = 30$ หลังจากนั้นค่าจะเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต C จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 50$ และค่าวิกฤต C จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.3$ หรือ $\theta \ge 0.7$ เทียบกับ $H_1 : 0.3 < \theta < 0.7$ พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น ยกเว้นที่ $n = 10, 20, 30$ จะไม่สามารถหาค่าได้ ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น ยกเว้นที่ $n = 50$ และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 10$ จะไม่สามารถหาค่าได้

การหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.3 \le \theta \le 0.7$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.3$ หรือ $\theta > 0.7$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01, 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C_1(\gamma_1)$ จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นแล้วลดลงอีก และ $X = C_2(\gamma_2)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอดและการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.3$ เทียบกับ $H_1 : \theta \ne 0.3$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C_1(\gamma_1)$ และ $X = C_2(\gamma_2)$ จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C_1(\gamma_1)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลงแล้วเพิ่มขึ้นอีก และ $X = C_2(\gamma_2)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 10$ จะไม่สามารถหาค่าได้

รุจิเรข ดีเสียง (2541) ศึกษาการทดสอบสมมติฐานทางสถิติสองด้านเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.2$ หรือ $\theta \ge 0.75$ เทียบกับ $H_1 : 0.2 < \theta < 0.75$ ขนาดตัวอย่างที่ใช้ $n = 20, 30, 40$ และ 50 พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่า

เพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และ γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 20$ จะไม่สามารถหาค่าได้ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และ γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 50$ จะไม่สามารถหาค่าได้

การหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.25 \le \theta \le 0.3$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.25$ หรือ $\theta > 0.3$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และ γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าลดลง ยกเว้นที่ $n =$ 20 และ 50 จะไม่สารถหาค่าได้

และการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.5$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.5$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลงแล้วเพิ่มขึ้นอีก ค่า γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นแล้วลดลงอีก และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าลดลงโดยตลอด และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอดเช่นเดียวกัน

สายชล สินสมบูรณ์ทอง (2554) ศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 และ 50 และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.05

ผลการศึกษาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.9 ค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงสลับกันไป ค่า c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le \theta_1$ หรือ $\theta \ge \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า γ_1, γ_2 มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น ในขณะที่ c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

ส่วนในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ค่า n = 5 และ 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า γ_1, γ_2 มีแนวโน้มลดลง ในขณะที่ c_1 และ c_2 มีค่าเพิ่มขึ้น

และในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ค่า n = 5 และ 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า γ_1, γ_2 มีแนวโน้มลดลง ในขณะที่ c_1 และ c_2 มีค่าเพิ่มขึ้น

สายชล สินสมบูรณ์ทอง (2555) ศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบทวินามลบ โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ใช้จำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดจนกว่าจะประสบความสำเร็จ (r) เท่ากับ 1, 2, 3, 4 และ 5 และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.05

ผลการศึกษาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_1 ใด ๆ ที่ $\theta_0 = 0.5$ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว γ จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น สลับกันไปเรื่อย ๆ ส่วน c_1 และ $1-\beta$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น และในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับ $r = 5$ และ $\theta_0 = 0.5$ ถ้า θ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.6 ถึง 0.9 แล้ว γ และ c_2 จะมีค่าคงที่ แต่ $1-\beta$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วน $r = 1$ ถึง 4 จะไม่สามารถหาค่า c_2, γ และ $1-\beta$ ได้

ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_0 ใด ๆ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น และในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_0 ใด ๆ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้วส่วนใหญ่จะไม่สามารถหาค่า γ และ c_2 ได้

ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \leq \theta_0$ หรือ $\theta \geq \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta_0 < \theta < \theta_1$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับ r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว γ_1, γ_2 จะมีค่าลดลงและเพิ่มขึ้นที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

ในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ และ r = 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 20 ถึง 50 แล้ว γ_1, γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

และในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ ถ้า $r = 3$ จะสามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้

บทที่ 3
วิธีการดำเนินงาน

3.1 อุปกรณ์ในการวิจัย

3.1.1 อุปกรณ์ที่มีอยู่แล้ว

1) เครื่องคอมพิวเตอร์

2) เครื่องพิมพ์เลเซอร์

3) โปรแกรมสำเร็จรูป MATHLAB version 7.6

3.1.2 อุปกรณ์ที่ต้องการเพิ่ม

-

3.2 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

โครงการวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงปกติ โดยทำการศึกษาในเรื่องต่อไปนี้

1. การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด
2. การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

วิธีการดำเนินงานกระทำได้ดังนี้

โครงการวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงปกติ โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด และการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย โดยมีวิธีในการดำเนินงานดังนี้

1) สมมติฐานที่สนใจทดสอบ

1.1 $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

1.2 $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

1.3 $H_0 : \mu \ge \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

$H_0 : \mu \le \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

2) ขนาดการทดสอบสำหรับการวิจัยในครั้งนี้ จะพิจารณาการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติภายใต้การแจกแจงปกติ และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.01 และ 0.05

3) เขียนโปรแกรม

เขียนโปรแกรมโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATHLAB version 7.6 ช่วยในการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด และการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

3.3 โปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

3.3.1 โปรแกรม MATHLAB version 7.6

บทที่ 4
ผลการวิจัยและอภิปรายผล

4.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most Powerful Test)

ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} & ; \quad -\infty < x < \infty,\ \sigma^2 > 0 \\ 0 & ; \quad \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

4.1.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

ในที่นี้ $L(\mu;x_1,...,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu)$

$$= f(x_1;\mu)...f(x_n;\mu)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1-\mu)^2} \cdots \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_n-\mu)^2}$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน

$$\frac{L(\mu_0)}{L(\mu_1)} \le c$$

จะได้

$$\frac{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}}{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}} \le c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2} \le c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-2\mu_1x_i+\mu_1^2\right)-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-2\mu_0x_i+\mu_0^2\right)} \le c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{\mu_1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\mu_1^2}{2\sigma_0^2}-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n\mu_0^2}{2\sigma_0^2}} \le c$$

$$e^{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{\mu_1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n\mu_0^2}{2\sigma_0^2}+\frac{n\mu_1^2}{2\sigma_0^2}} \quad \le \quad c$$

$$e^{\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1)-\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)} \quad \le \quad c$$

ใส่ลอการิทึมฐานธรรมชาติทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1)-\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right) \le \ln c$$

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1) \le \frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)+\ln c$$

แต่ $\mu_1 < \mu_0$ จะได้ $\mu_0-\mu_1 > 0$

$$\therefore \quad \bar{x} \le \frac{\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)+\ln c}{\frac{n}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1)}$$

$$\le \frac{1}{2}(\mu_0+\mu_1)+\frac{\sigma_0^2\ln c}{n(\mu_0-\mu_1)} = c_1$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 แล้ว $\overline{X}$ ก็จะมีการแจกแจงแบบปกติเช่นเดียวกัน โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\sigma_0^2}{n}$

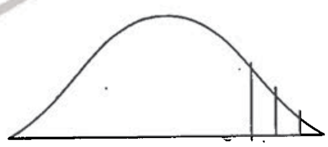
ดังนั้น

$$P\left[\overline{X}\le c_1 \mid \mu=\mu_0\right] = \alpha$$

$$P\left[\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le\frac{c_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \mid \mu=\mu_0\right] = \alpha$$

$$P\left[Z\le\frac{c_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right] = \alpha$$

$$P\left[Z\ge-\left(\frac{c_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)\right] = \alpha$$

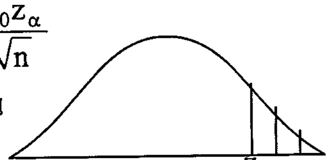


$$-\left(\frac{c_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) = z_\alpha$$

$\frac{c_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$

$$c_1 = \mu_0-\frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}}$$

เมื่อ $P(Z\ge z_\alpha)=\alpha$ โดยที่ Z มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน



z_α

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ คือ

$$\phi(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \le \mu_0 - \dfrac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} > \mu_0 - \dfrac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

กำลังของการทดสอบ

$$\begin{aligned}
&= 1-\beta \\
&= P\left[\bar{X} \le c_1 \middle| \mu = \mu_1\right] \\
&= P\left[\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{c_1-\mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} \middle| \mu = \mu_1\right] \\
&= P\left[Z \le \frac{\mu_0 - \dfrac{\sigma_0 Z_\alpha}{\sqrt{n}} - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right] \\
&= P\left[Z \le \frac{\sqrt{n}(\mu_0-\mu_1)}{\sigma_0} - z_\alpha\right] \\
&= P\left[Z \ge -\left(\frac{\sqrt{n}(\mu_0-\mu_1)}{\sigma_0} - z_\alpha\right)\right] \\
&= P\left[Z \ge \frac{\sqrt{n}(\mu_1-\mu_0)}{\sigma_0} + z_\alpha\right]
\end{aligned}$$

ถ้า $\mu_0 = 12,\ \mu_1 = 11,\ \sigma_0^2 = 1,\ n = 16,\ \alpha = 0.05,\ z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

จะได้ $c_1 = 12 - \dfrac{1.645}{\sqrt{16}}$

$= 11.59$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = 12,\ \sigma^2 = 1$ เทียบกับ $H_1 : \mu = 11,\ \sigma^2 = 1$ และ $n = 16$ คือ

$$\phi(x_1,\dots,x_{16}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \le 11.59 \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} > 11.59 \end{cases}$$

กำลังของการทดสอบ

$$\begin{aligned}
&= P\left[\bar{X} \le 11.59 \middle| \mu = 11\right] \\
&= P\left[\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{11.59-11}{1/\sqrt{16}}\right] \\
&= P(Z \le 2.36) \\
&= 1 - P(Z > 2.36) \\
&= 1 - 0.0091 \quad = \quad 0.9909
\end{aligned}$$

ตารางที่ 4.1 ค่าวิกฤต c_1 และกำลังของการทดสอบ $1-\beta$ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน
$H_0:\mu=\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1:\mu=\mu_1,\ \mu_1<\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$

α	σ_0^2	n	μ_0	μ_1	c_1	$1-\beta$
0.01	1	16	12	5	11.42	1.0000000000
				7	11.42	1.0000000000
				9	11.42	1.0000000000
				11	11.42	0.9535213421
		25		5	11.53	1.0000000000
				7	11.53	1.0000000000
				9	11.53	1.0000000000
				11	11.53	0.9959754115
		36		5	11.61	1.0000000000
				7	11.61	1.0000000000
				9	11.61	1.0000000000
				11	11.61	0.9998738924
		49		5	11.67	1.0000000000
				7	11.67	1.0000000000
				9	11.67	1.0000000000
				11	11.67	0.9999986340
		64		5	11.71	1.0000000000
				7	11.71	1.0000000000
				9	11.71	1.0000000000
				11	11.71	0.9999999933
		81		5	11.74	1.0000000000
				7	11.74	1.0000000000
				9	11.74	1.0000000000
				11	11.74	1.0000000000
		100		5	11.77	1.0000000000
				7	11.77	1.0000000000
				9	11.77	1.0000000000
				11	11.77	1.0000000000

ตารางที่ 4.1 (ต่อ)

α	σ_0^2	n	μ_0	μ_1	c_1	$1-\beta$
0.05	1	16	12	5	11.59	1.0000000000
				7	11.59	1.0000000000
				9	11.59	1.0000000000
				11	11.59	0.9908625325
		25		5	11.67	1.0000000000
				7	11.67	1.0000000000
				9	11.67	1.0000000000
				11	11.67	0.9995959422
		36		5	11.73	1.0000000000
				7	11.73	1.0000000000
				9	11.73	1.0000000000
				11	11.73	0.9999940624
		49		5	11.77	1.0000000000
				7	11.77	1.0000000000
				9	11.77	1.0000000000
				11	11.77	0.9999999648
		64		5	11.79	1.0000000000
				7	11.79	1.0000000000
				9	11.79	1.0000000000
				11	11.79	0.9999999999
		81		5	11.82	1.0000000000
				7	11.82	1.0000000000
				9	11.82	1.0000000000
				11	11.82	1.0000000000
		100		5	11.84	1.0000000000
				7	11.84	1.0000000000
				9	11.84	1.0000000000
				11	11.84	1.0000000000

จากตารางที่ 4.1 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\mu_0 = 12$ และ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า μ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 11 แล้ว c_1 และ $1-\beta$ จะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1 = 11$ ซึ่ง $1-\beta$ จะมีค่าลดลง และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า μ_1 ใด ๆ ที่ $\mu_0 = 12$ และ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 16 ถึง 100 แล้ว c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วน $1-\beta$ จะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1 = 11$ ซึ่ง $1-\beta$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น

นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n และ μ_1 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ จะมีค่า $1-\beta$ มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ สำหรับ n = 16, 25, 36, 49, 64 และ $\mu_1 = 11$

4.1.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

จากหัวข้อที่ 4.1.1

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0 - \mu_1) \quad \le \quad \frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right) + \ln c$$

แต่ $\mu_1 > \mu_0$ จะได้ $\mu_0 - \mu_1 < 0$

$$\therefore \quad \bar{x} \quad \ge \quad \frac{\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right) + \ln c}{\frac{n}{\sigma_0^2}(\mu_0 - \mu_1)}$$

$$\ge \quad \frac{1}{2}(\mu_0 + \mu_1) + \frac{\sigma_0^2 \ln c}{n(\mu_0 - \mu_1)} \quad = \quad c_2$$

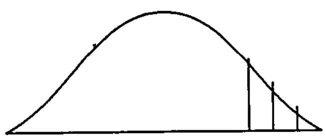
เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 แล้ว $\bar{X}$ ก็จะมีการแจกแจงแบบปกติเช่นเดียวกัน โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma_0^2}{n}$

ดังนั้น

$$P\left[\bar{X} \ge c_2 \middle| \mu = \mu_0\right] \quad = \quad \alpha$$

$$P\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{c_2 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \middle| \mu = \mu_0\right] \quad = \quad \alpha$$

$$P\left[Z \ge \frac{c_2 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right] \quad = \quad \alpha$$

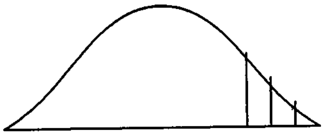


$$\frac{c_2 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$$

$$\frac{c_2 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \quad = \quad z_\alpha$$

$$c_2 \quad = \quad \mu_0 + \frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}}$$

เมื่อ $P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$ โดยที่ Z มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน



ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \geq \mu_0 + \dfrac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} < \mu_0 + \dfrac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

กำลังของการทดสอบ

$$= 1-\beta$$

$$= P\left[\bar{X} \geq c_2 \middle| \mu = \mu_1\right]$$

$$= P\left[\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{c_2 - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} \middle| \mu = \mu_1\right]$$

$$= P\left[Z \geq \frac{\mu_0 + \dfrac{\sigma_0 Z_\alpha}{\sqrt{n}} - \mu_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right]$$

$$= P\left[Z \geq \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma_0} + z_\alpha\right]$$

ถ้า $\mu_0 = 12,\ \mu_1 = 13,\ \sigma_0^2 = 1,\ n = 16,\ \alpha = 0.05,\ z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

จะได้ $c_2 = 12 + \dfrac{1.645}{\sqrt{16}}$

$= 12.41$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = 12,\ \sigma^2 = 1$ เทียบกับ $H_1 : \mu = 13,\ \sigma^2 = 1$ และ $n = 16$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_{16}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \geq 12.41 \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} < 12.41 \end{cases}$$

กำลังของการทดสอบ

$$= P\left[\bar{X} \geq 12.41 \middle| \mu = 13\right]$$

$$= P\left[\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{12.41-13}{1/\sqrt{16}}\right]$$

$$= P(Z \geq -2.36)$$

$$= P(Z \leq 2.36)$$

$$= 1 - P(Z > 2.36)$$

$$= 1 - 0.0091 = 0.9909$$

ตารางที่ 4.2 ค่าวิกฤต c_2 และกำลังของการทดสอบ $1-\beta$ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0: \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1: \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

α	σ_0^2	n	μ_0	μ_1	c_2	$1-\beta$
0.01	1	16	12	13	12.58	0.9535213421
				15	12.58	1.0000000000
				17	12.58	1.0000000000
				19	12.58	1.0000000000
		25		13	12.47	0.9959754115
				15	12.47	1.0000000000
				17	12.47	1.0000000000
				19	12.47	1.0000000000
		36		13	12.39	0.9998738924
				15	12.39	1.0000000000
				17	12.39	1.0000000000
				19	12.39	1.0000000000
		49		13	12.33	0.9999986340
				15	12.33	1.0000000000
				17	12.33	1.0000000000
				19	12.33	1.0000000000
		64		13	12.29	0.9999999933
				15	12.29	1.0000000000
				17	12.29	1.0000000000
				19	12.29	1.0000000000
		81		13	12.26	1.0000000000
				15	12.26	1.0000000000
				17	12.26	1.0000000000
				19	12.26	1.0000000000
		100		13	12.23	1.0000000000
				15	12.23	1.0000000000
				17	12.23	1.0000000000
				19	12.23	1.0000000000

ตารางที่ 4.2 (ต่อ)

α	σ_0^2	n	μ_0	μ_1	c_2	$1-\beta$
0.05	1	16	12.	13	12.41	0.9908625325
				15	12.41	1.0000000000
				17	12.41	1.0000000000
				19	12.41	1.0000000000
		25		13	12.33	0.9995959422
				15	12.33	1.0000000000
				17	12.33	1.0000000000
				19	12.33	1.0000000000
		36		13	12.27	0.9999940660
				15	12.27	1.0000000000
				17	12.27	1.0000000000
				19	12.27	1.0000000000
		49		13	12.24	0.9999999481
				15	12.24	1.0000000000
				17	12.24	1.0000000000
				19	12.24	1.0000000000
		64		13	12.21	0.9999999999
				15	12.21	1.0000000000
				17	12.21	1.0000000000
				19	12.21	1.0000000000
		81		13	12.18	1.0000000000
				15	12.18	1.0000000000
				17	12.18	1.0000000000
				19	12.18	1.0000000000
		100		13	12.16	1.0000000000
				15	12.16	1.0000000000
				17	12.16	1.0000000000
				19	12.16	1.0000000000

จากตารางที่ 4.2 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\mu_0 = 12$ และ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า μ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 13 ถึง 19 แล้ว c_2 และ $1-\beta$ จะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1 = 13$ ซึ่ง $1-\beta$ จะมีค่าลดลง และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า μ_1 ใด ๆ ที่ $\mu_0 = 12$ และ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 16 ถึง 100 แล้ว c_2 จะมีค่าลดลง ส่วน $1-\beta$ จะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1 = 13$ ซึ่ง $1-\beta$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น

นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n และ μ_1 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ จะมีค่า $1-\beta$ มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ สำหรับ n = 16, 25, 36, 49, 64 และ $\mu_1 = 13$

4.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly Most Powerful Test)

ในการหาการทดสอบสำหรับสมมติฐานต่าง ๆ ถ้าสามารถหาการทดสอบที่สามารถนำไปใช้กับสมมติฐานที่สอดคล้องกัน โดยที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่จะทดสอบไปเรื่อย ๆ แล้วไม่ได้ทำให้การทดสอบเปลี่ยนแปลงไป แต่ยังคงเหมือนเดิม สามารถใช้การทดสอบนั้นได้เสมอ ซึ่งเป็นการทดสอบที่ดีมาก กล่าวคือการทดสอบที่มีรูปแบบเดียว (Uniform) และสามารถใช้ทดสอบสมมติฐานที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่สอดคล้องกัน แบ่งออกเป็น 2 กรณี

4.2.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน

$H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

พิจารณา $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \leq c$$

จะได้

$$\frac{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}}{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}} \leq c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2} \leq c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-2\mu_1x_i+\mu_1^2\right)-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-2\mu_0x_i+\mu_0^2\right)} \leq c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{\mu_1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\mu_1^2}{2\sigma_0^2}-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n\mu_0^2}{2\sigma_0^2}} \leq c$$

$$e^{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{\mu_1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n\mu_0^2}{2\sigma_0^2}+\frac{n\mu_1^2}{2\sigma_0^2}} \leq c$$

$$e^{\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1)-\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)} \leq c$$

ใส่ลอการิทึมฐานธรรมชาติทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1)-\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right) \leq \ln c$$

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1) \leq \frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)+\ln c$$

แต่ $\mu_1 < \mu_0$ จะได้ $\mu_0 - \mu_1 > 0$

$$\therefore \quad \bar{x} \leq \frac{\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)+\ln c}{\frac{n}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1)}$$

$$\leq \frac{1}{2}(\mu_0+\mu_1)+\frac{\sigma_0^2\ln c}{n(\mu_0-\mu_1)} = c_1$$

อสมการนี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\mu_1 < \mu_0$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 แล้ว $\bar{X}$ ก็จะมีการแจกแจงแบบปกติเช่นเดียวกัน โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\sigma_0^2}{n}$

ดังนั้น

$$P\left[\bar{X} \leq c_1 \middle| \mu=\mu_0\right] = \alpha$$

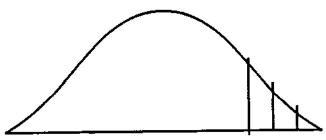
$$P\left[\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{c_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \middle| \mu=\mu_0\right] = \alpha$$

$$P\left[Z \leq \frac{c_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right] = \alpha$$

$$P\left[Z \geq -\left(\frac{c_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)\right] = \alpha$$

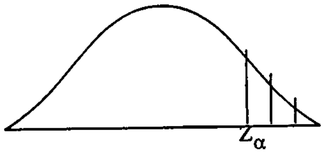
$$-\left(\frac{c_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) = z_\alpha$$

$$c_1 = \mu_0 - \frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}}$$



$\frac{c_1-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$

เมื่อ $P(Z \ge z_\alpha) = \alpha$ โดยที่ Z มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน



ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \le \mu_0 - \dfrac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} > \mu_0 - \dfrac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

ถ้า $\mu_0 = 12,\ \sigma_0^2 = 1,\ n = 16,\ \alpha = 0.05,\ z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

จะได้ $c_1 = 12 - \dfrac{1.645}{\sqrt{16}}$

$= 11.59$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = 12,\ \sigma^2 = 1$ เทียบกับ $H_1 : \mu < 12,\ \sigma^2 = 1$ และ $n = 16$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_{16}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \le 11.59 \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} > 11.59 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.3 ค่าวิกฤต c_1 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0, \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0, \sigma^2 = \sigma_0^2$

α	σ_0^2	n	μ_0	c_1
0.01	1	16	12	11.42
			14	13.42
			16	15.42
			18	17.42
		25	12	11.53
			14	13.53
			16	15.53
			18	17.53
		36	12	11.61
			14	13.61
			16	15.61
			18	17.61
		49	12	11.67
			14	13.67
			16	15.67
			18	17.67
		64	12	11.71
			14	13.71
			16	15.71
			18	17.71
		81	12	11.74
			14	13.74
			16	15.74
			18	17.74
		100	12	11.77
			14	13.77
			16	15.77
			18	17.77

ตารางที่ 4.3 (ต่อ)

α	σ_0^2	n	μ_0	c_1
0.05	1	16	12	11.59
			14	13.59
			16	15.59
			18	17.59
		25	12	11.67
			14	13.67
			16	15.67
			18	17.67
		36	12	11.73
			14	13.73
			16	15.73
			18	17.73
		49	12	11.77
			14	13.77
			16	15.77
			18	17.77
		64	12	11.79
			14	13.79
			16	15.79
			18	17.79
		81	12	11.82
			14	13.82
			16	15.82
			18	17.82
		100	12	11.84
			14	13.84
			16	15.84
			18	17.84

จากตารางที่ 4.3 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า μ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 12 ถึง 18 แล้ว c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า μ_0 ใด ๆ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 16 ถึง 100 แล้ว c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n และ μ_0 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ จะมีค่า c_1 มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$

4.2.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน

$$H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ เทียบกับ } H_1 : \mu > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$$

พิจารณา $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \leq c$$

จะได้

$$\frac{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}}{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}} \leq c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2} \leq c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-2\mu_1x_i+\mu_1^2\right)-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-2\mu_0x_i+\mu_0^2\right)} \leq c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{\mu_1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\mu_1^2}{2\sigma_0^2}-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n\mu_0^2}{2\sigma_0^2}} \leq c$$

$$e^{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{\mu_1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n\mu_0^2}{2\sigma_0^2}+\frac{n\mu_1^2}{2\sigma_0^2}} \leq c$$

$$e^{\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1)-\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)} \leq c$$

ใส่ลอการิทึมฐานธรรมชาติทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1)-\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right) \leq \ln c$$

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1) \leq \frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)+\ln c$$

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1) \leq \frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)+\ln c$$

แต่ $\mu_1 > \mu_0$ จะได้ $\mu_0 - \mu_1 < 0$

$$\therefore \quad \bar{x} \geq \frac{\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right) + \ln c}{\frac{n}{\sigma_0^2}\left(\mu_0 - \mu_1\right)}$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\mu_0 + \mu_1\right) + \frac{\sigma_0^2 \ln c}{n\left(\mu_0 - \mu_1\right)} = c_2$$

อสมการนี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\mu_1 > \mu_0$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 แล้ว $\overline{X}$ ก็จะมีการแจกแจงแบบปกติเช่นเดียวกัน โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma_0^2}{n}$

ดังนั้น

$$P\left[\overline{X} \geq c_2 \middle| \mu = \mu_0\right] = \alpha$$

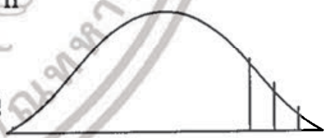
$$P\left[\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{c_2 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \middle| \mu = \mu_0\right] = \alpha$$

$$P\left[Z \geq \frac{c_2 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right] = \alpha$$

$$\frac{c_2 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = z_\alpha$$

$$c_2 = \mu_0 + \frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}}$$

$\frac{c_2 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$



z_α

เมื่อ $P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$ โดยที่ Z มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ คือ

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \geq \mu_0 + \frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} < \mu_0 + \frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

ถ้า $\mu_0 = 12,\ \sigma_0^2 = 1,\ n = 16,\ \alpha = 0.05,\ z_\alpha = z_{0.05} = 1.645$

จะได้

$$c_2 = 12 + \frac{1.645}{\sqrt{16}} = 12.41$$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = 12,\ \sigma^2 = 1$ เทียบกับ $H_1 : \mu > 12,\ \sigma^2 = 1$ และ $n = 16$ คือ

$$\phi(x_1, \ldots, x_{16}) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \geq 12.41 \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} < 12.41 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.4 ค่าวิกฤต c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

α	σ_0^2	n	μ_0	c_2
0.01	1	16	12	12.58
			14	14.58
			16	16.58
			18	18.58
		25	12	12.47
			14	14.47
			16	16.47
			18	18.47
		36	12	12.39
			14	14.39
			16	16.39
			18	18.39
		49	12	12.33
			14	14.33
			16	16.33
			18	18.33
		64	12	12.29
			14	14.29
			16	16.29
			18	18.29
		81	12	12.26
			14	14.26
			16	16.26
			18	18.26
		100	12	12.23
			14	14.23
			16	16.23
			18	18.23

ตารางที่ 4.4 (ต่อ)

α	σ_0^2	n	μ_0	c_2
0.05	1	16	12	12.41
			14	14.41
			16	16.41
			18	18.41
		25	12	12.33
			14	14.33
			16	16.33
			18	18.33
		36	12	12.27
			14	14.27
			16	16.27
			18	18.27
		49	12	12.24
			14	14.24
			16	16.24
			18	18.24
		64	12	12.21
			14	14.21
			16	16.21
			18	18.21
		81	12	12.18
			14	14.18
			16	16.18
			18	18.18
		100	12	12.16
			14	14.16
			16	16.16
			18	18.16

จากตารางที่ 4.4 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า μ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 12 ถึง 18 แล้ว c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า μ_0 ใด ๆ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 16 ถึง 100 แล้ว c_2 จะมีค่าลดลง

นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n และ μ_0 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ จะมีค่า c_2 มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$

4.2.3 การทดสอบสมมติฐานเชิงประกอบ (Composite Hypothesis Test)

4.2.3.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu \geq \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

พิจารณา $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \leq c$$

จะได้

$$\frac{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}}{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}} \leq c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2} \leq c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-2\mu_1x_i+\mu_1^2\right)-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-2\mu_0x_i+\mu_0^2\right)} \leq c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{\mu_1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\mu_1^2}{2\sigma_0^2}-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n\mu_0^2}{2\sigma_0^2}} \leq c$$

$$e^{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{\mu_1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n\mu_0^2}{2\sigma_0^2}+\frac{n\mu_1^2}{2\sigma_0^2}} \leq c$$

$$e^{\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1)-\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)} \leq c$$

ใส่ลอการิทึมฐานธรรมชาติทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1)-\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right) \leq \ln c$$

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1) \leq \frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)+\ln c$$

แต่ $\mu_1 < \mu_0$ จะได้ $\mu_0 - \mu_1 > 0$

$$\therefore \quad \bar{x} \quad \le \quad \frac{\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2 - \mu_1^2\right) + \ln c}{\frac{n}{\sigma_0^2}\left(\mu_0 - \mu_1\right)}$$

$$\le \quad \frac{1}{2}\left(\mu_0 + \mu_1\right) + \frac{\sigma_0^2 \ln c}{n\left(\mu_0 - \mu_1\right)} \quad = \quad c_1$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 แล้ว $\bar{X}$ ก็จะมีการแจกแจงแบบปกติเช่นเดียวกัน โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma_0^2}{n}$

ดังนั้น

$$P\left[\bar{X} \le c_1 \middle| \mu = \mu_0\right] = \alpha$$

$$P\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{c_1 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \middle| \mu = \mu_0\right] = \alpha$$

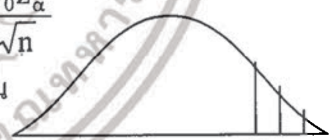
$$P\left[Z \le \frac{c_1 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right] = \alpha$$

$$P\left[Z \ge -\left(\frac{c_1 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)\right] = \alpha$$

$\frac{c_1 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$

$$-\left(\frac{c_1 - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) = z_\alpha$$

$$c_1 = \mu_0 - \frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}}$$



z_α

เมื่อ $P(Z \ge z_\alpha) = \alpha$ โดยที่ Z มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \bar{x} \le \mu_0 - \frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \bar{x} > \mu_0 - \frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

อสมการนี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\mu_1 < \mu_0$

ดังนั้น การทดสอบนี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

โดยทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน การทดสอบที่ได้ข้างบนนี้ก็มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu \geq \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ ดังนั้นการทดสอบ $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ นี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu \geq \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

การทดสอบนี้ให้การทดสอบในทำนองเดียวกับการทดสอบในหัวข้อที่ 4.2.1 ดังแสดงในตารางที่ 4.3

4.2.3.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu \leq \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

พิจารณา $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1, \mu_1 > \mu_0, \sigma^2 = \sigma_0^2$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \leq c$$

จะได้

$$\frac{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}}{\left(\frac{1}{2\pi\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}} \leq c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2} \leq c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-2\mu_1x_i+\mu_1^2\right)-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-2\mu_0x_i+\mu_0^2\right)} \leq c$$

$$e^{\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{\mu_1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\mu_1^2}{2\sigma_0^2}-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n\mu_0^2}{2\sigma_0^2}} \leq c$$

$$e^{\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{\mu_1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{n\mu_0^2}{2\sigma_0^2}+\frac{n\mu_1^2}{2\sigma_0^2}} \leq c$$

$$e^{\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1)-\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)} \leq c$$

ใส่ลอการิทึมฐานธรรมชาติทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1)-\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right) \leq \ln c$$

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1) \leq \frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)+\ln c$$

$$\frac{n\bar{x}}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1) \le \frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)+\ln c$$

แต่ $\mu_1 > \mu_0$ จะได้ $\mu_0 - \mu_1 < 0$

$$\therefore \quad \bar{x} \ge \frac{\frac{n}{2\sigma_0^2}\left(\mu_0^2-\mu_1^2\right)+\ln c}{\frac{n}{\sigma_0^2}(\mu_0-\mu_1)}$$

$$\ge \frac{1}{2}(\mu_0+\mu_1)+\frac{\sigma_0^2 \ln c}{n(\mu_0-\mu_1)} = c_2$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 แล้ว $\bar{X}$ ก็จะมีการแจกแจงแบบปกติเช่นเดียวกัน โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ $\frac{\sigma^2}{n}=\frac{\sigma_0^2}{n}$

ดังนั้น

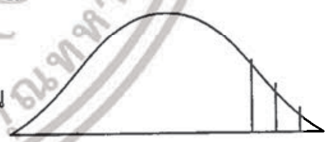
$$P\left[\bar{X} \ge c_2 \mid \mu=\mu_0\right] = \alpha$$

$$P\left[\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \ge \frac{c_2-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \middle| \mu=\mu_0\right] = \alpha$$

$$P\left[Z \ge \frac{c_2-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right] = \alpha$$

$$\frac{c_2-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = z_\alpha \qquad \frac{c_2-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$$

$$c_2 = \mu_0+\frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}}$$



เมื่อ $P(Z \ge z_\alpha)=\alpha$ โดยที่ Z มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

z_α

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu=\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu=\mu_1,\ \mu_1>\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \bar{x} \ge \mu_0+\frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{เมื่อ } \bar{x} < \mu_0+\frac{\sigma_0 z_\alpha}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

อสมการนี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\mu_1 > \mu_0$

ดังนั้น การทดสอบนี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu=\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu>\mu_0,\ \sigma^2=\sigma_0^2$

โดยทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน การทดสอบที่ได้ข้างบนนี้ก็มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu \le \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ ดังนั้นการทดสอบ $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ นี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu \le \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$

การทดสอบนี้ให้การทดสอบในทำนองเดียวกับการทดสอบในหัวข้อที่ 4.2.2 ดังแสดงในตารางที่ 4.4

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

1) การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\mu_0 = 12$ และ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า μ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 11 แล้ว c_1 และกำลังของการทดสอบ $(1-\beta)$ จะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1 = 11$ ซึ่งกำลังของการทดสอบจะมีค่าลดลง และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า μ_1 ใด ๆ ที่ $\mu_0 = 12$ และ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 16 ถึง 100 แล้ว c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนกำลังของการทดสอบจะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1 = 11$ ซึ่งกำลังของการทดสอบจะมีค่าเพิ่มขึ้น นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n และ μ_1 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ จะมีค่ากำลังของการทดสอบมากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ สำหรับ n = 16, 25, 36, 49, 64 และ $\mu_1 = 11$

2) การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu = \mu_1,\ \mu_1 > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\mu_0 = 12$ และ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า μ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 13 ถึง 19 แล้ว c_2 และกำลังของการทดสอบจะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1 = 13$ ซึ่งกำลังของการทดสอบจะมีค่าลดลง และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า μ_1 ใด ๆ ที่ $\mu_0 = 12$ และ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 16 ถึง 100 แล้ว c_2 จะมีค่าลดลง ส่วนกำลังของการทดสอบจะมีค่าคงที่ ยกเว้นที่ $\mu_1 = 13$ ซึ่งกำลังของการทดสอบจะมีค่าเพิ่มขึ้น นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n และ μ_1 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ จะมีค่ากำลังของการทดสอบมากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ สำหรับ n = 16, 25, 36, 49, 64 และ $\mu_1 = 13$

3) การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu < \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า μ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 12 ถึง 18 แล้ว c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า μ_0 ใด ๆ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 16 ถึง 100 แล้ว c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n และ μ_0 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ จะมีค่า c_1 มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$

4) การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu = \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ เทียบกับ $H_1 : \mu > \mu_0,\ \sigma^2 = \sigma_0^2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ที่ $\sigma_0^2 = 1$ ถ้า μ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 12 ถึง 18 แล้ว c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า μ_0 ใด ๆ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 16 ถึง 100 แล้ว c_2 จะมีค่าลดลง นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า n และ μ_0 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ จะมีค่า c_2 มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$

5.2 ข้อเสนอแนะ

1) ในการทดสอบสมมติฐานอาจเพิ่มความแปรปรวน σ_0^2 ให้มากขึ้น เช่น 2, 5 และ 10 เป็นต้น

2) ในการทดสอบสมมติฐานอาจเปลี่ยนค่า μ_0 และ μ_1 ไป เช่น $\mu_0 = 11$ และ $\mu_1 = 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$

3) ในการทดสอบสมมติฐานอาจทำการศึกษากรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบต่อเนื่องอื่น ๆ เช่น การแจกแจงแกมม่า การแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียล เป็นต้น

บรรณานุกรม

บรรทม สุระพร. 2541. การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงทวินาม. วารสารพัฒนบริหารศาสตร์ ปีที่ 38(3), 78-86.

ประชุม สุวัตถี. 2545. ทฤษฎีการอนุมานเชิงสถิติ. พิมพ์ครั้งที่ 2 กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

รุจิเรข ดีเสียง. 2541. การทดสอบสมมติฐานสองด้าน ภายใต้การแจกแจงปัวส์ซง. วารสารพัฒนบริหารศาสตร์ ปีที่ 38(2), 125-132.

สายชล สินสมบูรณ์ทอง. 2555. การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงเบอร์นูลลี. วารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง ปีที่ 20(2), 72-93.

บุญญสิทธิ์ วรจันทร์และสายชล สินสมบูรณ์ทอง. 2555. การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงทวินามลบ. วารสารวิทยาศาสตร์ลาดกระบัง ปีที่ 21(2), 36-53.

Lehmann, E. L. 1986. Testing Statistical Hypotheses. 2nd ed. New York : John Wiley and Sons.

Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C. : 1974. Introduction to the Theory of Statistics. 3rd ed. Auckland : McGraw Hill.