รายงานการวิจัย

แบบจำลองการระบาดสำหรับโรคไข้ปวดข้อยุงลายในประเทศไทย

Transmission model for Chikungunya Fever in Thailand

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พันธนี พงศ์สัมพันธ์
(หัวหน้าโครงการ)

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ประจำปีงบประมาณ 2553
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ Professor Dr. I-Ming Tang, Mahidol University, Thailand, Professor Dr.Marc A. Dubois, Service de Physique de l'Etat Condensé, Commissariat à l'Energie Atomique CEA Saclay –Orme des Merisiers, Cedex, France และ Dr.Philippe Barbazan เป็นอย่างสูง ที่กรุณาให้คำปรึกษาแนะนำต่างๆ ในการทำงานวิจัย และดูแลเอาใจใส่การทำงานและให้ความรู้ พร้อมกับประสบการณ์ที่ดีต่างๆ ตลอดมา

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์สาขาคณิตศาสตร์ รวมถึงเจ้าหน้าที่ประจำสาขาวิชาทุกท่านที่ช่วยเหลือในด้านการอำนวยความสะดวกเกี่ยวกับอุปกรณ์ที่จำเป็นต่างๆ

ขอกราบขอบพระคุณครอบครัว ที่ได้ให้การสนับสนุนทุกประการทางด้านการทำวิจัย และยังให้กำลังใจตลอดมาจนถึงปัจจุบัน และต้องขอขอบคุณเพื่อนๆ ทุกท่านที่ช่วยเหลือให้คำแนะนำต่างๆ จนงานวิจัยสำเร็จสมบูรณ์ยิ่งขึ้น รวมทั้งนางสาว รุจิรา คงนุ้ย ซึ่งเป็นผู้ช่วยวิจัยของงานวิจัยฉบับนี้

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากปัญหาพิเศษฉบับนี้ ผู้จัดทำขออุทิศแด่บิดา มารดา และผู้มีพระคุณทุกท่าน

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ได้ให้ทุนสนับสนุนการทำงานวิจัยนี้

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พันธนี พงศ์สัมพันธ์

คณิตศาสตร์แต่ละแบบ พร้อมทั้งแสดงเงื่อนไขของตัวแปรที่ทำให้เกิดความเสถียรภายใน (local asymptotically stable) ของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค (disease free state) และสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง (disease endemic state) ผลลัพธ์เชิงตัวเลขของแบบจำลองได้ถูกนำมาแสดง เพื่อใช้ในการสนับสนุนสมมติฐานในการศึกษา

ABSTRACT

Chikungunya Fever is the disease occurred by Chikungunya virus. The symptoms are similarly to the Dengue patients. The vector is the *Aedes* mosquito. Dengue disease differs to Chikungunya fever such as there is a leak out of blood plasma. The disease caused by Chikungunya virus which is RNA Virus genus alphavirus family Togaviridae. The *Aedes aegypti* and *Aedes albopictus* are the primary epidemic vectors. When the female mosquitoes bite and suck blood from the patients with a high fever and virus in the bloodstream. The viruses enter the stomach and increase the number and then enter into the salivary glands. When the infected mosquitoes bite the other people, they will leave the viruses to the people. The people have a high fever about 2-4 days and viruses circulate in the bloodstream. The outbreak of the Chikungunya virus is studied by using mathematical model. The mathematical model is developed from the mathematical model of E. Massad, S. Ma et al (2008) which contains no age structure and season. We add the age structure and season which would make the model more appropriated. We apply the standard dynamical modeling method to analyze the behaviors of our solutions. We obtain the conditions required of the parameters for the disease free and endemic equilibrium points to be local asymptotically stable. Numerical solutions are obtained to support the theoretical predictions.

สารบัญ

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญภาพ

หน้า

หน้า

หน้า

หน้า

หน้า

หน้า

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

การจำลองแบบปัญหาเป็นศาสตร์แห่งวิธีการในการแก้ไขปัญหาที่ขาดไม่ได้สำหรับศาสตร์เกือบทุกแขนง เช่น วิศวกร นักธุรกิจ นักเศรษฐศาสตร์ นักวิทยาศาสตร์ แพทย์ ฯลฯ กลไกของวิธีการของการจำลองแบบปัญหาขึ้นอยู่กับแบบจำลองและการใช้แบบจำลอง แบบจำลองที่ใช้ในการจำลองแบบปัญหาอาจจะเป็นระบบงาน หรือเป็นแนวความคิดลักษณะใดลักษณะหนึ่ง ซึ่งไม่จำเป็นต้องเหมือนกับปัญหาจริง แต่จะต้องสามารถช่วยให้เข้าใจในปัญหาจริงได้ เพื่อประโยชน์ในการอธิบายพฤติกรรม และเพื่อปรับปรุงและแก้ไขปัญหานั้น ฉะนั้นการจำลองแบบปัญหาจะเน้นถึงการสร้างแบบจำลองและการทดลองเพื่อการศึกษาปัญหาต่างๆ ที่ต้องการเรียนรู้ และแสดงผลลัพธ์ออกมาซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) เป็นศาสตร์ที่มีความสำคัญยิ่งในการศึกษาด้านวิศวกรรม ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา เศรษฐศาสตร์ แพทย์ศาสตร์และสาขาอื่นๆอีกมากมาย แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการแพทย์ ได้มีบทบาทอย่างมากต่อการทำความเข้าใจและแก้ปัญหาเกี่ยวกับโรค เพื่อศึกษา วิเคราะห์และนำไปสู่การควบคุมการระบาดของโรค

ในงานวิจัยชิ้นนี้เป็นการสร้าง พัฒนาและศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์การระบาดของโรคไข้ปวดข้อยุงลาย หรือโรคชิคุนกุนยา โดยทำการศึกษา ทำความเข้าใจ พร้อมทั้งวิเคราะห์และหาวิธีการแก้ปัญหาการระบาดของโรค โดยใช้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์มาวิเคราะห์แบบจำลอง แสดงผลการวิเคราะห์ที่ได้เพื่อนำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันการระบาดของโรค เพื่อใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการควบคู่กับสถิติการเกิดโรคของประเทศไทยทั่วภูมิภาคของทางสำนักระบาดวิทยา กระทรวงสาธารณสุข เพื่อลดงบประมาณรายจ่ายทางการแพทย์ของประเทศไทย

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1. เพื่อศึกษาการระบาดวิทยาของโรคชิคุนกุนยา
2. เพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการระบาดของโรคชิคุนกุนยาในประเทศไทย
3. เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับการระบาดวิทยาของโรคชิคุนกุนยาในประเทศไทย
4. ศึกษาและค้นคว้าหาแนวทางในการลดการระบาดของโรคชิคุนกุนยาในประเทศไทยโดยนำความรู้และทฤษฎีทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้
5. เพื่อนำศาสตร์และทฤษฎีทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้กับวิทยาศาสตร์ทางการแพทย์
6. เพื่อเป็นแนวทางในการลดการระบาดของโรค และลดงบประมาณในการควบคุมการระบาดของโรคชิคุนกุนยา

1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

1. ศึกษา ค้นคว้าข้อมูลเกี่ยวกับโรคชิคุนกุนยา ลักษณะการระบาดของโรค และสถิติผู้ป่วยโรคชิคุนกุนยา
2. ศึกษาและสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคชิคุนกุนยา
3. วิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคชิคุนกุนยา
4. แก้ไขและปรับปรุงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมและสอดคล้องกับลักษณะการระบาดของโรคชิคุนกุนยา
5. สรุปผลการวิจัย

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เป็นการสร้างและเพิ่มความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

2. เป็นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อศึกษาการระบาดของโรคชิคุนกุนยาในประเทศไทย
3. สามารถนำคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ในการศึกษา การวิจัย ทางด้านแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้
4. สอดคล้องแผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ ฉบับที่ 10 (พ.ศ. 2550-2554) ยุทธศาสตร์การพัฒนาคุณภาพคนและสังคมไทยสู่สังคมแห่งภูมิปัญญาและการเรียนรู้ ประเภทการวิจัยประยุกต์
5. สามารถนำผลที่ได้จากการวิเคราะห์และการวิจัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไปใช้ให้เป็นประโยชน์ทางการแพทย์ได้
6. สามารถหาแนวทางใหม่ที่ช่วยในการลดการระบาดของโรค โดยใช้เทคนิคและทฤษฎีทางคณิตศาสตร์มาสร้างแบบจำลองการระบาดของโรคชิคุนกุนยาในประเทศไทย ซึ่งเป็นการช่วยลดงบประมาณในการควบคุมการระบาดของโรค
7. เพื่อเป็นการช่วยให้ประชาชนรอดพ้นจากการเป็นโรคชิคุนกุนยาในประเทศไทย ซึ่งในแต่ละปีมีประชาชนที่ป่วยจากโรคนี้เป็นจำนวนมาก
8. เพื่อเป็นการนำคณิตศาสตร์มาศึกษาและประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์กับวิทยาศาสตร์ทางการแพทย์

1.5 ระเบียบวิธีการวิจัย

1. ศึกษา ค้นคว้าเกี่ยวกับโรคชิคุนกุนยา และลักษณะการแพร่ระบาดของโรคชิคุนกุนยา
2. ศึกษาและวิเคราะห์ข้อมูลของโรคชิคุนกุนยา
3. กำหนดตัวแปรในการวิจัย โดยที่ตัวแปรต้นคือ อายุของผู้ป่วยและฤดูกาลที่ผู้ป่วยเป็นโรคนี้ ตัวแปรตามคือ จำนวนผู้ป่วยโรคชิคุนกุนยา
4. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคชิคุนกุนยาในประเทศไทย
5. วิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์
6. พัฒนา และแก้ไขปรับปรุงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้ให้เหมาะสม
7. วิเคราะห์และสรุปผลที่ได้จากการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้

พร้อมทั้งเสนอแนวทางในการลดการระบาดของโรคนี้โดยอ้างอิงความรู้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ทางการแพทย์

8. สรุปและรายงานผลการวิจัย

1.6 ทฤษฎีหรือกรอบแนวคิดของโครงการวิจัย (ภาคผนวก)

1. Standard Dynamical Analysis Method
2. The equilibrium state
3. The Routh-Hurwitz criteria
4. Local asymptotical stability

บทที่ 2
โรคไข้ปวดข้อยุงลาย (Chikungunya Fever)

2.1 โรคไข้ปวดข้อยุงลาย (Chikungunya Fever)

โรคไข้ปวดข้อยุงลาย (Chikungunya Fever) หรือโรคชิคุนกุนยา เป็นโรคติดเชื้อไวรัสชิคุนกุนยาที่มียุงลายเป็นพาหะนำโรค มีอาการคล้ายไข้เดงกี แต่ต่างกันที่มีมีการรั่วของพลาสมาออกนอกเส้นเลือด โรคนี้เกิดจากเชื้อไวรัสชิคุนกุนยา (Chikungunya virus) ซึ่งเป็น RNA Virus จัดอยู่ใน genus alphavirus และ family Togaviridae มียุงลาย Aedes aegypti และ Aedes albopictus เป็นพาหะนำโรค โรคชิคุนกุนยาสามารถติดต่อกันได้โดยมียุงลาย Aedes aegypti เป็นพาหะนำโรค เมื่อยุงตัวเมียกัดและดูดเลือดผู้ป่วยที่อยู่ในระยะไข้สูงซึ่งเป็นระยะที่มีไวรัสอยู่ในกระแสเลือด เชื้อไวรัสจะเข้าสู่กระเพาะยุงและเพิ่มจำนวนมากขึ้นแล้วเดินทางเข้าสู่ต่อมน้ำลาย เมื่อยุงที่มีเชื้อไวรัสชิคุนกุนยาไปกัดคนอื่นก็จะปล่อยเชื้อไปยังคนที่ถูกกัด ทำให้คนนั้นเกิดอาการของโรคได้ ระยะไข้สูงประมาณวันที่ 2-4 เป็นระยะที่มีไวรัสอยู่ในกระแสเลือดมาก [1]

อาการของผู้ป่วยโรคนี้จะมีอาการไข้สูงอย่างฉับพลัน มีผื่นแดงขึ้นตามร่างกายและอาจมีอาการคันร่วมด้วย ส่วนใหญ่ในเด็กจะมีอาการไม่รุนแรงเท่าในผู้ใหญ่ ในผู้ใหญ่อาการที่เด่นชัดคืออาการปวดข้อ อาการปวดข้อจะพบได้หลายๆข้อเปลี่ยนตำแหน่งไปเรื่อยๆ อาการจะรุนรายใน 1-12 สัปดาห์ ผู้ป่วยบางรายอาจมีอาการปวดข้อเกิดขึ้นได้อีกภายใน 2-3 สัปดาห์ต่อมา และบางรายอาการปวดข้อจะอยู่ได้นานเป็นเดือนหรือเป็นปี การรักษาไม่จำเพาะเจาะจง (specific treatment) การรักษาเป็นแบบการรักษาแบบประคับประคอง (supportive treatment) ปัจจุบันยังไม่มียารักษาเฉพาะ และไม่มีวัคซีนป้องกัน ให้การรักษาตามอาการ

การติดเชื้อ Chikungunya virus เดิมมีอยู่ในทวีปอาฟริกาอุบัติขึ้นมาตั้งแต่ปี พ.ศ. 2498 ก่อนจะระบาดไปทั่วโลก ในประเทศไทยมีการตรวจพบครั้งแรกพร้อมกับที่มีไข้เลือดออกระบาดและเป็นครั้งแรกในทวีปเอเชีย เมื่อ พ.ศ.2501 โดย Prof.W McD Hamnon แยกเชื้อชิคุนกุนยา ได้จากผู้ป่วยโรงพยาบาลเด็ก กรุงเทพมหานคร [2]

ในทวีปอาฟริกามีหลายประเทศพบเชื้อชิคุนกุนยา การแพร่เชื้อในอาฟริกามี 2 วงจรคือ วงจรชนบท (คน-ยุง-ลิง) ซึ่งมีลิงบาร์บูน เป็น host อาจทำให้มีผู้ป่วยจากเชื้อนี้ประปราย หรืออาจมีการระบาดเล็กๆได้เป็นครั้งคราว เมื่อมีผู้ที่ไม่มีภูมิคุ้มกันเข้าไปในพื้นที่ที่มีเชื้อนี้อยู่และคนอาจนำเชื้อนี้มาสู่ชุมชนเมือง โดยเฉพาะในพื้นที่ที่มียุงลายชุกชุมมาก ทำให้เกิดวงจรในเมือง (คน-ยุง) จากคนไปสู่คน โดยยุงเป็นพาหะ [2]

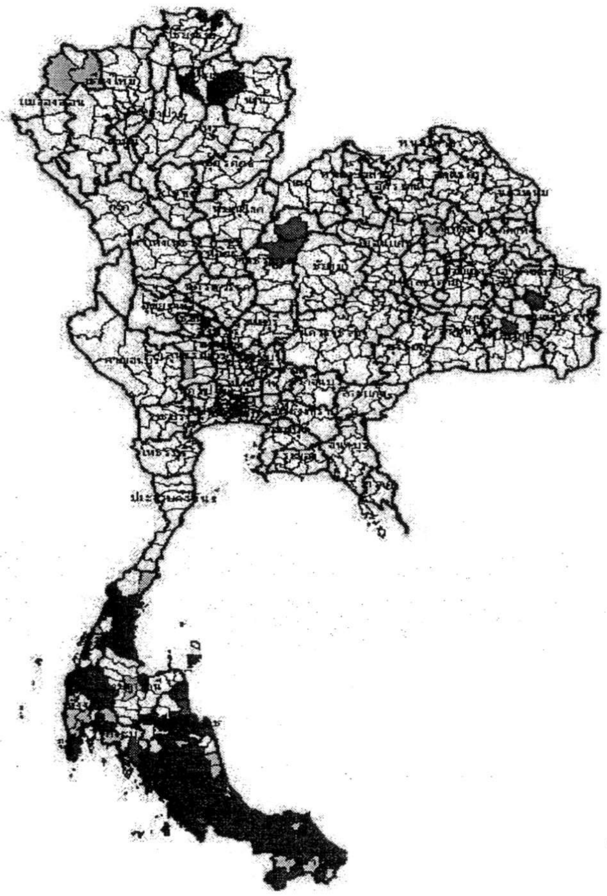
ส่วนการแพร่เชื้อชิคุนกุนยาในทวีปเอเชียต่างจากในทวีปอาฟริกา วงจรที่พบคือ วงจรในเมือง มี Aedes aegypti เป็นพาหะที่สำคัญ ระบาดวิทยาของโรคมีรูปแบบคล้ายคลึงกับโรคติดเชื้อที่

นำโดย Aedes aegypti อื่นๆซึ่งอุบัติการของโรคเป็นไปตามการแพร่กระจายและความชุกชุมของยุงลาย หลังจากที่ตรวจพบครั้งแรกในประเทศไทย ก็มีรายงานจากประเทศต่างๆในทวีปเอเชีย ได้แก่ เขมร เวียดนาม พม่า ศรีลังกา อินเดีย อินโดนีเซีย และฟิลิปปินส์ โรคนี้จะพบมากในฤดูฝน เมื่อประชากรยุงเพิ่มขึ้นและมีการติดเชื้อในยุงลายมากขึ้น พบโรคนี้ได้ในทุกกลุ่มอายุ ซึ่งต่างจากไข้เลือดออกและหัดเยอรมันที่ส่วนมากพบในอายุน้อยกว่า 15 ปี ในประเทศไทยพบมีการระบาดของโรคชิคุนกุนยา 6 ครั้ง ในปี พ.ศ. 2531 ที่จังหวัดสุรินทร์ พ.ศ. 2534 ที่จังหวัดขอนแก่นและปราจีนบุรี ในปี พ.ศ. 2536 มีการระบาด 3 ครั้งที่จังหวัดเลย นครศรีธรรมราช และหนองคาย และในปี พ.ศ. 2551 พบการระบาดที่จังหวัดนราธิวาส

สำหรับในปี พ.ศ. 2552 ตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม 2552 ถึง 16 มิถุนายน 2552 สำนักระบาดวิทยาได้รับรายงานผู้ป่วยโรคชิคุนกุนยาสะสม 28,056 ราย ใน 39 จังหวัด 5 ลำดับแรกที่มีผู้ป่วยมากสุด คือจังหวัดนราธิวาส มีผู้ป่วยสูงสุดจำนวน 7,150 ราย มีอัตราป่วยสูงที่สุด 993.15 ต่อประชากรแสนคน รองลงมาคือ จังหวัดสงขลา พบผู้ป่วยจำนวน 8,984 ราย อัตราป่วย 672.57 ต่อประชากรแสนคน จังหวัดปัตตานี ผู้ป่วยจำนวน 4,035 ราย อัตราป่วย 628.34 จังหวัดยะลา จำนวนผู้ป่วย 2,424 ราย มีอัตราการป่วย 509.75 และจังหวัดสตูล ผู้ป่วยจำนวน 228 ราย อัตราการป่วย 79.05 [3]

ลำดับ	จังหวัด	จำนวนผู้ป่วย
1	สงขลา	8984
2	นราธิวาส	7122
3	ปัตตานี	4035
4	ยะลา	2424
5	พัทลุง	1592
6	ตรัง	1112
7	ภูเก็ต	696
8	นครศรีธรรมราช	280
9	ชุมพร	259
10	สุราษฎร์ธานี	247

ตารางที่ 2.1 จำนวนผู้ป่วยสะสมโรคชิคุนกุนยา 10 ลำดับแรกที่มีจำนวนผู้ป่วยสูงสุด (ข้อมูล ณ วันที่ 16 มิถุนายน 2552) ข้อมูลจากสำนักระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค



รูปที่ 2.1 การกระจายของผู้ป่วยโรคชิคุนกุนยารายอำเภอ ประเทศไทย ข้อมูลระหว่างวันที่ 1 มกราคม – 16 มิถุนายน 2552

ช่วงอายุ	จำนวนผู้ป่วย	สัดส่วน (%)
0-27 วัน	22	0.07
1-3 เดือน	25	0.08
4-5 เดือน	19	0.06
6-8 เดือน	25	0.08
9-11 เดือน	31	0.11
1 ปี	174	0.59
2 ปี	189	0.64
3 ปี	241	0.82
4 ปี	248	0.84

5 ปี	241	0.82
6 ปี	272	0.92
7-9 ปี	1053	3.57
10-14 ปี	2563	8.69
15-24 ปี	4581	15.53
25-34 ปี	5248	17.79
35-44 ปี	5613	19.02
45-54 ปี	4529	15.35
55-64 ปี	2513	8.52
> 65 ปี	1917	6.50
ไม่ทราบ	3	0.01
จำนวนรวม	29,507	100 %

ตารางที่ 2.2 สัดส่วนของกลุ่มอายุผู้ป่วยต้องสงสัยชิคุนกุนยา (ข้อมูล ณ วันที่ 16 มิถุนายน 2552) ข้อมูลจากสำนักระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เริ่มมีบทบาทสำคัญต่อการแก้ปัญหาการระบาดของโรค โดยที่ในปี พ.ศ. 2541 พ.ศ. 2542 พ.ศ. 2543 และ พ.ศ. 2546 Lourdes Esteva และ Cristobal Vargas ได้ศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับโรคไข้เลือดออก กำหนดให้จำนวนประชากรคนและจำนวนยุงคงที่ [4, 5, 6, 7] พร้อมทั้งได้ศึกษาความสัมพันธ์ของการติดเชื้อซ้ำ และหลังจากนั้นได้ประยุกต์วิธีการของการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน (standard dynamical modeling) มาวิเคราะห์ลักษณะของคำตอบของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์พร้อมทั้งแสดงเงื่อนไขของตัวแปรที่ทำให้เกิดความเสถียรภายในของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค (disease free state) และสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง (disease endemic state) เพื่อใช้ในการสนับสนุนสมมติฐานในการศึกษา และนำไปสู่วิธีการลดการระบาดของโรค

สำหรับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในโรคชิคุนกุนยาเริ่มต้นครั้งแรกเมื่อปี พ.ศ.2513 [8] หลังจากนั้นแทบจะไม่มีผู้ใดได้ศึกษาการระบาดในโรคนี้ จนกระทั่งในปี พ.ศ. 2550 [9] เนื่องจากมีการระบาดของโรคอีกครั้ง จึงได้มีการศึกษาหาค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน โดยการให้ความสำคัญกับกลุ่มประชากรยุง จนกระทั่งเมื่อปี พ.ศ. 2551 Y. Dumont และ F. Chiroleu [10] ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ศึกษาจำนวนประชากรคนและยุง โดยการคำนวณหาค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน และเงื่อนไขที่แสดงจุดสภาวะไร้โรค และจุดสภาวะโรคเรื้อรัง จากสถิติจำนวนผู้ป่วยในปี พ.ศ. 2548 และ พ.ศ.

2549 ในประเทศฝรั่งเศสและอิตาลี ซึ่งในปีเดียวกันนี้เองที่ Steven E. Bellan, Althea Smith และ Thibaut Zafack Takadong [11] ได้ศึกษาแบบจำลองการแพร่ระบาดของโรคชิคุนกุนยาที่แพร่ระบาดแถบมหาสมุทรอินเดีย โดยการสร้างแบบจำลองแบบ Stochastic เพื่อศึกษาการถ่ายทอดเชื้อจากยุงไปสู่ลูกยุง

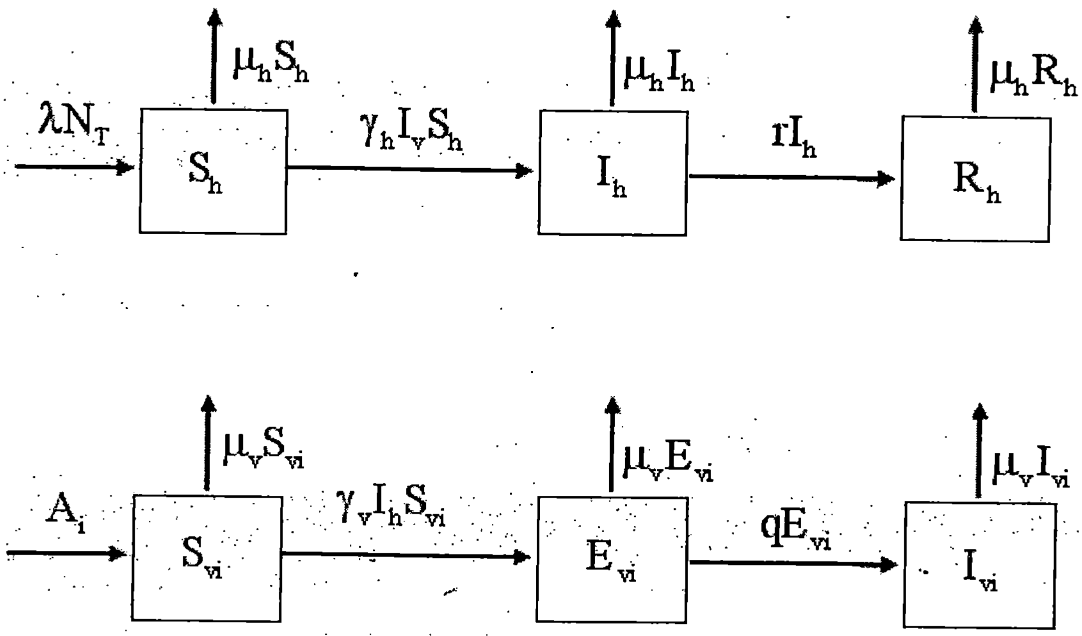
จากสถิติการแพร่ระบาดของโรคนี้ในประเทศไทยตั้งแต่ต้นปี 2552 เป็นต้นมามีสถิติจำนวนผู้ป่วยที่สูงขึ้นอย่างรวดเร็ว ทำให้ผู้วิจัยได้ทำการวิจัยครั้งนี้ขึ้นเพื่อเป็นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคชิคุนกุนยา เพื่อศึกษาการแพร่ระบาดของโรค และหาแนวทางป้องกัน และแก้ไขการแพร่ระบาดของโรค เพื่อใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรค ลดจำนวนผู้ป่วย และใช้เป็นข้อมูลพื้นฐานควบคู่กับสถิติการเกิดโรคของประเทศไทยของทางสำนักระบาดวิทยา กระทรวงสาธารณสุข

บทที่ 3

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้ปวดข้อยุงลาย และการวิเคราะห์

3.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคไข้ปวดข้อยุงลาย

เราวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่ระบาดของโรคไข้ปวดข้อยุงลายตามฤดูกาล



รูปที่ 3.1 แผนภาพแสดงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคไข้ปวดข้อยุงลายตามฤดูกาล

นิยามตัวแปรและพารามิเตอร์ในแบบจำลอง ดังนี้

S_h	แทนจำนวนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ
I_h	แทนจำนวนคนที่ติดเชื้อ
R_h	แทนจำนวนคนฟื้นไข้
S_v	แทนจำนวนยุงที่ไวต่อการติดเชื้อ
E_{v1}	แทนจำนวนยุงที่มีเชื้อและอยู่ในระยะฟักเชื้อในฤดูหนาว
I_{v1}	แทนจำนวนยุงที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ในฤดูหนาว
E_{v2}	แทนจำนวนยุงที่มีเชื้อและอยู่ในระยะฟักเชื้อในฤดูฝน
I_{v2}	แทนจำนวนยุงที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ในฤดูฝน
E_{v3}	แทนจำนวนยุงที่มีเชื้อและอยู่ในระยะฟักเชื้อในฤดูร้อน
I_{v3}	แทนจำนวนยุงที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ในฤดูร้อน
μ_h	แทนอัตราการตายของประชากรคน
μ_v	แทนอัตราการตายของประชากรยุง
λ	แทนอัตราการเกิดของประชากรคน
γ_h	แทนอัตราการถ่ายทอดเชื้อจากยุงไปยังคน
γ_v	แทนอัตราการถ่ายทอดเชื้อจากคนไปยังยุง
N_T	แทนจำนวนประชากรคนทั้งหมด
r	แทนอัตราการฟื้นไข้ของประชากรคน
q	แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของยุงในช่วงฟักเชื้อไปเป็นช่วงที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้
A_1	แทนจำนวนยุงในฤดูหนาว (คงที่)
A_2	แทนจำนวนยุงในฤดูฝน (คงที่)
A_3	แทนจำนวนยุงในฤดูร้อน (คงที่)
N_{v1}	แทนจำนวนประชากรคนในฤดูหนาว

N_{v2}	แทนจำนวนประชากรคนในฤดูฝน
N_{v3}	แทนจำนวนประชากรคนในฤดูร้อน

จากแผนภาพข้างต้น เราสามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\frac{dS_h}{dt} = \lambda N_T - (\mu_h + \gamma_h I_v)S_h \tag{3.1}$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \gamma_h S_h I_v - (\mu_h + r)I_h \tag{3.2}$$

$$\frac{dR_h}{dt} = rI_h - \mu_h R_h \tag{3.3}$$

$$\frac{dS_{vi}}{dt} = A_i - (\gamma_v I_h + \mu_v)S_{vi} \tag{3.4}$$

$$\frac{dE_{vi}}{dt} = \gamma_v S_{vi} I_h - (\mu_v + q)E_{vi} \tag{3.5}$$

$$\frac{dI_{vi}}{dt} = qE_{vi} - \mu_v I_{vi} \tag{3.6}$$

โดยที่มีเงื่อนไข คือ $i = 1,2,3$ ถ้า $i = 1$ หมายถึงฤดูหนาว, $i = 2$ หมายถึงฤดูฝน และ $i = 3$ หมายถึงฤดูร้อน , $N_T = S_h + I_h + R_h$, $N_{vi} = S_{vi} + E_{vi} + I_{vi}$ และ $I_v = I_{v1} + I_{v2} + I_{v3}$.

การตั้งสมมติฐานให้ประชากรแต่ละกลุ่มทั้งหมดคงที่ เราจะได้ว่า

$$\frac{dN_T}{dt} = \frac{dN_{v1}}{dt} = \frac{dN_{v2}}{dt} = \frac{dN_{v3}}{dt} = 0$$

i) $$\frac{dN_T}{dt} = \frac{dS_h}{dt} + \frac{dI_h}{dt} + \frac{dR_h}{dt}$$

$$= \lambda N_T - (\mu_h + \gamma_h I_v)S_h + \gamma_h S_h I_v - (\mu_h + r)I_h + rI_h - \mu_h R_h$$

$$= \lambda N_T - \mu_h S_h - \mu_h I_h - \mu_h R_h$$

$$= \lambda N_T - \mu_h N_T$$

$$= (\lambda - \mu_h) N_T$$

ดังนั้น $\lambda = \mu_h$

แสดงว่าอัตราการเกิดของประชากรคนเท่ากับอัตราการตายของประชากรคน

ii) $$\frac{dN_{v1}}{dt} = \frac{dS_{v1}}{dt} + \frac{dE_{v1}}{dt} + \frac{dI_{v1}}{dt}$$

$$= A_1 - (\gamma_v I_h + \mu_v) S_{v1} + \gamma_v S_{v1} I_h - (\mu_v + q) E_{v1} + q E_{v1} - \mu_v I_{v1}$$

$$= A_1 - \mu_v S_{v1} - \mu_v E_{v1} - \mu_v I_{v1}$$

$$= A_1 - \mu_v N_{v1}$$

ดังนั้น $A_1 - \mu_v N_{v1} = 0, \qquad N_{v1} = \frac{A_1}{\mu_v}$

iii) $$\frac{dN_{v2}}{dt} = \frac{dS_{v2}}{dt} + \frac{dE_{v2}}{dt} + \frac{dI_{v2}}{dt}$$

$$= A_2 - (\gamma_v I_h + \mu_v) S_{v2} + \gamma_v S_{v2} I_h - (\mu_v + q) E_{v2} + q E_{v2} - \mu_v I_{v2}$$

$$= A_2 - \mu_v S_{v2} - \mu_v E_{v2} - \mu_v I_{v2}$$

$$= A_2 - \mu_v N_{v2}$$

ดังนั้น $A_2 - \mu_v N_{v2} = 0, \qquad N_{v2} = \dfrac{A_2}{\mu_v}$

iv) $$\frac{dN_{v3}}{dt} = \frac{dS_{v3}}{dt} + \frac{dE_{v3}}{dt} + \frac{dI_{v3}}{dt}$$

$$= A_3 - (\gamma_v I_h + \mu_v) S_{v3} + \gamma_v S_{v3} I_h - (\mu_v + q) E_{v3} + q E_{v3} - \mu_v I_{v3}$$

$$= A_3 - \mu_v S_{v3} - \mu_v E_{v3} - \mu_v I_{v3}$$

$$= A_3 - \mu_v N_{v3}$$

ดังนั้น $A_3 - \mu_v N_{v3} = 0, \qquad N_{v3} = \dfrac{A_3}{\mu_v}$

เราลดจำนวนสมการลงโดยการกำหนดตัวแปรใหม่ดังนี้

$\overline{S_h} = \dfrac{S_h}{N_T}$, $\overline{I_h} = \dfrac{I_h}{N_T}$, $\overline{R_h} = \dfrac{R_h}{N_T}$, $\overline{S_{vi}} = \dfrac{S_{vi}}{N_{vi}}$, $\overline{E_{vi}} = \dfrac{E_{vi}}{N_{vi}}$ and $\overline{I_{vi}} = \dfrac{I_{vi}}{N_{vi}}$ เมื่อ $i = 1,2,3$.

เราจะได้สมการใหม่ดังนี้

$$\frac{d\overline{S_h}}{dt} = \mu_h - (\mu_h + \gamma_h (\overline{I_{v1}} N_{v1} + \overline{I_{v2}} N_{v2} + \overline{I_{v3}} N_{v3}))\overline{S_h}, \tag{3.7}$$

$$\frac{d\overline{I_h}}{dt} = \gamma_h \overline{S_h} (\overline{I_{v1}} N_{v1} + \overline{I_{v2}} N_{v2} + \overline{I_{v3}} N_{v3}) - (\mu_h + r)\overline{I_h}, \tag{3.8}$$

$$\frac{d\overline{E_{v1}}}{dt} = \gamma_v (1 - \overline{E_{v1}} - \overline{I_{v1}}) \overline{I_h} N_T - (\mu_v + q)\overline{E_{v1}}, \tag{3.9}$$

$$\frac{d\overline{I_{v1}}}{dt} = q\overline{E_{v1}} - \mu_v \overline{I_{v1}}, \tag{3.10}$$

$$\frac{d\overline{E_{v2}}}{dt} = \gamma_v(1 - \overline{E_{v2}} - \overline{I_{v2}})\overline{I_h}N_T - (\mu_v + q)\overline{E_{v2}}, \tag{3.11}$$

$$\frac{d\overline{I_{v2}}}{dt} = q\overline{E_{v2}} - \mu_v \overline{I_{v2}}, \tag{3.12}$$

$$\frac{d\overline{E_{v3}}}{dt} = \gamma_v(1 - \overline{E_{v3}} - \overline{I_{v3}})\overline{I_h}N_T - (\mu_v + q)\overline{E_{v3}}, \tag{3.13}$$

$$\frac{d\overline{I_{v3}}}{dt} = q\overline{E_{v3}} - \mu_v \overline{I_{v3}} \tag{3.14}$$

ภายใต้เงื่อนไข

$\overline{R_h} = 1 - d\overline{S_h} - d\overline{I_h}$, $\overline{S_{v1}} = 1 - \overline{E_{v1}} - \overline{I_{v1}}$, $\overline{S_{v2}} = 1 - \overline{E_{v2}} - \overline{I_{v2}}$ และ $\overline{S_{v3}} = 1 - \overline{E_{v3}} - \overline{I_{v3}}$

3.2 ผลการวิเคราะห์แบบจำลอง

จุดสมดุล $(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*)$ ได้จากการกำหนดให้ด้านขวามือของแต่ละสมการเท่ากับ 0

$$\mu_h - (\mu_h + \gamma_h(I_{v1}^* N_{v1} + I_{v2}^* N_{v2} + I_{v3}^* N_{v3}))S_h^* = 0 \tag{3.15}$$

$$\gamma_h S_h^* (I_{v1}^* N_{v1} + I_{v2}^* N_{v2} + I_{v3}^* N_{v3}) - (\mu_h + r)I_h^* = 0 \tag{3.16}$$

$$\gamma_v(1 - E_{v1}^* - I_{v1}^*)I_h^* N_T - (\mu_v + q)E_{v1}^* = 0 \tag{3.17}$$

$$qE_{v1}^* - \mu_v I_{v1}^* = 0 \tag{3.18}$$

$$\gamma_v(1 - E_{v2}^* - I_{v2}^*)I_h^* N_T - (\mu_v + q)E_{v2}^* = 0 \tag{3.19}$$

$$qE_{v2}^* - \mu_v I_{v2}^* = 0 \tag{3.20}$$

$$\gamma_v(1 - E_{v3}^* - I_{v3}^*)I_h^* N_T - (\mu_v + q)E_{v3}^* = 0 \tag{3.21}$$

$$qE_{v3}^* - \mu_v I_{v3}^* = 0 \tag{3.22}$$

จากสมการ (3.15), จะได้ว่า

$$\mu_h - (\mu_h + \gamma_h(I_{v1}^* N_{v1} + I_{v2}^* N_{v2} + I_{v3}^* N_{v3}))S_h^* = 0$$

$$S_h^* = \frac{\mu_h}{(\mu_h + \gamma_h(I_{v1}^* N_{v1} + I_{v2}^* N_{v2} + I_{v3}^* N_{v3}))}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\gamma_h N_{v1}}{\mu_h} I_{v1}^* + \frac{\gamma_h N_{v2}}{\mu_h} I_{v2}^* + \frac{\gamma_h N_{v3}}{\mu_h} I_{v3}^*}$$

$$= \frac{1}{1 + \beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*} \tag{3.23}$$

โดยที่ $\beta_1 = \frac{\gamma_h N_{v1}}{\mu_h}$, $\beta_2 = \frac{\gamma_h N_{v2}}{\mu_h}$ and $\beta_3 = \frac{\gamma_h N_{v3}}{\mu_h}$

จากสมการ(3.16), จะได้ว่า

$$\gamma_h S_h^* (I_{v1}^* N_{v1} + I_{v2}^* N_{v2} + I_{v3}^* N_{v3}) - (\mu_h + r)I_h^* = 0$$

$$I_h^* = \frac{\gamma_h(I_{v1}^* N_{v1} + I_{v2}^* N_{v2} + I_{v3}^* N_{v3})}{(\mu_h + r)} \cdot S_h^*$$

$$= (\frac{\gamma_h N_{v1} I_{v1}^* + \gamma_h N_{v2} I_{v2}^* + \gamma_h N_{v3} I_{v3}^*}{(\mu_h + r)}) \cdot S_h^*$$

$$= \frac{1}{\sigma_1}(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*) S_h^*$$

$$= \frac{(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{\sigma_1(1 + \beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)} \tag{3.24}$$

โดยที่ $\sigma_1 = \frac{\mu_h + r}{\mu_h}$

จากสมการ (3.17),

$$\gamma_v(1 - E_{v1}^* - I_{v1}^*) I_h^* N_T - (\mu_v + q) E_{v1}^* = 0$$

$$-\gamma_v E_{v1}^* I_h^* N_T - (\mu_v + q) E_{v1}^* = -\gamma_v(1 - I_{v1}^*) I_h^* N_T$$

$$(\gamma_v I_h^* N_T + (\mu_v + q)) E_{v1}^* = \gamma_v(1 - I_{v1}^*) I_h^* N_T$$

$$E_{v1}^* = \frac{\gamma_v N_T (1 - I_{v1}^*) I_h^*}{(\gamma_v N_T I_h^* + (\mu_v + q))}$$

$$E_{v1}^* = \frac{\gamma_v N_T (1 - I_{v1}^*) I_h^*}{(\gamma_v N_T I_h^* + (\mu_v + q))} = \frac{(1 - I_{v1}^*) I_h^*}{(I_h^* + \frac{\mu_v + q}{\gamma_v N_T})} = \frac{(1 - I_{v1}^*) I_h^*}{(I_h^* + \beta_4)}$$

$$= \frac{(1-I_{v1}^{*}) \cdot \dfrac{(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}{\sigma_1(1+\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}}{(\dfrac{(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}{\sigma_1(1+\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})} + \beta_4)}$$

$$= \frac{(1-I_{v1}^{*})(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}{(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*}) + \beta_4\sigma_1(1+\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}$$

$$= \frac{(1-I_{v1}^{*})(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}{(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*}) + \beta_4\sigma_1 + \beta_4\sigma_1(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}$$

$$= \frac{(1-I_{v1}^{*})(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}{(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})(1+\beta_4\sigma_1) + \beta_4\sigma_1} \qquad (3.25)$$

โดยที่ $\beta_4 = \dfrac{\mu_v + q}{\gamma_v N_T}$

จากสมการ (3.18),

$$qE_{v1}^{*} - \mu_v I_{v1}^{*} = 0$$

$$I_{v1}^{*} = \frac{q}{\mu_v} E_{v1}^{*}$$

$$= \frac{q}{\mu_v} \cdot \frac{(1-I_{v1}^{*})(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}{(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})(1+\beta_4\sigma_1) + \beta_4\sigma_1}.$$

$$= \frac{q(1-I_{v1}^{*})(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}{\mu_v((\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})(1+\beta_4\sigma_1) + \beta_4\sigma_1)}. \qquad (3.29)$$

จากสมการ(3.19), จะได้ว่า

$$\gamma_v(1-E^*_{v2}-I^*_{v2})I^*_h N_T-(\mu_v+q)E^*_{v2}=0$$

$$-\gamma_v E^*_{v2}I^*_h N_T-(\mu_v+q)E^*_{v2}=-\gamma_v(1-I^*_{v2})I^*_h N_T$$

$$(\gamma_v I^*_h N_T+(\mu_v+q))E^*_{v2}=\gamma_v(1-I^*_{v2})I^*_h N_T$$

$$E^*_{v2}=\frac{\gamma_v N_T(1-I^*_{v2})I^*_h}{(\gamma_v N_T I^*_h+(\mu_v+q))}$$

$$E^*_{v2}=\frac{\gamma_v N_T(1-I^*_{v2})I^*_h}{(\gamma_v N_T I^*_h+(\mu_v+q))}=\frac{(1-I^*_{v2})I^*_h}{(I^*_h+\dfrac{\mu_v+q}{\gamma_v N_T})}=\frac{(1-I^*_{v2})I^*_h}{(I^*_h+\beta_4)}$$

$$=\frac{(1-I^*_{v2})\cdot\dfrac{(\beta_1 I^*_{v1}+\beta_2 I^*_{v2}+\beta_3 I^*_{v3})}{\sigma_1(1+\beta_1 I^*_{v1}+\beta_2 I^*_{v2}+\beta_3 I^*_{v3})}}{(\dfrac{(\beta_1 I^*_{v1}+\beta_2 I^*_{v2}+\beta_3 I^*_{v3})}{\sigma_1(1+\beta_1 I^*_{v1}+\beta_2 I^*_{v2}+\beta_3 I^*_{v3})}+\beta_4)}$$

$$=\frac{(1-I^*_{v2})(\beta_1 I^*_{v1}+\beta_2 I^*_{v2}+\beta_3 I^*_{v3})}{(\beta_1 I^*_{v1}+\beta_2 I^*_{v2}+\beta_3 I^*_{v3})+\beta_4\sigma_1(1+\beta_1 I^*_{v1}+\beta_2 I^*_{v2}+\beta_3 I^*_{v3})}$$

$$=\frac{(1-I^*_{v2})(\beta_1 I^*_{v1}+\beta_2 I^*_{v2}+\beta_3 I^*_{v3})}{(\beta_1 I^*_{v1}+\beta_2 I^*_{v2}+\beta_3 I^*_{v3})+\beta_4\sigma_1+\beta_4\sigma_1(\beta_1 I^*_{v1}+\beta_2 I^*_{v2}+\beta_3 I^*_{v3})}$$

$$=\frac{(1-I^*_{v2})(\beta_1 I^*_{v1}+\beta_2 I^*_{v2}+\beta_3 I^*_{v3})}{(\beta_1 I^*_{v1}+\beta_2 I^*_{v2}+\beta_3 I^*_{v3})(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1} \tag{3.30}$$

จากสมการ(3.20), จะได้ว่า

$$qE_{v2}^* - \mu_v I_{v2}^* = 0$$

$$I_{v2}^* = \frac{q}{\mu_v} E_{v2}^*$$

$$= \frac{q}{\mu_v} \cdot \frac{(1 - I_{v2}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1 + \beta_4 \sigma_1) + \beta_4 \sigma_1}$$

$$= \frac{q(1 - I_{v2}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{\mu_v((\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1 + \beta_4 \sigma_1) + \beta_4 \sigma_1)} \tag{3.31}$$

จากสมการ(3.21), จะได้ว่า

$$\gamma_v (1 - E_{v3}^* - I_{v3}^*) I_h^* N_T - (\mu_v + q) E_{v3}^* = 0$$

$$-\gamma_v E_{v3}^* I_h^* N_T - (\mu_v + q) E_{v3}^* = -\gamma_v (1 - I_{v3}^*) I_h^* N_T$$

$$(\gamma_v I_h^* N_T + (\mu_v + q)) E_{v3}^* = \gamma_v (1 - I_{v3}^*) I_h^* N_T$$

$$E_{v3}^* = \frac{\gamma_v N_T (1 - I_{v3}^*) I_h^*}{(\gamma_v N_T I_h^* + (\mu_v + q))}$$

$$E_{v3}^* = \frac{\gamma_v N_T (1 - I_{v3}^*) I_h^*}{(\gamma_v N_T I_h^* + (\mu_v + q))} = \frac{(1 - I_{v3}^*) I_h^*}{(I_h^* + \dfrac{\mu_v + q}{\gamma_v N_T})} = \frac{(1 - I_{v3}^*) I_h^*}{(I_h^* + \beta_4)}$$

$$=\frac{(1-I_{v3}^*)\cdot\dfrac{(\beta_1 I_{v1}^*+\beta_2 I_{v2}^*+\beta_3 I_{v3}^*)}{\sigma_1(1+\beta_1 I_{v1}^*+\beta_2 I_{v2}^*+\beta_3 I_{v3}^*)}}{\left(\dfrac{(\beta_1 I_{v1}^*+\beta_2 I_{v2}^*+\beta_3 I_{v3}^*)}{\sigma_1(1+\beta_1 I_{v1}^*+\beta_2 I_{v2}^*+\beta_3 I_{v3}^*)}+\beta_4\right)}$$

$$=\frac{(1-I_{v3}^*)(\beta_1 I_{v1}^*+\beta_2 I_{v2}^*+\beta_3 I_{v3}^*)}{(\beta_1 I_{v1}^*+\beta_2 I_{v2}^*+\beta_3 I_{v3}^*)+\beta_4\sigma_1(1+\beta_1 I_{v1}^*+\beta_2 I_{v2}^*+\beta_3 I_{v3}^*)}$$

$$=\frac{(1-I_{v2}^*)(\beta_1 I_{v1}^*+\beta_2 I_{v2}^*+\beta_3 I_{v3}^*)}{(\beta_1 I_{v1}^*+\beta_2 I_{v2}^*+\beta_3 I_{v3}^*)+\beta_4\sigma_1+\beta_4\sigma_1(\beta_1 I_{v1}^*+\beta_2 I_{v2}^*+\beta_3 I_{v3}^*)}$$

$$=\frac{(1-I_{v3}^*)(\beta_1 I_{v1}^*+\beta_2 I_{v2}^*+\beta_3 I_{v3}^*)}{(\beta_1 I_{v1}^*+\beta_2 I_{v2}^*+\beta_3 I_{v3}^*)(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1} \qquad (3.32)$$

จากสมการ(3.22), จะได้ว่า

$$qE_{v3}^*-\mu_v I_{v3}^*=0$$

$$I_{v3}^*=\frac{q}{\mu_v}E_{v3}^*$$

$$=\frac{q}{\mu_v}\cdot\frac{(1-I_{v3}^*)(\beta_1 I_{v1}^*+\beta_2 I_{v2}^*+\beta_3 I_{v3}^*)}{(\beta_1 I_{v1}^*+\beta_2 I_{v2}^*+\beta_3 I_{v3}^*)(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1}$$

$$=\frac{q(1-I_{v3}^*)(\beta_1 I_{v1}^*+\beta_2 I_{v2}^*+\beta_3 I_{v3}^*)}{\mu_v((\beta_1 I_{v1}^*+\beta_2 I_{v2}^*+\beta_3 I_{v3}^*)(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1)} \qquad (3.33)$$

ผลเฉลยแรกของสมการ (3.33) , คือ $I_{v1}^*=I_{v2}^*=I_{v3}^*=0$.

$S_h^*=1,\ I_h^*=0,\ E_{v1}^*=0,\ E_{v2}^*=0,\ E_{v3}^*=0.$

จากการวิเคราะห์เราจะได้ผลเฉลย $I_{v3}^{*} \neq 0,\ 0 < I_{v3}^{*} < 1,$

$$S_h^{*} = \frac{1}{1+\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*}}, \tag{3.34}$$

$$I_h^{*} = \frac{(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}{\sigma_1 (1+\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}, \tag{3.35}$$

$$E_{v1}^{*} = \frac{(1-I_{v1}^{*})(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}{(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1}, \tag{3.36}$$

$$I_{v1}^{*} = \frac{q(1-I_{v1}^{*})(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}{\mu_v ((\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1)} \tag{3.37}$$

$$E_{v2}^{*} = \frac{(1-I_{v2}^{*})(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}{(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1}, \tag{3.38}$$

$$I_{v2}^{*} = \frac{q(1-I_{v2}^{*})(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}{\mu_v ((\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1)}, \tag{3.39}$$

$$E_{v3}^{*} = \frac{(1-I_{v3}^{*})(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}{(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1}, \tag{3.40}$$

$$I_{v3}^{*} = \frac{q(1-I_{v3}^{*})(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}{\mu_v ((\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1)} \tag{3.41}$$

โดยที่ $\beta_1 = \frac{\gamma_h N_{v1}}{\mu_h},\ \beta_2 = \frac{\gamma_h N_{v2}}{\mu_h},\ \beta_3 = \frac{\gamma_h N_{v3}}{\mu_h},\ \beta_4 = \frac{\mu_v + q}{\gamma_v N_T}$ และ $\sigma_1 = \frac{\mu_h + r}{\mu_h}$

1) จุดสมดุลสภาวะไร้โรค $I_{v1}^{*} = I_{v2}^{*} = I_{v3}^{*} = 0$, จะได้ว่า

$$S_h^* = 1,$$

$$I_h^* = 0,$$

$$E_{v1}^* = 0,$$

$$E_{v2}^* = 0,$$

$$E_{v3}^* = 0.$$

2) จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง $I_{v3}^* \neq 0,\ 0 < I_{v3}^* < 1$

$$S_h^* = \frac{1}{1+\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*},$$

$$I_h^* = \frac{(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{\sigma_1(1+\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)},$$

$$E_{v1}^* = \frac{(1-I_{v1}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1},$$

$$I_{v1}^* = \frac{q(1-I_{v1}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{\mu_v((\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1)}$$

$$E_{v2}^* = \frac{(1-I_{v2}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1},$$

$$I_{v2}^* = \frac{q(1-I_{v2}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{\mu_v((\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1)},$$

$$E_{v3}^* = \frac{(1-I_{v3}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1},$$

$$I^*_{v3} = \frac{q(1-I^*_{v3})(\beta_1 I^*_{v1} + \beta_2 I^*_{v2} + \beta_3 I^*_{v3})}{\mu_v((\beta_1 I^*_{v1} + \beta_2 I^*_{v2} + \beta_3 I^*_{v3})(1+\beta_4\sigma_1) + \beta_4\sigma_1)}$$

จุดสมดุลของสมการ (3.15)-(3.22) คือ

1. จุดสมดุลสภาวะไร้โรค $E_1 = (1,0,0,0,0,0,0,0)$
2. จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง $E_2 = (S^*_h, I^*_h, E^*_{v1}, I^*_{v1}, E^*_{v2}, I^*_{v2}, E^*_{v3}, I^*_{v3})$

โดยที่

$$S^*_h = \frac{1}{1+\beta_1 I^*_{v1} + \beta_2 I^*_{v2} + \beta_3 I^*_{v3}},$$

$$I^*_h = \frac{(\beta_1 I^*_{v1} + \beta_2 I^*_{v2} + \beta_3 I^*_{v3})}{\sigma_1(1+\beta_1 I^*_{v1} + \beta_2 I^*_{v2} + \beta_3 I^*_{v3})},$$

$$E^*_{v1} = \frac{(1-I^*_{v1})(\beta_1 I^*_{v1} + \beta_2 I^*_{v2} + \beta_3 I^*_{v3})}{(\beta_1 I^*_{v1} + \beta_2 I^*_{v2} + \beta_3 I^*_{v3})(1+\beta_4\sigma_1) + \beta_4\sigma_1},$$

$$I^*_{v1} = \frac{q(1-I^*_{v1})(\beta_1 I^*_{v1} + \beta_2 I^*_{v2} + \beta_3 I^*_{v3})}{\mu_v((\beta_1 I^*_{v1} + \beta_2 I^*_{v2} + \beta_3 I^*_{v3})(1+\beta_4\sigma_1) + \beta_4\sigma_1)}$$

$$E^*_{v2} = \frac{(1-I^*_{v2})(\beta_1 I^*_{v1} + \beta_2 I^*_{v2} + \beta_3 I^*_{v3})}{(\beta_1 I^*_{v1} + \beta_2 I^*_{v2} + \beta_3 I^*_{v3})(1+\beta_4\sigma_1) + \beta_4\sigma_1},$$

$$I^*_{v2} = \frac{q(1-I^*_{v2})(\beta_1 I^*_{v1} + \beta_2 I^*_{v2} + \beta_3 I^*_{v3})}{\mu_v((\beta_1 I^*_{v1} + \beta_2 I^*_{v2} + \beta_3 I^*_{v3})(1+\beta_4\sigma_1) + \beta_4\sigma_1)},$$

$$E^*_{v3} = \frac{(1-I^*_{v3})(\beta_1 I^*_{v1} + \beta_2 I^*_{v2} + \beta_3 I^*_{v3})}{(\beta_1 I^*_{v1} + \beta_2 I^*_{v2} + \beta_3 I^*_{v3})(1+\beta_4\sigma_1) + \beta_4\sigma_1},$$

$$I_{v3}^{*} = \frac{q(1-I_{v3}^{*})(\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})}{\mu_v((\beta_1 I_{v1}^{*} + \beta_2 I_{v2}^{*} + \beta_3 I_{v3}^{*})(1+\beta_4\sigma_1) + \beta_4\sigma_1)}$$

กำหนดให้

$$X(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = \mu_h - (\mu_h + \gamma_h(\overline{I_{v1}}N_{v1} + \overline{I_{v2}}N_{v2} + \overline{I_{v3}}N_{v3}))\overline{S_h}$$

$$Y(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = \gamma_h\overline{S_h}(\overline{I_{v1}}N_{v1} + \overline{I_{v2}}N_{v2} + \overline{I_{v3}}N_{v3}) - (\mu_h + r)\overline{I_h}$$

$$Z(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = \gamma_v(1-\overline{E_{v1}}-\overline{I_{v1}})\overline{I_h}N_T - (\mu_v + q)\overline{E_{v1}}$$

$$W(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = q\overline{E_{v1}} - \mu_v\overline{I_{v1}}$$

$$V(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = \gamma_v(1-\overline{E_{v2}}-\overline{I_{v2}})\overline{I_h}N_T - (\mu_v + q)\overline{E_{v2}}$$

$$J(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = q\overline{E_{v2}} - \mu_v\overline{I_{v2}}$$

$$K(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = \gamma_v(1-\overline{E_{v3}}-\overline{I_{v3}})\overline{I_h}N_T - (\mu_v + q)\overline{E_{v3}}$$

$$L(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = q\overline{E_{v3}} - \mu_v\overline{I_{v3}}$$

ดังนั้น

$$X(S_h^*,I_h^*,E_{v1}^*,I_{v1}^*,E_{v2}^*,I_{v2}^*,E_{v3}^*,I_{v3}^*) = \mu_h - (\mu_h + \gamma_h(I_{v1}^*N_{v1} + I_{v2}^*N_{v2} + I_{v3}^*N_{v3}))S_h^*$$

$$Y(S_h^*,I_h^*,E_{v1}^*,I_{v1}^*,E_{v2}^*,I_{v2}^*,E_{v3}^*,I_{v3}^*) = \gamma_h S_h^*(I_{v1}^*N_{v1} + I_{v2}^*N_{v2} + I_{v3}^*N_{v3}) - (\mu_h + r)I_h^*$$

$$Z(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = \gamma_v(1 - E_{v1}^* - I_{v1}^*)I_h^* N_T - (\mu_v + q)E_{v1}^*$$

$$W(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = qE_{v1}^* - \mu_v I_{v1}^*$$

$$V(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = \gamma_v(1 - E_{v2}^* - I_{v2}^*)I_h^* N_T - (\mu_v + q)E_{v2}^*$$

$$J(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = qE_{v2}^* - \mu_v I_{v2}^*$$

$$K(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = \gamma_v(1 - E_{v3}^* - I_{v3}^*)I_h^* N_T - (\mu_v + q)E_{v3}^*$$

$$L(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = qE_{v3}^* - \mu_v I_{v3}^*$$

จาก

$$X(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = \mu_h - (\mu_h + \gamma_h(I_{v1}^* N_{v1} + I_{v2}^* N_{v2} + I_{v3}^* N_{v3}))S_h^*$$

นั่นคือ

$$X_{S_h^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = -(\mu_h + \gamma_h(I_{v1}^* N_{v1} + I_{v2}^* N_{v2} + I_{v3}^* N_{v3}))$$

$$= -(\mu_h + \mu_h\beta_1 I_{v1}^* + \mu_h\beta_2 I_{v2}^* + \mu_h\beta_3 I_{v3}^*)$$

$$X_{I_h^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$X_{E_{v1}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$X_{I_{v1}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = -\mu_h\beta_1 S_h^*$$

$$X_{E_{v2}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$X_{I_{v2}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = -\mu_h\beta_2 S_h^*$$

$$X_{E_{v3}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$X_{I_{v3}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = -\mu_h\beta_3 S_h^*$$

$$Y_{S_h^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = \mu_h\beta_1 I_{v1}^* + \mu_h\beta_2 I_{v2}^* + \mu_h\beta_3 I_{v3}^*$$

$$Y_{I_h^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = -(\mu_h + r) = -\mu_h\sigma_1$$

$$Y_{E_{v1}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$Y_{I_{v1}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = \mu_h\beta_1 S_h^*$$

$$Y_{E_{v2}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$Y_{I_{v2}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = \mu_h\beta_2 S_h^*$$

$$Y_{E_{v3}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$Y_{I_{v3}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = \mu_h\beta_3 S_h^*$$

$$Z_{S_h^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$Z_{I_h^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = -\gamma_v N_T(1 - E_{v1}^* - I_{v1}^*)$$

$$Z_{E_{v1}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = -\gamma_v N_T I_h^* - (\mu_v + q) = -\gamma_v N_T I_h^* - \gamma_v N_T \beta_4$$

$$Z_{I_{v1}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = -\gamma_v N_T I_h^*$$

$$Z_{E_{v2}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$Z_{I_{v2}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$Z_{E_{v3}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$Z_{I_{v3}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$W_{S_h^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$W_{I_h^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$W_{E_{v1}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = q$$

$$W_{I_{v1}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = -\mu_v$$

$$W_{E_{v2}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$W_{I_{v2}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$W_{E_{v3}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$W_{I_{v3}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$V_{S_h^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$V_{I_h^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = \gamma_v N_T(1 - E_{v2}^* - I_{v2}^*)$$

$$V_{E_{v1}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$V_{I_{v1}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$V_{E_{v2}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = -\gamma_v N_T I_h^* - (\mu_v + q) = -\gamma_v N_T I_h^* - \gamma_v N_T \beta_4$$

$$V_{I_{v2}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = -\gamma_v N_T I_h^*$$

$$V_{E_{v3}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$V_{I_{v3}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$J_{S_h^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$J_{I_h^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$J_{E_{v1}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$J_{I_{v1}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$J_{E_{v2}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = q$$

$$J_{I_{v2}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = -\mu_v$$

$$J_{E_{v3}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$J_{I_{v3}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$K_{S_h^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$K_{I_h^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = -\gamma_v N_T I_{v3}^*$$

$$K_{E_{v1}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$K_{I_{v1}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$K_{E_{v2}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$K_{I_{v2}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$K_{E_{v3}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = -\gamma_v N_T I_h^* - (\mu_v + q) = -\gamma_v N_T I_h^* - \gamma_v N_T \beta_4$$

$$K_{I_{v3}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = -\gamma_v N_T I_h^*$$

$$L_{S_h^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$L_{I_h^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$L_{E_{v1}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$L_{I_{v1}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$L_{E_{v2}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$L_{I_{v2}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = 0$$

$$L_{E_{v3}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = q$$

$$L_{I_{v3}^*}(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = -\mu_v$$

จุดสมดุลสภาวะไร้โรค $E_1 = (1,0,0,0,0,0,0,0)$.

จาโคเบียนเมตริกซ์ของสมการ (3.15)-(3.22) คือ

$$\det(J_{E_1}-\lambda I_8)=\begin{bmatrix} -\mu_h-\lambda & 0 & 0 & -\mu_h\beta_1 & 0 & -\mu_h\beta_2 & 0 & -\mu_h\beta_3 \\ 0 & -\mu_h\sigma_1-\lambda & 0 & \mu_h\beta_1 & 0 & \mu_h\beta_2 & 0 & \mu_h\beta_3 \\ 0 & \gamma_v N_T & -\mu_v N_T\beta_4-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & -\mu_v-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_v N_T & 0 & 0 & -\mu_v N_T\beta_4-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & -\mu_v-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_v N_T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_v N_T\beta_4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & -\mu_v-\lambda \end{bmatrix}$$

ค่าเฉพาะเจาะจงสามารถหาได้โดยการแก้สมการพหุนามลักษณะเฉพาะ

$$\det(J_{E_1}-\lambda I_8)=0 \qquad (3.42)$$

ซึ่ง

$$(\mu_h+\lambda)(\mu_v+\lambda)^2(\beta_4\mu_v N_T+\lambda)^2(\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0)=0 \qquad (3.43)$$

โดยที่

$$a_2=\sigma_1\mu_h+(1+N_T\beta_4)\mu_v, \qquad (3.44)$$

$$a_1=\mu_v((1+N_T\beta_4)\sigma_1\mu_h+N_T\beta_4\mu_v), \qquad (3.45)$$

$$a_0=N_T\mu_h(-q(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\gamma_v+\beta_4\sigma_1\mu_v^2). \qquad (3.46)$$

ค่าเฉพาะเจาะจง คือ

$\lambda_1=-\mu_h,\ \lambda_2=-\mu_v, \lambda_3=-\mu_v,\ \lambda_4=-\beta_4\mu_v N_T,\ \lambda_5=-\beta_4\mu_v N_T$ และ $\lambda_6, \lambda_7, \lambda_8$

สามารถหาได้โดยการแก้สมการ $\lambda^3+a_2\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$ (3.47)

โดย a_2, a_1, a_0 นิยามดังสมการ (3.44)-(3.46)

ค่าเฉพาะเจาะจง $\lambda_6, \lambda_7, \lambda_8$ จะมีส่วนจริงเป็นลบเมื่อสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

i) $a_2 > 0$,

ii) $a_0 > 0$,

iii) $a_1 a_2 > a_0$.

เมื่อพิจารณาดังนี้

i) $a_2 = \sigma_1\mu_h + (1+N_T\beta_4)\mu_v$ มีค่าเป็นบวกเสมอ,

ii) $a_0 = N_T\mu_h(-q(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\gamma_v + \beta_4\sigma_1\mu_v^2)$ เป็นบวกเมื่อ

$\beta_4\sigma_1\mu_v^2 > q(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\gamma_v$ หรือ or $\dfrac{q(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\gamma_v}{\beta_4\sigma_1\mu_v^2} < 1$ หรือคือ

$$R_0 = \frac{q(N_{v1}+N_{v2}+N_{v3})\gamma_h\gamma_v^2 N_T}{(\mu_h+r)(\mu_v+q)\mu_v^2} < 1$$

iii) $a_2 a_1 - a_0 = qN_T(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\gamma_v\mu_h + (1+N_T\beta_4)\mu_v(\sigma_1\mu_h+\mu_v)(\sigma_1\mu_h+N_T\beta_4\mu_v)$ เป็นบวก

ดังนั้นทั้ง 3 เงื่อนไขสอดคล้อง Routh-Hurwitz สำหรับ $\dfrac{q(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\gamma_v}{\beta_4\sigma_1\mu_v^2} < 1$. นั่นแสดงว่าจุดสมดุลสภาวะไร้โรคเสถียรเมื่อ $R_0 < 1$, เมื่อกำหนด $R_0 = \dfrac{q(N_{v1}+N_{v2}+N_{v3})\gamma_h\gamma_v^2 N_T}{(\mu_h+r)(\mu_v+q)\mu_v^2}$.

2) จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง $E_2 = (S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*)$

โดยที่

$$S_h^* = \frac{1}{1+\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*},$$

$$I_h^* = \frac{(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{\sigma_1(1+\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)},$$

$$E_{v1}^* = \frac{(1-I_{v1}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1},$$

$$I_{v1}^* = \frac{q(1-I_{v1}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{\mu_v((\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1)}$$

$$E_{v2}^* = \frac{(1-I_{v2}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1},$$

$$I_{v2}^* = \frac{q(1-I_{v2}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{\mu_v((\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1)},$$

$$E_{v3}^* = \frac{(1-I_{v3}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1},$$

$$I_{v3}^* = \frac{q(1-I_{v3}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{\mu_v((\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1+\beta_4\sigma_1)+\beta_4\sigma_1)}$$

เรามี

$$\det(J_{E_2} - \lambda I_8) =$$

$$\begin{bmatrix}
-\mu_h(1+\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*) - \lambda & 0 & 0 & -\mu_h\beta_1 S_h^* & 0 & -\mu_h\beta_2 S_h^* & 0 & -\mu_h\beta_3 S_h^* \\
\mu_h(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*) & -\mu_h\sigma_1 - \lambda & 0 & \mu_h\beta_1 S_h^* & 0 & \mu_h\beta_2 S_h^* & 0 & \mu_h\beta_3 S_h^* \\
0 & \gamma_v N_T(1 - E_{v1}^* - I_{v1}^*) & -\gamma_v N_T I_h^* - \mu_v N_T \beta_4 - \lambda & -\gamma_v N_T I_h^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & q & -\mu_v - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \gamma_v N_T(1 - E_{v2}^* - I_{v2}^*) & 0 & 0 & -\gamma_v N_T I_h^* - \mu_v N_T \beta_4 - \lambda & -\gamma_v N_T I_h^* & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & q & -\mu_v - \lambda & 0 & 0 \\
0 & \gamma_v N_T(1 - E_{v3}^* - I_{v3}^*) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_v N_T I_h^* - \mu_v N_T \beta_4 - \lambda & -\gamma_v N_T I_h^* \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q & -\mu_v - \lambda
\end{bmatrix}$$

ค่าเฉพาะเจาะจงสามารถหาโดยการแก้สมการ

$$\det(J_{E_2} - \lambda I_8) = 0 \tag{3.48}$$

ซึ่ง

$$(\lambda^2 + c_1\lambda + c_2)^2(\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4) = 0 \tag{3.49}$$

โดยที่

$$c_1 = (1 + N_T\beta_4)\mu_v + N_T\gamma_v I_h^*, \tag{3.50}$$

$$c_0 = N_T(\beta_4\mu_v^2 + \gamma_v(q+\mu_v)I_h^*), \tag{3.51}$$

$$b_1 = (1+N_T\beta_4)\mu_v + N_T\gamma_v I_h^* + \mu_h(1+\sigma_1+\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*), \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned} b_2 = {} & N_T(\beta_4\mu_v^2 + \gamma_v(q+\mu_v)I_h^*) + \mu_h(\mu_v + N_T\beta_4\mu_v + N_T\gamma_v I_h^*)(1+\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*) + \\ & \sigma_1\mu_h(\mu_v + N_T\beta_4\mu_v + N_T\gamma_v I_h^* + \mu_h(1+\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)), \end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned} b_3 = {} & \mu_h\mu_v((1+N_T\beta_4)\sigma_1\mu_h + N_T\beta_4\mu_v) + N_T\mu_h(-q(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\gamma_v + \beta_4\sigma_1\mu_v^2\mu_h(\sigma_1\mu_h\mu_v(\beta_1 I_{v1}^* + \\ & \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*) + N_T(\beta_4\mu_v(\sigma_1\beta_4 + \mu_v)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*) + \gamma_v(I_h^*(q + q\beta_3 + \\ & q\sigma_1 + \sigma_1\mu_h + \mu_v + \sigma_1\mu_v + \beta_1(q + (q+\sigma_1\mu_h+\mu_v)I_{v1}^*) + \beta_2(q + (q+\sigma_1\mu_h+\mu_v)I_{v2}^*) + \beta_3(q + \\ & \sigma_1\mu_h + \mu_v)I_{v3}^*) + q(\beta_1+\beta_2+\beta_3)R_h^*, \end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned} b_4 = {} & N_T\mu_h^2(-q(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\gamma_v + \beta_4\sigma_1\mu_v^2) + N_T\mu_h^2(q\beta_3\gamma_v I_h^* + q\gamma_v\sigma_1 I_h^* + \sigma_1\gamma_v\mu_v I_h^* + \beta_3\beta_4\sigma_1\mu_v^2 I_{v3}^* + q\beta_3\gamma_v\sigma_1 I_h^* I_{v3}^* \\ & + \beta_3\gamma_v\mu_v\sigma_1 I_h^* I_{v3}^* + q\beta_3\gamma_v R_h^* + q\beta_3\gamma_v(I_{v3}^* + E_{v3}^*)S_h^* + \beta_1(\beta_4\sigma_1\mu_v^2 I_{v1}^* + \gamma_v(I_h^*(q + \\ & \sigma_1(q+\mu_v)I_{v1}^*) + q(R_h^* + (I_{v1}^* + E_{v1}^*)S_h^*)) + \beta_2(\beta_4\sigma_1\mu_v^2 I_{v2}^* + \gamma_v(I_h^*(q+\sigma_1(q+\mu_v)I_{v2}^*) \\ & + q(R_h^* + (I_{v2}^* + E_{v2}^*)S_h^*))) \end{aligned} \tag{3.55}$$

ค่าเฉพาะเจาะจง คือ

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}(-\mu_v - N_T\beta_4\mu_v - N_T\gamma_v I_h^* - \sqrt{(\mu_v + N_T\beta_4\mu_v + N_T\gamma_v I_h^*)^2 - 4(N_T\beta_4\mu_v^2 + qN_T\gamma_v I_h^* + N_T\gamma_v\mu_v I_h^*)}$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{2}(-\mu_v - N_T\beta_4\mu_v - N_T\gamma_v I_h^* + \sqrt{(\mu_v + N_T\beta_4\mu_v + N_T\gamma_v I_h^*)^2 - 4(N_T\beta_4\mu_v^2 + qN_T\gamma_v I_h^* + N_T\gamma_v\mu_v I_h^*)}$$

และเนื่องจาก

$$\mu_v + N_T\beta_4\mu_v + N_T\gamma_v I_h^* > \sqrt{(\mu_v + N_T\beta_4\mu_v + N_T\gamma_v I_h^*)^2 - 4(N_T\beta_4\mu_v^2 + qN_T\gamma_v I_h^* + N_T\gamma_v\mu_v I_h^*)}$$

ดังนั้น $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ เป็นลบเสมอ

สำหรับค่าเฉพาะเจาะจง $\lambda_5,\lambda_6,\lambda_7,\lambda_8$ สามารถหาโดยการแก้สมการ

$$\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 = 0. \tag{3.56}$$

มีส่วนจริงเป็นลบถ้าสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1) $b_1 > 0$,

2) $b_3 > 0$,

3) $b_4 \geq 0$ และ

4) $b_1b_2b_3 > b_3^2 + b_1^2b_4$.

เมื่อเราพิจารณา

i) b_1 มีค่าเป็นบวกเสมอ

ii) $b_3 > 0$, เราสามารถพิจารณาจากสมการ (3.54)

iii) $b_4 \geq 0$ จากสมการ (3.55)

iv) $b_1 b_2 b_3 > b_3^2 + b_1^2 b_4$

แสดงว่าจุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรังเสถียร

โดยที่

$$R_0 = \frac{q(N_{v1} + N_{v2} + N_{v3})\gamma_h \gamma_v^2 N_T}{(\mu_h + r)(\mu_v + q)\mu_v^2}$$

$R_0' = \sqrt{R_0}$ แทนค่าสืบพันธุ์พื้นฐานของโรค

3.3 ผลเฉลยของสมการ

ผลเฉลยที่แสดงในส่วนนี้ค่าของตัวแปรได้จากค่าสังเกตจริง อายุเฉลี่ยของคนคือ 70 ปี อายุเฉลี่ยของยุง 7 วัน จำนวนครั้งการกัดของยุง 3 ครั้งต่อ 1 วัน 1 ตัว ซึ่งจะได้อัตราคือ 1/3 วัน เวลาของการฟื้นไข้คือ 30 วัน อัตราในการถ่ายทอดเชื้อเป็นการเลือกค่าที่เหมาะสม

3.3.1 สำหรับ $R_0 < 1$,

$\mu_h = 1/(365 \times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.0000001, \gamma_v = 0.0000002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v2} = 20{,}000$, $N_{v3} = 10{,}000$, $R_0 = 0.00000000359728, R_0' = 0.0000599773$. ผลเฉลยลู่เข้าสู่สภาวะไร้โรค $E_1 = (1,0,0,0,0,0,0,0)$.

3.3.2 ค่าที่ 1 สำหรับ $R_0 > 1$,

$\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v2} = 9{,}800{,}000, N_{v3} = 10{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0' = 1.00438$. ผลเฉลยลู่เข้าสู่สภาวะไร้โรค

$E_2 = (0.000139351, 0.00117263, 0.00122623, 0.0028612, 0.00122623,.$
$0.0028612, 0.00122623, 0.0028612)$.

3.3.3 ค่าที่ 2 สำหรับ $R_0 > 1$,

$\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v2} = 20{,}000{,}000, N_{v3} = 10{,}000$, $R_0 = 2.05713, R_0' = 1.43427$. ผลเฉลยลู่เข้าสู่สภาวะไร้โรค

$E_2 = (0.0000683354, 0.00117271, 0.00122631, 0.0028614, 0.00122631,.$
$0.0028614, 0.00122631, 0.0028614)$.

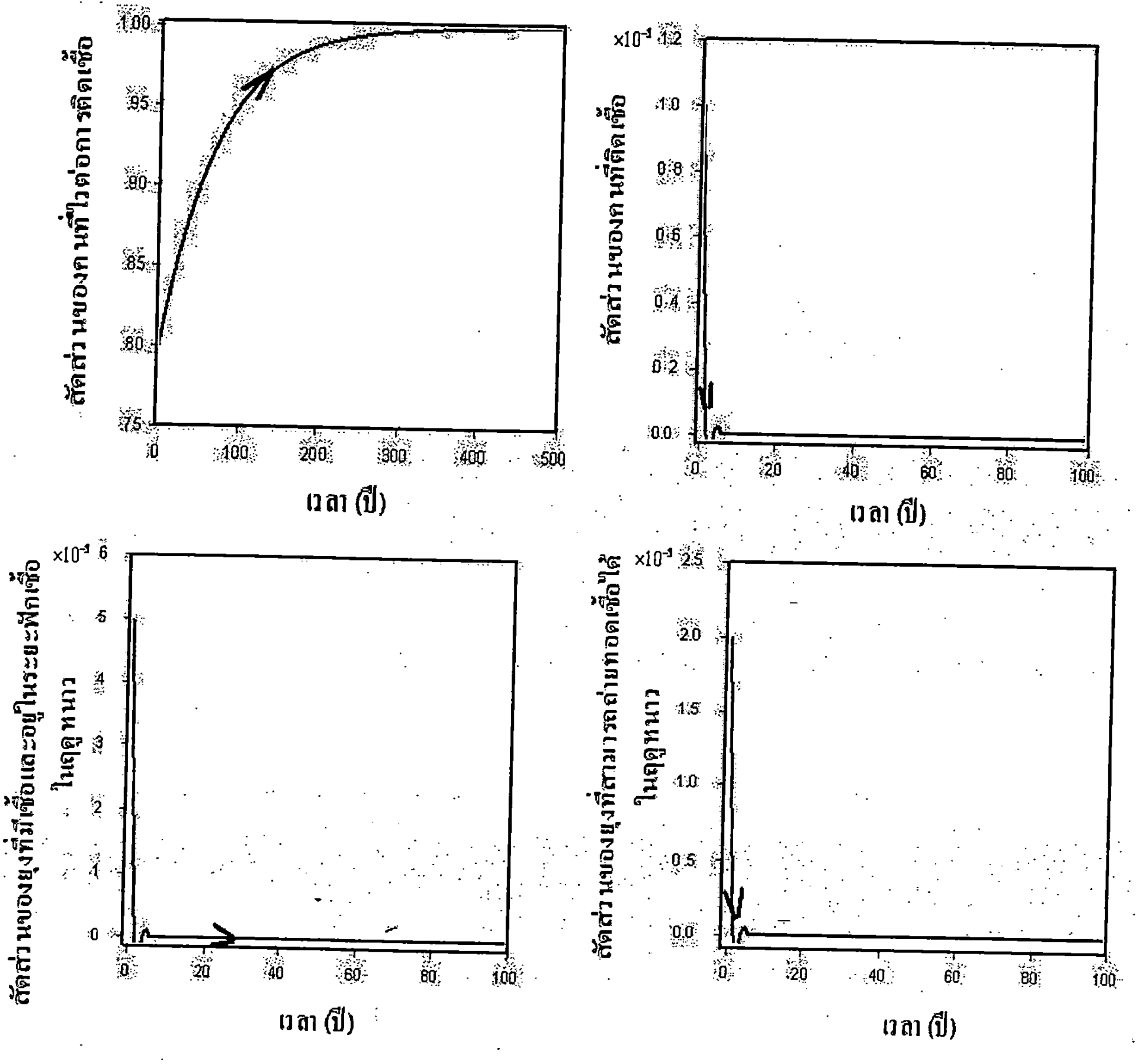
3.3.4 สำหรับค่าการเปรียบเทียบ เมื่อพิจารณาตามค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน

$\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 250{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v2} = 1{,}000{,}000, N_{v3} = 10{,}000$,

3.3.5 สำหรับค่าการเปรียบเทียบ เมื่อพิจารณาตามค่าอัตราการถ่ายทอดเชื้อจากคนไปยังยุง

$\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00000000005$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v2} = 20{,}000, N_{v3} = 10{,}000$,

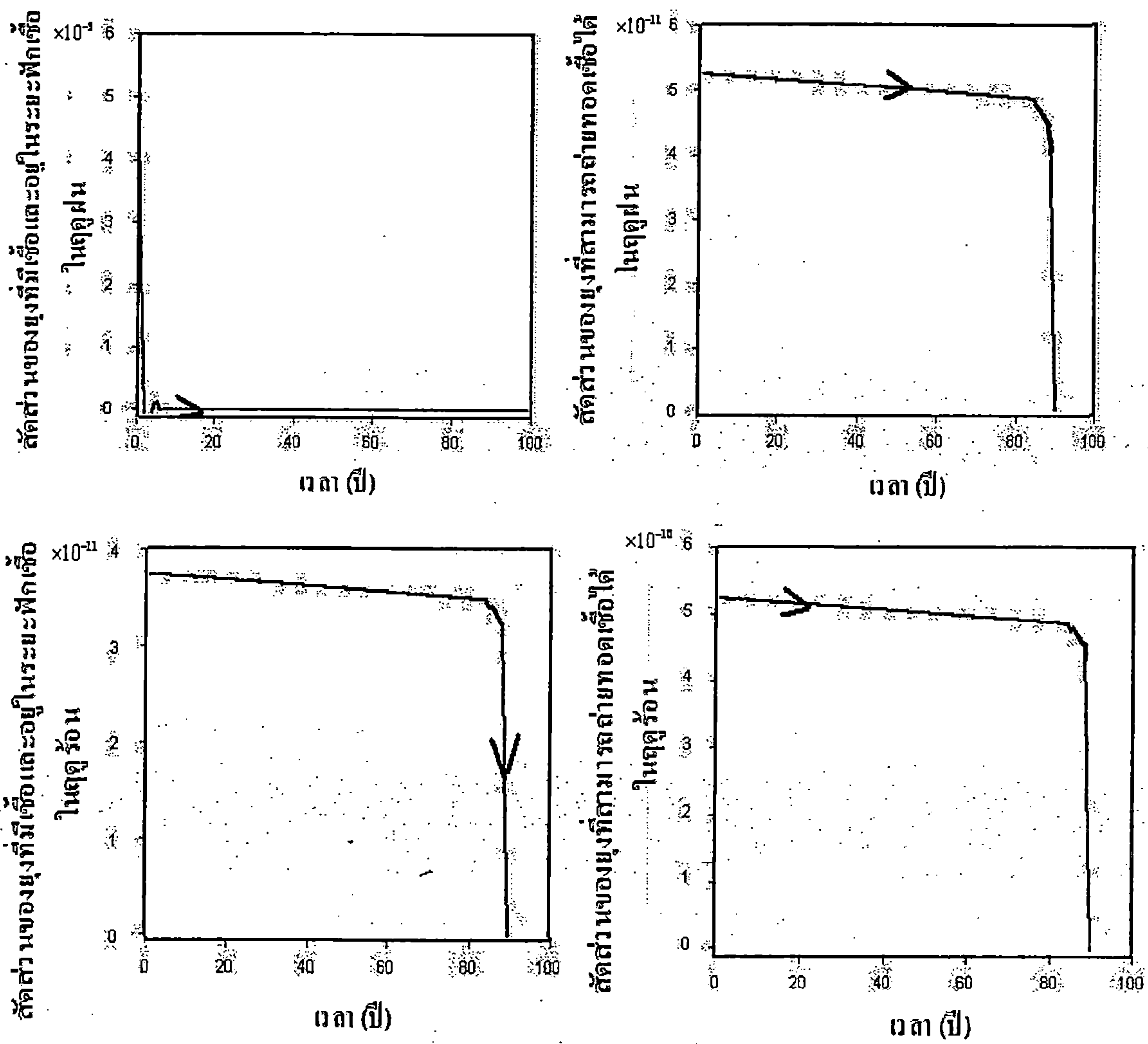
3.4 ผลเฉลย



รูปที่ 3.2 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ $\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}}$ ตามลำดับ สำหรับ $R_0 < 1$ โดยที่ $\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.0000001, \gamma_v = 0.0000002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v2} = 20{,}000$, $N_{v3} = 10{,}000$, $R_0 = 0.00000000359728, R_0' = 0.0000599773$.

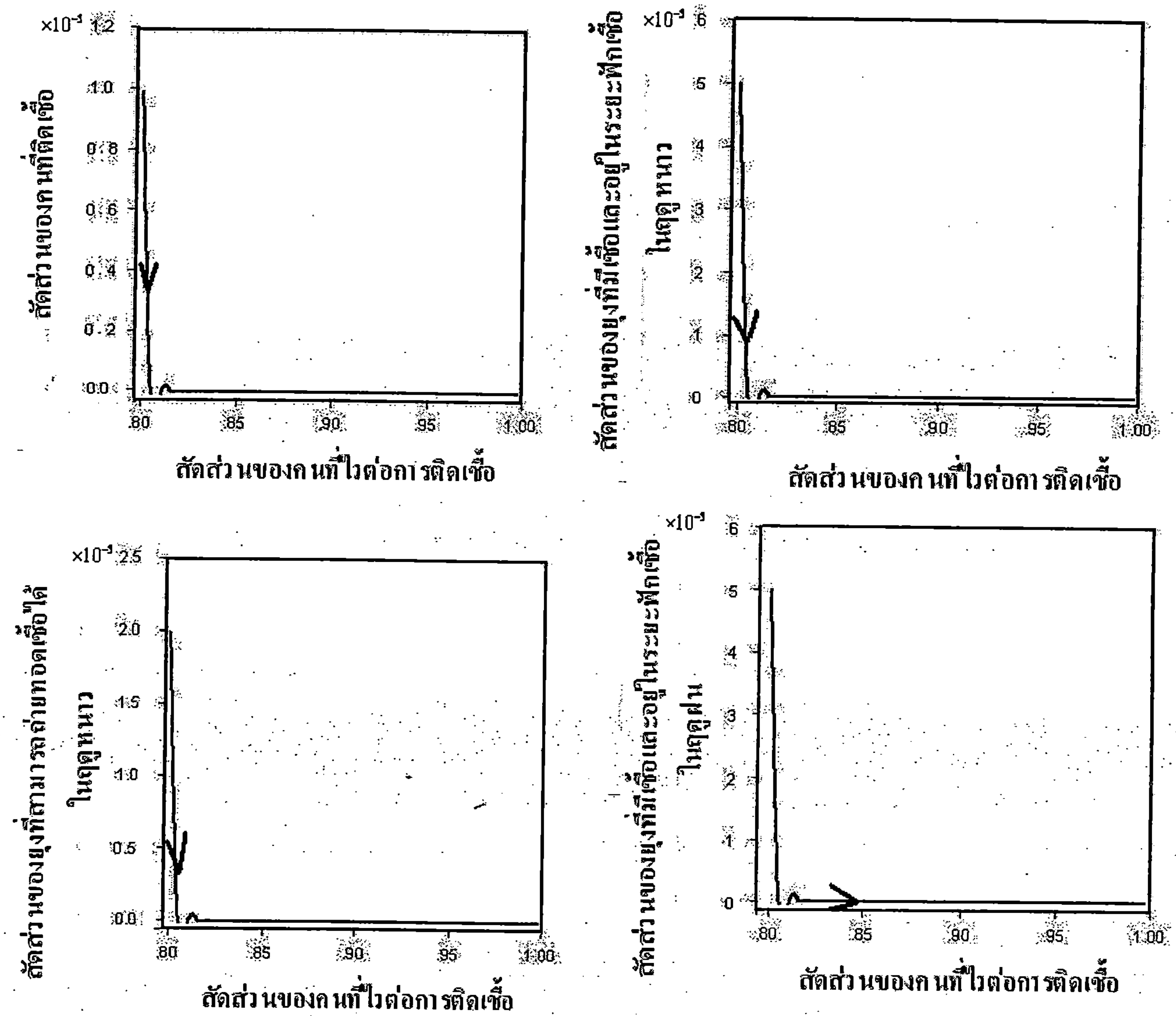
ผลเฉลยลู่เข้าสู่สภาวะไร้โรค $E_1 = (1,0,0,0,0,0,0,0)$. สัดส่วนของคนที่ไวต่อการติดเชื้อ คนที่ติดเชื้อ

ยุงที่มีเชื้อและอยู่ในระยะฟักเชื้อในฤดูหนาว และสัดส่วนของยุงที่ถ่ายทอดเชื้อได้ในฤดูหนาวลู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะไร้โรค



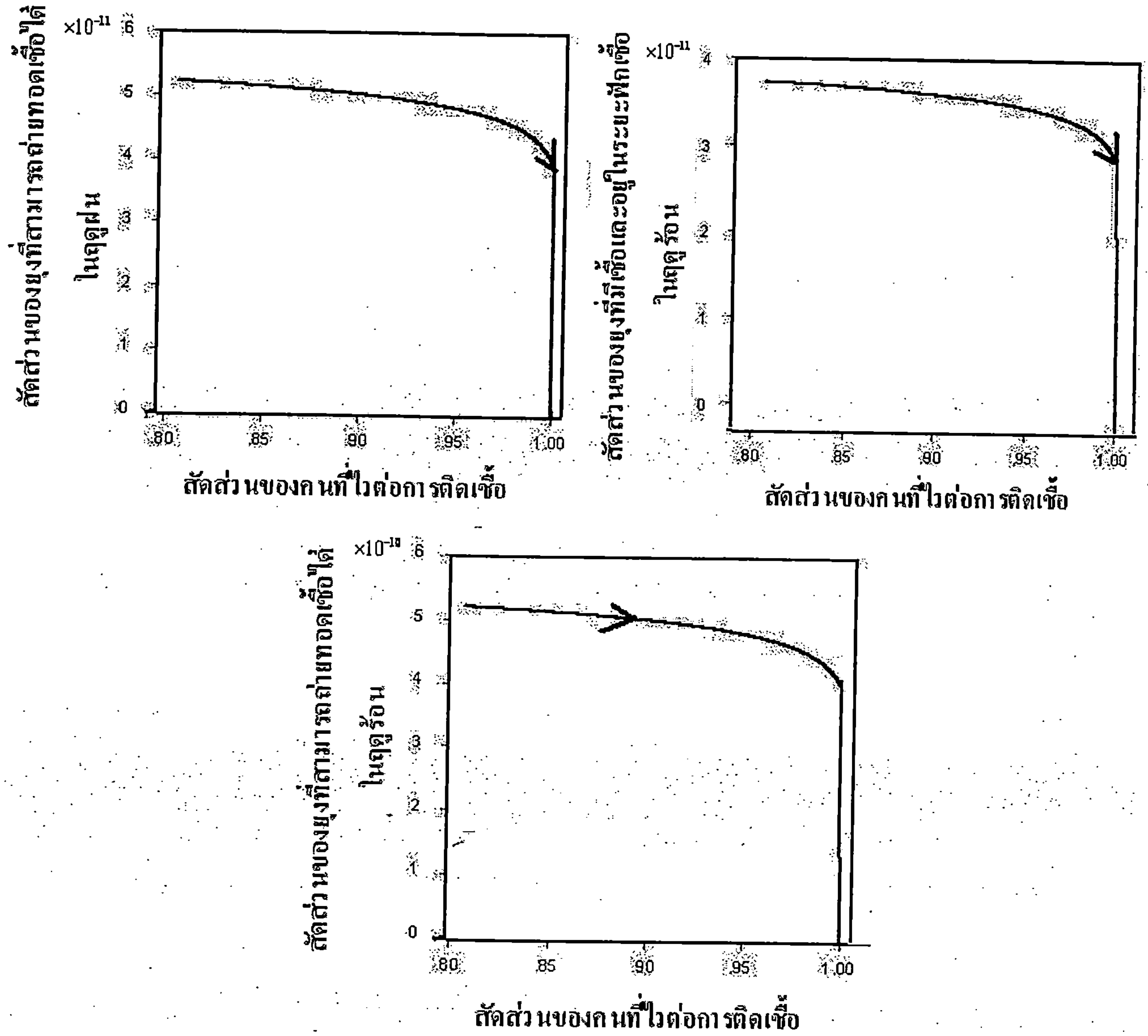
รูปที่ 3.3 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ $\overline{E_{v2}}, \overline{I_{v2}}, \overline{E_{v3}}, \overline{I_{v3}}$ ตามลำดับ สำหรับ $R_0 < 1$ โดยที่ $\mu_h = 1/(365 \times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.0000001, \gamma_v = 0.0000002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v2} = 20{,}000, N_{v3} = 10{,}000$, $R_0 = 0.00000000359728, R_0' = 0.0000599773$.

ผลเฉลยลู่เข้าสู่สภาวะไร้โรค $E_1 = (1,0,0,0,0,0,0,0)$.สัดส่วนของยุงที่มีเชื้อและอยู่ในระยะฟักเชื้อในฤดูฝน ยุงที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ในฤดูฝน ยุงที่มีเชื้อและอยู่ในระยะฟักเชื้อในฤดูร้อน และสัดส่วนของยุงที่ถ่ายทอดเชื้อได้ในฤดูร้อนลู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะไร้โรค

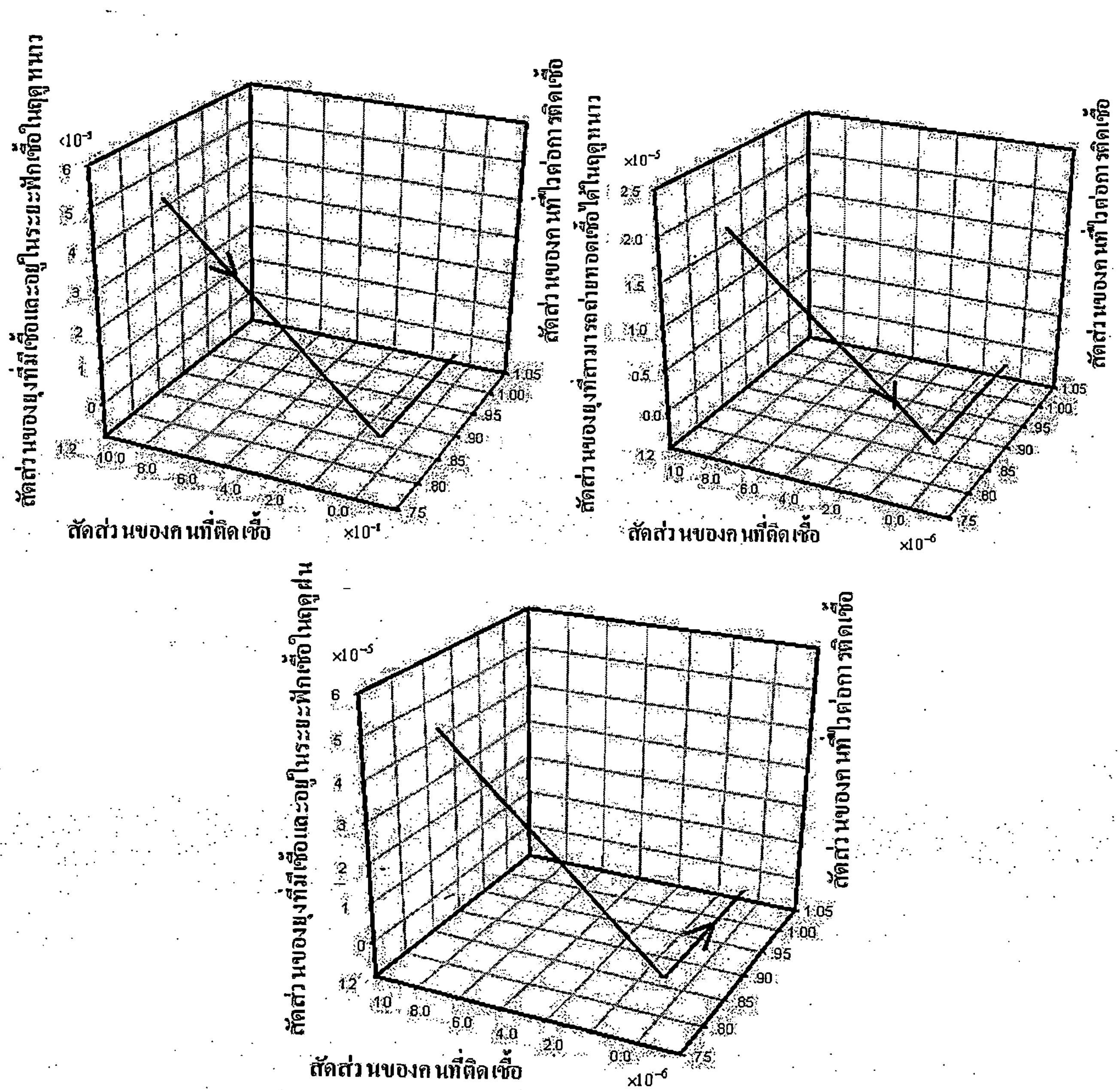


รูปที่ 3.4 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(\overline{S_h},\overline{I_h}),(\overline{S_h},\overline{E_{v1}}),(\overline{S_h},\overline{I_{v1}}),(\overline{S_h},\overline{E_{v2}})$ ตามลำดับ สำหรับ $R_0 < 1$ โดยที่ $\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.0000001, \gamma_v = 0.0000002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25,000$,

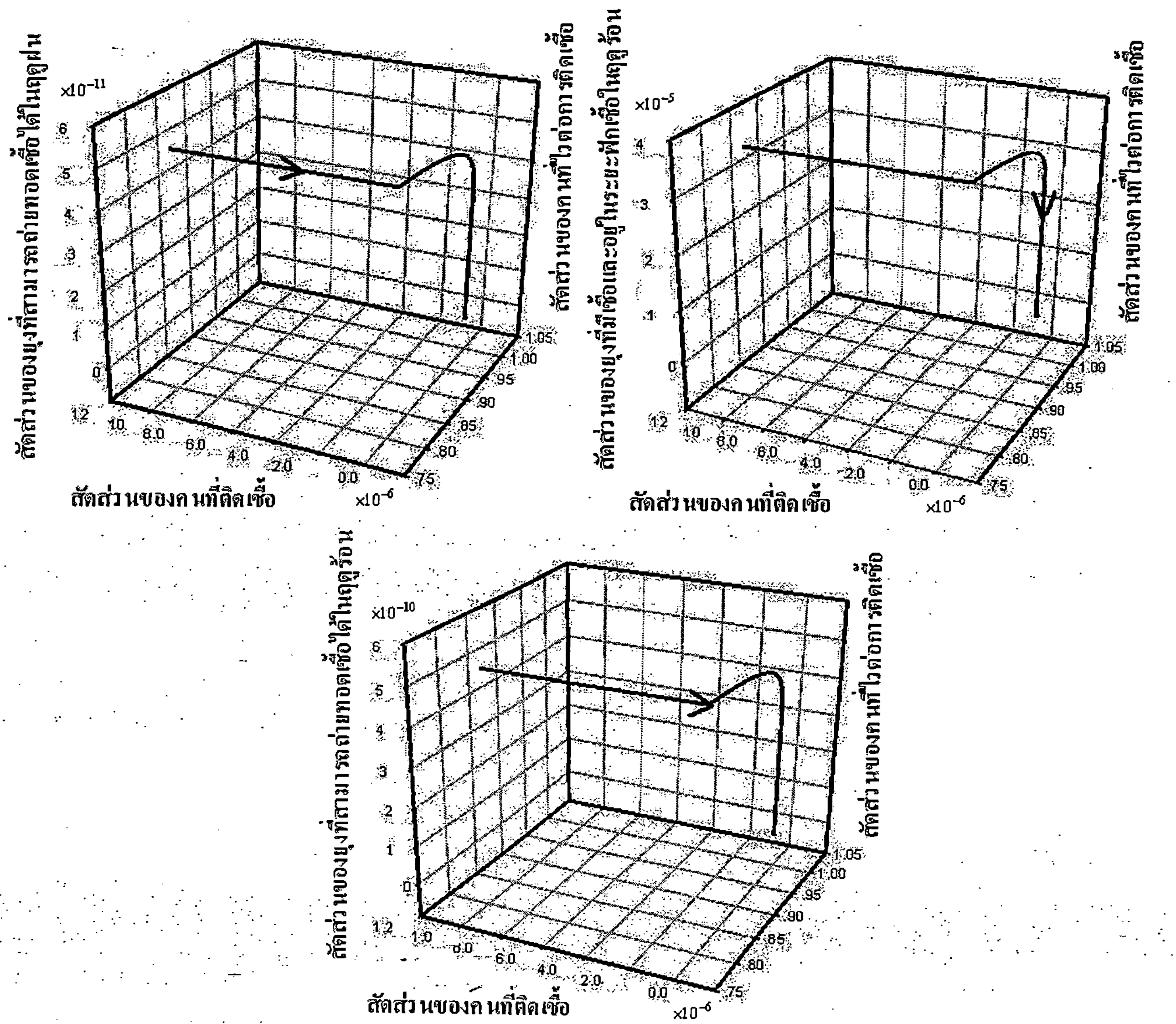
$N_{v1} = 5,000$, $N_{v2} = 20,000$, $N_{v3} = 10,000$, $R_0 = 0.00000000359728, R_0' = 0.0000599773$. ผลเฉลยลู่เข้าสู่สภาวะไร้โรค $E_1 = (1,0,0,0,0,0,0,0)$.



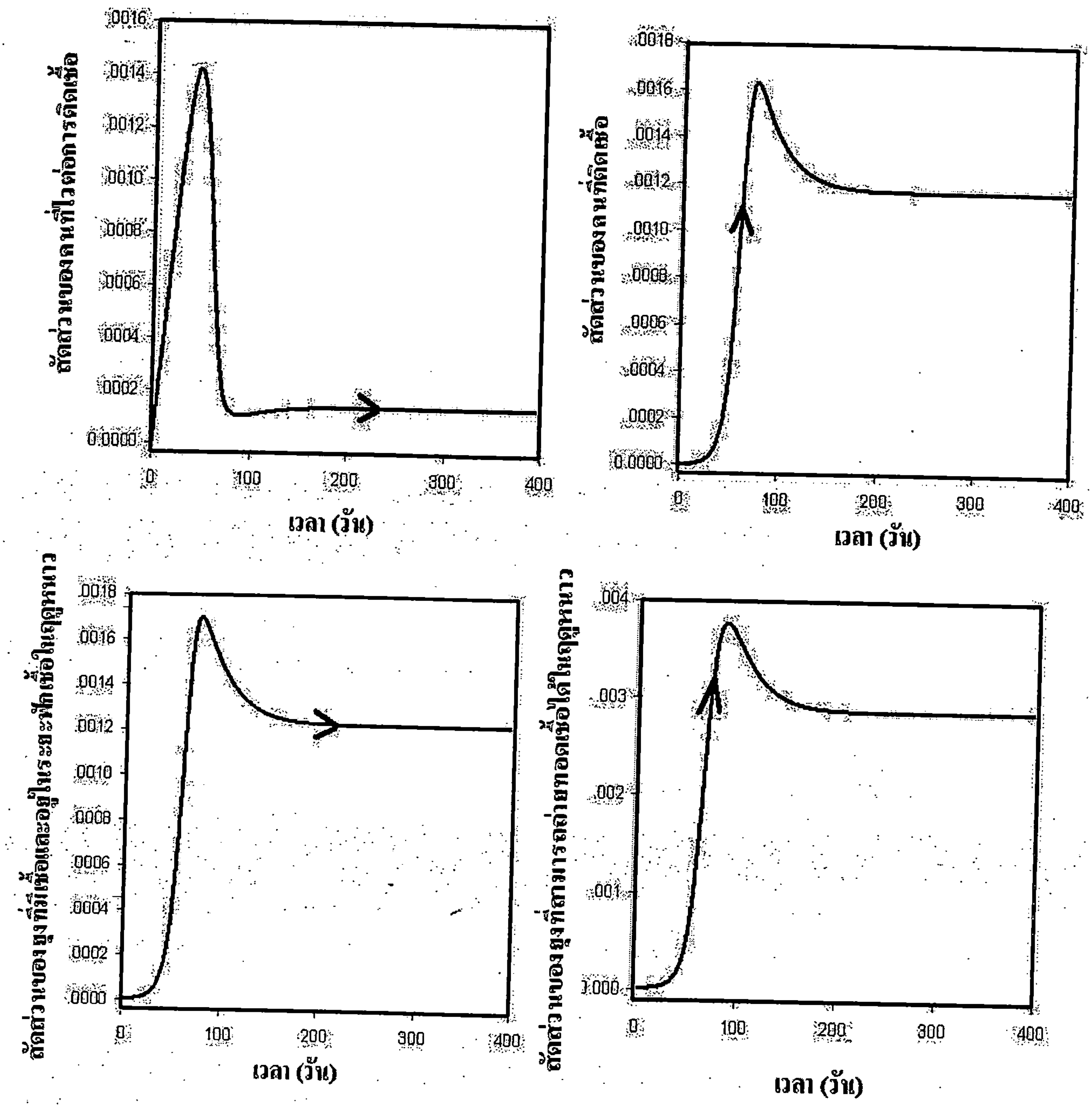
รูปที่ 3.5 ผลเฉลยสมการ (3.15)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(\overline{S_h},\overline{I_{v1}}),(\overline{S_h},\overline{E_{v3}}),(\overline{S_h},\overline{I_{v3}})$ ตามลำดับ สำหรับ $R_0 < 1$ โดยที่ $\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.0000001, \gamma_v = 0.0000002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25,000$, $N_{v1} = 5,000$, $N_{v2} = 20,000$, $N_{v3} = 10,000$, $R_0 = 0.00000000359728, R_0' = 0.0000599773$. ผลเฉลยลู่เข้าสู่สภาวะไร้โรค $E_1 = (1,0,0,0,0,0,0,0)$.



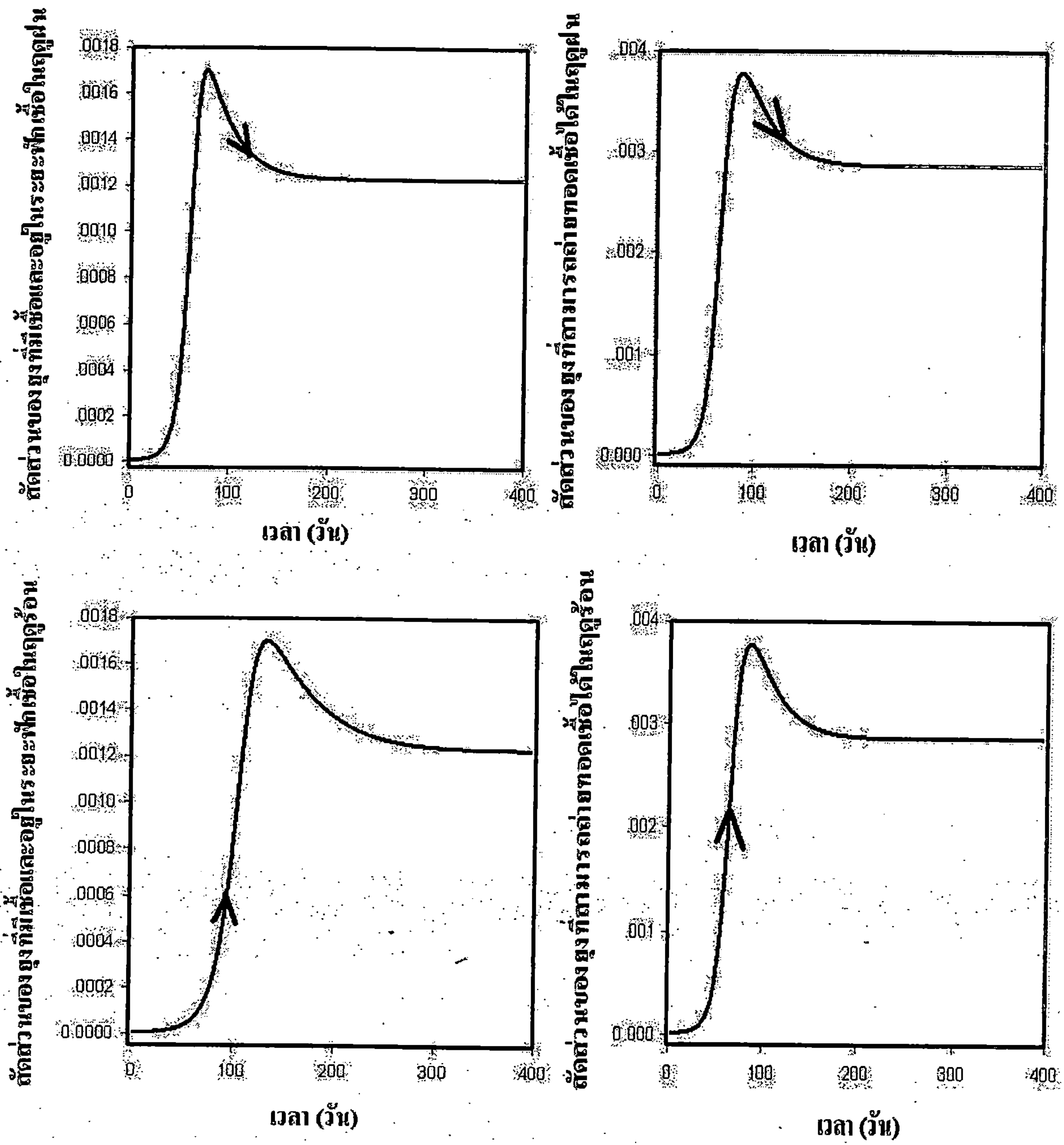
รูปที่ 3.6 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{E_{v1}}),(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{I_{v1}})$ $(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{E_{v2}})$ ตามลำดับ สำหรับ $R_0<1$ โดยที่ $\mu_h=1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v=1/7$ ต่อวัน, $q=1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h=0.0000001, \gamma_v=0.0000002$, $r=1/30$ ต่อวัน, $N_T=25{,}000$, $N_{v1}=5{,}000$, $N_{v2}=20{,}000, N_{v3}=10{,}000$, $R_0=0.00000000359728, R_0'=0.0000599773$.
ผลเฉลยลู่เข้าสู่สภาวะไร้โรค $E_1=(1,0,0,0,0,0,0,0)$.



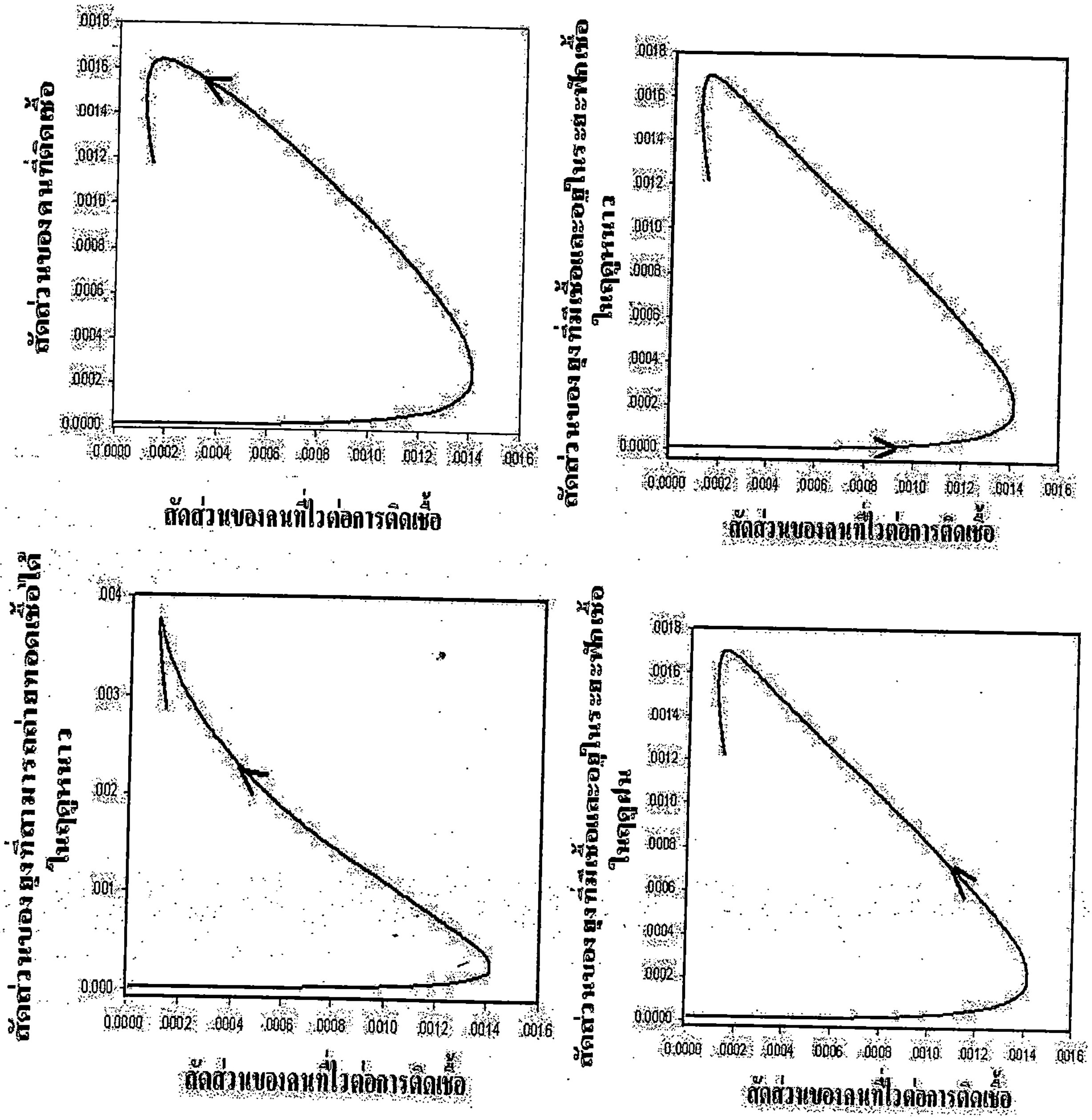
รูปที่ 3.7 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{I_{v2}}),(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{E_{v3}})$ $(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{I_{v3}})$ ตามลำดับ สำหรับ $R_0<1$ โดยที่ $\mu_h=1/(365\times70)$ ต่อวัน , $\mu_v=1/7$ ต่อวัน, $q=1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h=0.0000001, \gamma_v=0.0000002$, $r=1/30$ ต่อวัน, $N_T=25{,}000$, $N_{v1}=5{,}000$, $N_{v2}=20{,}000$, $N_{v3}=10{,}000$, $R_0=0.00000000359728, R_0^{'}=0.0000599773$.
ผลเฉลยลู่เข้าสู่สภาวะไร้โรค $E_1=(1,0,0,0,0,0,0,0)$.



รูปที่ 3.8 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ $\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}}$ ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v2} = 9{,}800{,}000, N_{v3} = 10{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0' = 1.00438$. ผลเฉลยลู่เข้าสู่สภาวะไร้โรค 0.000139351, 0.00117263, 0.00122623, 0.0028612 ตามลำดับ

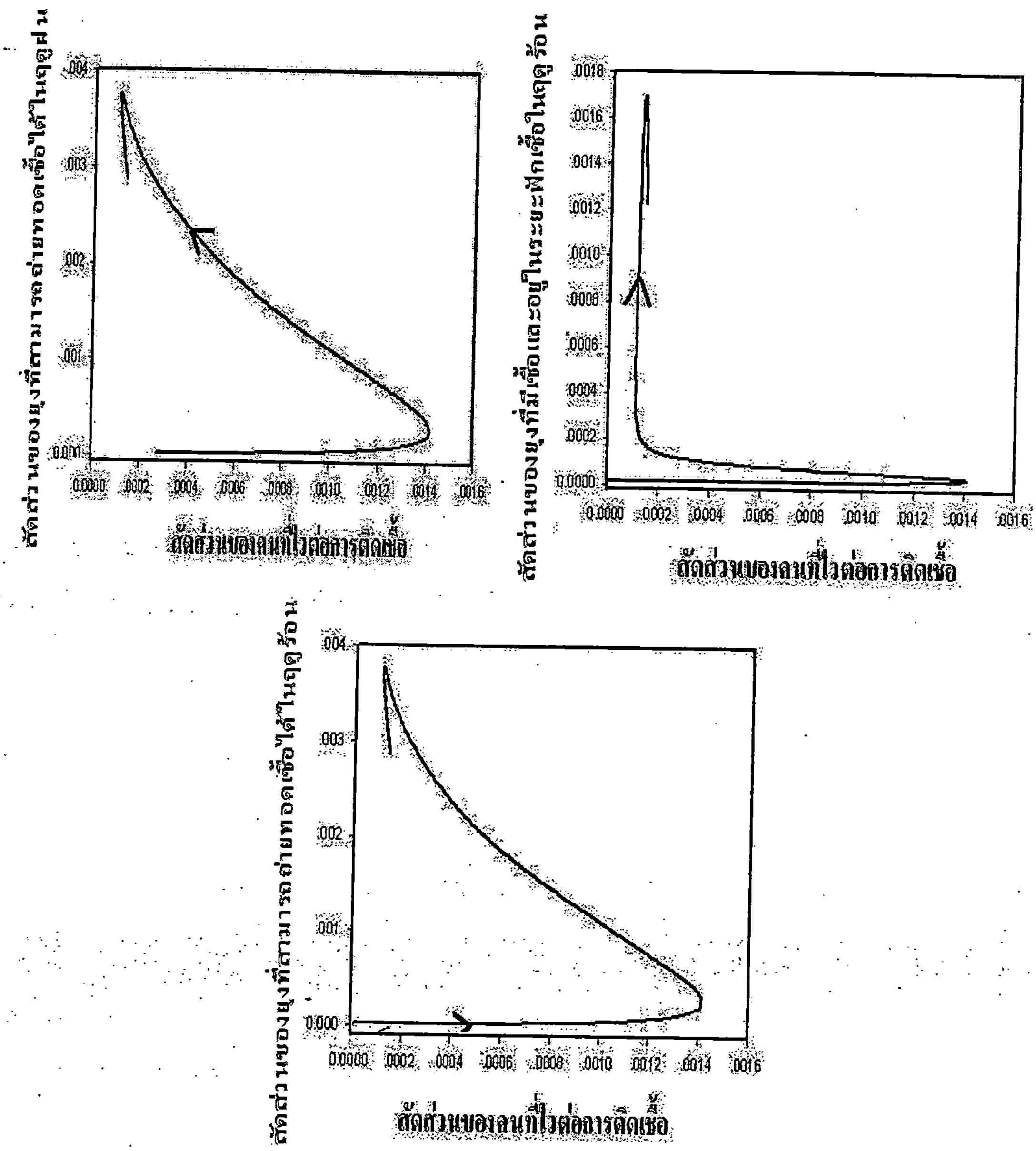


รูปที่ 3.9 ผลเฉลยสมการ (3.15)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ $\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}$ ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v2} = 9{,}800{,}000, N_{v3} = 10{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0^{'} = 1.00438$. ผลเฉลยลู่เข้าสู่สภาวะไร้โรค 0.00122623, 0.0028612, 0.00122623, 0.0028612 ตามลำดับ



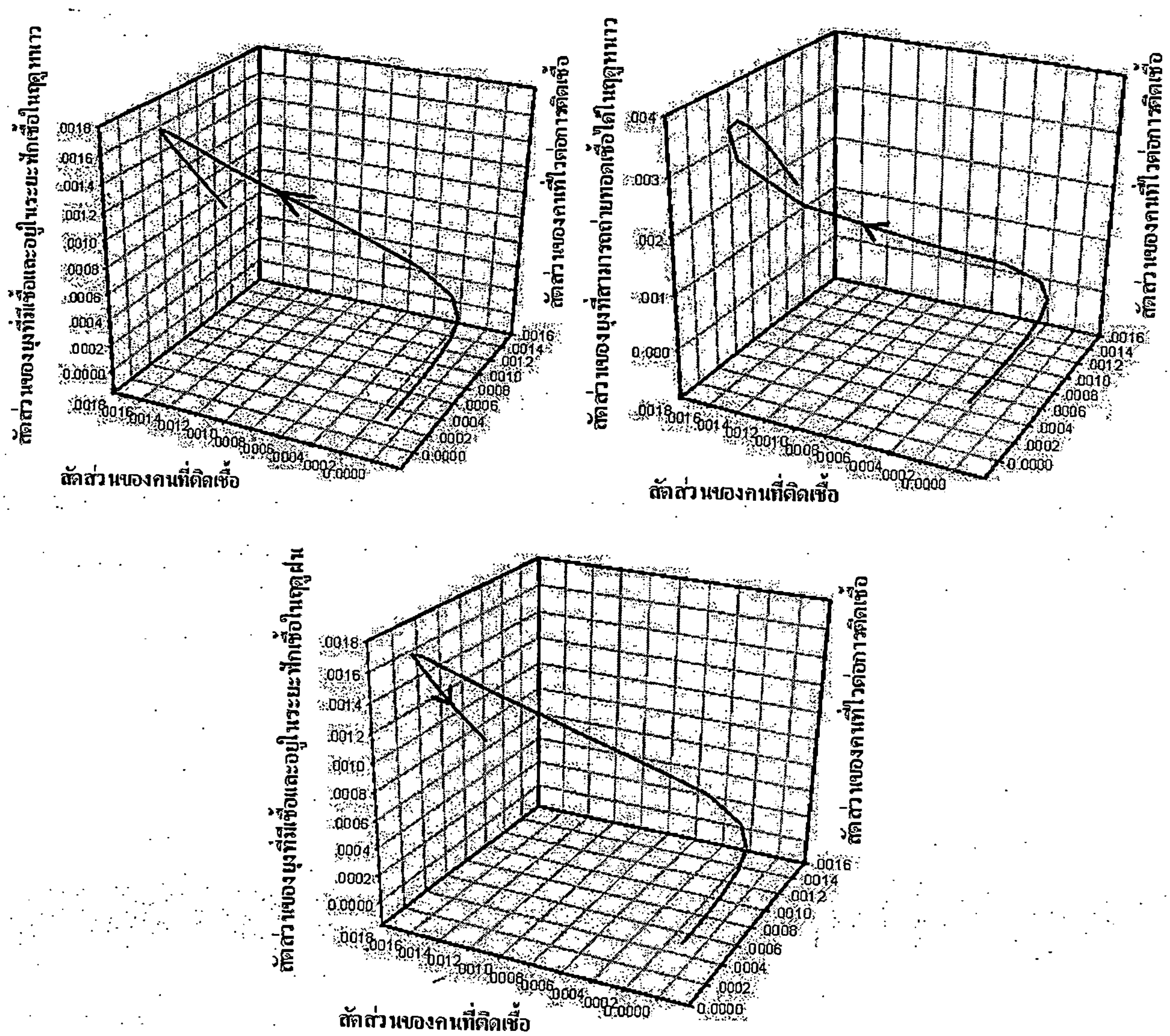
รูปที่ 3.10 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(\overline{S_h},\overline{I_h}),(\overline{S_h},\overline{E_{v1}}),(\overline{S_h},\overline{I_{v1}}),(\overline{S_h},\overline{E_{v2}})$ ตามลำดับ สำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่ $\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v2} = 9{,}800{,}000, N_{v3} = 10{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0' = 1.00438$.

ผลเฉลยลู่เข้าสู่สภาวะไร้โรค $E_2 = (0.000139351, 0.00117263, 0.00122623, 0.0028612, 0.00122623, 0.0028612, 0.00122623, 0.0028612)$.



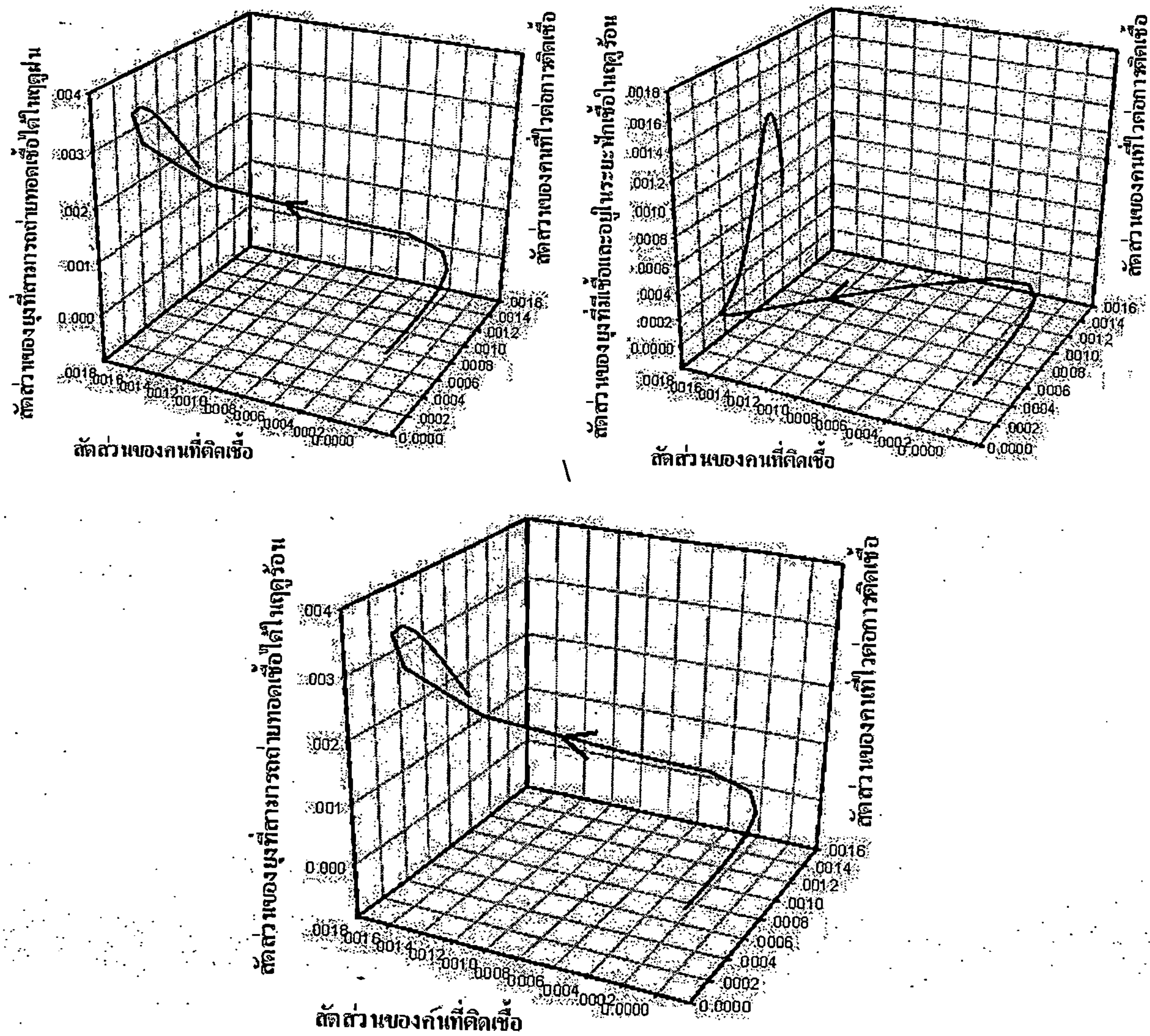
รูปที่ 3.11 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(\overline{S_h},\overline{I_{v2}}),(\overline{S_h},\overline{E_{v3}}),(\overline{S_h},\overline{I_{v3}})$ ตามลำดับ สำหรับ $R_0 > 1$ โดยที่ $\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v2} = 9{,}800{,}000$, $N_{v3} = 10{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0' = 1.00438$.

ผลเฉลยลู่เข้าสู่สภาวะไร้โรค $E_2 = (0.000139351, 0.00117263, 0.00122623, 0.0028612, 0.00122623, 0.0028612, 0.00122623, 0.0028612)$.



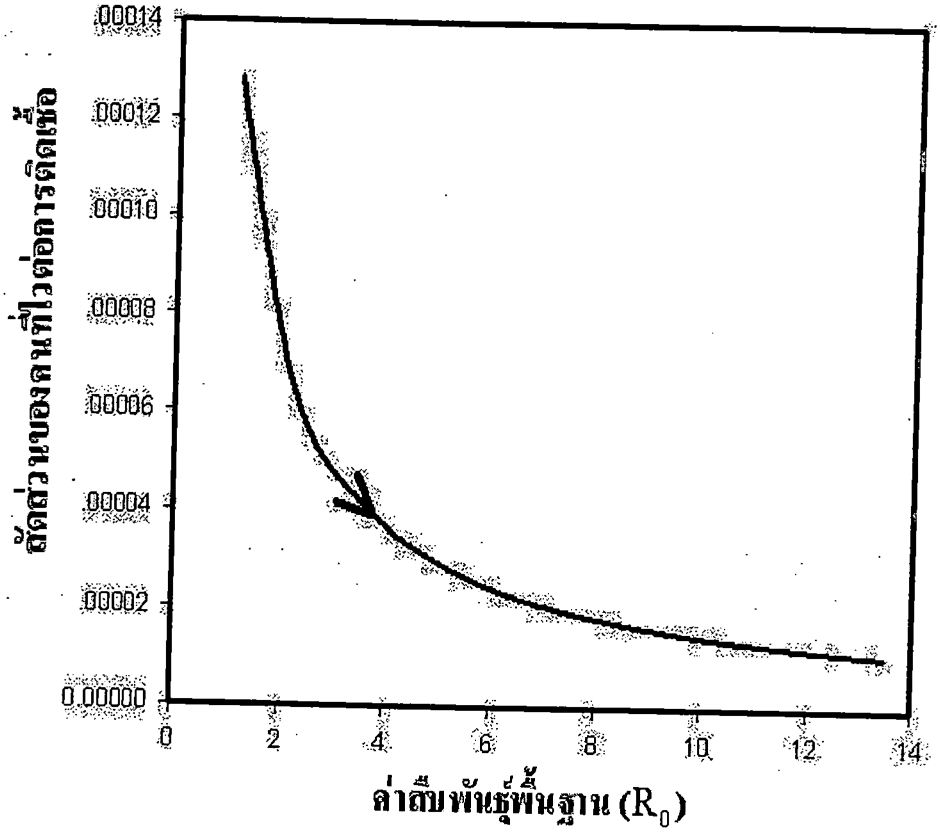
รูปที่ 3.12 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{E_{v1}}),(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{I_{v1}})$ $(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{E_{v2}})$ ตามลำดับ สำหรับ $R_0>1$ โดยที่ $\mu_h=1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v=1/7$ ต่อวัน, $q=1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h=0.00001,\gamma_v=0.00002$, $r=1/30$ ต่อวัน, $N_T=25{,}000$, $N_{v1}=5{,}000$, $N_{v2}=9{,}800{,}000, N_{v3}=10{,}000$, $R_0=1.00875, R_0'=1.00438$.

ผลเฉลยลู่เข้าสู่สภาวะไร้โรค $E_2=(0.000139351,0.00117263,0.00122623,0.0028612,0.00122623,$. $0.0028612,0.00122623,0.0028612)$.



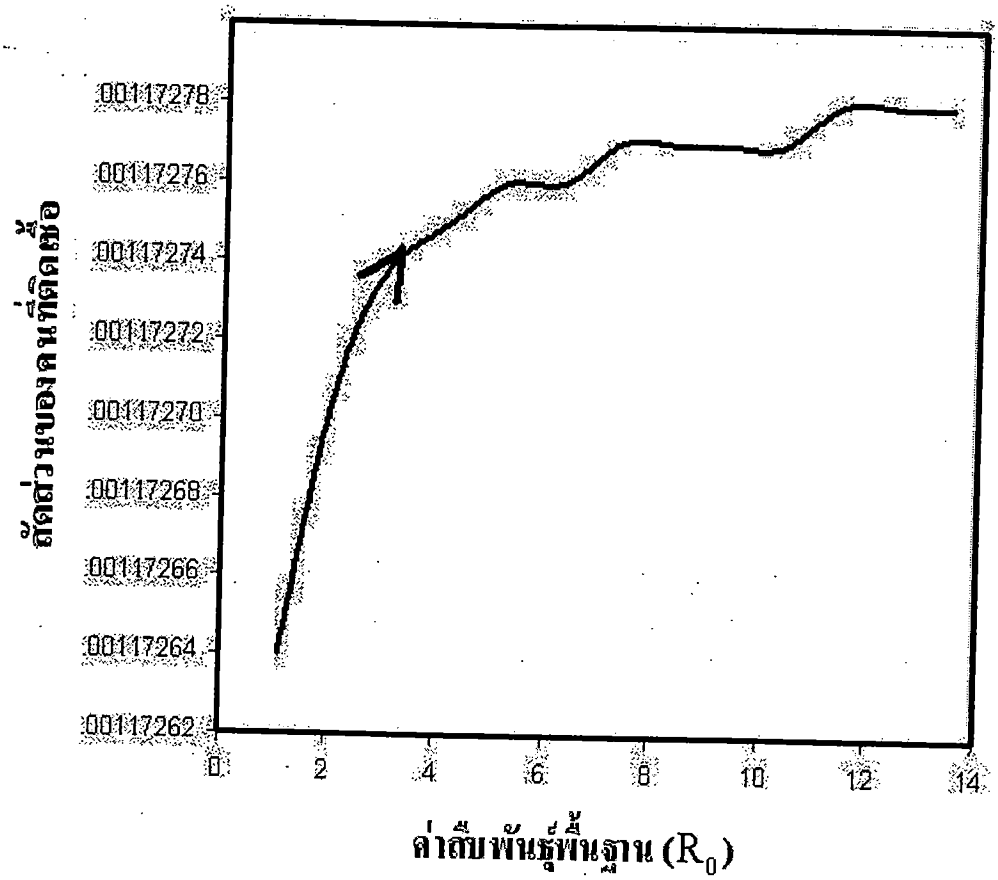
รูปที่ 3.13 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{I_{v2}}),(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{E_{v3}})$ $(\overline{S_h},\overline{I_h},\overline{I_{v3}})$ ตามลำดับ สำหรับ $R_0>1$ โดยที่ $\mu_h=1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v=1/7$ ต่อวัน, $q=1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h=0.00001, \gamma_v=0.00002, r=1/30$ ต่อวัน, $N_T=25{,}000$, $N_{v1}=5{,}000$, $N_{v2}=9{,}800{,}000, N_{v3}=10{,}000$, $R_0=1.00875, R_0'=1.00438$.

ผลเฉลยลู่เข้าสู่สภาวะไร้โรค $E_2=(0.000139351, 0.00117263, 0.00122623, 0.0028612, 0.00122623, 0.0028612, 0.00122623, 0.0028612)$.

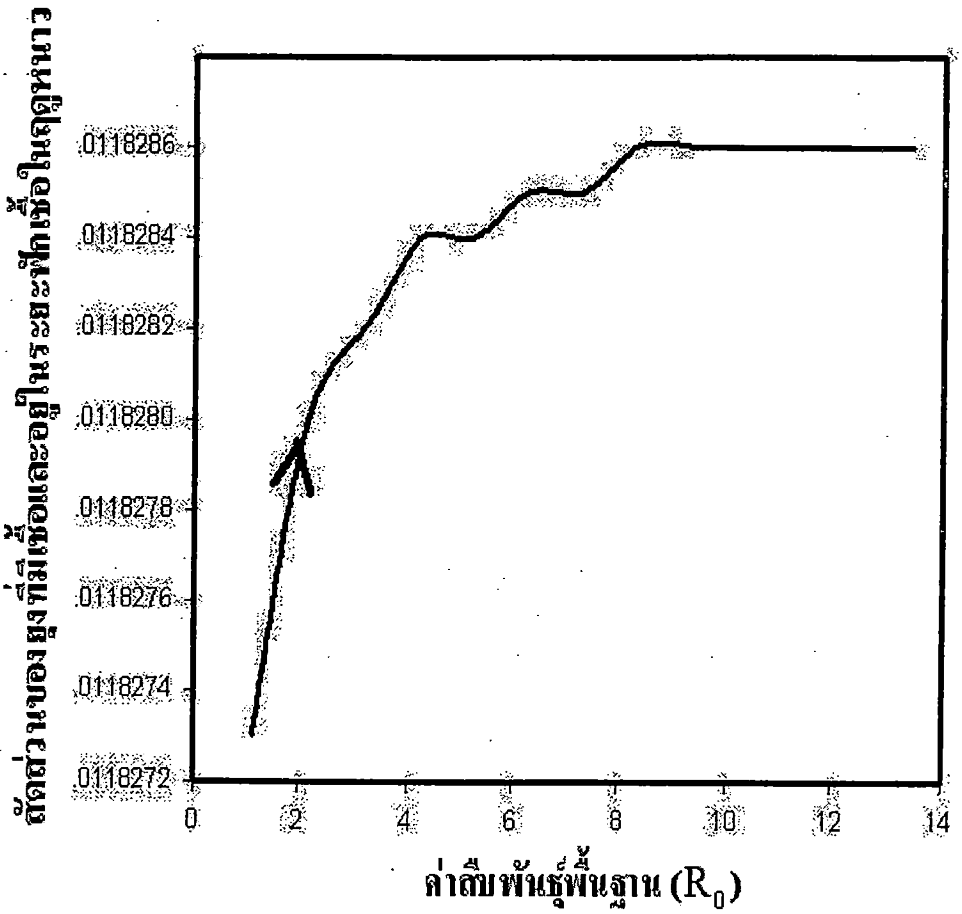


รูปที่ 3.14 กราฟแสดงความสัมพันธ์จุดสมดุลระหว่างสัดส่วนของคนที่ไวต่อการติดเชื้อและค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน

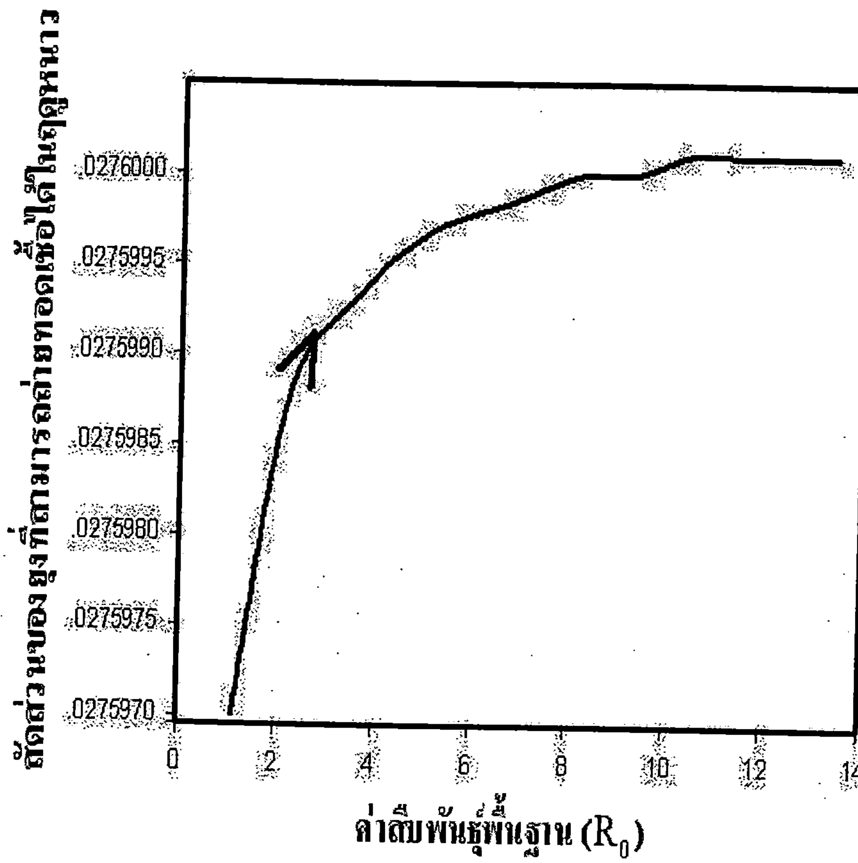
R_0 เมื่อ $\mu_h = 1/(365 \times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 250{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v2} = 1{,}000{,}000$, $N_{v3} = 10{,}000$,



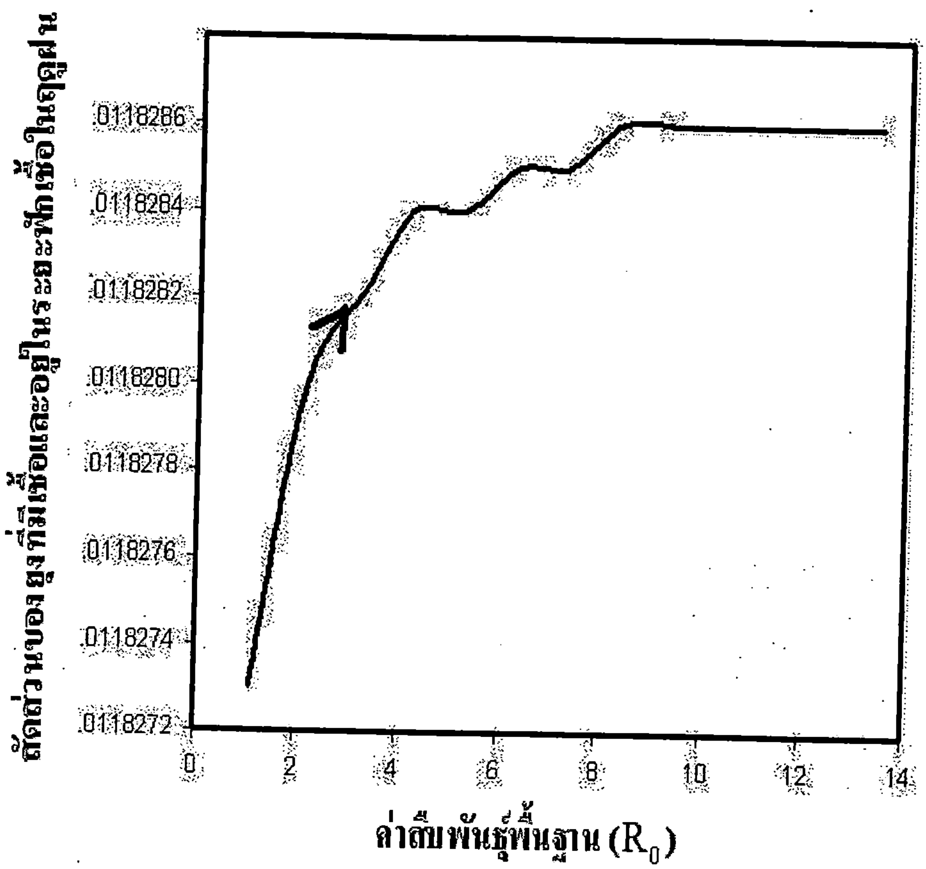
รูปที่ 3.15 กราฟแสดงความสัมพันธ์จุดสมดุลระหว่างสัดส่วนของคนที่ติดเชื้อและค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน R_0 เมื่อ $\mu_h = 1/(365 \times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 250,000$, $N_{v1} = 5,000$, $N_{v2} = 1,000,000, N_{v3} = 10,000$,



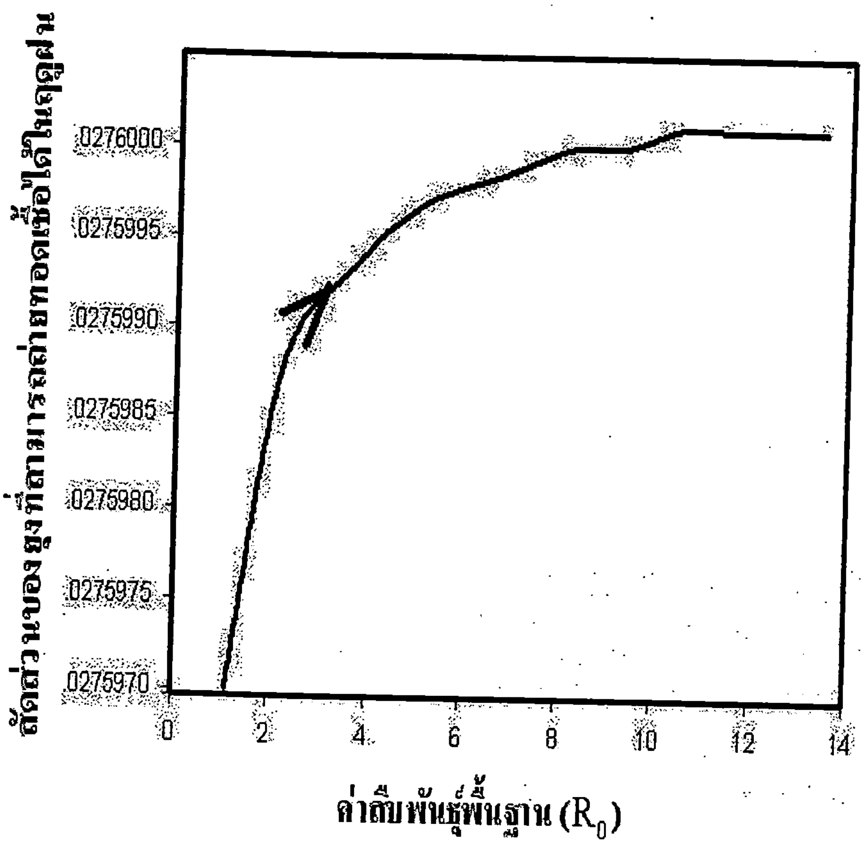
รูปที่ 3.16 กราฟแสดงความสัมพันธ์จุดสมดุลระหว่างสัดส่วนของยุงที่มีเชื้อและอยู่ในระยะฟักเชื้อในฤดูหนาวและค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน R_0 เมื่อ $\mu_h = 1/(365\times70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 250,000$, $N_{v1} = 5,000$, $N_{v2} = 1,000,000$, $N_{v3} = 10,000$



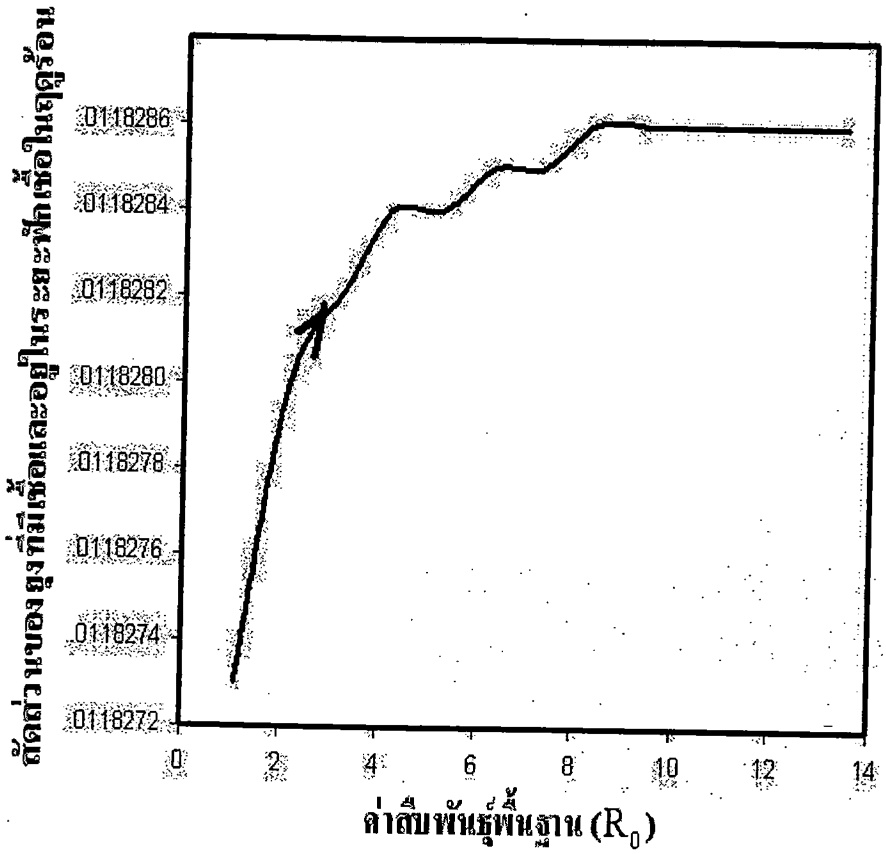
รูปที่ 3.17 กราฟแสดงความสัมพันธ์จุดสมดุลระหว่างสัดส่วนของยุงที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อในฤดูหนาวและค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน R_σ เมื่อ $\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 250,000$, $N_{v1} = 5,000$, $N_{v2} = 1,000,000$, $N_{v3} = 10,000$



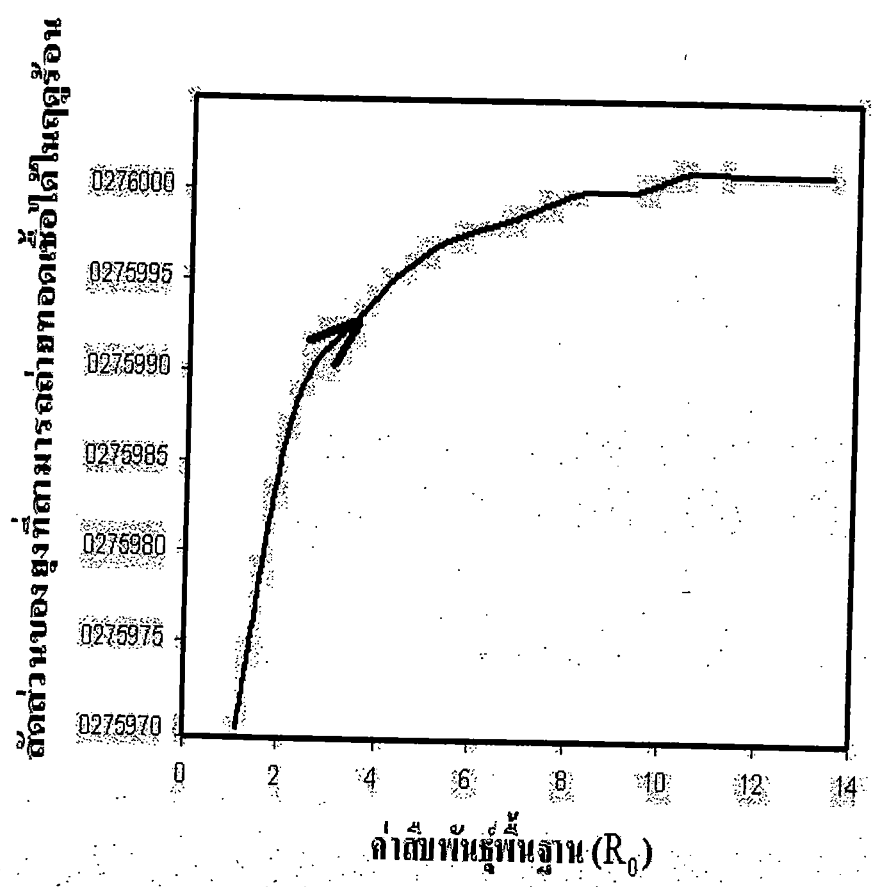
รูปที่ 3.18 กราฟแสดงความสัมพันธ์จุดสมดุลระหว่างสัดส่วนของยุงที่มีเชื้อและอยู่ในระยะฟักเชื้อในฤดูฝนและค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน R_0 เมื่อ $\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 250,000$, $N_{v1} = 5,000$, $N_{v2} = 1,000,000$, $N_{v3} = 10,000$,



รูปที่ 3.19 กราฟแสดงความสัมพันธ์จุดสมดุลระหว่างสัดส่วนของยุงที่มีเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อในฤดูฝนและค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน R_0 เมื่อ $\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 250,000$, $N_{v1} = 5,000$, $N_{v2} = 1,000,000$, $N_{v3} = 10,000$

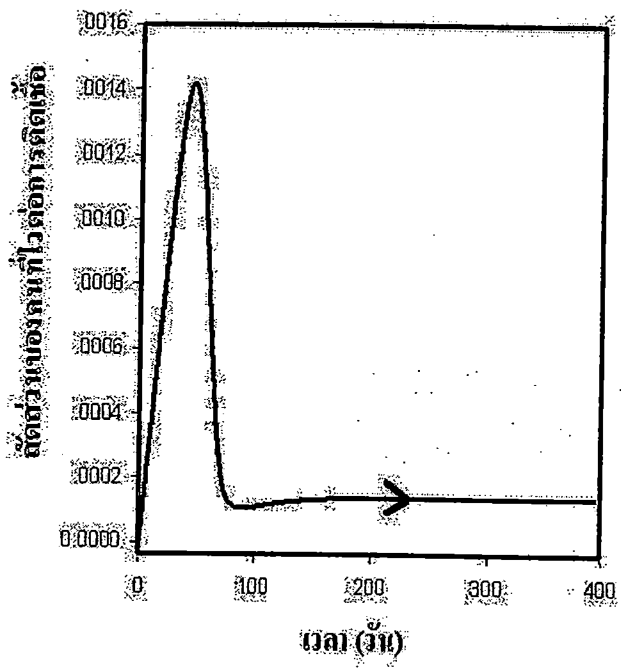


รูปที่ 3.20 กราฟแสดงความสัมพันธ์จุดสมดุลระหว่างสัดส่วนของยุงที่มีเชื้อและอยู่ในระยะฟักเชื้อในฤดูร้อนและค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน R_0 เมื่อ $\mu_h \leq 1/(365 \times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 250{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v2} = 1{,}000{,}000$, $N_{v3} = 10{,}000$

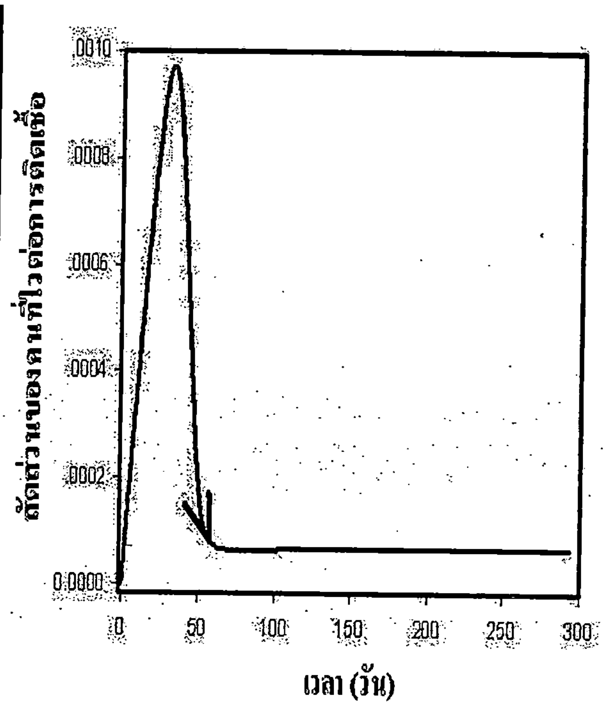


รูปที่ 3.21 กราฟแสดงความสัมพันธ์จุดสมดุลระหว่างสัดส่วนของยุงที่มีเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อในฤดูร้อนและค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน R_0 เมื่อ $\mu_h = 1/(365 \times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 250{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v2} = 1{,}000{,}000$, $N_{v3} = 10{,}000$

3.5 เปรียบเทียบประชากรแต่ละชนิดเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าแตกต่างกัน ซึ่งแสดงตามรูปต่อไปนี้



3.22 a)

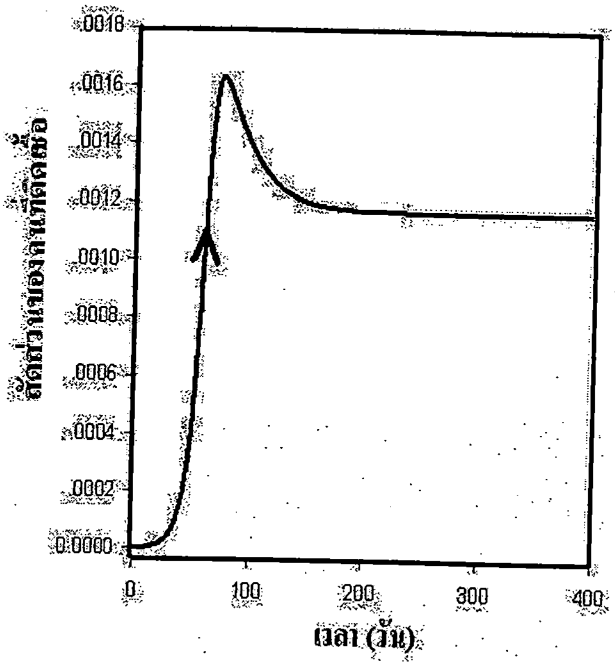


3.22 b)

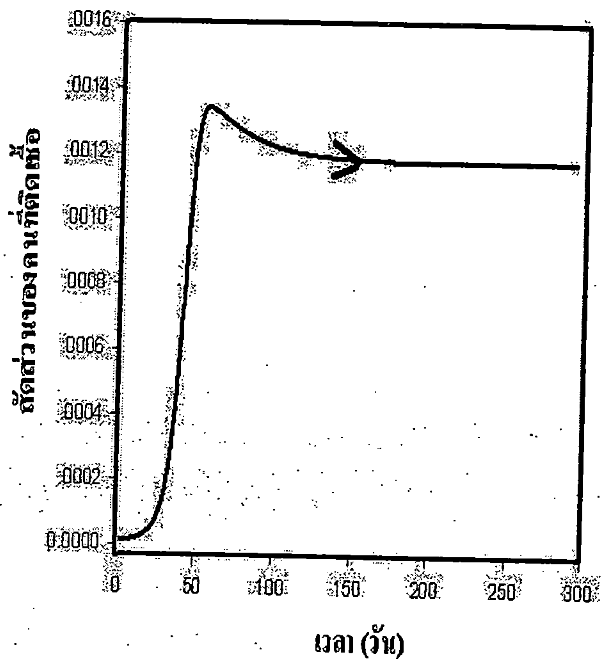
รูปที่ 3.22 ผลเฉลยสมการ (5.1)-(5.8) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ $\overline{S_h}$ ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365 \times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000, N_{v3} = 10{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0^{'} = 1.00438$.

3.22 a) $N_{v1} = 5{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0^{'} = 1.00438$, $S_h^{*} = 0.000139351$

3.22 b) $N_{v2} = 20{,}000{,}000$, $R_0 = 2.05713, R_0^{'} = 1.43427$, $S_h^{*} = 0.0000683354$



3.23 a)

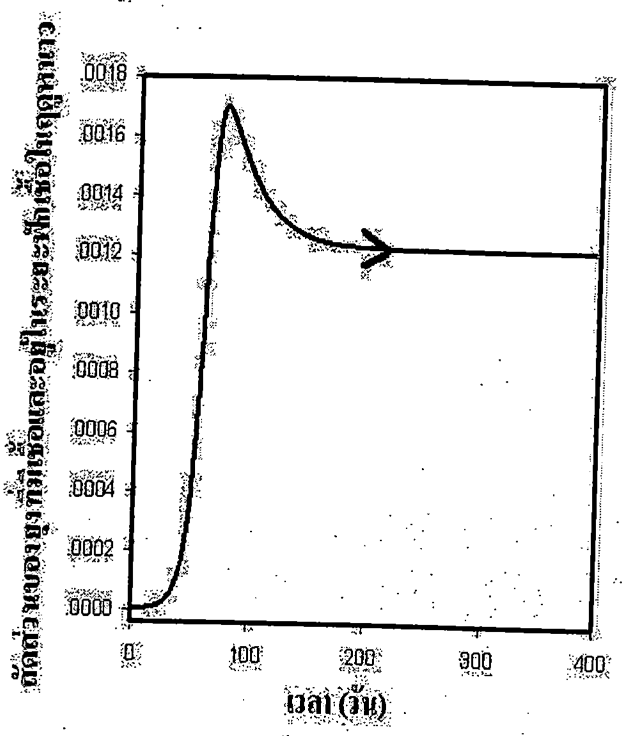


3.23 b)

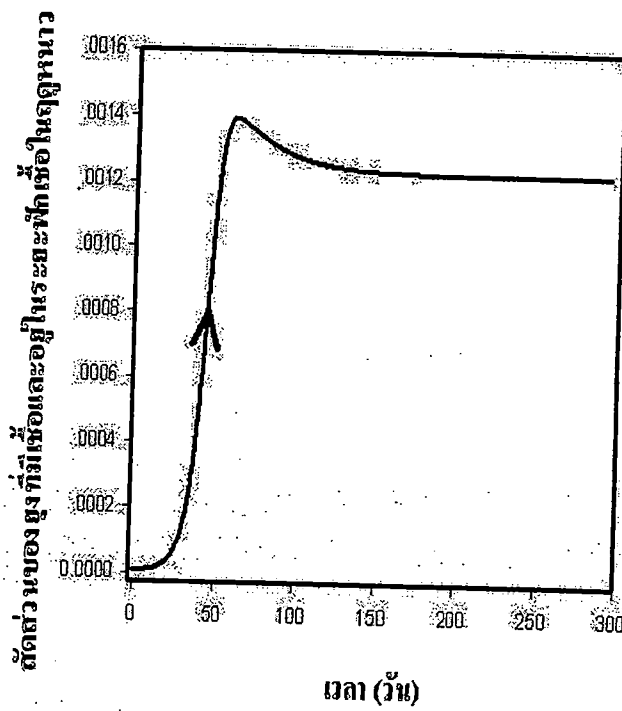
รูปที่ 3.23 ผลเฉลยสมการ (3.15)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ $\overline{I_h}$ ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365 \times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000, N_{v3} = 10{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0' = 1.00438$.

3.23 a) $N_{v1} = 5{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0' = 1.00438$., $I_h^* = 0.00117263$

3.23 b) $N_{v2} = 20{,}000{,}000$, $R_0 = 2.05713, R_0' = 1.43427$, $I_h^* = 0.00117271$



3.24 a)

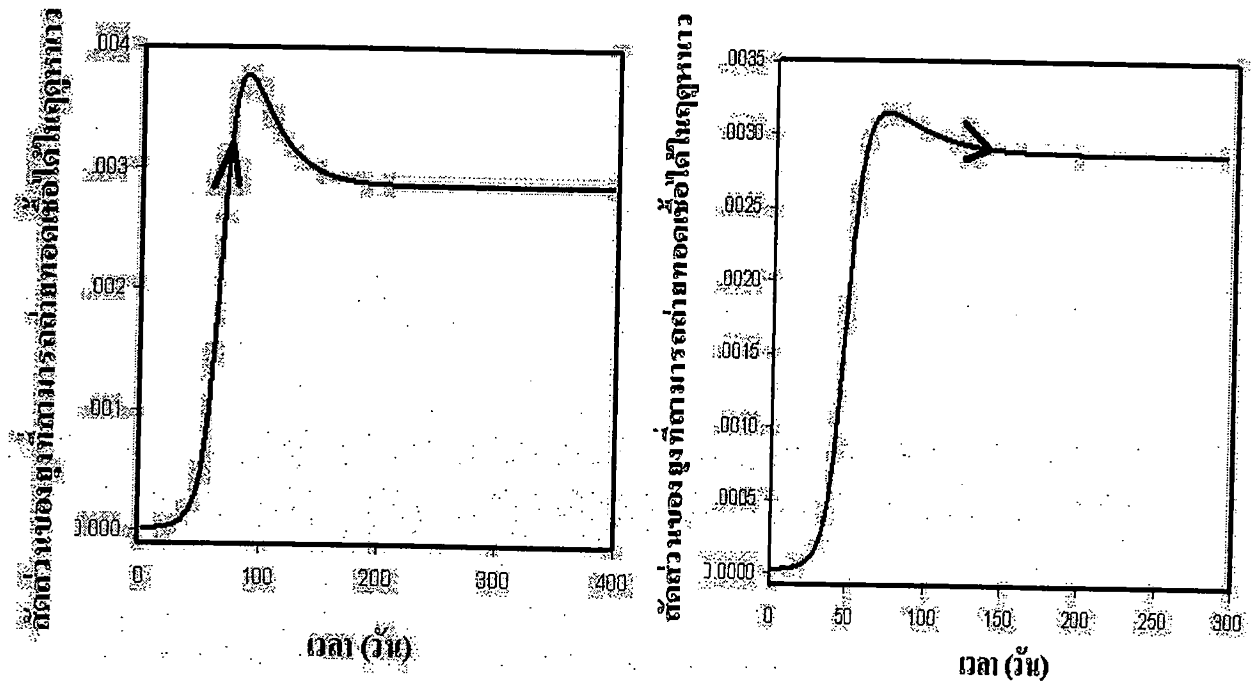


3.24 b)

รูปที่ 3.24 ผลเฉลยสมการ (3.15)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ $\overline{E_{v1}}$ ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v3} = 10{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0^{'} = 1.00438$.

3.24 a) $N_{v1} = 5{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0^{'} = 1.00438$, $E_{v1}^{*} = 0.00122623$

3.24 b) $N_{v2} = 20{,}000{,}000$, $R_0 = 2.05713, R_0^{'} = 1.43427$, $E_{v1}^{*} = 0.00122631$

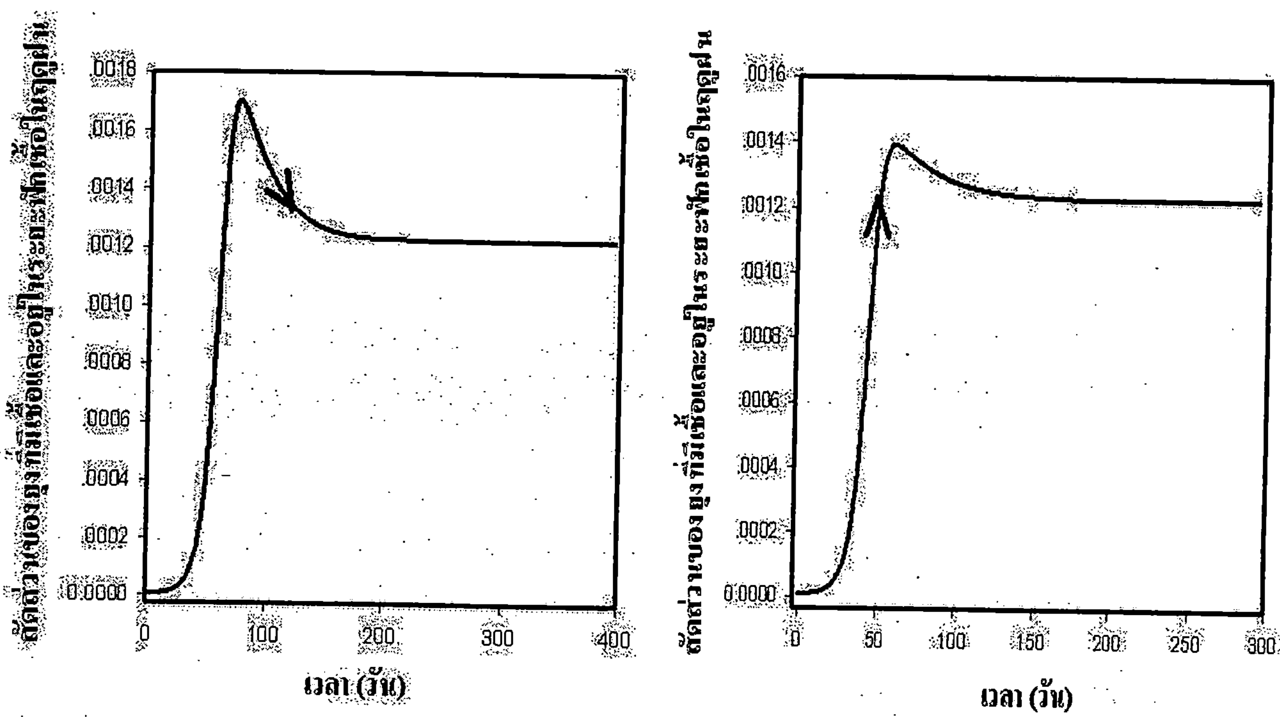


3.25 a) 3.25 b)

รูปที่ 3.25 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ $\overline{I_{v1}}$ ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v3} = 10{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0^{'} = 1.00438$.

3.25 a) $N_{v1} = 5{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0^{'} = 1.00438$., $I_{v1}^{*} = 0.0028612$

3.25 b) $N_{v2} = 20{,}000{,}000$, $R_0 = 2.05713, R_0^{'} = 1.43427$, $I_{v1}^{*} = 0.0028614$

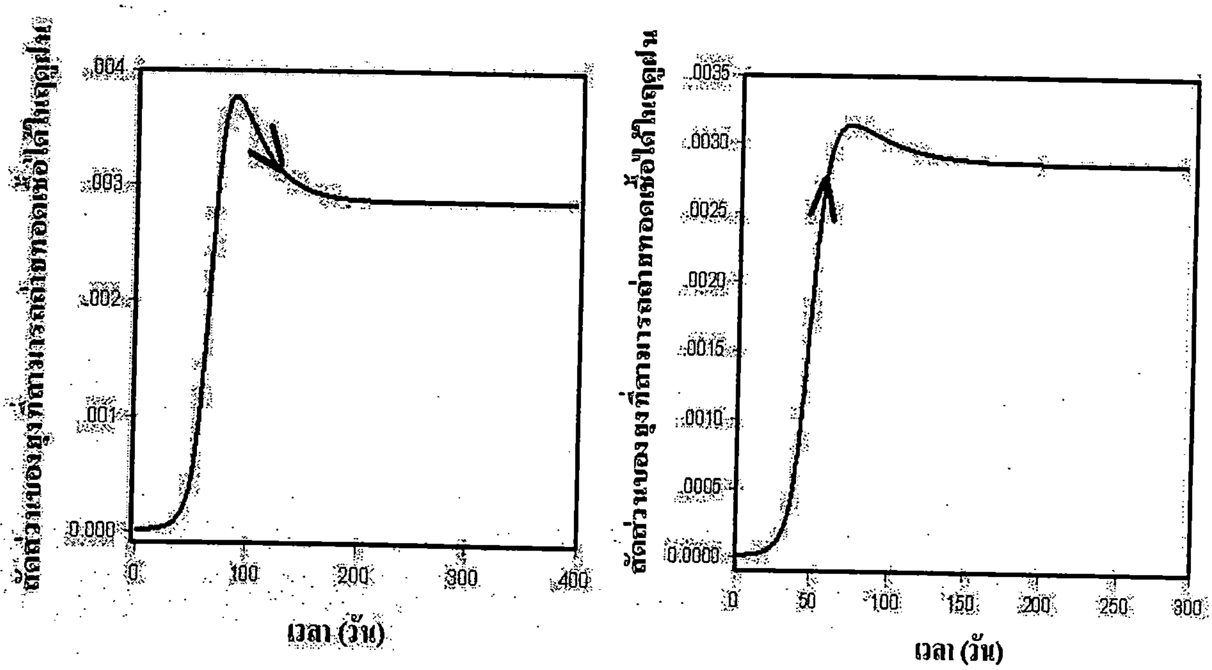


3.26 a) 3.26 b)

รูปที่ 3.26 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ $\overline{E_{v2}}$ ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365\times70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000, N_{v3} = 10{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0' = 1.00438$.

3.26 a) $N_{v1} = 5{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0' = 1.00438.$, $E_{v2}^* = 0.00122623$

3.26 b) $N_{v2} = 20{,}000{,}000$, $R_0 = 2.05713, R_0' = 1.43427$, $E_{v2}^* = 0.00122631$



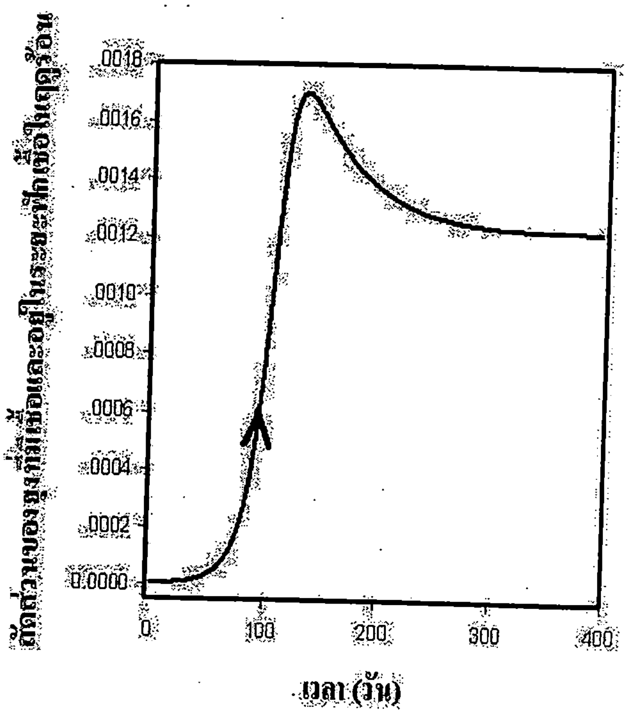
3.27 a)

3.27 b)

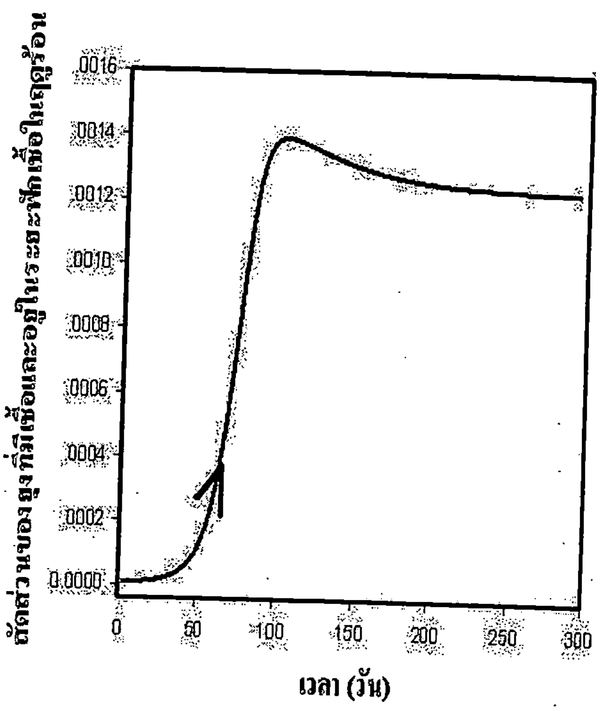
รูปที่ 3.27 ผลเฉลยสมการ (3.15)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ $\overline{I_{v2}}$ ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000, N_{v3} = 10{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0' = 1.00438$.

3.27 a) $N_{v1} = 5{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0' = 1.00438$., $I_{v2}^* = 0.0028612$

3.27 b) $N_{v2} = 20{,}000{,}000$, $R_0 = 2.05713, R_0' = 1.43427$, $I_{v2}^* = 0.0028614$



3.28 a)

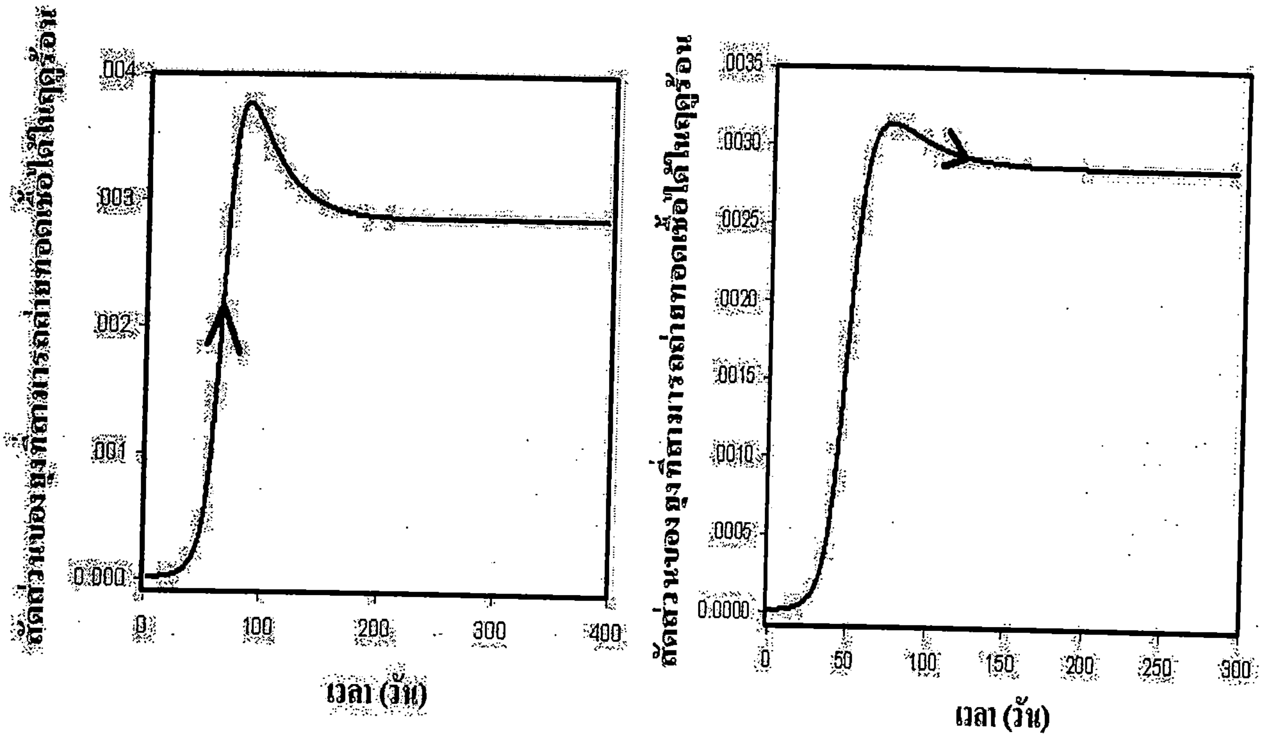


3.28 b)

รูปที่ 3.28 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ $\overline{E_{v3}}$ ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365\times70)$ ต่อวัน., $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25,000$, $N_{v1} = 5,000$, $N_{v3} = 10,000$, $R_0 = 1.00875, R_0' = 1.00438$.

3.28 a) $N_{v1} = 5,000$, $R_0 = 1.00875, R_0' = 1.00438$., $E_{v3}^* = 0.00122623$

3.28 b) $N_{v2} = 20,000,000$, $R_0 = 2.05713, R_0' = 1.43427$, $E_{v3}^* = 0.00122631$

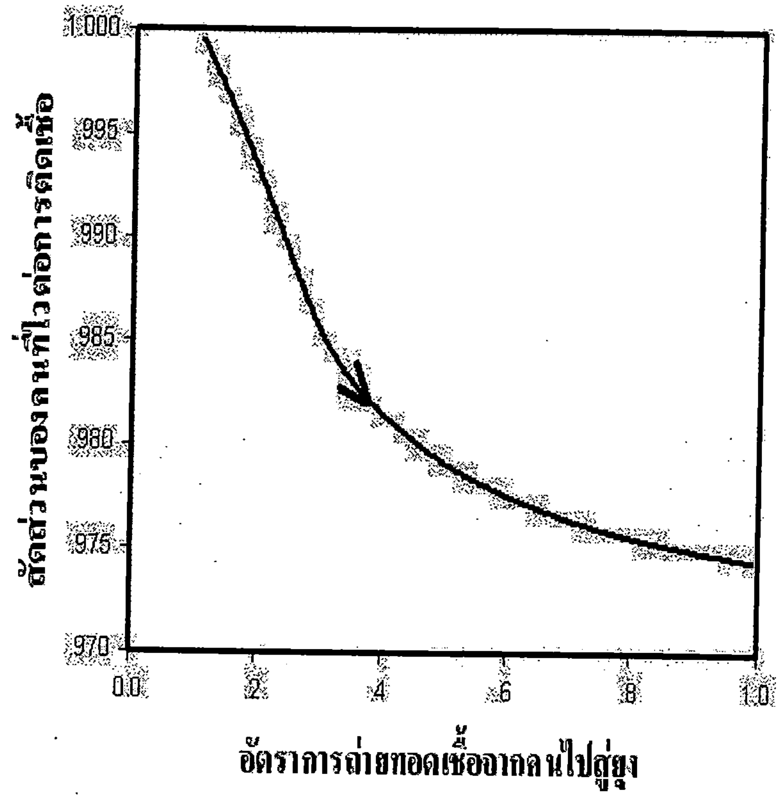


3.29 a) 3.29 b)

รูปที่ 3.29 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ $\overline{I_{v3}}$ ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00001, \gamma_v = 0.00002$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000, N_{v3} = 10{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0' = 1.00438$.

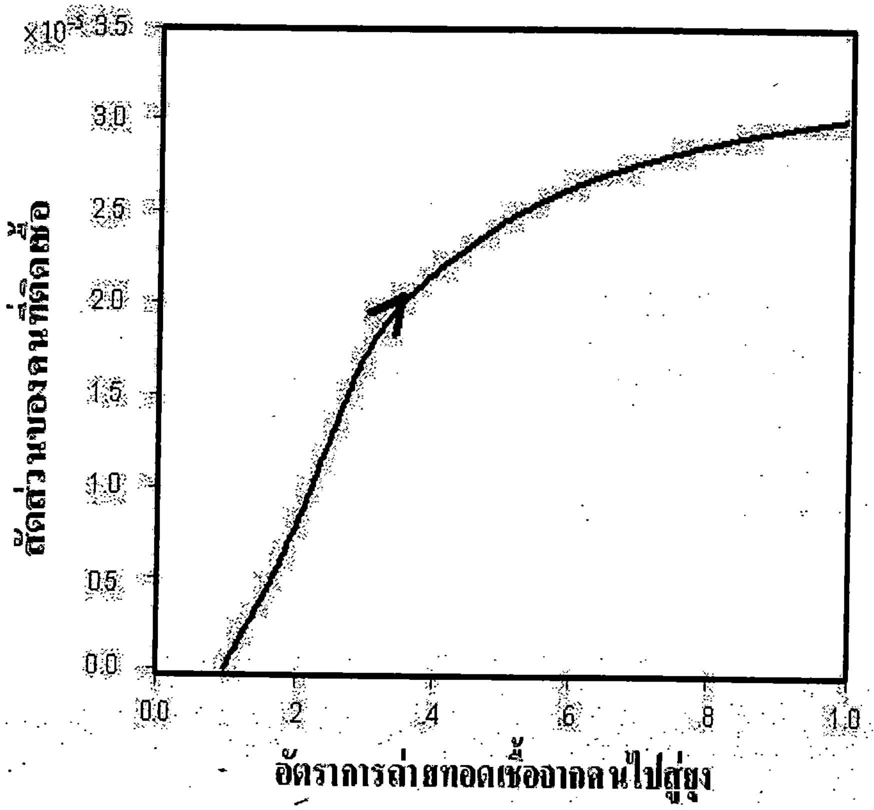
3.29 a) $N_{v1} = 5{,}000$, $R_0 = 1.00875, R_0' = 1.00438$., $I_{v3}^* = 0.0028612$

3.29 b) $N_{v2} = 20{,}000{,}000$, $R_0 = 2.05713, R_0' = 1.43427$, $I_{v3}^* = 0.0028614$



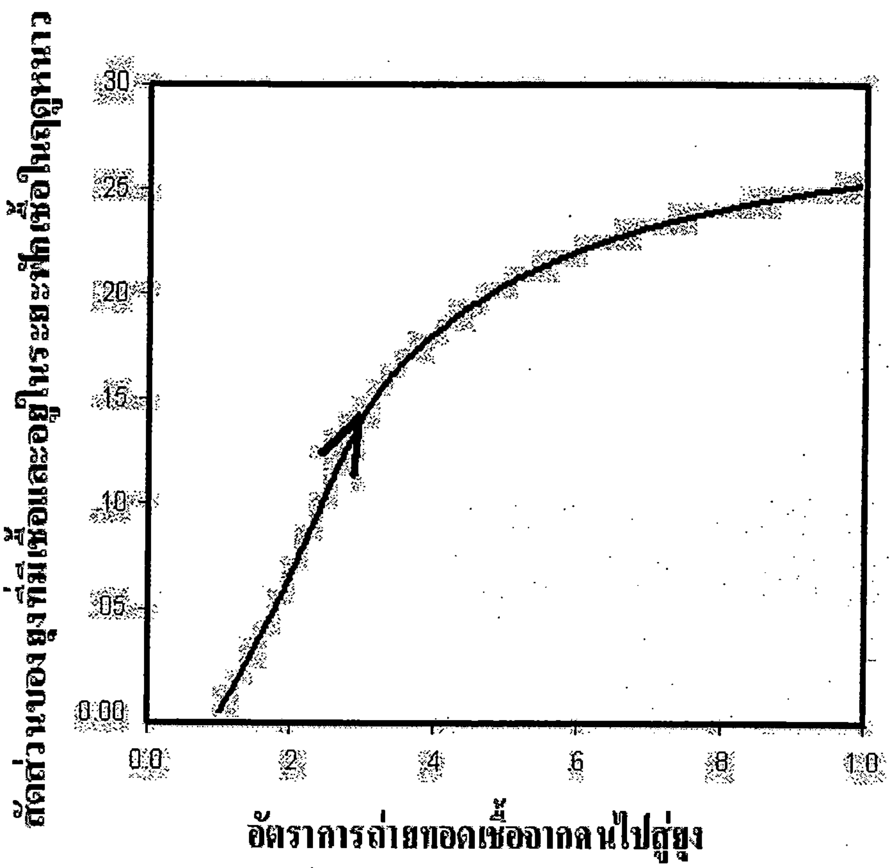
รูปที่ 3.30 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัดส่วนของคนที่ไวต่อการติดเชื้อ

กับอัตราการถ่ายทอดเชื้อจากคนไปสู่ยุง ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00000000005$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25,000$, $N_{v1} = 5,000$, $N_{v2} = 20,000$, $N_{v3} = 10,000$

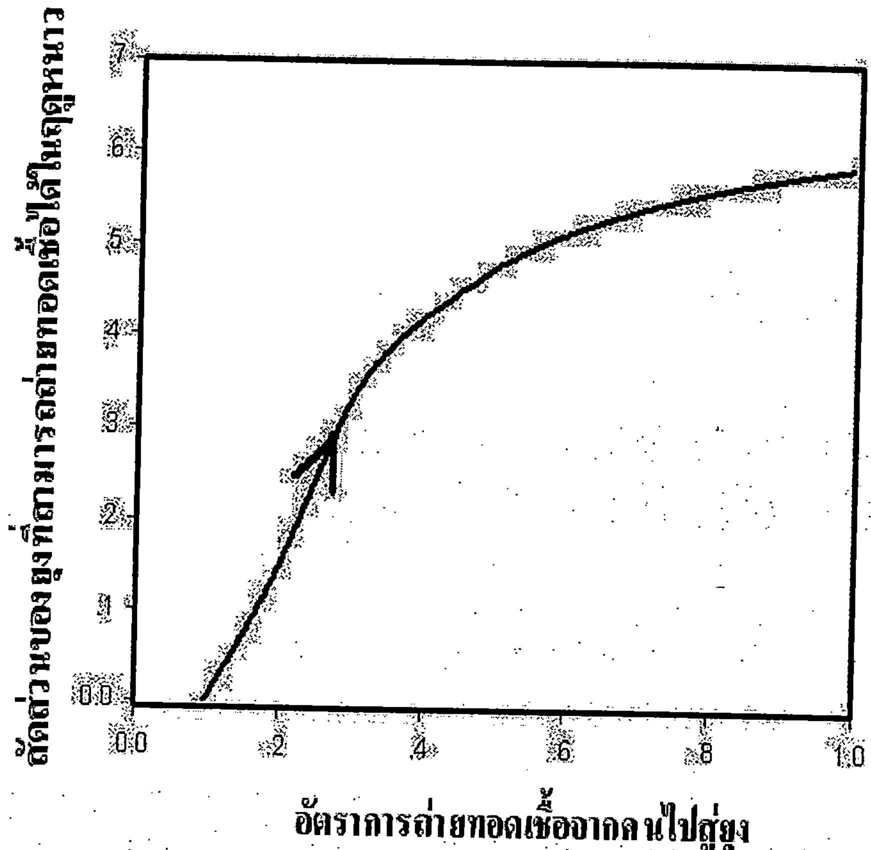


รูปที่ 3.31 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัดส่วนของคนที่ติดเชื้อกับอัตราการ

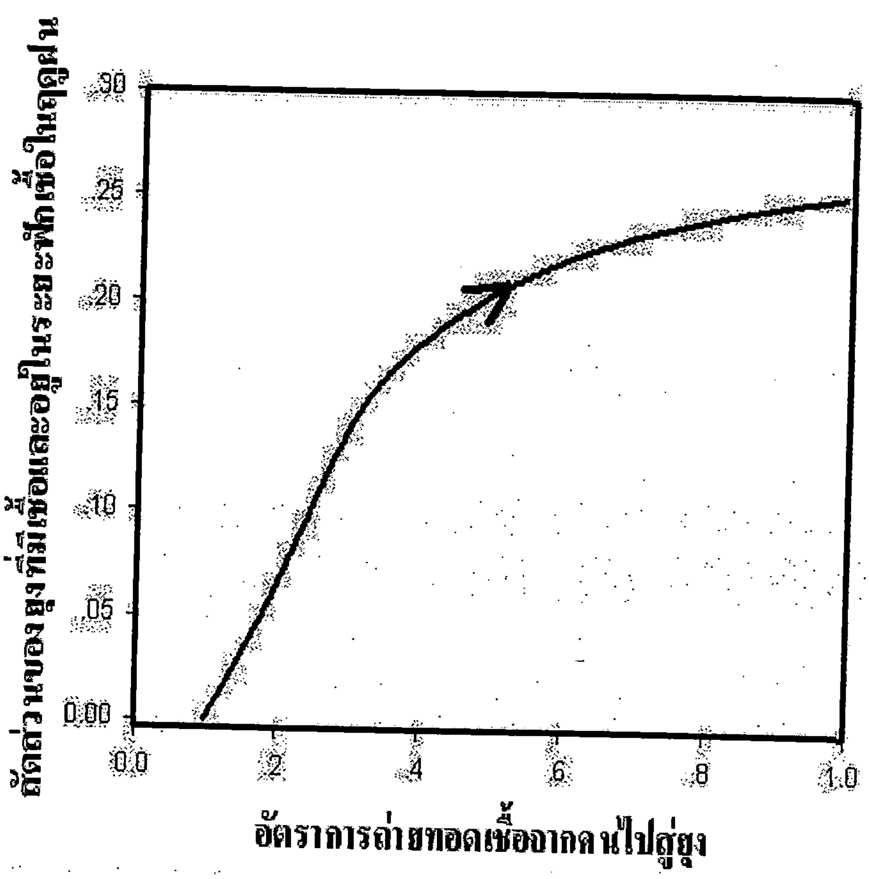
ถ่ายทอดเชื้อจากคนไปสู่ยุง ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365 \times 70)$ ต่อวัน ; $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00000000005$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25,000$, $N_{v1} = 5,000$, $N_{v2} = 20,000$, $N_{v3} = 10,000$



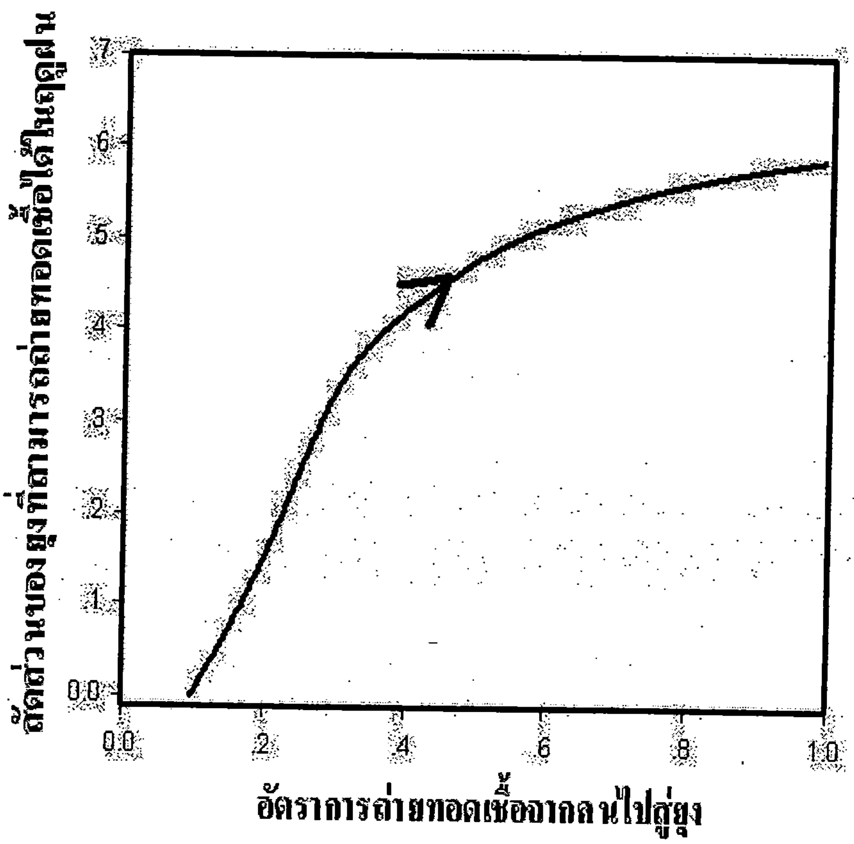
รูปที่ 3.32 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัดส่วนของยุงที่มีเชื้อและอยู่ในระยะฟักเชื้อในฤดูหนาวกับอัตราการถ่ายทอดเชื้อจากคนไปสู่ยุง ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365 \times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00000000005$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25,000$, $N_{v1} = 5,000$, $N_{v2} = 20,000$, $N_{v3} = 10,000$



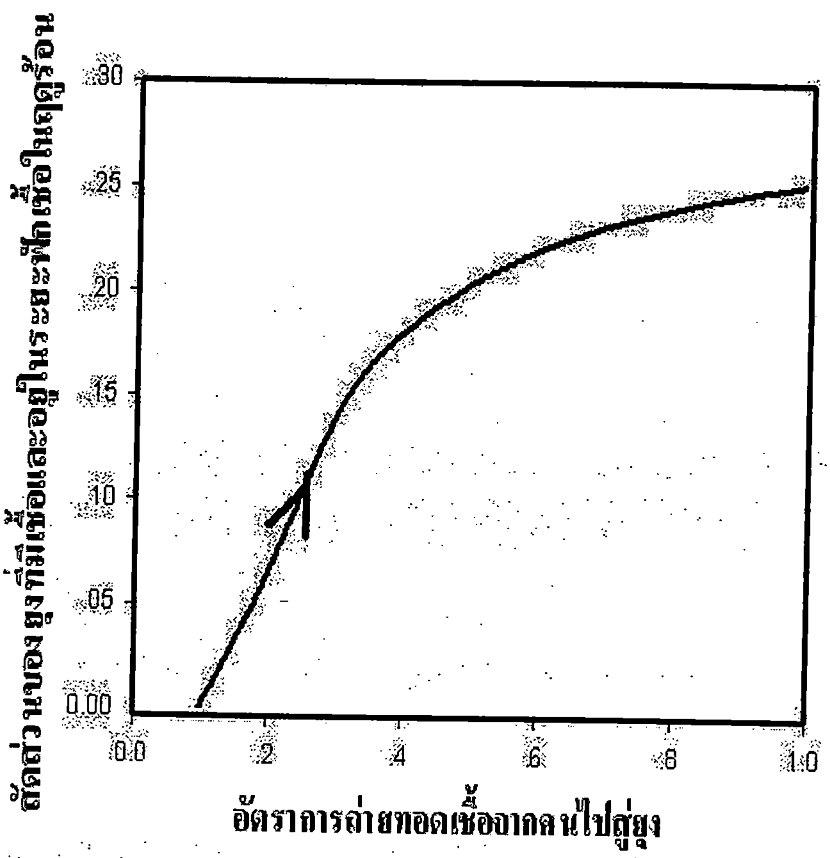
รูปที่ 3.33 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัดส่วนของยุงที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ในฤดูหนาวกับอัตราการถ่ายทอดเชื้อจากคนไปสู่ยุง ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00000000005$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25,000$, $N_{v1} = 5,000$, $N_{v2} = 20,000$, $N_{v3} = 10,000$



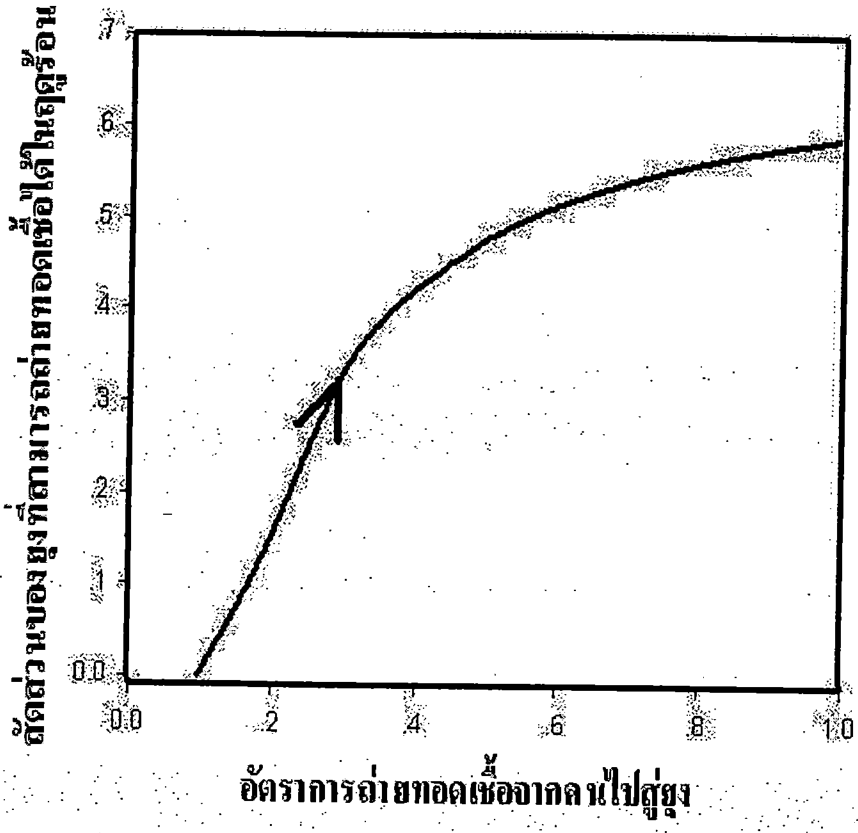
รูปที่ 3.34 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัดส่วนของยุงที่มีเชื้อและอยู่ในระยะฟักเชื้อในฤดูฝนกับอัตราการถ่ายทอดเชื้อจากคนไปสู่ยุง ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365 \times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00000000005$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25,000$, $N_{v1} = 5,000$, $N_{v2} = 20,000$, $N_{v3} = 10,000$



รูปที่ 3.35 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัดส่วนของยุงที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ในฤดูฝนกับอัตราการถ่ายทอดเชื้อจากคนไปสู่ยุง ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365 \times 70)$ ต่อวัน, $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00000000005$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v2} = 20{,}000$, $N_{v3} = 10{,}000$



รูปที่ 3.36 ผลเฉลยสมการ (3.15.)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัดส่วนของยุงที่มีเชื้อและอยู่ในระยะฟักเชื้อในฤดูร้อนกับอัตราการถ่ายทอดเชื้อจากคนไปสู่ยุง ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365 \times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00000000005$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25,000$, $N_{v1} = 5,000$, $N_{v2} = 20,000$, $N_{v3} = 10,000$

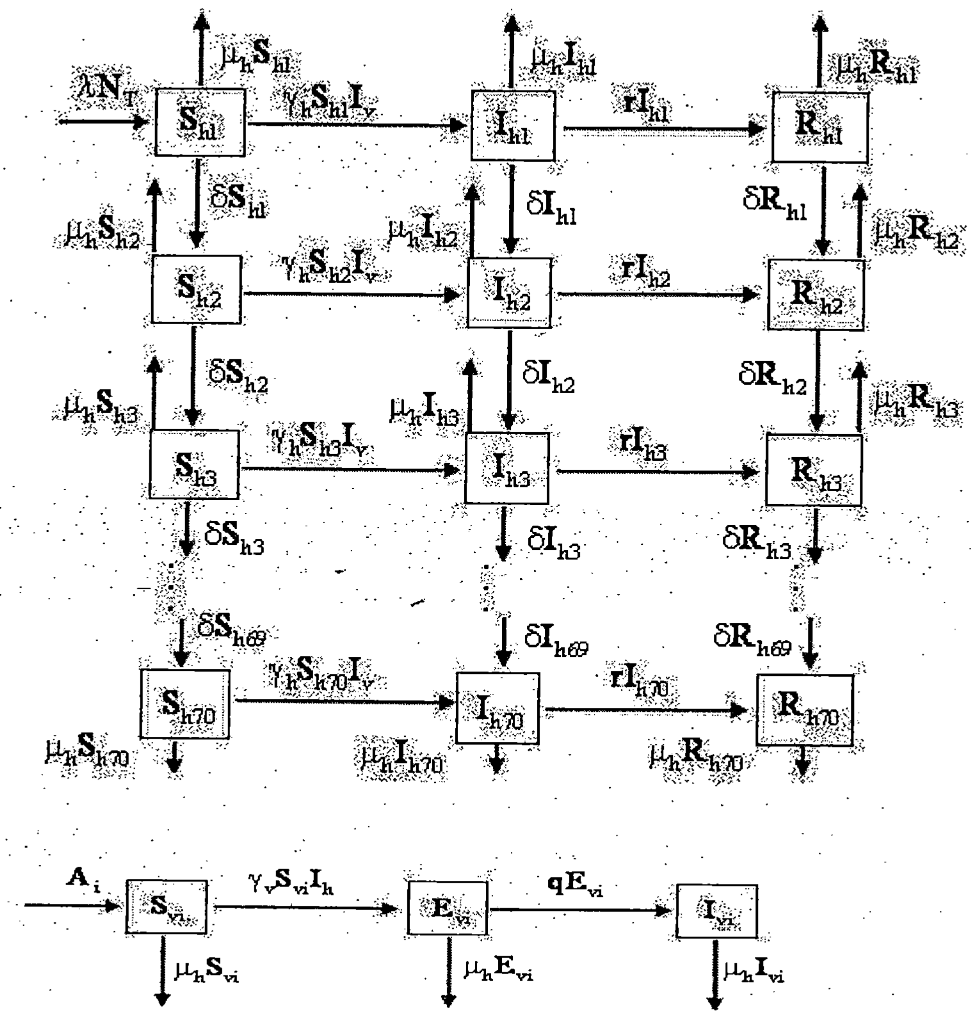


รูปที่ 3.37 ผลเฉลยสมการ (3.15)-(3.22) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสัดส่วนของยุงที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ในฤดูร้อนกับอัตราการถ่ายทอดเชื้อจากคนไปสู่ยุง ตามลำดับ $\mu_h = 1/(365\times 70)$ ต่อวัน , $\mu_v = 1/7$ ต่อวัน, $q = 1/3$ ต่อวัน, $\gamma_h = 0.00000000005$, $r = 1/30$ ต่อวัน, $N_T = 25,000$, $N_{v1} = 5,000$, $N_{v2} = 20,000$, $N_{v3} = 10,000$

บทที่ 4
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้ปวดข้อยุงลายตามกลุ่มอายุ ฤดูกาล และการวิเคราะห์

4.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคไข้ปวดข้อยุงลายตามกลุ่มอายุและฤดูกาล

ในบทนี้เราพัฒนาแบบจำลองโดยการวิเคราะห์อิทธิพลตามกลุ่มอายุและฤดูกาลร่วมกัน โดยมีแบบจำลองดังนี้



รูปที่ 4.1 แผนภาพแสดงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับโรคไข้ปวดข้อยุงลายตามกลุ่มอายุและฤดูกาล

นิยามตัวแปรและพารามิเตอร์ในแบบจำลอง ดังนี้

S_{hj}	แทนจำนวนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ กลุ่มอายุ j ปี โดยที่ j=1 แทนกลุ่มอายุ 0-1 ปี j=2 แทนกลุ่มอายุ 1-2 ปี j=3 แทนกลุ่มอายุ 3-4 ปี ... j=70 แทนกลุ่มอายุ 69-70 ปี
I_{hj}	แทนจำนวนคนที่ติดเชื้อ กลุ่มอายุ j ปี โดยที่ j=1 แทนกลุ่มอายุ 0-1 ปี j=2 แทนกลุ่มอายุ 1-2 ปี j=3 แทนกลุ่มอายุ 3-4 ปี ... j=70 แทนกลุ่มอายุ 69-70 ปี
R_{hj}	แทนจำนวนคนฟื้นไข้ กลุ่มอายุ j ปี โดยที่ j=1 แทนกลุ่มอายุ 0-1 ปี j=2 แทนกลุ่มอายุ 1-2 ปี j=3 แทนกลุ่มอายุ 3-4 ปี ... j=70 แทนกลุ่มอายุ 69-70 ปี
I_h	แทนจำนวนคนที่ติดเชื้อทุกกลุ่มอายุ โดยที่ $I_h = I_{h1} + I_{h2} + \ldots + I_{h70}$
S_{vi}	แทนจำนวนยุงที่ไวต่อการติดเชื้อ โดยที่ i=1 แทนยุงที่ไวต่อการติดเชื้อ ในฤดูหนาว

	i=2 แทนยุงที่ไวต่อการติดเชื้อ ในฤดูฝน i=3 แทนยุงที่ไวต่อการติดเชื้อ ในฤดูร้อน
E_{vi}	แทนจำนวนยุงที่มีเชื้อและอยู่ในระยะฟักเชื้อ i=1 แทนยุงที่มีที่มีเชื้อและอยู่ในระยะฟักเชื้อในฤดูหนาว i=2 แทนยุงที่มีเชื้อและอยู่ในระยะฟักเชื้อในฤดูฝน i=3 แทนยุงที่มีเชื้อและอยู่ในระยะฟักเชื้อในฤดูร้อน
I_{vi}	แทนจำนวนยุงที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ โดยที่ i=1 แทนยุงยุงที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ในฤดูหนาว i=2 แทนยุงที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ในฤดูฝน i=3 แทนยุงที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ ในฤดูร้อน
I_v	แทนจำนวนยุงที่สามารถถ่ายทอดเชื้อได้ทุกฤดู โดยที่ $I_v = I_{v1} + I_{v2} + I_{v3}$
μ_h	แทนอัตราการตายของประชากรคน
μ_v	แทนอัตราการตายของประชากรยุง
λ	แทนอัตราการเกิดของประชากรคน
γ_h	แทนอัตราการถ่ายทอดเชื้อจากยุงไปยังคน
γ_v	แทนอัตราการถ่ายทอดเชื้อจากคนไปยังยุง
N_T	แทนจำนวนประชากรคนทั้งหมด
N_{vi}	แทนจำนวนประชากรยุงในฤดู I i=1 แทนยุงในฤดูหนาว i=2 แทนยุงในฤดูฝน i=3 แทนยุงในฤดูร้อน
δ	แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงที่คนจากกลุ่มอายุที่ j ปี ไปเป็นกลุ่มอายุที่ j+1 ปี
r	แทนอัตราการฟื้นไข้ของประชากรคน
q	แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของยุงในช่วงฟักเชื้อไปเป็นช่วงที่สามารถ

	ถ่ายทอดเชื้อได้
A_i	แทนจำนวนยุง (คงที่) โดยที่ i=1 แทนจำนวนยุง ในฤดูหนาว i=2 แทนจำนวนยุง ในฤดูฝน i=3 แทนจำนวนยุง ในฤดูร้อน

จากแผนภาพข้างต้น เราสามารถเขียนระบบสมการได้ดังนี้

$$\frac{dS_{h1}}{dt} = \lambda N_T - ((\mu_h + \delta) + \gamma_h I_v) S_{h1}$$

$$\frac{dI_{h1}}{dt} = \gamma_h S_{h1} I_v - (\mu_h + \delta + r) I_{h1}$$

$$\frac{dR_{h1}}{dt} = r I_{h1} - (\mu_h + \delta) R_{h1}$$

$$\frac{dS_{h2}}{dt} = \delta S_{h1} - ((\mu_h + \delta) + \gamma_h I_v) S_{h2}$$

$$\frac{dI_{h2}}{dt} = \delta I_{h1} + \gamma_h S_{h2} I_v - (\mu_h + \delta + r) I_{h2}$$

$$\frac{dR_{h2}}{dt} = r I_{h2} + \delta R_{h1} - (\mu_h + \delta) R_{h2}$$

$$\frac{dS_{h3}}{dt} = \delta S_{h2} - ((\mu_h + \delta) + \gamma_h I_v) S_{h3}$$

$$\frac{dI_{h3}}{dt} = \delta I_{h2} + \gamma_h S_{h3} I_v - (\mu_h + \delta + r) I_{h3}$$

$$\frac{dR_{h3}}{dt} = r I_{h3} + \delta R_{h2} - (\mu_h + \delta) R_{h3}$$

$$\frac{dS_{h69}}{dt} = \delta S_{h68} - ((\mu_h + \delta) + \gamma_h I_v) S_{h69} \qquad (4.1)$$

$$\frac{dI_{h69}}{dt} = \delta I_{h68} + \gamma_h S_{h69} I_v - (\mu_h + \delta + r) I_{h69}$$

$$\frac{dR_{h69}}{dt} = rI_{h69} + \delta R_{h68} - (\mu_h + \delta)R_{h69}$$

$$\frac{dS_{h70}}{dt} = \delta S_{h69} - (\mu_h + \gamma_h I_v)S_{h70}$$

$$\frac{dI_{h70}}{dt} = \delta I_{h69} + \gamma_h S_{h70} I_v - (\mu_h + r)I_{h70}$$

$$\frac{dR_{h70}}{dt} = rI_{h70} + \delta R_{h69} - \mu_h R_{h70}$$

$$\frac{dS_{v1}}{dt} = A_1 - (\gamma_v I_h + \mu_v)S_{v1}$$

$$\frac{dE_{v1}}{dt} = \gamma_v S_{v1} I_h - (\mu_v + q)E_{v1}$$

$$\frac{dI_{v1}}{dt} = qE_{v1} - \mu_v I_{v1}$$

$$\frac{dS_{v2}}{dt} = A_2 - (\gamma_v I_h + \mu_v)S_{v2}$$

$$\frac{dE_{v2}}{dt} = \gamma_v S_{v2} I_h - (\mu_v + q)E_{v2}$$

$$\frac{dI_{v2}}{dt} = qE_{v2} - \mu_v I_{v2}$$

$$\frac{dS_{v3}}{dt} = A_3 - (\gamma_v I_h + \mu_v)S_{v3}$$

$$\frac{dE_{v3}}{dt} = \gamma_v S_{v3} I_h - (\mu_v + q)E_{v3}$$

$$\frac{dI_{v3}}{dt} = qE_{v3} - \mu_v I_{v3}$$

พิจารณาสมการของกลุ่มคนที่ไวต่อการติดเชื้อกลุ่มอายุต่างๆ มีดังนี้

$$\frac{dS_{h1}}{dt} = \lambda N_T - ((\mu_h + \delta) + \gamma_h I_v)S_{h1}$$

$$\frac{dS_{h2}}{dt} = \delta S_{h1} - ((\mu_h + \delta) + \gamma_h I_v)S_{h2}$$

$$\frac{dS_{h3}}{dt} = \delta S_{h2} - ((\mu_h + \delta) + \gamma_h I_v)S_{h3}$$

.

.

$$\frac{dS_{h69}}{dt} = \delta S_{h68} - ((\mu_h + \delta) + \gamma_h I_v)S_{h69}$$
$$\frac{dS_{h70}}{dt} = \delta S_{h69} - (\mu_h + \gamma_h I_v)S_{h70}$$

นั่นคือได้ความสัมพันธ์ของสมการในรูปทั่วไป ดังนี้

$$\frac{dS_{h1}}{dt} = \lambda N_T - ((\mu_h + \delta) + \gamma_h I_v)S_{h1}$$
$$\frac{dS_{hj}}{dt} = \delta S_{h(j-1)} - ((\mu_h + \delta) + \gamma_h I_v)S_{hj}, \qquad \text{โดยที่} \quad j=2,3,\ldots,69$$
$$\frac{dS_{h70}}{dt} = \delta S_{h69} - (\mu_h + \gamma_h I_v)S_{h70}$$

พิจารณากลุ่มของคนที่ติดเชื้อ กลุ่มอายุต่างๆ

$$\frac{dI_{h1}}{dt} = \gamma_h S_{h1} I_v - (\mu_h + \delta + r)I_{h1}$$
$$\frac{dI_{h2}}{dt} = \delta I_{h1} + \gamma_h S_{h2} I_v - (\mu_h + \delta + r)I_{h2}$$
$$\frac{dI_{h3}}{dt} = \delta I_{h2} + \gamma_h S_{h3} I_v - (\mu_h + \delta + r)I_{h3}$$

.

.

.

$$\frac{dI_{h69}}{dt} = \delta I_{h68} + \gamma_h S_{h69} I_v - (\mu_h + \delta + r)I_{h69}$$
$$\frac{dI_{h70}}{dt} = \delta I_{h69} + \gamma_h S_{h70} I_v - (\mu_h + r)I_{h70}$$

นั่นคือนั่นคือได้ความสัมพันธ์ของสมการในรูปทั่วไป ดังนี้

$$\frac{dI_{h1}}{dt} = \gamma_h S_{h1} I_v - (\mu_h + \delta + r) I_{h1}$$

$$\frac{dI_{hj}}{dt} = \delta I_{h(j-1)} + \gamma_h S_{hj} I_v - (\mu_h + \delta + r) I_{hj} \qquad \text{โดยที่} \quad j=2,3,\ldots,69$$

$$\frac{dI_{h70}}{dt} = \delta I_{h69} + \gamma_h S_{h70} I_v - (\mu_h + r) I_{h70}$$

พิจารณากลุ่มคนฟื้นไข้ ตามกลุ่มอายุต่างๆ

$$\frac{dR_{h1}}{dt} = rI_{h1} - (\mu_h + \delta) R_{h1}$$

$$\frac{dR_{h2}}{dt} = rI_{h2} + \delta R_{h1} - (\mu_h + \delta) R_{h2}$$

$$\frac{dR_{h3}}{dt} = rI_{h3} + \delta R_{h2} - (\mu_h + \delta) R_{h3}$$

.

.

.

$$\frac{dR_{h69}}{dt} = rI_{h69} + \delta R_{h68} - (\mu_h + \delta) R_{h69}$$

$$\frac{dR_{h70}}{dt} = rI_{h70} + \delta R_{h69} - \mu_h R_{h70}$$

นั่นคือได้ความสัมพันธ์ของสมการในรูปทั่วไป ดังนี้

$$\frac{dR_{h1}}{dt} = rI_{h1} - (\mu_h + \delta) R_{h1}$$

$$\frac{dR_{hj}}{dt} = rI_{hj} + \delta R_{h(j-1)} - (\mu_h + \delta) R_{hj} \qquad \text{โดยที่} \quad j=2,3,\ldots,69$$

$$\frac{dR_{h70}}{dt} = rI_{h70} + \delta R_{h69} - \mu_h R_{h70}$$

โดยที่มีเงื่อนไข คือ $N_T = S_{hj} + I_{hj} + R_{hj},\ j = 1,2,..,70,\ \ N_{vi} = S_{vi} + E_{vi} + I_{vi}$ และ

$$N_v = N_{v1} + N_{v2} + N_{v3},\ \ I_v = I_{v1} + I_{v2} + I_{v3}.$$

เราจะได้รูปแบบทั่วไปของระบบสมการดังนี้

$$\frac{dS_{h1}}{dt} = \lambda N_T - ((\mu_h + \delta) + \gamma_h I_v) S_{h1}$$

$$\frac{dI_{h1}}{dt} = \gamma_h S_{h1} I_v - (\mu_h + \delta + r) I_{h1}$$

$$\frac{dR_{h1}}{dt} = r I_{h1} - (\mu_h + \delta) R_{h1}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dS_{hj}}{dt} &= \delta S_{h(j-1)} - ((\mu_h + \delta) + \gamma_h I_v) S_{hj}, \\ \frac{dI_{hj}}{dt} &= \delta I_{h(j-1)} + \gamma_h S_{hj} I_v - (\mu_h + \delta + r) I_{hj}, \\ \frac{dR_{hj}}{dt} &= r I_{hj} + \delta R_{h(j-1)} - (\mu_h + \delta) R_{hj}, \end{aligned}\right\} \quad j = 2,3,4,\ldots,69, \qquad (4.2)$$

$$\frac{dS_{h70}}{dt} = \delta S_{h69} - (\mu_h + \gamma_h I_v) S_{h70}$$

$$\frac{dI_{h70}}{dt} = \delta I_{h69} + \gamma_h S_{h70} I_v - (\mu_h + r) I_{h70}$$

$$\frac{dR_{h70}}{dt} = r I_{h70} + \delta R_{h69} - \mu_h R_{h70}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dS_{vi}}{dt} &= A_i - (\gamma_v I_h + \mu_v) S_{vi}, \\ \frac{dE_{vi}}{dt} &= \gamma_v S_{vi} I_h - (\mu_v + q) E_{vi}, \\ \frac{dI_{vi}}{dt} &= q E_{vi} - \mu_v I_{vi} \end{aligned}\right\} \quad i = 1,2,3$$

การตั้งสมมติฐานให้ประชากรแต่ละกลุ่มทั้งหมดคงที่ เราจะได้ว่า

$$\frac{dN_T}{dt} = \frac{dN_{v1}}{dt} = \frac{dN_{v2}}{dt} = \frac{dN_{v3}}{dt} = 0$$

i) $\dfrac{dN_T}{dt} = \dfrac{dS_{hj}}{dt} + \dfrac{dI_{hj}}{dt} + \dfrac{dR_{hj}}{dt}$ โดยที่ j=1,2,…,70

$$= \lambda N_T - \mu_h N_T$$

$$= (\lambda - \mu_h) N_T$$

ดังนั้น $\lambda = \mu_h$

แสดงว่าอัตราการเกิดของประชากรคนเท่ากับอัตราการตายของประชากรคน

ii) $$\frac{dN_{v1}}{dt} = \frac{dS_{v1}}{dt} + \frac{dE_{v1}}{dt} + \frac{dI_{v1}}{dt}$$

$$= A_1 - (\gamma_v I_h + \mu_v) S_{v1} + \gamma_v S_{v1} I_h - (\mu_v + q) E_{v1} + qE_{v1} - \mu_v I_{v1}$$

$$= A_1 - \mu_v S_{v1} - \mu_v E_{v1} - \mu_v I_{v1}$$

$$= A_1 - \mu_v N_{v1}$$

ดังนั้น $A_1 - \mu_v N_{v1} = 0$; $N_{v1} = \dfrac{A_1}{\mu_v}$

iii) $$\frac{dN_{v2}}{dt} = \frac{dS_{v2}}{dt} + \frac{dE_{v2}}{dt} + \frac{dI_{v2}}{dt}$$

$$= A_2 - (\gamma_v I_h + \mu_v) S_{v2} + \gamma_v S_{v2} I_h - (\mu_v + q) E_{v2} + qE_{v2} - \mu_v I_{v2}$$

$$= A_2 - \mu_v S_{v2} - \mu_v E_{v2} - \mu_v I_{v2}$$

$$= A_2 - \mu_v N_{v2}$$

ดังนั้น $A_2 - \mu_v N_{v2} = 0, \qquad N_{v2} = \dfrac{A_2}{\mu_v}$

iv) $$\frac{dN_{v3}}{dt} = \frac{dS_{v3}}{dt} + \frac{dE_{v3}}{dt} + \frac{dI_{v3}}{dt}$$

$$= A_3 - (\gamma_v I_h + \mu_v)S_{v3} + \gamma_v S_{v3} I_h - (\mu_v + q)E_{v3} + qE_{v3} - \mu_v I_{v3}$$

$$= A_3 - \mu_v S_{v3} - \mu_v E_{v3} - \mu_v I_{v3}$$

$$= A_3 - \mu_v N_{v3}$$

ดังนั้น $A_3 - \mu_v N_{v3} = 0, \qquad N_{v3} = \dfrac{A_3}{\mu_v}$

เราลดจำนวนสมการในระบบสมการ (4.2) ลงโดยการกำหนดตัวแปรใหม่ดังนี้

$$\overline{S_{h1}} = \frac{S_{h1}}{N_T}, \overline{S_{h2}} = \frac{S_{h2}}{N_T}, \ldots, \overline{S_{h70}} = \frac{S_{h70}}{N_T}, \ \overline{I_{h1}} = \frac{I_{h1}}{N_T}, \overline{I_{h2}} = \frac{I_{h2}}{N_T}, \ldots, \overline{I_{h70}} = \frac{I_{h70}}{N_T},$$

$$\overline{R_{h1}} = \frac{R_{h1}}{N_T}, \overline{R_{h2}} = \frac{R_{h2}}{N_T}, \ldots, \overline{R_{h70}} = \frac{R_{h70}}{N_T}, \ \overline{S_{vi}} = \frac{S_{vi}}{N_{vi}}, \ \overline{E_{vi}} = \frac{E_{vi}}{N_{vi}} \text{ and } \overline{I_{vi}} = \frac{I_{vi}}{N_{vi}}$$ เมื่อ $i = 1,2,3$.

และ $\mu_h + \delta = \sigma_1, \mu_h + \delta + r = \sigma_2, \mu_h + r = \sigma_3, \mu_v + q = \sigma_4, \gamma_h N_v = \varepsilon_1, \gamma_v N_h = \varepsilon_2$.

นั่นคือ

$$\overline{S_{h1}}+\overline{I_{h1}}+\overline{R_{h1}}+\ldots+\overline{S_{h70}}+\overline{I_{h70}}+\overline{R_{h70}}=1 \quad , \ \overline{S_{v1}}+\overline{E_{v1}}+\overline{I_{v1}}=1,\ \overline{S_{v2}}+\overline{E_{v2}}+\overline{I_{v2}}=1,$$

$$\overline{S_{v3}}+\overline{E_{v3}}+\overline{I_{v3}}=1$$

จะได้ระบบสมการใหม่ดังนี้

$$\frac{d\overline{S_{h1}}}{dt}=\mu_h-(\sigma_1+\varepsilon_1\overline{I_v})\overline{S_{h1}}$$

$$\frac{d\overline{I_{h1}}}{dt}=\varepsilon_1\overline{S_{h1}}\overline{I_v}-\sigma_2\overline{I_{h1}}$$

$$\frac{d\overline{R_{h1}}}{dt}=r\overline{I_{h1}}-\sigma_1\overline{R_{h1}}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\overline{S_{hj}}}{dt}&=\delta\overline{S_{h(j-1)}}-(\sigma_1+\varepsilon_1\overline{I_v})\overline{S_{hj}},\\ \frac{d\overline{I_{hj}}}{dt}&=\delta\overline{I_{h(j-1)}}+\varepsilon_1\overline{S_{hj}}\overline{I_v}-\sigma_2\overline{I_{hj}},\\ \frac{d\overline{R_{hj}}}{dt}&=r\overline{I_{hj}}+\delta\overline{R_{h(j-1)}}-\sigma_1\overline{R_{hj}},\end{aligned}\right\}\quad j=2,3,\ldots,69, \qquad (4.3)$$

$$\frac{d\overline{S_{h70}}}{dt}=\delta\overline{S_{h69}}-(\mu_h+\varepsilon_1\overline{I_v})\overline{S_{h70}}$$

$$\frac{d\overline{I_{h70}}}{dt}=\delta\overline{I_{h69}}+\varepsilon_1\overline{S_{h70}}\overline{I_v}-\sigma_3\overline{I_{h70}}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\overline{E_{vi}}}{dt}&=\varepsilon_2(1-\overline{I_{vi}})\overline{I_h}-(\varepsilon_2\overline{I_h}+\sigma_4)\overline{E_{vi}},\\ \frac{d\overline{I_{vi}}}{dt}&=q\overline{E_{vi}}-\mu_v\overline{I_{vi}}\end{aligned}\right\}\quad i=1,2,3$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$\overline{R_{h70}} = 1 - \overline{S_{h1}} - \overline{I_{h1}} - \overline{S_{h2}} - \overline{I_{h2}} - \ldots \overline{S_{h70}} - \overline{I_{h70}}\ ,\ \overline{S_{vi}} = 1 - \overline{E_{vi}} - \overline{I_{vi}}$$

4.2 ผลการวิเคราะห์แบบจำลอง

จุดสมดุล $(S^*_{h1}, I^*_{h1}, R^*_{h1}, S^*_{h2}, I^*_{h2}, R^*_{h3}, \ldots, S^*_{h70}, I^*_{h70}, E^*_{v1}, I^*_{v1}, E^*_{v2}, I^*_{v2}, E^*_{v3}, I^*_{v3})$ ได้จากการกำหนดให้ด้าน

ขวามือของแต่ละสมการในระบบสมการ (4.3) เท่ากับ 0

$$\mu_h - (\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v) S^*_{h1} = 0$$

$$\varepsilon_1 S^*_{h1} I^*_v - \sigma_2 I^*_{h1} = 0$$

$$r I^*_{h1} - \sigma_1 R^*_{h1} = 0$$

$$\delta S^*_{h(j-1)} - (\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v) S^*_{hj} = 0, \quad \text{โดยที่} \quad j=2,3,\ldots,69$$

$$\delta I^*_{h(j-1)} + \varepsilon_1 S^*_{hj} I^*_v - \sigma_2 I^*_{hj} = 0 \quad \text{โดยที่} \quad j=2,3,\ldots,69 \qquad (4.4)$$

$$r I^*_{hj} + \delta R^*_{h(j-1)} - \sigma_1 R^*_{hj} = 0 \quad \text{โดยที่} \quad j=2,3,\ldots,69$$

$$\delta S^*_{h69} - (\mu_h + \varepsilon_1 I^*_v) S^*_{h70} = 0$$

$$\delta I^*_{h69} + \varepsilon_1 S^*_{h70} I^*_v - \sigma_3 I^*_{h70} = 0$$

$$\varepsilon_2(1-I_{vi}^*)I_h^* - (\varepsilon_2 I_h^* + \sigma_4)E_{vi}^* = 0$$ เมื่อ i=1,2,3

$$qE_{vi}^* - \mu_v I_{vi}^* = 0$$ เมื่อ i=1,2,3

โดยที่ $I_v^* = I_{v1}^* + I_{v2}^* + I_{v3}^*$, $I_h^* = I_{h1}^* + I_{h2}^* + \ldots + I_{70}^*$

จากสมการแรกของระบบสมการ (4.4), จะได้ว่า

$$\mu_h - (\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)S_{h1}^* = 0$$

$$S_{h1}^* = \frac{\mu_h}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*}$$

จากสมการที่ 2 ของระบบสมการที่ (4.4), จะได้ว่า

$$\varepsilon_1 S_{h1}^* I_v^* - \sigma_2 I_{h1}^* = 0$$

$$I_{h1}^* = \frac{\varepsilon_1 S_{h1}^* I_v^*}{\sigma_2}$$

$$= \frac{\varepsilon_1 I_v^*}{\sigma_2} \cdot S_{h1}^*$$

$$= \frac{\varepsilon_1 I_v^*}{\sigma_2} \cdot \frac{\mu_h}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*}$$

$$= \frac{\mu_h \varepsilon_1 I_v^*}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)}$$

จากสมการที่ 3 ของระบบสมการ (4.4), จะได้ว่า

$$rI_{h1}^{*} - \sigma_1 R_{h1}^{*} = 0$$

$$R_{h1}^{*} = \frac{rI_{h1}^{*}}{\sigma_1}$$

$$= \frac{r}{\sigma_1} \cdot \frac{\mu_h \varepsilon_1 I_v^{*}}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*})}$$

$$= \frac{\mu_h r \varepsilon_1 I_v^{*}}{\sigma_1 \sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*})}$$

จากสมการที่ 4 ของระบบสมการ (4.4) เมื่อ j=2,3,...,69 จะได้ว่า

$$\delta S_{h(j-1)}^{*} - (\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*}) S_{hj}^{*} = 0,$$

$$S_{hj}^{*} = \frac{\delta S_{h(j-1)}^{*}}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*}}$$

นั่นคือ

$$S_{h2}^{*} = \frac{\delta S_{h1}^{*}}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*}},\ S_{h3}^{*} = \frac{\delta S_{h2}^{*}}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*}},\ S_{h4}^{*} = \frac{\delta S_{h3}^{*}}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*}}, \ldots, S_{h69}^{*} = \frac{\delta S_{h68}^{*}}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*}}$$

จากสมการที่ 5 ของระบบสมการ (4.4) , เมื่อ j=2,3,...,69 จะได้ว่า

$$\delta I^{*}_{h(j-1)} + \varepsilon_1 S^{*}_{hj} I^{*}_{v} - \sigma_2 I^{*}_{hj} = 0$$

$$I^{*}_{hj} = \frac{\delta I^{*}_{h(j-1)}}{\sigma_2} + \frac{\varepsilon_1 S^{*}_{hj} I^{*}_{v}}{\sigma_2}$$ นั่นคือ

$$I^{*}_{h2} = \frac{\delta I^{*}_{h1}}{\sigma_2} + \frac{\varepsilon_1 S^{*}_{h2} I^{*}_{v}}{\sigma_2},\ I^{*}_{h3} = \frac{\delta I^{*}_{h2}}{\sigma_2} + \frac{\varepsilon_1 S^{*}_{h3} I^{*}_{v}}{\sigma_2},\ \ldots,\ I^{*}_{h69} = \frac{\delta I^{*}_{h68}}{\sigma_2} + \frac{\varepsilon_1 S^{*}_{h69} I^{*}_{v}}{\sigma_2}$$

จากสมการที่ 6 ของระบบสมการ (4.4) , เมื่อ j=2,3,...,69 จะได้ว่า

$$rI^{*}_{hj} + \delta R^{*}_{h(j-1)} - \sigma_1 R^{*}_{hj} = 0$$

$$R^{*}_{hj} = \frac{rI^{*}_{hj}}{\sigma_1} + \frac{\delta R^{*}_{h(j-1)}}{\sigma_1}$$ นั่นคือ

$$R^{*}_{h2} = \frac{rI^{*}_{h2}}{\sigma_1} + \frac{\delta R^{*}_{h1}}{\sigma_1},\ R^{*}_{h3} = \frac{rI^{*}_{h3}}{\sigma_1} + \frac{\delta R^{*}_{h2}}{\sigma_1},\ \ldots,\ R^{*}_{h69} = \frac{rI^{*}_{h69}}{\sigma_1} + \frac{\delta R^{*}_{h68}}{\sigma_1}$$

จากสมการที่ 7 ของระบบสมการ (4.4) , เมื่อ j=2,3,...,69 จะได้ว่า

$$\delta S^{*}_{h69} - (\mu_h + \varepsilon_1 I^{*}_{v}) S^{*}_{h70} = 0$$
$$S^{*}_{h70} = \frac{\delta S^{*}_{h69}}{\mu_h + \varepsilon_1 I^{*}_{v}}$$

จากสมการที่ 8 ของระบบสมการ (4.4) จะได้ว่า

$$\delta I^{*}_{h69} + \varepsilon_1 S^{*}_{h70} I^{*}_{v} - \sigma_3 I^{*}_{h70} = 0$$

$$I_{h70}^{*} = \frac{\delta I_{h69}^{*}}{\sigma_3} + \frac{\varepsilon_1 S_{h70}^{*} I_v^{*}}{\sigma_3}$$

$$= \frac{\delta I_{h69}^{*}}{\sigma_3} + \frac{\varepsilon_1 I_v^{*}}{\sigma_3} \cdot \frac{\delta S_{h69}^{*}}{\mu_h + \varepsilon_1 I_v^{*}}$$

$$= \frac{\delta I_{h69}^{*}}{\sigma_3} + \frac{\varepsilon_1 \delta S_{h69}^{*} I_v^{*}}{\sigma_3(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^{*})}$$

จากสมการที่ 9 ของระบบสมการ (4.4) เมื่อ i=1,2,3 จะได้ว่า

$$\varepsilon_2(1 - I_{vi}^{*}) I_h^{*} - (\varepsilon_2 I_h^{*} + \sigma_4) E_{vi}^{*} = 0$$

$$(\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^{*}) E_{vi}^{*} = \varepsilon_2 (1 - I_{vi}^{*}) I_h^{*}$$

$$E_{vi}^{*} = \frac{\varepsilon_2 (1 - I_{vi}^{*}) I_h^{*}}{\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^{*}}$$

นั่นคือ

$$E_{v1}^{*} = \frac{\varepsilon_2 (1 - I_{v1}^{*}) I_h^{*}}{\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^{*}}, E_{v2}^{*} = \frac{\varepsilon_2 (1 - I_{v2}^{*}) I_h^{*}}{\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^{*}}, E_{v3}^{*} = \frac{\varepsilon_2 (1 - I_{v3}^{*}) I_h^{*}}{\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^{*}}$$

จากสมการที่ 10 ของระบบสมการ (4.4) เมื่อ i=1,2,3 จะได้ว่า

$$q E_{vi}^{*} - \mu_v I_{vi}^{*} = 0$$

$$I_{vi}^* = \frac{qE_{vi}^*}{\mu_v}$$

$$= \frac{q}{\mu_v} \cdot \frac{\varepsilon_2(1 - I_{vi}^*)I_h^*}{\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^*}$$

$$= \frac{q\varepsilon_2(1 - I_{vi}^*)I_h^*}{\mu_v(\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^*)}$$

นั่นคือ

$$I_{v1}^* = \frac{q\varepsilon_2(1 - I_{v1}^*)I_h^*}{\mu_v(\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^*)},\ I_{v2}^* = \frac{q\varepsilon_2(1 - I_{v2}^*)I_h^*}{\mu_v(\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^*)},\ I_{v3}^* = \frac{q\varepsilon_2(1 - I_{v3}^*)I_h^*}{\mu_v(\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^*)}$$

นั่นคือ เรามีคำตอบของระบบสมการดังนี้

$$S_{h1}^* = \frac{\mu_h}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*} \tag{4.5}$$

$$I_{h1}^* = \frac{\mu_h \varepsilon_1 I_v^*}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)} \tag{4.6}$$

$$R_{h1}^* = \frac{\mu_h r \varepsilon_1 I_v^*}{\sigma_1 \sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)} \tag{4.7}$$

$$S_{hj}^* = \frac{\delta S_{h(j-1)}^*}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*} \quad \text{โดยที่ } j=2,3,4,\ldots,69 \tag{4.8}$$

$$I_{hj}^* = \frac{\delta I_{h(j-1)}^*}{\sigma_2} + \frac{\varepsilon_1 S_{hj}^* I_v^*}{\sigma_2} \quad \text{โดยที่ } j=2,3,4,\ldots,69 \tag{4.9}$$

$$R_{hj}^* = \frac{r I_{hj}^*}{\sigma_1} + \frac{\delta R_{h(j-1)}^*}{\sigma_1} \quad \text{โดยที่ } j=2,3,4,\ldots,69 \tag{4.10}$$

$$S_{h70}^* = \frac{\delta S_{h69}^*}{\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*} \tag{4.11}$$

$$I_{h70}^* = \frac{\delta I_{h69}^*}{\sigma_3} + \frac{\varepsilon_1 S_{h70}^* I_v^*}{\sigma_3} \tag{4.12}$$

$$E_{vi}^{*} = \frac{\varepsilon_2(1-I_{vi}^{*})I_h^{*}}{\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^{*}} \quad \text{โดยที่ } i=1,2,3 \qquad (4.13)$$

$$I_{vi}^{*} = \frac{q\varepsilon_2(1-I_{vi}^{*})I_h^{*}}{\mu_v(\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^{*})} \quad \text{โดยที่ } i=1,2,3 \qquad (4.14)$$

พิจารณาสมการ (4.8), เมื่อ j=2, 3, 4,..., 69

$$\begin{aligned} S_{h2}^{*} &= \frac{\delta S_{h1}^{*}}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*}} \\ &= \frac{\delta}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*}} \cdot \frac{\mu_h}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*}} \\ &= \frac{\delta \mu_h}{(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{h3}^{*} &= \frac{\delta S_{h2}^{*}}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*}} \\ &= \frac{\delta}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*}} \cdot \frac{\delta \mu_h}{(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*})^2} \\ &= \frac{\delta^2 \mu_h}{(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*})^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{h4}^{*} &= \frac{\delta S_{h3}^{*}}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*}} \\ &= \frac{\delta}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*}} \cdot \frac{\delta^2 \mu_h}{(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*})^3} \\ &= \frac{\delta^3 \mu_h}{(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^{*})^4} \end{aligned}$$

$$S_{h69}^{*}=\frac{\delta S_{h68}^{*}}{\sigma_1+\varepsilon_1 I_v^{*}}$$

$$=\frac{\delta^{68}\mu_h}{(\sigma_1+\varepsilon_1 I_v^{*})^{69}}$$

$$S_{h70}^{*}=\frac{\delta S_{h69}^{*}}{\mu_h+\varepsilon_1 I_v^{*}}$$

$$=\frac{\delta}{\mu_h+\varepsilon_1 I_v^{*}}\cdot\frac{\delta^{68}\mu_h}{(\sigma_1+\varepsilon_1 I_v^{*})^{69}}$$

$$=\frac{\delta^{69}\mu_h}{(\mu_h+\varepsilon_1 I_v^{*})(\sigma_1+\varepsilon_1 I_v^{*})^{69}}$$

พิจารณาจุดสมดุลของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ ของระบบสมการมีดังนี้

$$S_{h1}^{*}=\frac{\mu_h}{\sigma_1+\varepsilon_1 I_v^{*}}$$

$$S_{h2}^{*}=\frac{\delta\mu_h}{(\sigma_1+\varepsilon_1 I_v^{*})^{2}}$$

$$S_{h3}^{*}=\frac{\delta^{2}\mu_h}{(\sigma_1+\varepsilon_1 I_v^{*})^{3}}$$

$$S_{h4}^{*}=\frac{\delta^{3}\mu_h}{(\sigma_1+\varepsilon_1 I_v^{*})^{4}}$$

$$\vdots$$

$$S_{h69}^{*}=\frac{\delta^{68}\mu_h}{(\sigma_1+\varepsilon_1 I_v^{*})^{69}}$$

$$S^*_{h70} = \frac{\delta^{69}\mu_h}{(\mu_h + \varepsilon_1 I^*_v)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v)^{69}}$$

จะได้รูปแบบทั่วไปของจุดสมดุลสำหรับสัดส่วนของคนที่ไวต่อการติดเชื้อ คือ

$$S^*_{hj} = \begin{cases} \dfrac{\delta^{j-1}\mu_h}{(\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v)^j} & , j = 1,2,3,\ldots,69 \\ \dfrac{\delta^{69}\mu_h}{(\mu_h + \varepsilon_1 I^*_v)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v)^{69}} & , j = 70 \end{cases}$$

พิจารณาสมการ (4.9), เมื่อ j=2, 3, 4,..., 69

$$I^*_{hj} = \frac{\delta I^*_{h(j-1)}}{\sigma_2} + \frac{\varepsilon_1 S^*_{hj} I^*_v}{\sigma_2}$$

$$= \frac{\delta I^*_{h(j-1)}}{\sigma_2} + \frac{\varepsilon_1 I^*_v}{\sigma_2} \cdot \frac{\delta S^*_{h(j-1)}}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v}$$

$$= \frac{\delta I^*_{h(j-1)}}{\sigma_2} + \frac{\varepsilon_1 I^*_v \delta S^*_{h(j-1)}}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v)}$$

$$I^*_{h2} = \frac{\delta I^*_{h1}}{\sigma_2} + \frac{\varepsilon_1 I^*_v \delta S^*_{h1}}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v)}$$

$$= \frac{\delta}{\sigma_2} \cdot \frac{\mu_h \varepsilon_1 I^*_v}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v)} + \frac{\varepsilon_1 I^*_v \delta}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v)} \cdot \frac{\mu_h}{\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v}$$

$$= \frac{\mu_h \varepsilon_1 \delta I^*_v}{\sigma_2^2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v)} + \frac{\mu_h \varepsilon_1 I^*_v \delta}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v)^2}$$

$$= \mu_h \varepsilon_1 \delta I_v^* [\frac{1}{\sigma_2^2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)} + \frac{1}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^2}]$$

$$= \mu_h \varepsilon_1 \delta I_v^* (\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \varepsilon_1 I_v^*}{\sigma_2^2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^2})$$

$$= \frac{\mu_h \varepsilon_1 \delta I_v^*}{\sigma_2^2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^2} \cdot ((\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2)$$

$$I_{h3}^* = \frac{\delta I_{h2}^*}{\sigma_2} + \frac{\varepsilon_1 I_v^* \delta S_{h2}^*}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)}$$

$$= \frac{\delta}{\sigma_2} \cdot \mu_h \varepsilon_1 \delta I_v^* (\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \varepsilon_1 I_v^*}{\sigma_2^2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^2}) + \frac{\varepsilon_1 I_v^* \delta}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)} \cdot \frac{\delta \mu_h}{(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^2}$$

$$= \mu_h \varepsilon_1 \delta^2 I_v^* (\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \varepsilon_1 I_v^*}{\sigma_2^3(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^2}) + \frac{\mu_h \varepsilon_1 I_v^* \delta^2}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^3}$$

$$= \mu_h \varepsilon_1 \delta^2 I_v^* (\frac{((\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^2}{\sigma_2^3(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^3})$$

$$= \frac{\mu_h \varepsilon_1 \delta^2 I_v^*}{\sigma_2^3(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^3} \cdot (((\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^2)$$

$$I_{h4}^* = \frac{\delta I_{h3}^*}{\sigma_2} + \frac{\varepsilon_1 I_v^* \delta S_{h3}^*}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)}$$

$$= \frac{\delta}{\sigma_2} \cdot \mu_h \varepsilon_1 \delta^2 I_v^* (\frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \varepsilon_1 I_v^*)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^2}{\sigma_2^3(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^3}) + \frac{\varepsilon_1 I_v^* \delta}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)} \cdot \frac{\delta^2 \mu_h}{(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^3}$$

$$= \mu_h \varepsilon_1 \delta^3 I_v^* \left(\frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \varepsilon_1 I_v^*)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^2}{\sigma_2^4 (\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^3} \right) + \frac{\varepsilon_1 I_v^* \delta^3 \mu_h}{\sigma_2 (\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^4}$$

$$= \mu_h \varepsilon_1 \delta^3 I_v^* \left(\frac{((\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^2}{\sigma_2^4 (\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^3} \right) + \frac{\varepsilon_1 I_v^* \delta^3 \mu_h}{\sigma_2 (\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^4}$$

$$= \mu_h \varepsilon_1 \delta^3 I_v^* \left[\left(\frac{((\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^2}{\sigma_2^4 (\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^3} \right) + \frac{1}{\sigma_2 (\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^4} \right]$$

$$= \mu_h \varepsilon_1 \delta^3 I_v^* \cdot \frac{(((\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^2)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^3}{\sigma_2^4 (\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^4}$$

$$= \mu_h \varepsilon_1 \delta^3 I_v^* \cdot \frac{(((\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^2)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^3}{\sigma_2^4 (\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^4}$$

$$= \frac{\mu_h \varepsilon_1 \delta^3 I_v^*}{\sigma_2^4 (\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^4} \cdot ((((\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^2)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^3)$$

.

.

.

$$I_{h70}^* = \frac{\delta I_{h69}^*}{\sigma_3} + \frac{\varepsilon_1 S_{h70}^* I_v^*}{\sigma_3}$$

$$= \frac{\delta I_{h69}^*}{\sigma_3} + \frac{\delta^{69} \mu_h \varepsilon_1 I_v^*}{\sigma_3 (\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^{69}}$$

พิจารณาจุดสมดุลของสัดส่วนคนที่ติดเชื้อ ของระบบสมการมีดังนี้

$$I_{h1}^* = \frac{\mu_h \varepsilon_1 I_v^*}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)}$$

$$I_{h2}^* = \frac{\mu_h \varepsilon_1 \delta I_v^*}{\sigma_2^2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^2} \cdot ((\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2)$$

$$I_{h3}^* = \frac{\mu_h \varepsilon_1 \delta^2 I_v^*}{\sigma_2^3(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^3} \cdot (((\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^2)$$

$$I_{h4}^* = \frac{\mu_h \varepsilon_1 \delta^3 I_v^*}{\sigma_2^4(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^4} \cdot ((((\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^2)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^3)$$

.

.

.

$$I_{h69}^* = \frac{\mu_h \varepsilon_1 \delta^{68} I_v^*}{\sigma_2^{69}(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^{69}} \cdot ((\ldots(((\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^2)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^3)\ldots(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^{68})$$

$$I_{h70}^* = \frac{\delta I_{h69}^*}{\sigma_3} + \frac{\delta^{69} \mu_h \varepsilon_1 I_v^*}{\sigma_3(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^{69}}$$

จะได้รูปแบบทั่วไปของจุดสมดุลสำหรับสัดส่วนของคนที่ติดเชื้อ คือ

$$I^*_{hj} = \begin{cases} \dfrac{\mu_h \varepsilon_1 I^*_v}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v)}, & j=1 \\ \dfrac{\mu_h \varepsilon_1 \delta^{j-1} I^*_v}{\sigma_2^j(\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v)^j} \cdot (\prod_{k=1}^{j-1}((\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v) + \sigma_2^k))(\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v) + \sigma_2^{j-1}, & j = 2, \ldots, 69 \\ \dfrac{\delta I^*_{h69}}{\sigma_3} + \dfrac{\delta^{69} \mu_h \varepsilon_1 I^*_v}{\sigma_3(\mu_h + \varepsilon_1 I^*_v)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v)^{69}}, & j = 70 \end{cases}$$

พิจารณาสมการ (4.10), เมื่อ j=2, 3, 4,..., 69

จาก $R^*_{hj} = \dfrac{rI^*_{hj}}{\sigma_1} + \dfrac{\delta R^*_{h(j-1)}}{\sigma_1}$

เมื่อพิจารณาจุดสมดุลของสัดส่วนคนฟื้นไข้ จะได้รูปแบบทั่วไปของจุดสมดุลสำหรับสัดส่วนของคนที่ฟื้นไข้ คือ

$$R^*_{hj} = \begin{cases} \dfrac{\mu_h r \varepsilon_1 I^*_v}{\sigma_1 \sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v)}, & j=1 \\ \dfrac{rI^*_{hj}}{\sigma_1} + \dfrac{\delta R^*_{h(j-1)}}{\sigma_1}, & j = 2, \ldots, 69 \end{cases}$$

โดยที่

$$I^*_{hj} = \frac{\mu_h \varepsilon_1 \delta^{j-1} I^*_v}{\sigma_2^j(\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v)^j} \cdot (\prod_{k=1}^{j-1}((\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v) + \sigma_2^k))(\sigma_1 + \varepsilon_1 I^*_v) + \sigma_2^{j-1}, \qquad j = 2, \ldots, 69$$

พิจาณาสมการ (4.13) และ (4.14) เมื่อ i=1

$$E^*_{v1} = \frac{\varepsilon_2(1 - I^*_{v1}) I^*_h}{\sigma_4 + \varepsilon_2 I^*_h}$$

$$I^*_{v1} = \frac{qE^*_{v1}}{\mu_v}$$

$$= \frac{q}{\mu_v} \cdot \frac{\varepsilon_2 (1 - I_{v1}^*) I_h^*}{\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^*}$$

$$= \frac{q \varepsilon_2 (1 - I_{v1}^*) I_h^*}{\mu_v (\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^*)}$$

พิจาณาสมการ (4.13) และ (4.14) เมื่อ i=2

$$E_{v2}^* = \frac{\varepsilon_2 (1 - I_{v2}^*) I_h^*}{\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^*}$$

$$I_{v2}^* = \frac{q E_{v2}^*}{\mu_v}$$

$$= \frac{q}{\mu_v} \cdot \frac{\varepsilon_2 (1 - I_{v2}^*) I_h^*}{\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^*}$$

$$= \frac{q \varepsilon_2 (1 - I_{v2}^*) I_h^*}{\mu_v (\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^*)}$$

พิจาณาสมการ (4.13) และ (4.14) เมื่อ i=3

$$E_{v3}^* = \frac{\varepsilon_2 (1 - I_{v3}^*) I_h^*}{\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^*}$$

$$I_{v3}^* = \frac{q E_{v3}^*}{\mu_v}$$

$$= \frac{q}{\mu_v} \cdot \frac{\varepsilon_2 (1 - I_{v3}^*) I_h^*}{\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^*}$$

$$= \frac{q \varepsilon_2 (1 - I_{v3}^*) I_h^*}{\mu_v (\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^*)}$$

ผลเฉลยแรกของระบบสมการ (4.3) , คือ $I_v^* = I_{v1}^* = I_{v2}^* = I_{v3}^* = 0 \rightarrow I_h^* = I_{h1}^* = I_{h2}^* = \ldots = I_{h70}^* = 0$.

$S_{h1}^* = \frac{\mu_h}{\sigma_1}$, $I_{h1}^* = 0$, $E_{h1}^* = 0$,

$$S_{h2}^* = \frac{\delta\mu_h}{\sigma_1^2},\ I_{h2}^* = 0,\ E_{h2}^* = 0,$$

$$S_{h3}^* = \frac{\delta^2\mu_h}{\sigma_1^3},\ I_{h3}^* = 0,\ E_{h3}^* = 0,$$

.

.

.

$$S_{h69}^* = \frac{\delta^{68}\mu_h}{\sigma_1^{69}},\ I_{h69}^* = 0,\ E_{h69}^* = 0,$$

$$S_{h70}^* = \frac{\delta^{69}}{\sigma_1^{69}},\ I_{h70}^* = 0,$$

$$E_{v1}^* = 0,\ I_{v1}^* = 0,$$

$$E_{v2}^* = 0,\ I_{v1}^* = 0,$$

$$E_{v3}^* = 0,\ I_{v1}^* = 0$$

จากการวิเคราะห์เราจะได้ผลเฉลย $I_{v1}^* \neq 0,\ I_{v2}^* \neq 0, I_{v3}^* \neq 0$

$$S_{hj}^* = \begin{cases} \dfrac{\delta^{j-1}\mu_h}{(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^j} & ,j = 1,2,3,\ldots,69 \\ \dfrac{\delta^{69}\mu_h}{(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^{69}} & ,j = 70 \end{cases}, \tag{4.15}$$

$$I_{hj}^* = \begin{cases} \dfrac{\mu_h \varepsilon_1 I_v^*}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)} & ,\quad j = 1 \\ \dfrac{\mu_h \varepsilon_1 \delta^{j-1} I_v^*}{\sigma_2^j(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^j} \cdot \left(\prod_{k=1}^{j-1}((\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^k)\right)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^{j-1} & ,\quad j = 2,\ldots,69 \\ \dfrac{\delta I_{h69}^*}{\sigma_3} + \dfrac{\delta^{69}\mu_h \varepsilon_1 I_v^*}{\sigma_3(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^{69}} & ,\quad j = 70 \end{cases} \tag{4.16}$$

$$R_{hj}^{*}=\begin{cases}\dfrac{\mu_h r\varepsilon_1 I_v^{*}}{\sigma_1\sigma_2(\sigma_1+\varepsilon_1 I_v^{*})}, & j=1\\ \dfrac{rI_{hj}^{*}}{\sigma_1}+\dfrac{\delta R_{h(j-1)}^{*}}{\sigma_1}, & j=2,\ldots,69\end{cases} \tag{4.17}$$

$$E_{vi}^{*}=\frac{\varepsilon_2(1-I_{vi}^{*})I_h^{*}}{\sigma_4+\varepsilon_2 I_h^{*}}, \quad i=1,2,3 \tag{4.18}$$

$$I_{vi}^{*}=\frac{q\varepsilon_2(1-I_{vi}^{*})I_h^{*}}{\mu_v(\sigma_4+\varepsilon_2 I_h^{*})}, \quad i=1,2,3 \tag{4.19}$$

โดยที่ $I_v^{*}=I_{v1}^{*}+I_{v2}^{*}+I_{v3}^{*}$ และ $I_h^{*}=I_{h1}^{*}+I_{h2}^{*}+\ldots+I_{h70}^{*}$

1) จุดสมดุลสภาวะไร้โรค $I_{v1}^{*}=I_{v2}^{*}=I_{v3}^{*}=0$, จะได้ว่า

$$S_{h1}^{*}=\frac{\mu_h}{\sigma_1},\ I_{h1}^{*}=0,\ E_{h1}^{*}=0,$$

$$S_{h2}^{*}=\frac{\delta\mu_h}{\sigma_1^2},\ I_{h2}^{*}=0,\ E_{h2}^{*}=0,$$

$$S_{h3}^{*}=\frac{\delta^2\mu_h}{\sigma_1^3},\ I_{h3}^{*}=0,\ E_{h3}^{*}=0,$$

$$S_{h4}^{*}=\frac{\delta^3\mu_h}{\sigma_1^4},\ I_{h4}^{*}=0,\ E_{h4}^{*}=0,$$

.

.

.

$$S_{h69}^{*}=\frac{\delta^{68}\mu_h}{\sigma_1^{69}},\ I_{h69}^{*}=0,\ E_{h69}^{*}=0,$$

$$S_{h70}^{*}=\frac{\delta^{69}}{\sigma_1^{69}},\ I_{h70}^{*}=0,\ E_{v1}^{*}=0,\ I_{v1}^{*}=0,\ E_{v2}^{*}=0,\ I_{v2}^{*}=0,\ E_{v3}^{*}=0,\ I_{v3}^{*}=0$$

2) จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง $I_{v1}^*, I_{v2}^*, I_{v3}^* \neq 0$,

$$S_{hj}^* = \begin{cases} \dfrac{\delta^{j-1}\mu_h}{(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^j} & , j = 1,2,3,\ldots,69 \\ \dfrac{\delta^{69}\mu_h}{(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^{69}} & , j = 70 \end{cases},$$

$$I_{hj}^* = \begin{cases} \dfrac{\mu_h \varepsilon_1 I_v^*}{\sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)} & , \quad j = 1 \\ \dfrac{\mu_h \varepsilon_1 \delta^{j-1} I_v^*}{\sigma_2^j(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^j} \cdot \left(\prod_{k=1}^{j-1}((\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^k)\right)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*) + \sigma_2^{j-1} & , \quad j = 2, \ldots, 69 \\ \dfrac{\delta I_{h69}^*}{\sigma_3} + \dfrac{\delta^{69}\mu_h \varepsilon_1 I_v^*}{\sigma_3(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*)(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)^{69}} & ; \quad j = 70 \end{cases}$$

$$R_{hj}^* = \begin{cases} \dfrac{\mu_h r \varepsilon_1 I_v^*}{\sigma_1 \sigma_2(\sigma_1 + \varepsilon_1 I_v^*)} , & j = 1 \\ \dfrac{r I_{hj}^*}{\sigma_1} + \dfrac{\delta R_{h(j-1)}^*}{\sigma_1} , & j = 2, \ldots, 69 \end{cases}$$

$$E_{vi}^* = \frac{\varepsilon_2(1 - I_{vi}^*)I_h^*}{\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^*} , \quad i = 1,2,3$$

$$I_{vi}^* = \frac{q\varepsilon_2(1 - I_{vi}^*)I_h^*}{\mu_v(\sigma_4 + \varepsilon_2 I_h^*)} , \quad i = 1,2,3$$

กำหนดให้

$$X_1(\overline{S_{h1}}, \overline{I_{h1}}, \overline{R_{h1}}, \ldots, \overline{S_{h70}}, \overline{I_{h70}}, \overline{E_{v1}}, \overline{I_{v1}}, \overline{E_{v2}}, \overline{I_{v2}}, \overline{E_{v3}}, \overline{I_{v3}}) = \mu_h - (\sigma_1 + \varepsilon_1 \overline{I_v})\overline{S_{h1}}$$

$$\mu_h - (\sigma_1 + \varepsilon_1(\overline{I_{v1}} + \overline{I_{v2}} + \overline{I_{v3}}))\overline{S_{h1}}$$

$$X_2(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = \varepsilon_1\overline{S_{h1}}\overline{I_v} - \sigma_2\overline{I_{h1}}$$

$$= \varepsilon_1\overline{S_{h1}}(\overline{I_{v1}}+\overline{I_{v2}}+\overline{I_{v3}}) - \sigma_2\overline{I_{h1}}$$

$$X_3(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = r\overline{I_{h1}} - \sigma_1\overline{R_{h1}}$$

$$X_4(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = \delta\overline{S_{h1}} - (\sigma_1+\varepsilon_1(\overline{I_{v1}}+\overline{I_{v2}}+\overline{I_{v3}}))\overline{S_{h2}}$$

$$X_5(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = \delta\overline{I_{h1}} + \varepsilon_1\overline{S_{h2}}(\overline{I_{v1}}+\overline{I_{v2}}+\overline{I_{v3}}) - \sigma_2\overline{I_{h2}}$$

$$X_6(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = r\overline{I_{h2}} + \delta\overline{R_{h1}} - \sigma_1\overline{R_{h2}}$$

$$X_7(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = \delta\overline{S_{h2}} - (\sigma_1+\varepsilon_1(\overline{I_{v1}}+\overline{I_{v2}}+\overline{I_{v3}}))\overline{S_{h3}}$$

$$X_8(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = \delta\overline{I_{h2}} + \varepsilon_1\overline{S_{h3}}(\overline{I_{v1}}+\overline{I_{v2}}+\overline{I_{v3}}) - \sigma_2\overline{I_{h3}}$$

$$X_9(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = r\overline{I_{h3}} + \delta\overline{R_{h2}} - \sigma_1\overline{R_{h3}}$$

.

.

.

$$X_{205}(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = \delta\overline{S_{h68}} - (\sigma_1+\varepsilon_1(\overline{I_{v1}}+\overline{I_{v2}}+\overline{I_{v3}}))\overline{S_{h69}}$$

$$X_{206}(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = \delta\overline{I_{h68}} + \varepsilon_1\overline{S_{h69}}(\overline{I_{v1}}+\overline{I_{v2}}+\overline{I_{v3}}) - \sigma_2\overline{I_{h69}}$$

$$X_{207}(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = r\overline{I_{h69}} + \delta\overline{R_{h68}} - \sigma_1\overline{R_{h69}}$$

$\vdots$

$$X_{208}(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = \delta\overline{S_{h69}} - (\mu_h + \varepsilon_1(\overline{I_{v1}} + \overline{I_{v2}} + \overline{I_{v3}}))\overline{S_{h70}}$$

$$X_{209}(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = \delta\overline{I_{h69}} + \varepsilon_1\overline{S_{h70}}(\overline{I_{v1}} + \overline{I_{v2}} + \overline{I_{v3}}) - \sigma_3\overline{I_{h70}}$$

$$X_{210}(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = \varepsilon_2(1-\overline{I_{v1}})\overline{I_h} - (\sigma_4 + \varepsilon_2\overline{I_h})\overline{E_{v1}}$$

$$X_{211}(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = q\overline{E_{v1}} - \mu_v\overline{I_{v1}}$$

$$X_{212}(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = \varepsilon_2(1-\overline{I_{v2}})\overline{I_h} - (\sigma_4 + \varepsilon_2\overline{I_h})\overline{E_{v2}}$$

$$X_{213}(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = q\overline{E_{v2}} - \mu_v\overline{I_{v2}}$$

$$X_{214}(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = \varepsilon_2(1-\overline{I_{v3}})\overline{I_h} - (\sigma_4 + \varepsilon_2\overline{I_h})\overline{E_{v3}}$$

$$X_{215}(\overline{S_{h1}},\overline{I_{h1}},\overline{R_{h1}},...,\overline{S_{h70}},\overline{I_{h70}},\overline{E_{v1}},\overline{I_{v1}},\overline{E_{v2}},\overline{I_{v2}},\overline{E_{v3}},\overline{I_{v3}}) = q\overline{E_{v3}} - \mu_v\overline{I_{v3}}$$

ดังนั้น

$$X_1(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},...,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3}) = \mu_h - (\sigma_1 + \varepsilon_1(I^*_{v1} + I^*_{v2} + I^*_{v3}))S^*_{h1}$$

$$X_2(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},...,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3}) = \varepsilon_1 S^*_{h1}(I^*_{v1} + I^*_{v2} + I^*_{v3}) - \sigma_2 I^*_{h1}$$

$$X_3(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},...,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3}) = rI^*_{h1} - \sigma_1 R^*_{h1}$$

$$X_4(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},\ldots,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3})=\delta S^*_{h1}-(\sigma_1+\varepsilon_1(I^*_{v1}+I^*_{v2}+I^*_{v3}))S^*_{h2}$$

$$X_5(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},\ldots,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3})=\delta I^*_{h1}+\varepsilon_1 S^*_{h2}(I^*_{v1}+I^*_{v2}+I^*_{v3})-\sigma_2 I^*_{h2}$$

$$X_6(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},\ldots,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3})=rI^*_{h2}+\delta R^*_{h1}-\sigma_1 R^*_{h2}$$

$$X_7(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},\ldots,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3})=\delta S^*_{h2}-(\sigma_1+\varepsilon_1(I^*_{v1}+I^*_{v2}+I^*_{v3}))S^*_{h3}$$

$$X_8(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},\ldots,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3})=\delta I^*_{h2}+\varepsilon_1 S^*_{h3}(I^*_{v1}+I^*_{v2}+I^*_{v3})-\sigma_2 I^*_{h3}$$

$$X_9(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},\ldots,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3})=rI^*_{h3}+\delta R^*_{h2}-\sigma_1 R^*_{h3}$$

$\cdot$

$\cdot$

$\cdot$

$$X_{205}(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},\ldots,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3})=\delta S^*_{h68}-(\sigma_1+\varepsilon_1(I^*_{v1}+I^*_{v2}+I^*_{v3}))S^*_{h69}$$

$$X_{206}(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},\ldots,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3})=\delta I^*_{h68}+\varepsilon_1 S^*_{h69}(I^*_{v1}+I^*_{v2}+I^*_{v3})-\sigma_2 I^*_{h69}$$

$$X_{207}(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},\ldots,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3})=rI^*_{h69}+\delta R^*_{h68}-\sigma_1 R^*_{h69}$$

$$X_{208}(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},\ldots,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3})=\delta S^*_{h69}-(\mu_h+\varepsilon_1(I^*_{v1}+I^*_{v2}+I^*_{v3}))S^*_{h70}$$

$$X_{209}(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},\ldots,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3})=\delta I^*_{h69}+\varepsilon_1 S^*_{h70}(I^*_{v1}+I^*_{v2}+I^*_{v3})-\sigma_3 I^*_{h70}$$

$$X_{210}(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},\ldots,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3})=\varepsilon_2(1-I^*_{v1})I^*_h-(\sigma_4+\varepsilon_2 I^*_h)E^*_{v1}$$

$$X_{211}(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},...,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3}) = qE^*_{v1} - \mu_v I^*_{v1}$$

$$X_{212}(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},...,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3}) = \varepsilon_2(1-I^*_{v2})I^*_h, -(\sigma_4 + \varepsilon_2 I^*_h)E^*_{v2}$$

$$X_{213}(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},...,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3}) = qE^*_{v2} - \mu_v I^*_{v2}$$

$$X_{214}(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},...,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3}) = \varepsilon_2(1-I^*_{v3})I^*_h - (\sigma_4 + \varepsilon_2 I^*_h)E^*_{v3}$$

$$X_{215}(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},...,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3}) = qE^*_{v3} - \mu_v I^*_{v3}$$

จาก

$$X_1(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},...,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3}) = \mu_h - (\sigma_1 + \varepsilon_1(I^*_{v1} + I^*_{v2} + I^*_{v3}))S^*_{h1}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial X_1}{\partial S^*_{h1}} = -(\sigma_1 + \varepsilon_1(I^*_{v1} + I^*_{v2} + I^*_{v3})),$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial I^*_{v1}} = \frac{\partial X_1}{\partial I^*_{v2}} = \frac{\partial X_1}{\partial I^*_{v3}} = -\varepsilon_1 S^*_{h1},$$

โดยที่อนุพันธ์เทียบกับตัวแปรอื่นๆ =0 ทั้งหมด

จาก

$$X_4(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},...,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3}) = \delta S^*_{h1} - (\sigma_1 + \varepsilon_1(I^*_{v1} + I^*_{v2} + I^*_{v3}))S^*_{h2}$$

$$\frac{\partial X_4}{\partial S_{h1}^*} = \delta,$$
$$\frac{\partial X_4}{\partial S_{h2}^*} = -(\sigma_1 + \varepsilon_1(I_{v1}^* + I_{v2}^* + I_{v3}^*))$$
$$\frac{\partial X_4}{\partial I_{v1}^*} = \frac{\partial X_4}{\partial I_{v2}^*} = \frac{\partial X_4}{\partial I_{v3}^*} = -\varepsilon_1 S_{h2}^*,$$

โดยที่อนุพันธ์เทียบกับตัวแปรอื่นๆ =0 ทั้งหมด

จาก

$$X_7(S_{h1}^*, I_{h1}^*, R_{h1}^*, \ldots, S_{h70}^*, I_{h70}^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = \delta S_{h2}^* - (\sigma_1 + \varepsilon_1(I_{v1}^* + I_{v2}^* + I_{v3}^*))S_{h3}^*$$

$$\frac{\partial X_7}{\partial S_{h2}^*} = \delta,$$
$$\frac{\partial X_7}{\partial S_{h3}^*} = -(\sigma_1 + \varepsilon_1(I_{v1}^* + I_{v2}^* + I_{v3}^*))$$
$$\frac{\partial X_7}{\partial I_{v1}^*} = \frac{\partial X_7}{\partial I_{v2}^*} = \frac{\partial X_7}{\partial I_{v3}^*} = -\varepsilon_1 S_{h3}^*,$$

โดยที่อนุพันธ์เทียบกับตัวแปรอื่นๆ =0 ทั้งหมด

จาก

$$X_{10}(S_{h1}^*, I_{h1}^*, R_{h1}^*, \ldots, S_{h70}^*, I_{h70}^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = \delta S_{h3}^* - (\sigma_1 + \varepsilon_1(I_{v1}^* + I_{v2}^* + I_{v3}^*))S_{h4}^*$$

$$\frac{\partial X_{10}}{\partial S_{h3}^*} = \delta,$$
$$\frac{\partial X_{10}}{\partial S_{h4}^*} = -(\sigma_1 + \varepsilon_1(I_{v1}^* + I_{v2}^* + I_{v3}^*))$$

$$\frac{\partial X_{10}}{\partial I_{v1}^*}=\frac{\partial X_{10}}{\partial I_{v2}^*}=\frac{\partial X_{10}}{\partial I_{v3}^*}=-\varepsilon_1 S_{h4}^*,$$

โดยที่อนุพันธ์เทียบกับตัวแปรอื่นๆ =0 ทั้งหมด

จาก

$$X_{13}(S_{h1}^*,I_{h1}^*,R_{h1}^*,\ldots,S_{h70}^*,I_{h70}^*,E_{v1}^*,I_{v1}^*,E_{v2}^*,I_{v2}^*,E_{v3}^*,I_{v3}^*)=\delta S_{h4}^*-(\sigma_1+\varepsilon_1(I_{v1}^*+I_{v2}^*+I_{v3}^*))S_{h5}^*$$

$$\frac{\partial X_{13}}{\partial S_{h4}^*}=\delta,$$
$$\frac{\partial X_{13}}{\partial S_{h5}^*}=-(\sigma_1+\varepsilon_1(I_{v1}^*+I_{v2}^*+I_{v3}^*))$$
$$\frac{\partial X_{13}}{\partial I_{v1}^*}=\frac{\partial X_{13}}{\partial I_{v2}^*}=\frac{\partial X_{13}}{\partial I_{v3}^*}=-\varepsilon_1 S_{h5}^*,$$

โดยที่อนุพันธ์เทียบกับตัวแปรอื่นๆ =0 ทั้งหมด

.

.

.

$$X_{208}(S_{h1}^*,I_{h1}^*,R_{h1}^*,\ldots,S_{h70}^*,I_{h70}^*,E_{v1}^*,I_{v1}^*,E_{v2}^*,I_{v2}^*,E_{v3}^*,I_{v3}^*)=\delta S_{h69}^*-(\mu_h+\varepsilon_1(I_{v1}^*+I_{v2}^*+I_{v3}^*))S_{h70}^*$$

จะได้อนุพันธ์ในรูปทั่วไปคือ

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial X_1}{\partial S_{h1}^*}=-(\sigma_1+\varepsilon_1(I_{v1}^*+I_{v2}^*+\overline{I_{v3}}))\\&\frac{\partial X_1}{\partial I_{v1}^*}=\frac{\partial X_1}{\partial I_{v2}^*}=\frac{\partial X_1}{\partial I_{v3}^*}=-\varepsilon_1 S_{h1}^*\end{aligned}\right\}\qquad j=1,$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X_{3j-2}}{\partial S^*_{h(j-1)}} = \delta \\
&\frac{\partial X_{3j-2}}{\partial S^*_{hj}} = -(\sigma_1 + \varepsilon_1(I^*_{v1} + I^*_{v2} + I^*_{v3})) \\
&\frac{\partial X_{3j-2}}{\partial I^*_{v1}} = \frac{\partial X_{3j-2}}{\partial I^*_{v2}} = \frac{\partial X_{3j-2}}{\partial I^*_{v3}} = -\varepsilon_1 S^*_{hj}
\end{aligned}\right\} \quad j = 2,3,\ldots,70$$

จาก

$$X_2(S^*_{h1}, I^*_{h1}, R^*_{h1}, \ldots, S^*_{h70}, I^*_{h70}, E^*_{v1}, I^*_{v1}, E^*_{v2}, I^*_{v2}, E^*_{v3}, I^*_{v3}) = \varepsilon_1 S^*_{h1}(I^*_{v1} + I^*_{v2} + I^*_{v3}) - \sigma_2 I^*_{h1}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial X_2}{\partial S^*_{h1}} = \varepsilon_1(I^*_{v1} + I^*_{v2} + I^*_{v3}),$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial I^*_{h1}} = -\sigma_2$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial I^*_{v1}} = \frac{\partial X_2}{\partial I^*_{v2}} = \frac{\partial X_2}{\partial I^*_{v3}} = \varepsilon_1 S^*_{h1},$$

โดยที่อนุพันธ์เทียบกับตัวแปรอื่นๆ =0 ทั้งหมด

จาก

$$X_5(S^*_{h1}, I^*_{h1}, R^*_{h1}, \ldots, S^*_{h70}, I^*_{h70}, E^*_{v1}, I^*_{v1}, E^*_{v2}, I^*_{v2}, E^*_{v3}, I^*_{v3}) = \delta I^*_{h1} + \varepsilon_1 S^*_{h2}(I^*_{v1} + I^*_{v2} + I^*_{v3}) - \sigma_2 I^*_{h2}$$

จะได้

$$\frac{\partial X_5}{\partial I^*_{h1}} = \delta$$
$$\frac{\partial X_5}{\partial S^*_{h2}} = \varepsilon_1 (I^*_{v1} + I^*_{v2} + I^*_{v3}),$$
$$\frac{\partial X_5}{\partial I^*_{h2}} = -\sigma_2$$
$$\frac{\partial X_5}{\partial I^*_{v1}} = \frac{\partial X_5}{\partial I^*_{v2}} = \frac{\partial X_5}{\partial I^*_{v3}} = \varepsilon_1 S^*_{h2}$$

โดยที่อนุพันธ์เทียบกับตัวแปรอื่นๆ =0 ทั้งหมด

จาก

$$X_8(S^*_{h1}, I^*_{h1}, R^*_{h1}, \ldots, S^*_{h70}, I^*_{h70}, E^*_{v1}, I^*_{v1}, E^*_{v2}, I^*_{v2}, E^*_{v3}, I^*_{v3}) = \delta I^*_{h2} + \varepsilon_1 S^*_{h3}(I^*_{v1} + I^*_{v2} + I^*_{v3}) - \sigma_2 I^*_{h3}$$

จะได้

$$\frac{\partial X_8}{\partial I^*_{h2}} = \delta$$
$$\frac{\partial X_8}{\partial S^*_{h3}} = \varepsilon_1 (I^*_{v1} + I^*_{v2} + I^*_{v3}),$$
$$\frac{\partial X_8}{\partial I^*_{h3}} = -\sigma_2$$
$$\frac{\partial X_8}{\partial I^*_{v1}} = \frac{\partial X_8}{\partial I^*_{v2}} = \frac{\partial X_8}{\partial I^*_{v3}} = \varepsilon_1 S^*_{h3}$$

.

.

.

$$X_{209}(S^*_{h1}, I^*_{h1}, R^*_{h1}, \ldots, S^*_{h70}, I^*_{h70}, E^*_{v1}, I^*_{v1}, E^*_{v2}, I^*_{v2}, E^*_{v3}, I^*_{v3}) = \delta I^*_{h69} + \varepsilon_1 S^*_{h70}(I^*_{v1} + I^*_{v2} + I^*_{v3}) - \sigma_3 I^*_{h70}$$

จะได้อนุพันธ์ในรูปทั่วไปคือ

$$\frac{\partial X_2}{\partial S^*_{h1}} = \varepsilon_1 (I^*_{v1} + I^*_{v2} + I^*_{v3}),$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial I_{h1}^*} = -\sigma_2$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial I_{v1}^*} = \frac{\partial X_2}{\partial I_{v2}^*} = \frac{\partial X_2}{\partial I_{v3}^*} = \varepsilon_1 S_{h1}^*,$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X_{3j-1}}{\partial I_{h(j-1)}^*} = \delta \\
&\frac{\partial X_{3j-1}}{\partial S_{hj}^*} = \varepsilon_1 (I_{v1}^* + I_{v2}^* + I_{v3}^*) \\
&\frac{\partial X_{3j-1}}{\partial I_{hj}^*} = -\sigma_2 \\
&\frac{\partial X_{3j-1}}{\partial I_{v1}^*} = \frac{\partial X_{3j-1}}{\partial I_{v2}^*} = \frac{\partial X_{3j-1}}{\partial I_{v3}^*} = \varepsilon_1 S_{hj}^*
\end{aligned}\right\} \qquad j = 2,3,\ldots,70$$

จาก

$$X_3(S_{h1}^*, I_{h1}^*, R_{h1}^*, \ldots, S_{h70}^*, I_{h70}^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*) = rI_{h1}^* - \sigma_1 R_{h1}^*$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial X_3}{\partial I_{h1}^*} = r,$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial R_{h1}^*} = -\sigma_1$$

โดยที่อนุพันธ์เทียบกับตัวแปรอื่นๆ =0 ทั้งหมด

จาก

$$X_6(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},\ldots,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3}) = rI^*_{h2} + \delta R^*_{h1} - \sigma_1 R^*_{h2}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial X_6}{\partial R^*_{h1}} = \delta,$$
$$\frac{\partial X_6}{\partial I^*_{h2}} = r$$
$$\frac{\partial X_6}{\partial R^*_{h2}} = -\sigma_1$$

โดยที่อนุพันธ์เทียบกับตัวแปรอื่นๆ =0 ทั้งหมด

จาก

$$X_9(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},\ldots,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3}) = rI^*_{h3} + \delta R^*_{h2} - \sigma_1 R^*_{h3}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial X_9}{\partial R^*_{h2}} = \delta,$$
$$\frac{\partial X_9}{\partial I^*_{h3}} = r$$
$$\frac{\partial X_9}{\partial R^*_{h3}} = -\sigma_1$$

$$X_{207}(S^*_{h1}, I^*_{h1}, R^*_{h1}, \ldots, S^*_{h70}, I^*_{h70}, E^*_{v1}, I^*_{v1}, E^*_{v2}, I^*_{v2}, E^*_{v3}, I^*_{v3}) = rI^*_{h69} + \delta R^*_{h68} - \sigma_1 R^*_{h69}$$

จะได้อนุพันธ์ในรูปทั่วไปคือ

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_3}{\partial I^*_{h1}} &= r \\ \frac{\partial X_3}{\partial R^*_{h1}} &= -\sigma_1 \end{aligned}\right\} \qquad j = 1,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_{3j}}{\partial R^*_{h(j-1)}} &= \delta \\ \frac{\partial X_{3j}}{\partial I^*_{hj}} &= r \\ \frac{\partial X_{3j}}{\partial R^*_{hj}} &= -\sigma_1 \end{aligned}\right\} \qquad j = 2, 3, \ldots, 69,$$

จาก

$$X_{210}(S^*_{h1}, I^*_{h1}, R^*_{h1}, \ldots, S^*_{h70}, I^*_{h70}, E^*_{v1}, I^*_{v1}, E^*_{v2}, I^*_{v2}, E^*_{v3}, I^*_{v3})$$

$$= \varepsilon_2(1 - I^*_{v1})I^*_h - (\sigma_4 + \varepsilon_2 I^*_h)E^*_{v1}$$

$$= \varepsilon_2(1 - I^*_{v1})(I^*_{h1} + I^*_{h2} + \ldots + I^*_{h70}) - (\sigma_4 + \varepsilon_2(I^*_{h1} + I^*_{h2} + \ldots + I^*_{h70}))E^*_{v1}$$

$$\frac{\partial X_{210}}{\partial I^*_{h1}} = \frac{\partial X_{210}}{\partial I^*_{h2}} = \ldots = \frac{\partial X_{210}}{\partial I^*_{h70}} = \varepsilon_2(1 - I^*_{v1}) - \varepsilon_2 E^*_{v1}$$

$$\frac{\partial X_{210}}{\partial E^*_{v1}} = -\varepsilon_2(I^*_{h1} + I^*_{h2} + \ldots + I^*_{h70})$$

$$\frac{\partial X_{210}}{\partial I^*_{v1}} = -\varepsilon_2(I^*_{h1} + I^*_{h2} + \ldots + I^*_{h70})$$

จาก

$$X_{211}(S^*_{h1}, I^*_{h1}, R^*_{h1}, \ldots, S^*_{h70}, I^*_{h70}, E^*_{v1}, I^*_{v1}, E^*_{v2}, I^*_{v2}, E^*_{v3}, I^*_{v3}) = qE^*_{v1} - \mu_v I^*_{v1}$$

$$\frac{\partial X_{211}}{\partial E^*_{v1}} = q,$$

$$\frac{\partial X_{211}}{\partial I^*_{v1}} = -\mu_v$$

จาก

$$X_{212}(S^*_{h1}, I^*_{h1}, R^*_{h1}, \ldots, S^*_{h70}, I^*_{h70}, E^*_{v1}, I^*_{v1}, E^*_{v2}, I^*_{v2}, E^*_{v3}, I^*_{v3}) = \varepsilon_2(1 - I^*_{v2})I^*_h, -(\sigma_4 + \varepsilon_2 I^*_h)E^*_{v2}$$

$$= \varepsilon_2(1 - I^*_{v2})I^*_h - (\sigma_4 + \varepsilon_2 I^*_h)E^*_{v2}$$

$$= \varepsilon_2(1 - I^*_{v2})(I^*_{h1} + I^*_{h2} + \ldots + I^*_{h70}) - (\sigma_4 + \varepsilon_2(I^*_{h1} + I^*_{h2} + \ldots + I^*_{h70}))E^*_{v2}$$

$$\frac{\partial X_{211}}{\partial I^*_{h1}} = \frac{\partial X_{211}}{\partial I^*_{h2}} = \ldots = \frac{\partial X_{211}}{\partial I^*_{h70}} = \varepsilon_2(1 - I^*_{v2}) - \varepsilon_2 E^*_{v2}$$

$$\frac{\partial X_{211}}{\partial E^*_{v2}} = -\varepsilon_2(I^*_{h1} + I^*_{h2} + \ldots + I^*_{h70})$$

$$\frac{\partial X_{211}}{\partial I^*_{v2}} = -\varepsilon_2(I^*_{h1} + I^*_{h2} + \ldots + I^*_{h70})$$

จาก

$$X_{213}(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},...,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3}) = qE^*_{v2} - \mu_v I^*_{v2}$$

$$\frac{\partial X_{213}}{\partial E^*_{v2}} = q\,,$$

$$\frac{\partial X_{213}}{\partial I^*_{v2}} = -\mu_v$$

จาก

$$X_{214}(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},...,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3}) = \varepsilon_2(1-I^*_{v3})I^*_h - (\sigma_4 + \varepsilon_2 I^*_h)E^*_{v3}$$

$$= \varepsilon_2(1-I^*_{v3})I^*_h - (\sigma_4 + \varepsilon_2 I^*_h)E^*_{v3}$$

$$= \varepsilon_2(1-I^*_{v3})(I^*_{h1} + I^*_{h2} + ... + I^*_{h70}) - (\sigma_4 + \varepsilon_2(I^*_{h1} + I^*_{h2} + ... + I^*_{h70}))E^*_{v3}$$

$$\frac{\partial X_{214}}{\partial I^*_{h1}} = \frac{\partial X_{214}}{\partial I^*_{h2}} = ... = \frac{\partial X_{214}}{\partial I^*_{h70}} = \varepsilon_2(1-I^*_{v3}) - \varepsilon_2 E^*_{v3}$$

$$\frac{\partial X_{214}}{\partial E^*_{v3}} = -\varepsilon_2(I^*_{h1} + I^*_{h2} + ... + I^*_{h70})$$

$$\frac{\partial X_{214}}{\partial I^*_{v3}} = -\varepsilon_2(I^*_{h1} + I^*_{h2} + ... + I^*_{h70})$$

จาก

$$X_{215}(S^*_{h1},I^*_{h1},R^*_{h1},...,S^*_{h70},I^*_{h70},E^*_{v1},I^*_{v1},E^*_{v2},I^*_{v2},E^*_{v3},I^*_{v3}) = qE^*_{v3} - \mu_v I^*_{v3}$$

$$\frac{\partial X_{215}}{\partial E_{v3}^*} = q,$$

$$\frac{\partial X_{215}}{\partial I_{v3}^*} = -\mu_v$$

จากการพิจารณาสัดส่วนของประชากรแต่ละกลุ่ม ซึ่งมีจำนวนสมการ ทำให้เป็นการยากต่อการตรวจสอบความเสถียร เราจึงใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้ ลดจำนวนสมการลงเพื่อให้สะดวกต่อการตรวจสอบความเสถียรของจุดสมดุล

จาก $S_h = S_{h1} + S_{h2} + S_{h3} + \ldots + S_{h70}$

นั่นคือ

$$\frac{dS_h}{dt} = \frac{dS_{h1}}{dt} + \frac{dS_{h2}}{dt} + \frac{dS_{h3}}{dt} + \ldots + \frac{dS_{h70}}{dt}$$

$$= \lambda N_T - ((\mu_h + \delta) + \gamma_h I_v)S_{h1} + \delta S_{h1} - ((\mu_h + \delta) + \gamma_h I_v)S_{h2} + \delta S_{h2} - ((\mu_h + \delta) + \gamma_h I_v)S_{h3}$$

$$+ \ldots + \delta S_{h68} - ((\mu_h + \delta) + \gamma_h I_v)S_{h69} + \delta S_{h69} - (\mu_h + \gamma_h I_v)S_{h70}$$

$$= \lambda N_T - \mu_h S_{h1} - \delta S_{h1} - \gamma_h I_v S_{h1} + \delta S_{h1} - \mu_h S_{h2} - \delta S_{h2} - \gamma_h I_v S_{h2} + \delta S_{h2} - \mu_h S_{h3}$$

$$- \delta S_{h3} - \gamma_h I_v S_{h3} + \ldots + \delta S_{h68} - \mu_h S_{h69} - \delta S_{h69} - \gamma_h I_v S_{h69} + \delta S_{h69} - \mu_h S_{h70} - \gamma_h I_v S_{h70}$$

$$= \lambda N_T - \mu_h (S_{h1} + S_{h2} + \ldots + S_{h70}) - \gamma_h I_v (S_{h1} + S_{h2} + \ldots + S_{h70})$$

$$= \mu_h N_T - (\mu_h + \gamma_h I_v) S_h$$

และจาก

$$I_h = I_{h1} + I_{h2} + I_{h3} + \ldots + I_{h70}$$

ดังนั้น

$$\frac{dI_h}{dt} = \frac{dI_{h1}}{dt} + \frac{dI_{h2}}{dt} + \frac{dI_{h3}}{dt} + \ldots + \frac{dI_{h70}}{dt}$$

$$= \gamma_h S_{h1} I_v - (\mu_h + \delta + r) I_{h1} + \delta I_{h1} + \gamma_h S_{h2} I_v - (\mu_h + \delta + r) I_{h2} + \delta I_{h2} + \gamma_h S_{h3} I_v$$

$$-(\mu_h + \delta + r) I_{h3} + \ldots + \delta I_{h68} + \gamma_h S_{h69} I_v - (\mu_h + \delta + r) I_{h69} + \delta I_{h69} + \gamma_h S_{h70} I_v - (\mu_h + r) I_{h70}$$

$$= \gamma_h S_{h1} I_v - \mu_h I_{h1} - \delta I_{h1} - r I_{h1} + \delta I_{h1} + \gamma_h S_{h2} I_v - \mu_h I_{h2} - \delta I_{h2} - r I_{h2} + \delta I_{h2} + \gamma_h S_{h3} I_v$$

$$-\mu_h I_{h3} - \delta I_{h3} - r I_{h3} + \ldots + \delta I_{h68} + \gamma_h S_{h69} I_v - \mu_h I_{h69} - \delta I_{h69} - r I_{h69} + \delta I_{h69}$$

$$+\gamma_h S_{h70} I_v - \mu_h I_{h70} - r I_{h70}$$

$$= \gamma_h S_{h1} I_v - \mu_h I_{h1} - r I_{h1} + \gamma_h S_{h2} I_v - \mu_h I_{h2} - r I_{h2} + \gamma_h S_{h3} I_v - \mu_h I_{h3} - r I_{h3} + \ldots +$$

$$\gamma_h S_{h69} I_v - \mu_h I_{h69} - r I_{h69} + \gamma_h S_{h70} I_v - \mu_h I_{h70} - r I_{h70}$$

$$= \gamma_h I_v (S_{h1} + S_{h2} + \ldots + S_{h70}) - \mu_h (I_{h1} + I_{h2} + \ldots + I_{h70}) - r(I_{h1} + I_{h2} + \ldots + I_{h70})$$

$$= \gamma_h I_v S_h - (\mu_h + r)I_h$$

และจาก

$$R_h = R_{h1} + R_{h2} + R_{h3} + ... + R_{h70}$$

นั่นคือ

$$\frac{dR_h}{dt} = \frac{dR_{h1}}{dt} + \frac{dR_{h2}}{dt} + \frac{dR_{h3}}{dt} + ... + \frac{dR_{h70}}{dt}$$

$$= rI_{h1} - (\mu_h + \delta)R_{h1} + rI_{h2} + \delta R_{h1} - (\mu_h + \delta)R_{h2} + rI_{h3} + \delta R_{h2} - (\mu_h + \delta)R_{h3} + ... +$$

$$rI_{h69} + \delta R_{h68} - (\mu_h + \delta)R_{h69} + rI_{h70} + \delta R_{h69} - \mu_h R_{h70}$$

$$= rI_{h1} - \mu_h R_{h1} - \delta R_{h1} + rI_{h2} + \delta R_{h1} - \mu_h R_{h2} - \delta R_{h2} + rI_{h3} + \delta R_{h2} - \mu_h R_{h3} - \delta R_{h3} + ... +$$

$$rI_{h69} + \delta R_{h68} - \mu_h R_{h69} - \delta R_{h69} + rI_{h70} + \delta R_{h69} - \mu_h R_{h70}$$

$$= rI_{h1} - \mu_h R_{h1} + rI_{h2} - \mu_h R_{h2} + rI_{h3} + -\mu_h R_{h3} + ... + rI_{h69} - \mu_h R_{h69} + rI_{h70} - \mu_h R_{h70}$$

$$= r(I_{h1} + I_{h2} + ... + I_{h70}) - \mu_h (R_{h1} + R_{h2} + ... + \mu_h R_{h70})$$

$$= rI_h - \mu_h R_h$$

และจาก

$$S_v = S_{v1} + S_{v2} + S_{v3}$$

นั่นคือ

$$\frac{dS_v}{dt}=\frac{dS_{v1}}{dt}+\frac{dS_{v2}}{dt}+\frac{dS_{v3}}{dt}$$

$$=A_1-(\gamma_v I_h+\mu_v)S_{v1}+A_2-(\gamma_v I_h+\mu_v)S_{v2}+A_3-(\gamma_v I_h+\mu_v)S_{v3}$$

$$=A_1-\gamma_v I_h S_{v1}-\mu_v S_{v1}+A_2-\gamma_v I_h S_{v2}-\mu_v S_{v2}+A_3-\gamma_v I_h S_{v3}-\mu_v S_{v3}$$

$$=A_1+A_2+A_3-\gamma_v I_h(S_{v1}+S_{v2}+S_{v3})-\mu_v(S_{v1}+S_{v2}+S_{v3})$$

$$=A-(\gamma_v I_h+\mu_v)S_v$$

จาก

$$E_v=E_{v1}+E_{v2}+E_{v3}$$

นั่นคือ

$$\frac{dE_v}{dt}=\frac{dE_{v1}}{dt}+\frac{dE_{v2}}{dt}+\frac{dE_{v3}}{dt}$$

$$=\gamma_v S_{v1}I_h-(\mu_v+q)E_{v1}+\gamma_v S_{v2}I_h-(\mu_v+q)E_{v2}+\gamma_v S_{v3}I_h-(\mu_v+q)E_{v3}$$

$$=\gamma_v S_{v1}I_h-\mu_v E_{v1}-qE_{v1}+\gamma_v S_{v2}I_h-\mu_v E_{v2}-qE_{v2}+\gamma_v S_{v3}I_h-\mu_v E_{v3}-qE_{v3}$$

$$=\gamma_v S_v I_h-(\mu_v+q)E_v$$

จาก

$$I_v = I_{v1} + I_{v2} + I_{v3}$$

นั่นคือ

$$\frac{dI_v}{dt} = \frac{dI_{v1}}{dt} + \frac{dI_{v2}}{dt} + \frac{dI_{v3}}{dt}$$

$$= qE_{v1} - \mu_v I_{v1} + qE_{v2} - \mu_v I_{v2} + qE_{v3} - \mu_v I_{v3}$$

$$= qE_v - \mu_v I_v$$

นั่นคือเราจะได้ระบบสมการใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned}
\frac{dS_h}{dt} &= \mu_h N_T - (\mu_h + \gamma_h I_v) S_h, \\
\frac{dI_h}{dt} &= \gamma_h I_v S_h - (\mu_h + r) I_h \\
\frac{dR_h}{dt} &= rI_h - \mu_h R_h \\
\frac{dS_v}{dt} &= A - (\gamma_v I_h + \mu_v) S_v \\
\frac{dE_v}{dt} &= \gamma_v S_v I_h - (\mu_v + q) E_v \\
\frac{dI_v}{dt} &= qE_v - \mu_v I_v
\end{aligned} \tag{4.20}$$

และสามารถลดจำนวนสมการในระบบสมการ (4.20) โดยใช้ความสัมพันธ์ ดังนี้

$\overline{S_h} = \dfrac{S_h}{N_T}$, $\overline{I_h} = \dfrac{I_h}{N_T}$, $\overline{R_h} = \dfrac{R_h}{N_T}$, $\overline{S_v} = \dfrac{S_v}{N_v}$, $\overline{E_v} = \dfrac{E_v}{N_v}$, $\overline{I_v} = \dfrac{I_v}{N_v}$ และ

$$\overline{R_h} = 1 - \overline{S_h} - \overline{I_h} \quad , \quad \overline{S_v} = 1 - \overline{E_v} - \overline{I_v}$$

จะได้ระบบสมการใหม่ คือ

$$\begin{aligned}
\frac{d\overline{S_h}}{dt} &= \mu_h - (\mu_h + \varepsilon_1 \overline{I_v})\overline{S_h} \\
\frac{d\overline{I_h}}{dt} &= \varepsilon_1 \overline{I_v}\,\overline{S_h} - (\mu_h + r)\overline{I_h} \\
\frac{d\overline{E_v}}{dt} &= \varepsilon_2 \overline{S_v}\,\overline{I_h} - (\mu_v + q)\overline{E_v} \\
\frac{d\overline{I_v}}{dt} &= q\overline{E_v} - \mu_v \overline{I_v}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

จากระบบสมการ (4.21) เราสามารถหาจุดสมดุล ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
&\mu_h - (\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*)S_h^* = 0 \\
&\varepsilon_1 I_v^* S_h^* - (\mu_h + r)I_h^* = 0 \\
&\varepsilon_2 (1 - I_v^* - E_v^*)I_h^* - (\mu_v + q)E_v^* = 0 \\
&qE_v^* - \mu_v I_v^* = 0
\end{aligned} \tag{4.22}$$

จากสมการแรกของระบบสมการ (4.22)

$$\mu_h - (\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*)S_h^* = 0$$

$$S_h^* = \frac{\mu_h}{\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*}$$

จากสมการที่ 2 ของระบบสมการ (4.22)

$$\varepsilon_1 I_v^* S_h^* - (\mu_h + r)I_h^* = 0$$

$$I_h^* = \frac{\varepsilon_1 I_v^* S_h^*}{\mu_h + r} = \frac{\mu_h \varepsilon_1 I_v^*}{(\mu_h + r)(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*)}$$

จากสมการที่ 3 ในระบบสมการ (4.22)

$$\varepsilon_2(1 - I_v^* - E_v^*)I_h^* - (\mu_v + q)E_v^* = 0$$

$$\varepsilon_2(1 - I_v^*)I_h^* - (\mu_v + q + \varepsilon_2 I_h^*)E_v^* = 0$$

$$E_v^* = \frac{\varepsilon_2(1 - I_v^*)I_h^*}{(\mu_v + q + \varepsilon_2 I_h^*)} = \frac{\varepsilon_2(1 - I_v^*) \cdot \dfrac{\mu_h \varepsilon_1 I_v^*}{(\mu_h + r)(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*)}}{(\mu_v + q + \varepsilon_2 \cdot \dfrac{\mu_h \varepsilon_1 I_v^*}{(\mu_h + r)(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*)})}$$

$$= \frac{\dfrac{\mu_h \varepsilon_1 \varepsilon_2 I_v^*(1 - I_v^*)}{(\mu_h + r)(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*)}}{\dfrac{\mu_v(\mu_h + r)(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*) + q(\mu_h + r)(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*) + \varepsilon_2 \mu_h \varepsilon_1 I_v^*}{(\mu_h + r)(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*)}}$$

$$= \frac{\mu_h \varepsilon_1 \varepsilon_2 I_v^*(1 - I_v^*)}{(\mu_v + q)(\mu_h + r)(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*) + \mu_h \varepsilon_2 \varepsilon_1 I_v^*}$$

จากสมการสุดท้ายของระบบสมการ (4.22)

$$qE_v^* - \mu_v I_v^* = 0$$

$$\frac{q\mu_h \varepsilon_1 \varepsilon_2 I_v^*(1 - I_v^*)}{(\mu_v + q)(\mu_h + r)(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*) + \varepsilon_2 \mu_h \varepsilon_1 I_v^*} - \mu_v I_v^* = 0$$

$$I_v^*[\frac{q\mu_h \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 - I_v^*)}{(\mu_v + q)(\mu_h + r)(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*) + \varepsilon_2 \mu_h \varepsilon_1 I_v^*} - \mu_v] = 0 \qquad (4.23)$$

คำตอบแรกของสมการ (4.22) คือ $I_v^* = 0$

ต่อไป เราพิจารณา $\dfrac{q\mu_h \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 - I_v^*)}{(\mu_v + q)(\mu_h + r)(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*) + \varepsilon_2 \mu_h \varepsilon_1 I_v^*} - \mu_v = 0$

นั่นคือ

$$q\mu_h\varepsilon_1\varepsilon_2(1-I_v^*)-\mu_v((\mu_v+q)(\mu_h+r)(\mu_h+\varepsilon_1 I_v^*)+\varepsilon_2\mu_h\varepsilon_1 I_v^*)=0$$

หรือ

$$\mu_v((\mu_v+q)(\mu_h+r)(\mu_h+\varepsilon_1 I_v^*)+\varepsilon_2\mu_h\varepsilon_1 I_v^*)-q\mu_h\varepsilon_1\varepsilon_2(1-I_v^*)=0$$

$$\mu_v\mu_h(\mu_v+q)(\mu_h+r)-q\mu_h\varepsilon_1\varepsilon_2+[\varepsilon_1\mu_v(\mu_v+q)(\mu_h+r)+\varepsilon_2\mu_v\mu_h\varepsilon_1+q\mu_h\varepsilon_1\varepsilon_2]I_v^*=0$$

$$I_v^*=\frac{q\mu_h\varepsilon_1\varepsilon_2-\mu_v\mu_h(\mu_v+q)(\mu_h+r)}{\varepsilon_1\mu_v(\mu_v+q)(\mu_h+r)+\varepsilon_2\mu_v\mu_h\varepsilon_1+q\mu_h\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$=\frac{\mu_h(q\varepsilon_1\varepsilon_2-\mu_v(\mu_v+q)(\mu_h+r))}{\varepsilon_1(\mu_v+q)(\mu_v(\mu_h+r)+\varepsilon_2\mu_h)}$$

นั่นคือ $S_h^*=\dfrac{\mu_h}{\mu_h+\varepsilon_1 I_v^*}$,

$$I_h^*=\frac{\mu_h\varepsilon_1 I_v^*}{(\mu_h+r)(\mu_h+\varepsilon_1 I_v^*)}, \qquad (4.24)$$

$$E_v^*=\frac{\mu_h\varepsilon_1\varepsilon_2 I_v^*(1-I_v^*)}{(\mu_v+q)(\mu_h+r)(\mu_h+\varepsilon_1 I_v^*)+\varepsilon_2\mu_h\varepsilon_1 I_v^*},$$

$I_v^*=0$ หรือ $I_v^*=\dfrac{\mu_h(q\varepsilon_1\varepsilon_2-\mu_v(\mu_v+q)(\mu_h+r))}{\varepsilon_1(\mu_v+q)(\mu_v(\mu_h+r)+\varepsilon_2\mu_h)}$

1. $I_v^*=0$, จุดสมดุลสภาวะไร้โรค $E_1=(1,0,0,0)$.

2. $I_v^* = \dfrac{\mu_h(q\varepsilon_1\varepsilon_2 - \mu_v(\mu_v+q)(\mu_h+r))}{\varepsilon_1(\mu_v+q)(\mu_v(\mu_h+r)+\varepsilon_2\mu_h)}$, จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง $E_2 = (S_h^*, I_h^*, E_v^*, I_v^*)$.

โดยที่นิยาม S_h^*, I_h^*, E_v^*, ในระบบสมการ (4.24)

ให้

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \mu_h - (\mu_h + \varepsilon_1 \overline{I_v})\overline{S_h} \\
W_2 &= \varepsilon_1 \overline{I_v S_h} - (\mu_h + r)\overline{I_h} \\
W_3 &= \varepsilon_2 \overline{S_v I_h} - (\mu_v + q)\overline{E_v} \\
W_4 &= q\overline{E_v} - \mu_v \overline{I_v}
\end{aligned}
\qquad (4.25)
$$

นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
W_1(S_h^*, I_h^*, E_v^*, I_v^*) &= \mu_h - (\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*)S_h^* \\
W_2(S_h^*, I_h^*, E_v^*, I_v^*) &= \varepsilon_1 I_v^* S_h^* - (\mu_h + r)I_h^* \\
W_3(S_h^*, I_h^*, E_v^*, I_v^*) &= \varepsilon_2(1 - I_v^* - E_v^*)I_h^* - (\mu_v + q)E_v^* \\
W_4(S_h^*, I_h^*, E_v^*, I_v^*) &= qE_v^* - \mu_v I_v^*
\end{aligned}
$$

พิจารณา

$$W_1(S_h^*, I_h^*, E_v^*, I_v^*) = \mu_h - (\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*)S_h^*$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial S_h^*} = -(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*)$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial I_h^*} = 0$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial E_v^*} = 0$$

$$\frac{\partial W_1}{\partial I_v^*} = -\varepsilon_1 S_h^*$$

$$W_2(S_h^*, I_h^*, E_v^*, I_v^*) = \varepsilon_1 I_v^* S_h^* - (\mu_h + r) I_h^*$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial S_h^*} = \varepsilon_1 I_v^*$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial I_h^*} = -(\mu_h + r)$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial E_v^*} = 0$$

$$\frac{\partial W_2}{\partial I_v^*} = \varepsilon_1 S_h^*$$

$$W_3(S_h^*, I_h^*, E_v^*, I_v^*) = \varepsilon_2 (1 - I_v^* - E_v^*) I_h^* - (\mu_v + q) E_v^*$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial S_h^*} = 0$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial I_h^*} = \varepsilon_2 (1 - I_v^* - E_v^*)$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial E_v^*} = -\varepsilon_2 I_h^* - (\mu_v + q)$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial I_v^*} = -\varepsilon_2 I_h^*$$

$$W_4(S_h^*, I_h^*, E_v^*, I_v^*) = q E_v^* - \mu_v I_v^*$$

$$\frac{\partial W_4}{\partial S_h^*} = 0$$

$$\frac{\partial W_4}{\partial I_h^*} = 0$$

$$\frac{\partial W_4}{\partial E_v^*} = q$$

$$\frac{\partial W_4}{\partial I_v^*} = -\mu_v$$

จาโคเบียนเมตริกซ์ของระบบสมการ (4.21) คือ

$$J = \begin{bmatrix} -(\mu_h + \varepsilon_1 I_v^*) & 0 & 0 & -\varepsilon_1 S_h^* \\ \varepsilon_1 I_v^* & -(\mu_h + r) & 0 & \varepsilon_1 S_h^* \\ 0 & \varepsilon_2 (1 - I_v^* - E_v^*) & -\varepsilon_2 I_h^* - (\mu_v + q) & -\varepsilon_2 I_h^* \\ 0 & 0 & q & -\mu_v \end{bmatrix}$$

นั่นคือ เมื่อพิจารณา $\det(J_{E1} - \lambda I_4)$ ที่จุด $E_1 = (1,0,0,0)$ จะได้

$$\det(J_{E1} - \lambda I_4) = \begin{bmatrix} -\mu_h - \lambda & 0 & 0 & -\varepsilon_1 \\ 0 & -(\mu_h + r) - \lambda & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & \varepsilon_2 & (\mu_v + q) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & q & -\mu_v - \lambda \end{bmatrix}$$

ค่าเฉพาะเจาะจงสามารถหาได้โดยการแก้สมการพหุนามลักษณะเฉพาะ

$$\det(J_{E_1} - \lambda I_4) = 0 \tag{4.26}$$

ซึ่ง

$$(\mu_h + \lambda)(\lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0 \tag{4.27}$$

โดยที่

$$a_2 = q + r + 2\mu_h + \mu_v, \tag{4.28}$$

$$a_1 = (\mu_h + q)(\mu_h + r) + (q + r + 2\mu_h)\mu_v, \tag{4.29}$$

$$a_0 = -q\varepsilon_1\varepsilon_2 + (\mu_h + q)(\mu_h + r)\mu_v. \tag{4.30}$$

ค่าเฉพาะเจาะจง คือ $\lambda_1 = -\mu_h$ และ $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

สามารถหาได้โดยการแก้สมการ

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \tag{4.31}$$

โดย a_2, a_1, a_0 นิยามดังสมการ (4.28)-(4.30)

ค่าเฉพาะเจาะจง $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ จะมีส่วนจริงเป็นลบเมื่อสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

i) $a_2 > 0$,

ii) $a_0 > 0$,

iii) $a_1 a_2 > a_0$.

เมื่อพิจารณา

i) $a_2 = q + r + 2\mu_h + \mu_v$ มีค่าเป็นบวกเสมอ,

ii) $a_0 = -q\varepsilon_1\varepsilon_2 + (\mu_h + q)(\mu_h + r)\mu_v$ เป็นบวกเมื่อ

$(\mu_h + q)(\mu_h + r)\mu_v > q\varepsilon_1\varepsilon_2$ หรือ $\dfrac{q\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\mu_h + q)(\mu_h + r)\mu_v} < 1$ หรือคือ

$$R_0 = \frac{q\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\mu_h + q)(\mu_h + r)\mu_v} < 1$$

iii) $a_2 a_1 - a_0 = q\varepsilon_1\varepsilon_2 + (q + r + 2\mu_h)(q + \mu_h + \mu_v)(r + \mu_h + \mu_v)$ ซึ่งเป็นบวก

ดังนั้นทั้ง 3 เงื่อนไขสอดคล้อง Routh-Hurwitz สำหรับ $\frac{q\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\mu_h+q)(\mu_h+r)\mu_v}<1.$ นั่นแสดงว่าจุดสมดุลสภาวะไร้โรคเสถียรเมื่อ $R_0<1$, เมื่อกำหนด $R_0=\frac{q\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\mu_h+q)(\mu_h+r)\mu_v}$.

2) จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง $E_2=(S_h^*,I_h^*,E_v^*,I_v^*)$

โดยที่

$$
\begin{aligned}
S_h^* &= \frac{\mu_h}{\mu_h+\varepsilon_1 I_v^*}, \\
I_h^* &= \frac{\mu_h\varepsilon_1 I_v^*}{(\mu_h+r)(\mu_h+\varepsilon_1 I_v^*)}, \\
E_v^* &= \frac{\mu_h\varepsilon_1\varepsilon_2 I_v^*(1-I_v^*)}{(\mu_v+q)(\mu_h+r)(\mu_h+\varepsilon_1 I_v^*)+\varepsilon_2\mu_h\varepsilon_1 I_v^*}, \\
I_v^* &= \frac{\mu_h(q\varepsilon_1\varepsilon_2-\mu_v(\mu_v+q)(\mu_h+r))}{\varepsilon_1(\mu_v+q)(\mu_v(\mu_h+r)+\varepsilon_2\mu_h)}
\end{aligned}
$$

เรามี

$$
J_{E2}=\begin{bmatrix} -(\mu_h+\varepsilon_1 I_v^*) & 0 & 0 & -\varepsilon_1 S_h^* \\ \varepsilon_1 I_v^* & -(\mu_h+r) & 0 & \varepsilon_1 S_h^* \\ 0 & \varepsilon_2(1-I_v^*-E_v^*) & -\varepsilon_2 I_h^*-(\mu_v+q) & -\varepsilon_2 I_h^* \\ 0 & 0 & q & -\mu_v \end{bmatrix}
$$

สมการพหุนามลักษณะเฉพาะ คือ

$$\lambda^4+b_3\lambda^3+b_2\lambda^2+b_1\lambda+b_0=0 \tag{4.32}$$

โดยที่

$$b_3 = q + r + 2(\mu_h + \mu_v) + \varepsilon_2 I_h^* + \varepsilon_1 I_v^*, \tag{4.33}$$

$$b_2 = qr + \mu_h^2 + q\mu_v + 2r\mu_v\mu_v^2 + r\varepsilon_2 I_h^* + \varepsilon_2\mu_v I_h^* + \varepsilon_1(q + r + 2\mu_v + \varepsilon_2 I_h^*)I_v^*$$

$$+\mu_h(2q + r + 4\mu_v + 2\varepsilon_2 I_h^* + \varepsilon_1 I_v^*), \tag{4.34}$$

$$b_1 = \mu_h^2(q + 2\mu_v + \varepsilon_2 I_h^*) + \mu_v^2(r + \varepsilon_1 I_v^*) + \mu_v(r(q + \varepsilon_2 I_h^*) + \varepsilon_1(q + 2r + \varepsilon_2 I_h^*)I_v^*) +$$

$$+\mu_h(2\mu_v^2 + (q + \varepsilon_2 I_h^*)(r + \varepsilon_1 I_v^*) + 2\mu_v(q + r + \varepsilon_2 I_h^* + \varepsilon_1 I_v^*)) + \varepsilon_1(r(q + \varepsilon_2 I_h^*)I_v^*) +$$

$$q\varepsilon_2(-1 + I_v^* + E_v^*)S_h^*) \tag{4.35}$$

$$b_0 = (\mu_h + r)\mu_v(q + \mu_v + \varepsilon_2 I_h^*) + q\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_h(-1 + I_v^* + E_v^*)S_h^* \tag{4.36}$$

ค่าเฉพาะเจาะจง $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ สามารถหาโดยการแก้สมการ (4.32) มีส่วนจริงเป็นลบถ้าสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1) $b_3 > 0$,

2) $b_1 > 0$,

3) $b_0 \geq 0$ และ

4) $b_3 b_2 b_1 > b_1^2 + b_3^2 b_0$.

เมื่อเราพิจารณา

i) $b_3 = q + r + 2(\mu_h + \mu_v) + \varepsilon_2 I_h^* + \varepsilon_1 I_v^*$ มีค่าเป็นบวกเสมอ

ii) $b_1 = \mu_h^2(q + 2\mu_v + \varepsilon_2 I_h^*) + \mu_v^2(r + \varepsilon_1 I_v^*) + \mu_v(r(q + \varepsilon_2 I_h^*) + \varepsilon_1(q + 2r + \varepsilon_2 I_h^*)I_v^*) +$

$$+\mu_h(2\mu_v^2 + (q + \varepsilon_2 I_h^*)(r + \varepsilon_1 I_v^*) + 2\mu_v(q + r + \varepsilon_2 I_h^* + \varepsilon_1 I_v^*)) + \varepsilon_1(r(q + \varepsilon_2 I_h^*)I_v^*) +$$

$$q\varepsilon_2(-1 + I_v^* + E_v^*)S_h^*)$$

$$= K + \mu_h^2(q + \mu_v + \varepsilon_2 I_h^*) + \mu_v^2(r + \varepsilon_1 I_v^*) + \mu_v(r\varepsilon_2 I_h^* + \varepsilon_1(q + 2r + \varepsilon_2 I_h^*)I_v^*) +$$

$$+\mu_h(2\mu_v^2 + (q + \varepsilon_2 I_h^*)(r + \varepsilon_1 I_v^*) + \mu_v(q + 2r + 2\varepsilon_2 I_h^* + 2\varepsilon_1 I_v^*)) + \varepsilon_1(qrI_v^* +$$

$$\varepsilon_2(I_h^*(q + rI_v^*) + q(R_h^* + (I_v^* + E_v^*)S_h^*)))$$

iii) $b_0 = (\mu_h + r)\mu_v(q + \mu_v + \varepsilon_2 I_h^*) + q\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_h(-1 + I_v^* + E_v^*)S_h^*$

$$= (\mu_h + r)\mu_v(q + \mu_v + \varepsilon_2 I_h^*) - q\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_h + q\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_h(I_v^* + E_v^*)S_h^*$$

$$= ((\mu_h + r)\mu_v(q + \mu_v) - q\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_h) + (\mu_h + r)\mu_v\varepsilon_2 I_h^* + q\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_h(I_v^* + E_v^*)S_h^*$$

$$= K + (\mu_h + r)\mu_v\varepsilon_2 I_h^* + q\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_h(I_v^* + E_v^*)S_h^*$$

เมื่อ $K = ((\mu_h + r)\mu_v(q + \mu_v) - q\varepsilon_1\varepsilon_2\mu_h)$

iv) $b_1b_2b_3 > b_3^2 + b_1^2b_4$.

ดังนั้นทั้ง 4 เงื่อนไขสอดคล้อง Routh-Hurwitz นั่นแสดงว่าจุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรังมีความเสถียร กรณี $R_0 > 1$,

จากการศึกษา $R_0 = \dfrac{q\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\mu_h + q)(\mu_h + r)\mu_v} = \dfrac{q\gamma_h\gamma_v N_v N_h}{(\mu_h + q)(\mu_h + r)\mu_v}$ เมื่อเราพิจารณา

$R_0' = \sqrt{R_0}$

ซึ่งเป็นค่าสืบพันธุ์พื้นฐานของโรค ณ จุดสมดุลสภาวะไร้โรคจะมีความเสถียรเมื่อ $R_0' < 1$ และจุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรังมีความเสถียรเมื่อ $R_0' > 1$

บทที่ 5

สรุป วิจารณ์ และเสนอแนะงานวิจัยในอนาคต

ในงานวิจัยฉบับนี้เราได้ศึกษาพฤติกรรมของผลเฉลยในแบบจำลองโดยคำนึงถึงอิทธิพลของอายุของประชากรและฤดูกาลในประเทศไทยโดยประยุกต์วิธีการของการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน ทำให้ได้ เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับตัวแปรที่ทำให้เกิดความเสถียรภายในของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคและสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง โดยการใช้เงื่อนไข Routh-Hurwitz ตรวจสอบความเสถียรของแต่ละจุดสมดุล ผลที่ได้จากทฤษฎี ทำให้ได้ชุดของค่าพารามิเตอร์ที่สามารถลดการระบาดของโรคได้ ซึ่งแสดงในรูปของเงื่อนไข ซึ่งครอบคลุมถึงความเสถียรของสภาวะระบาดภายในและสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง ซึ่งชุดของพารามิเตอร์แต่ละชุดที่ได้นั้นจะมีผลทำให้ลดการระบาดของโรคนี้ ซึ่งในทางการแพทย์นั้น ชุดของพารามิเตอร์แต่ละชุดที่ทำให้เกิดความเสถียรนั้นสามารถควบคุมการระบาดของโรคนี้ได้นั่นเอง

อย่างไรก็ตาม ในงานวิจัยชิ้นนี้ยังไม่ได้คำนึงถึงระยะเวลาของการฟักตัวของเชื้อไวรัสชิกุนกุนยาในคน ซึ่งระยะการฟักตัวนี้มีอิทธิพลต่อการระบาดของโรคนี้ งานวิจัยในอนาคตนั้นควรมีการคำนึงถึงอิทธิพลนี้

บรรณานุกรม

[1] กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข. คู่มือแนวทางการดำเนินงานเฝ้าระวังป้องกันควบคุมโรคไข้ปวดข้อยุงลาย (Chikungunya Fever)

[2] กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข. Chikungunya.

[3] สำนักระบาดวิทยา กระทรวงสาธารณสุข. รายงานการเฝ้าระวังโรคประจำสัปดาห์. วันที่ 16 มิถุนายน 2552

[4] Esteva L. and Vargas C.,"Analysis of a dengue disease transmission model", *Mathematical Biosciences*, vol.150, pp.132-151, 1998.

[5] Esteva L. and Vargas C., "A model for dengue disease with variable human population" Journal of *Mathematical Biology*, vol.38, pp.220-240, 1999.

[6] Esteva L. and Vargas C., "Influence of vertical and mechanical transmission on the dynamics of dengue disease", *Mathematical Biosciences*, vol.167, pp.51-64, 2000.

[7] Esteva L. and Vargas C., "Coexistence of different serotypes of dengue virus". *Journal of Mathematical Biology*, vol.46, pp.31-47, 2003.

[8] de Moor PP, Steffens FE. A computer-simulated model of an arthropod-borne virus transmission cycle, with special reference to Chikungunya virus. *Trans R Soc Trop Med Hyg*, vol. 64, pp. 927-34, 1970.

[9] Bacaer N. Approximation of the basic reproduction number R0 for vector-borne diseases with a periodic vector population. *Bull Math Biol*, vol. 69, pp. 1067-91, 2007.

[10] Y. Dumont and F. Chiroleu. On a temporal model for the Chikungunya disease:Modeling, theory and numerics, *Mathematical Biosciences*, vol. 213, pp. 80-91, 2008.

[11] Steven E. Bellan, Althea Smith and Thibaut Zafack Takadong, A model of transovarial transmission and the maintenance of seasonally epidemic Chikungunya, *Available* from: http://dimacs.rutgers.edu/About/Reports/ASI-Stell07_Annual8-30-07_web.pdf

ภาคผนวก ก

นิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

A1. Theoretical Background

Many biological problems can be explained mathematically by a set of differential equation, which may be nonlinear. In many situations, it is possible to replace the nonlinear differential equation by a set of related linear differential equation that approximates the real nonlinear equation close enough to give useful effects. The method of "linearization" may not always be appropriated. Then the original nonlinear differential equation must be considered. The study of nonlinear differential equation is usually confined to a variety of special cases and we have to use various approximation methods. In this part, we shall give an introduction to the method which we use in this research.

Definition A.1 A point $X_e \in \Re^n$ is an equilibrium point (or stationary point, singular point, critical point or rest point) of

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X) \qquad \text{(A.1)}$$

if $f(t, X_e) = 0$ for all $t \geq t^*$.

If X_e is an equilibrium point of (A.1) at t^*, then it is an equilibrium point for all $\tau \geq t^*$.

Definition A.2 The equilibrium point X = 0 of (A.1) is stable if for every $\delta > 0$ and any $t_0 \in \Re^+$ there is a $\omega(\delta, t_0) > 0$ such that

$|u(t, t_0, \gamma)| < \delta$ for every $t \geq t_0$

whenever $|\gamma| < \omega(\delta, t_0)$ where $u(t, \gamma)$ is the solution of (A.1).

Definition A.3 The equilibrium point X = 0 of (A.1) is asymptotically stable if

1) it is stable and
2) for every $t_0 \geq 0$ there is an $\varepsilon(t_0) > 0$ such that

$$\lim_{t\to\infty} u(t, t_0, \gamma) = 0 \text{ whenever } |\gamma| < \varepsilon \text{ [54]} \qquad \text{(A.2)}$$

Definition A.4 The equilibrium point $X = 0$ of (A.1) is unstable if it is not stable. In this case there is a $t_0 \geq 0$ and a sequence $\gamma_n \rightarrow 0$ of initial points and a sequence t_m such that $\left| u(t_0 + t_m, t_0, \gamma_m) \right| \geq \gamma$ for every m, $t_m \geq 0$.

For more general setting, consider a system of two autonomous first-order differential equations :

$$\frac{dX}{dt} = g_1(X, Y) \tag{A.3}$$

$$\frac{dY}{dt} = g_2(X, Y) \tag{A.4}$$

where g_1 and g_2 are nonlinear functions. We let $(\overline{X}, \overline{Y})$ is the equilibrium point, then

$$g_1(\overline{X}, \overline{Y}) = g_2(\overline{X}, \overline{Y}) = 0. \tag{A.5}$$

Setting the solution at any time in the form

$$X(t) = \overline{X} + x(t) \tag{A.6}$$

and

$$Y(t) = \overline{Y} + y(t). \tag{A.7}$$

This method is called perturbation of the equilibrium point. We substitute X(t) and Y(t) from (A.6) and (A.7) into (A.3) and (A.4) ,

$$\frac{d}{dt}(\overline{X} + x) = g_1(\overline{X} + x, \overline{Y} + y) \tag{A.8}$$

$$\frac{d}{dt}(\overline{Y} + y) = g_2(\overline{X} + x, \overline{Y} + y) \tag{A.9}$$

On the left hand side, we expand the derivatives and on the right hand side, we expand g_1 and g_2 in a Taylor series about the equilibrium point $(\overline{X}, \overline{Y})$. Then we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{X}}{dt} + \frac{dx}{dt} &= g_1(\overline{X}, \overline{Y}) + g_{1_x}(\overline{X}, \overline{Y})x + g_{1_y}(\overline{X}, \overline{Y})y \\ &\quad + \text{terms of order } x^2, y^2, xy \text{ and higher,} \end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\frac{d\bar{Y}}{dt} + \frac{dy}{dt} = g_2(\bar{X},\bar{Y}) + g_{2_x}(\bar{X},\bar{Y})x + g_{2_y}(\bar{X},\bar{Y})y \tag{A.11}$$

+ terms of order x^2, y^2, xy and higher,

where $g_{1_x}(\bar{X},\bar{Y})$ is $\frac{\partial g_1}{\partial x}$ calculated at $(\bar{X},\bar{Y})$ and similarly for $g_{1y}(\bar{X},\bar{Y})$, $g_{2_x}(\bar{X},\bar{Y})$, $g_{2_y}(\bar{X},\bar{Y})$ and other terms.

By the definition of the equilibrium point, we have $\frac{d\bar{X}}{dt} = 0$, $\frac{d\bar{Y}}{dt} = 0$, $g_1(\bar{X},\bar{Y}) = 0$ and $g_2(\bar{X},\bar{Y}) = 0$. We consider only linear term. Thus from (A.10) and (A.11), we obtain

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y,$$

$$\frac{dy}{dt} = a_{21}x + g_{22}y.$$

We denote J as the Jacobian matrix of equations (A.3) and (A.4) and is given by

$$J(\bar{X},\bar{Y}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(\bar{X},\bar{Y})}.$$

Letting $\alpha = a_{11} + a_{22}$

$\beta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

and $\gamma = \alpha^2 - 4\beta$ is called the discriminant.

Then the characteristic equation is $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0$

The eigenvalues are obtained from:

$$\lambda_{1;2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\gamma}}{2}$$

A linear system can have at most one equilibrium point, (0,0) if $\beta = \det J \neq 0$.

Theorem A.1 The equilibrium point $X = 0$ of (A.1) is stable if all eigenvalues of J have negative real parts and every eigenvalues of J which has a zero real part is a simple zero of the characteristic polynomial of J.

The behavior of the equilibrium points of the system of equations (A.3) and (A.4) can be determined by considering the different kinds of eigenvalues of the Jacobian matrix.

The different behavior of equilibrium points are determined from the characteristics of eigenvalues of J.

i) The eigenvalues of J are real and distinct.

ii) The eigenvalues of J are real and repeated.

iii) The eigenvalues of J are complex.

The behaviors of the equilibrium points for all three cases are described as follows.

<u>Case I</u> The eigenvalues of J are real and distinct. There are three possible behaviors.

a. If both eigenvalues of J are negative, the equilibrium point will be a stable-two tangent node (Figure A.1).

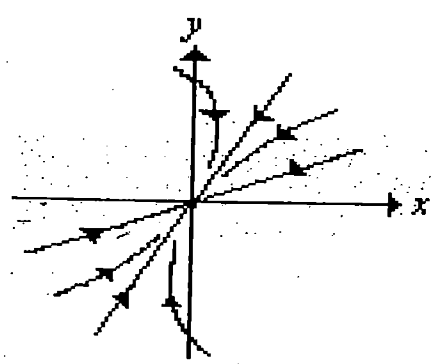


Figure A.1 A stable two-tangent node.

b. If both eigenvalues of J are positive, the equilibrium point will be an unstable two - tangent node(Figure A.2).

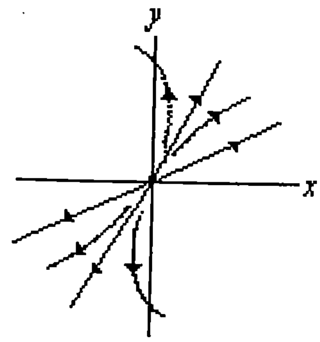


Figure A.2 An unstable two-tangent node.

c. If the eigenvalues of J have opposite signs, the critical point will be a saddle point (Figure A.3).

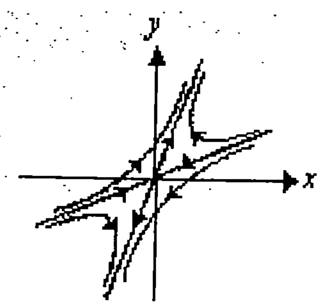


Figure A.3 A saddle point.

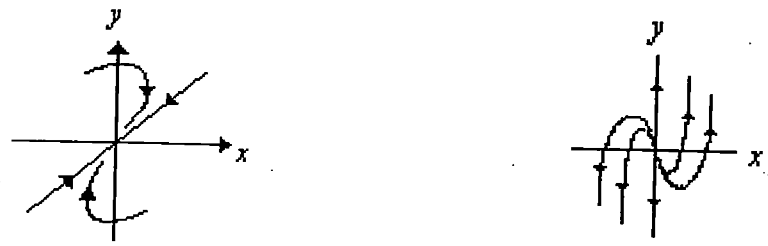
ii) The eigenvalues of J are real and repeated. There are two possible behaviors.

a. If J is diagonal and J is similar to the matrix as $J=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}$, then the critical point is called a stellar node which be stable if $\lambda < 0$ and unstable if $\lambda > 0$ (Figure A.4).

(a) Stable (b) Unstable

Figure A.4 A stellar node.

b. If J is not diagonal, then it is not similar to a diagonal matrix. The critical point is called a stable one-tangent node if $\lambda < 0$, and an unstable one-tangent node if $\lambda > 0$ (Figure A.5).



(a) Stable (b) Unstable

Figure A.5 The one-tangent node.

iii) The eigenvalues of J are complex.

It is necessary and sufficient that $\gamma = \alpha^2 - 4\beta$ is negative and then

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm i\sqrt{-\gamma}}{2}$$

There are six possible behaviors as follows.

a. If $\alpha > 0$ and $\beta > 0$, then the equilibrium point will be unstable node.

b. If $\alpha < 0$ and $\beta > 0$, then the equilibrium point will be stable node.

c. If $\alpha < 0$ then the equilibrium point will be a saddle point.

d. If $\alpha^2 < 4\beta$ and $\alpha > 0$, then the equilibrium point will be an unstable spiral node (Figure A.6).

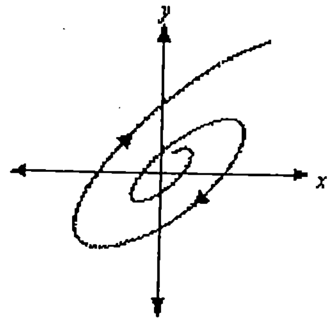


Figure A.6 An unstable spiral node.

e. If $\alpha^2 < 4\beta$ and $\alpha < 0$, then the equilibrium point will be a stable spiral node

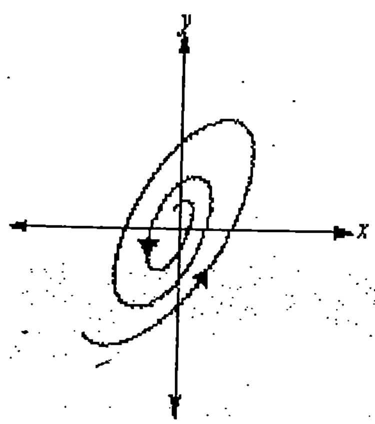


Figure A.7 A stable spiral node.

f. If $\alpha^2 < 4\beta$ and $\alpha = 0$ mean that the eigenvalues of J are purely imaginary, then the critical point will be a center (Figure A.8).

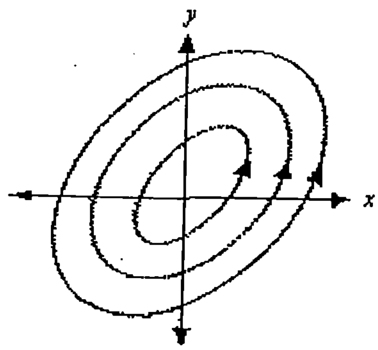


Figure A.8 A center.

In this section, we use the above ideas to apply for systems of n > 2 equations.

Consider

$$\frac{dX}{dt} = f_j(X_1, X_2, \ldots, X_k) \quad \text{where } j = 1,2,\ldots,k \qquad \text{(A.12)}$$

or in the form of vector notation

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \qquad \text{(A.13)}$$

for $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ and $F = (f_1, f_2, \ldots, f_k)$ where each function f_j depend on all or some $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$. The equilibrium point $\bar{Y}$ is obtained by solving $F(\bar{Y}) = 0$. The next step is to determine stability properties of this equilibrium point.

When we linearlize equation (A.13), the Jacobian is obtained by setting

$$J = \frac{\partial}{\partial X} F(\bar{Y}) \qquad \text{(A.14)}$$

where J is a k×k matrix. The eigenvalues λ of the matrix satisfy $\det(J - \lambda I) = 0$. We obtain a characteristic equation in the form

$$\lambda^k + b_1\lambda^{k-1} + \cdots + b_k = 0 \qquad \text{(A.15)}$$

The stability of the equilibrium point can be determined without solving the actual values of eigenvalues by using the Routh-Hurwitz criteria.

Definition A.5 (Routh-Hurwitz criteria for local asymptotical stability)

Take the characteristic equation (A.15), define k matrices as follows:

$H_1 = [b_1]$,

$$H_2 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{bmatrix},$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{bmatrix},\ldots,$$

$$Hj = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & \ldots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & \ldots & 0 \\ b_{2j-1} & b_{2j-2} & b_{2j-3} & b_{2j-4} & \ldots & b_j \end{bmatrix},\ldots,$$

$$H_k = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & b_k \end{bmatrix},$$

where the (l,m) term in the matrix H_j is

b_{2l-m} for $0 < 2l-m < k$

1 for $2l = m$

0 for $2l < m$ or $2l > k+m$.

Then all eigenvalues have negative real part. This means that the equilibrium point $\overline{X}$ is stable if and only if the determination of all Hurwitz matrices are positive which is

$\operatorname{Det} H_j > 0$ for $j = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Next, we show conditions of Routh-Hurwitz criteria for case k = 3 and 5 which are appeared in the thesis.

For k = 3;

We need to show that $\operatorname{Det} H_j > 0$ for $j = 1, 2$ and 3.

$H_1 = [b_1]$; $\operatorname{Det} H_1 = b_1$,

$$H_2 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{bmatrix}; \quad \operatorname{Det} H_2 = b_1 b_2 - b_3,$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{bmatrix}; \quad \text{Det } H_3 = b_1b_2b_3 - b_3^2 - b_1^2b_4 + b_1b_5 .$$

Since coefficients b_4 and b_5 in 3^{rd} order characteristic polynomial equation equal to zero then we have

Det $H_1 = b_1$,

Det $H_2 = b_1b_2 - b_3$ and

Det $H_3 = b_1b_2b_3 - b_3^2 = b_3(b_1b_2 - b_3)$.

So the three conditions which correspond to Det $H_j > 0$ for $j = 1, 2$ and 3 are $b_1 > 0$, $b_3 > 0$ and $b_1b_2 > b_3$.

Therefore the three conditions of Routh-Hurwitz criteria for local asymptotical stability in 3^{rd} order characteristic polynomial equation are

i) $b_1 > 0$,

ii) $b_3 > 0$ and

iii) $b_1b_2 > b_3$.

For $k = 5$

We need to show that Det $H_j > 0$ for $j = 1, 2, 3, 4$ and 5.

$H_1 = [b_1]$; Det $H_1 = b_1$,

$$H_2 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{bmatrix}; \quad \text{Det } H_2 = b_1b_2 - b_3 ,$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{bmatrix}; \quad \text{Det } H_3 = b_1b_2b_3 - b_3^2 - b_1^2b_4 + b_1b_5 ,$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 \\ b_7 & b_6 & b_5 & b_4 \end{bmatrix};$$

$$\text{Det } H_4 = b_1b_2b_3b_4 - b_3^2b_4 - b_1^2b_4^2 - b_1b_2^2b_5 + b_2b_3b_5 + 2b_1b_4b_5 - b_5^2 + b_1^2b_2b_6 - b_1b_3b_6$$

$$- b_1b_2b_7 + b_3b_7 ,$$

$$H_5 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ b_7 & b_6 & b_5 & b_4 & b_3 \\ b_9 & b_8 & b_7 & b_6 & b_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det } H_5 = {} & b_1b_2b_3b_4b_5 - b_3^2b_4b_5 - b_1^2b_4^2b_5 - b_1b_2^2b_5^2 + b_2b_3b_5^2 + 2b_1b_4b_5^2 - b_5^3 - b_1b_2b_3^2b_6 \\ & + b_3^2b_6 + b_1^2b_3b_4b_6 + 2b_1^2b_2b_5b_6 - 3b_1b_3b_5b_6 - b_1^3b_6^2 + b_1b_2^2b_3b_7 - b_2b_3^2b_7 \\ & - b_1^2b_2b_4b_7 - b_1b_2b_5b_7 + 2b_3b_5b_7 + 2b_1^2b_6b_7 - b_1b_7^2 - b_1^2b_2b_3b_8 + b_1b_3^2b_8 \\ & + b_1^3b_4b_8 - b_1^2b_5b_8 + b_1b_2b_3b_9 - b_3^2b_9 - b_1^2b_4b_9 + b_1b_5b_9. \end{aligned}$$

Since the coefficients b_6, b_7, b_8 and b_9 in 5^{th} order characteristic polynomial equation equal to zero then we have

$\text{Det } H_1 = b_1$,

$\text{Det } H_2 = b_1b_2 - b_3$,

$$\begin{aligned} \text{Det } H_3 &= b_1b_2b_3 - b_3^2 - b_1^2b_4 + b_1b_5 \\ &= b_3(b_1b_2 - b_3) - b_1(b_1b_4 - b_5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Det } H_4 &= b_1b_2b_3b_4 - b_3^2b_4 - b_1^2b_4^2 - b_1b_2^2b_5 + b_2b_3b_5 + 2b_1b_4b_5 - b_5^2 \\ &= b_4(b_1b_2b_3 - b_3^2 - b_1^2b_4) - b_5(b_1b_2^2 - b_2b_3 - 2b_1b_4 + b_5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Det } H_5 &= b_1b_2b_3b_4b_5 - b_3^2b_4b_5 - b_1^2b_4^2b_5 - b_1b_2^2b_5^2 + b_2b_3b_5^2 + 2b_1b_4b_5^2 - b_5^3 \\ &= b_5(b_4(b_1b_2b_3 - b_3^2 - b_1^2b_4) - b_5(b_1b_2^2 - b_2b_3 - 2b_1b_4 + b_5)) \end{aligned}$$

So the conditions which correspond to $\text{Det } H_j > 0$ for $j = 1, 2, 3, 4$ and 5. are

$$\begin{aligned} b_1 &> 0, \\ b_1b_2 - b_3 &> 0, \\ b_3(b_1b_2 - b_3) - b_1(b_1b_4 - b_5) &> 0, \\ b_4(b_1b_2b_3 - b_3^2 - b_1^2b_4) - b_5(b_1b_2^2 - b_2b_3 - 2b_1b_4 + b_5) &> 0. \end{aligned}$$

After we rearrange all above inequalities, we get the conditions of Routh-Hurwitz criteria for local asymptotical stability in 5^{th} order characteristic polynomial equation

i) $b_i > 0 \ (i = 1, 2, 3, 4, 5)$

ii) $b_1b_2b_3 > b_3^2 + b_1^2b_4$ and

iii) $(b_1b_4 - b_5)(b_1b_2b_3 - b_3^2 - b_1^2b_4) > b_5(b_1b_2 - b_3)^2 + b_1b_5^2$.

A2. Numerical Solutions of Differential Equations

In this research, we use Runge-Kutta-Fehlberg's method [13] which is one of the most widely used methods, and is particularly suitable in cases when the computation of higher derivatives is complicated. It can be used for equations of arbitrary order by means of a transformation to a system of first-order equations. We shall discuss the solution of three first-order equations. Let this system be

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z, t)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y, z, t)$$

$$\frac{dz}{dt} = h(x, y, z, t)$$

with initial point (x_0, y_0, z_0, t_0) and interval length h.

Runge-Kutta-Fehlberg's method for finding approximate values of x,y and z at each step is

$$x_{n+1} = x_n + \frac{(2375k_1 + 11264k_3 + 10985k_4 - 4104k_5}{20520},$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{(2375r_1 + 11264r_3 + 10985r_4 - 4104k_5}{20520}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{(2375s_1 + 11264s_3 + 10985s_4 - 4104s_5}{20520}$$

where

$$k_1 = hf(x_n, y_n, z_n, t_n),$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{k_1}{4}, y_n + \frac{r_1}{4}, z_n + \frac{s_1}{4}, t_n + \frac{h}{4}),$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{(3k_1 + 9k_2)}{32}, y_n + \frac{(3r_1 + 9r_2)}{32}; z_n + \frac{(3s_1 + 9s_2)}{32}, t_n + \frac{3h}{8}),$$

$$k_4 = hf(x_n + \frac{(1932k_1 - 7200k_2 + 7296k_3)}{2197},$$

$$y_n + \frac{(1922r_1 - 7200r_2 + 7296r_3)}{2197},$$

$$z_n + \frac{(1932s_1 - 7200s_2 + 7296s_3)}{2197}, t_n + \frac{12h}{13}),$$

$$k_5 = hf(x_n + \frac{(8341k_1 - 32832k_2 + 29440k_3 - 845k_4)}{4104},$$

$$y_n + \frac{(8341r_1 - 32832r_2 + 29440\, r_3 - 854r_4)}{4104},$$

$$z_n + \frac{(8341s_1 - 32832s_2 + 29440\, s_3 - 854s_4)}{4104}, t_n + h),$$

$$k_6 = hf(x_n + \frac{(-6080k_1 + 41040k_2 - 28352\, k_3 + 9295k_4 - 5643k_5)}{20520},$$

$$y_n + \frac{(-6080r_1 + 41040r_2 - 28352\, r_3 + 9295r_4 - 5643r_5)}{20520},$$

$$z_n + \frac{(-6080s_1 + 41040s_2 - 28352s_3 + 9295s_4 - 5643s_5)}{20520}, t_n + \frac{h}{2}),$$

and the error for each step will be

$$\text{Error} = \frac{k_1}{360} - \frac{128k_3}{4275} - \frac{2197k_4}{75240} + \frac{k_5}{50}.$$

$r_1, r_2, ..., r_6$ and the error of y value can be evaluated from the above equations. $s_1, s_2, ..., s_6$ and the error of z value can be evaluated from the above equations. $k_1, k_2, ..., k_6$ and error of x by replacing function f with function g and function h.

Runge-Kutta-Fehlberge's method can be applied directly to a system of n first-order differential equations

ภาคผนวก ข

ผลงานการวิจัย

P.Pongsumpun, Dynamical transmission model of Chikungunya in Thailand, *Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology*, Paris, France, Issue 68, July 2010,710-714.

Dynamical transmission model of Chikungunya in Thailand

P. Pongsumpun*

Abstract— One of the important tropical diseases is Chikunkunya. This disease is transmitted between the human by the insect-borne virus, of the genus *Alphavirus*. It occurs in Africa, Asia and the Indian subcontinent. In Thailand, the incidences due to this disease are increasing every year. In this study, the transmission of this disease is studied through dynamical model analysis.

Keywords—Chikunkunya, dynamical model, Endemic region, Routh-Hurwitz criteria.

I. Introduction

Mathematics have become a major tool for studying the evolution of vector-borne diseases [1-3]. For instance, several temporal deterministic models have been proposed for dengue [4-6], but, to our knowledge, only very few for Chikungunya [7].

Chikungunya is caused by the chikungunya virus, which is classified in the family Togaviridae, genus *Alphavirus*. It is spread by the biting of the infected Aedes mosquito. Most commonly, the mosquitoes involved are *Aedes aegypti* and *Aedes albopictus*. Humans are thought to be the major source, or reservoir, of chikungunya virus for mosquitoes. Therefore, the mosquito usually transmits the disease by biting an infected person and then biting someone else. An infected person cannot spread the infection directly to other persons.

Chikungunya is characterized by an abrupt onset of fever frequently accompanied by joint pain. Other common signs and symptoms include muscle pain, headache, nausea, fatigue and rash. The joint pain is often very debilitating, but usually ends within a few days or weeks. Most patients recover fully, but in some cases joint pain may persist for several months, or even years.

There is no vaccine or specific antiviral treatment currently available for chikungunya fever. Treatment is applied to the symptomatic patients and can include rest, fluids, and medicines to relieve symptoms of fever and aching such as ibuprofen, naproxen, acetaminophen, or paracetamol.

Chikungunya virus was first isolated in Tanzania during a 1952 to 1953 epidemic [8]. The first appearance of the virus in Southeast Asia by isolation during an intense epidemic of dengue fever and dengue hemorrhagic fever in Bangkok, Thailand, in 1958 [9]. Clinically, the disease can resemble classical dengue fever and in dengue endemic countries, this can give rise to confusion and misdiagnosis. The virus continued to be active in Thailand until the 1970s, after which it almost disappeared.

In 1988 evidence of chikungunya transmission in Thailand re-emerged, but the pattern was one of occasional outbreaks rather than severe epidemic disease. In 2008, a total of 2,233 cases of chikungunya fever were reported from 4 provinces of southern Thailand, Narathiwat, Pattani, Yala and Songkhla. The reported cases of chikungunya fever increased gradually week by week until the end of 2008 with the highest incidence of about 400 cases per week [10].

Studying the mathematical model for Chikunkunya began in 1970 [11]. After that, there is no study about the Chikunkunya model. Because there is the re-emergence of this disease in 2007, the study of the model for this disease is started again. N.Bacaer [12] studied the basic reproductive number of this disease by considering the mosquito population. In 2008, Y. Dumont and F. Chiroleu [13] formulated the mathematical model for human and mosquito population and find the stability condition for the disease free and endemic state.

The abundance of the mosquitoes in Thailand depends on the season and the temperature of the environment. In this paper, we formulate and analyze the Chikunkunya model by incorporating the effect of the season which effect to the number of the mosquitoes in Thailand.

II. Mathematical Model

Our model classifies the human into three epidemiological states:

S_h is the number of susceptible human,

I_h is the number of infectious human,

R_h is the number of recovered human.

We assume that the total human population (N_T) is constant, and $N_T = S_h + I_h + R_h$.

The mosquitoes are classified in three classes:

S_{vi} is the number of susceptible vector in i season,

E_{vi} is the number of exposed vector in i season,

I_{vi} is the number of infectious vector in i season,

when $i = 1, 2, 3$ if

$i = 1$ means winter season ,

P. Pongsumpun is with the Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalongkrung road, Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand (corresponding author to provide phone: 662-329-8400; fax: 662-329-8412; e-mail: kppuntan@ kmitl.ac.th)*

$i=2$ means rainy season ,
$i=3$ means summer season.
We obtain the following system equations

$$
\begin{aligned}
\frac{dS_h}{dt} &= \lambda N_T - (\mu_h + \gamma_h I_v) S_h, \\
\frac{dI_h}{dt} &= \gamma_h S_h I_v - (\mu_h + r) I_h, \\
\frac{dR_h}{dt} &= r I_h - \mu_h R_h, \\
\frac{dS_{vi}}{dt} &= A_i - (\gamma_v I_h + \mu_v) S_{vi}, \\
\frac{dE_{vi}}{dt} &= \gamma_v S_{vi} I_h - (\mu_v + q) E_{vi}, \\
\frac{dI_{vi}}{dt} &= q E_{vi} - \mu_v I_{vi}
\end{aligned} \tag{1}
$$

where $I_v = I_{v1} + I_{v2} + I_{v3}$
with

λ is the birth rate of the human population,
μ_h is the death rate of the human population,
γ_h is the transmission rate from vector to human population,
r is the recoverey rate of the human population,
A_i is the constant recruitment rate of the vector population at the i^{th} season,
μ_v is the death rate of the vector population,
γ_v is the transmission rate from human to vector population,
q is the rate at which the exposed vector change to be the infectious vector.

Using the fact $N_T = S_h + I_h + R_h$, $N_{v1} = S_{v1} + E_{v1} + I_{v1}$, $N_{v2} = S_{v2} + E_{v2} + I_{v2}$ and $N_{v3} = S_{v3} + E_{v3} + I_{v3}$ are constants. We let $\overline{S_h} = \frac{S_h}{N_T}$, $\overline{I_h} = \frac{I_h}{N_T}$, $\overline{R_h} = \frac{R_h}{N_T}$,

$$
\overline{S_{v1}} = \frac{S_{v1}}{N_{v1}},\ \overline{E_{v1}} = \frac{E_{v1}}{N_{v1}},\ \overline{R_{v1}} = \frac{R_{v1}}{N_{v1}},\ \overline{S_{v2}} = \frac{S_{v2}}{N_{v2}}
$$

$$
\overline{E_{v2}} = \frac{E_{v2}}{N_{v2}}, \overline{R_{v2}} = \frac{R_{v2}}{N_{v2}},\ \overline{S_{v3}} = \frac{S_{v3}}{N_{v3}},\ \overline{E_{v3}} = \frac{E_{v3}}{N_{v3}} \text{ and}
$$

$$
\overline{R_{v3}} = \frac{R_{v3}}{N_{v3}}. \tag{2}
$$

The total human population and the numbers of vector in i^{th} season are assumed to be constant, then the rates of change for all population equal to zero. From setting the rate of change for each population equals to zero, we obtained $\lambda = \mu_h$, $N_{v1} = A_1/\mu_v$, $N_{v2} = A_2/\mu_v$ and $N_{v3} = A_3/\mu_v$.

Then the normalized equations become:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\overline{S_h}}{dt} &= \mu_h - (\mu_h + \gamma_h(\overline{I_{v1}} N_{v1} + \overline{I_{v2}} N_{v2} + \overline{I_{v3}} N_{v3}))\overline{S_h}, \\
\frac{d\overline{I_h}}{dt} &= \gamma_h \overline{S_h}(\overline{I_{v1}} N_{v1} + \overline{I_{v2}} N_{v2} + \overline{I_{v3}} N_{v3}) - (\mu_h + r)\overline{I_h}, \\
\frac{d\overline{E_{v1}}}{dt} &= \gamma_v(1 - \overline{E_{v1}} - \overline{I_{v1}})\overline{I_h} N_T - (\mu_v + q)\overline{E_{v1}}, \\
\frac{d\overline{I_{v1}}}{dt} &= q\overline{E_{v1}} - \mu_v \overline{I_{v1}}, \\
\frac{d\overline{E_{v2}}}{dt} &= \gamma_v(1 - \overline{E_{v2}} - \overline{I_{v2}})\overline{I_h} N_T - (\mu_v + q)\overline{E_{v2}}, \\
\frac{d\overline{I_{v2}}}{dt} &= q\overline{E_{v2}} - \mu_v \overline{I_{v2}}, \\
\frac{d\overline{E_{v3}}}{dt} &= \gamma_v(1 - \overline{E_{v3}} - \overline{I_{v3}})\overline{I_h} N_T - (\mu_v + q)\overline{E_{v3}}, \\
\frac{d\overline{I_{v3}}}{dt} &= q\overline{E_{v3}} - \mu_v \overline{I_{v3}}
\end{aligned} \tag{3}
$$

where

$\overline{R_h} = 1 - \overline{S_h} - \overline{I_h}$, $\overline{S_{v1}} = 1 - \overline{E_{v1}} - \overline{I_{v1}}$, $\overline{S_{v2}} = 1 - \overline{E_{v2}} - \overline{I_{v2}}$ and $\overline{S_{v3}} = 1 - \overline{E_{v3}} - \overline{I_{v3}}$. (4)

III. ANALYSIS OF THE MODEL

A. Analytical Solutions

The equilibrium states $(S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*)$ are found by setting the right hand side of (3) to zero, then we obtain: $E_1 = (1,0,0,0,0,0,0,0)$ as the disease free equilibrium state and $E_2 = (S_h^*, I_h^*, E_{v1}^*, I_{v1}^*, E_{v2}^*, I_{v2}^*, E_{v3}^*, I_{v3}^*)$ as the endemic equilibrium state:
where

$$
\begin{aligned}
S_h^* &= \frac{1}{1 + \beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*}, \\
I_h^* &= \frac{(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{\sigma_1(1 + \beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}, \\
E_{v1}^* &= \frac{(1 - I_{v1}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1 + \beta_4 \sigma_1) + \beta_4 \sigma_1}, \\
I_{v1}^* &= \frac{q(1 - I_{v1}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{\mu_v((\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1 + \beta_4 \sigma_1) + \beta_4 \sigma_1)}, \\
E_{v2}^* &= \frac{(1 - I_{v2}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1 + \beta_4 \sigma_1) + \beta_4 \sigma_1}, \\
I_{v2}^* &= \frac{q(1 - I_{v2}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{\mu_v((\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1 + \beta_4 \sigma_1) + \beta_4 \sigma_1)},
\end{aligned}
$$

$$E_{v3}^* = \frac{(1-I_{v3}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1+\beta_4\sigma_1) + \beta_4\sigma_1},$$

$$I_{v3}^* = \frac{q(1-I_{v3}^*)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)}{\mu_v((\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)(1+\beta_4\sigma_1) + \beta_4\sigma_1)},$$

where

$$\beta_1 = \frac{\gamma_h N_{v1}}{\mu_h},\ \beta_2 = \frac{\gamma_h N_{v2}}{\mu_h},\ \beta_3 = \frac{\gamma_h N_{v3}}{\mu_h}, \beta_4 = \frac{\mu_v + q}{\gamma_v N_T}$$

and $\sigma_1 = \dfrac{\mu_h + r}{\mu_h}$.

The characteristic equation of (3) for the disease free equilibrium state is

$$(\mu_h + \lambda)(\mu_v + \lambda)^2(\beta_4\mu_v N_T + \lambda)^2(\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0$$

where

$$a_2 = \sigma_1\mu_h + (1 + N_T\beta_4)\mu_v,$$

$$a_1 = \mu_v((1+N_T\beta_4)\sigma_1\mu_h + N_T\beta_4\mu_v),$$

$$a_0 = N_T\mu_h(-q(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\gamma_v + \beta_4\sigma_1\mu_v^2).$$

The eigenvalues are

$\lambda_1 = -\mu_h$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -\mu_v$, $\lambda_4 = \lambda_5 = -\beta_4\mu_v N_T$.

The remaining three eigenvalues can be found from equation

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

From the Routh-Hurwitz stability condition, the eigenvalues λ_6, λ_7 and λ_8 are negative when

1) $a_2 > 0$,
2) $a_0 > 0$ and
3) $a_2 a_1 > a_0$.

The first condition $a_2 = \sigma_1\mu_h + (1 + N_T\beta_4)\mu_v$ is always positive. The second condition, $a_0 = N_T\mu_h(-q(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\gamma_v + \beta_4\sigma_1\mu_v^2)$ is positive when $\beta_4\sigma_1\mu_v^2 > q(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\gamma_v$ or

$$R_0 = \frac{q(N_{v1}+N_{v2}+N_{v3})\gamma_h\gamma_v^2 N_T}{(\mu_h + r)(\mu_v + q)\mu_v^2} < 1.$$

The last condition, $a_2 a_1 - a_0 = qN_T(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\gamma_v\mu_h + (1+N_T\beta_4)\mu_v(\sigma_1\mu_h + \mu_v)(\sigma_1\mu_h + N_T\beta_4\mu_v)$ is always positive.

From our evaluations, we found that all eigenvalues have negative real parts for $R_0 < 1$. By the local stability theorem [5], the disease free state is local asymptotically stable for $R_0 < 1$.

The characteristic equation of (3) for the endemic disease state is

$$(\lambda^2 + c_1\lambda + c_2)^2(\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4) = 0$$

where

$$c_1 = (1 + N_T\beta_4)\mu_v + N_T\gamma_v I_h^*,$$

$$c_0 = N_T(\beta_4\mu_v^2 + \gamma_v(q+\mu_v)I_h^*),$$

$$b_1 = (1+N_T\beta_4)\mu_v + N_T\gamma_v I_h^* + \mu_h(1 + \sigma_1 + \beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*),$$

$$b_2 = N_T(\beta_4\mu_v^2 + \gamma_v(q+\mu_v)I_h^*) + \mu_h(\mu_v + N_T\beta_4\mu_v + N_T\gamma_v I_h^*)(1 + \beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*) + \sigma_1\mu_h(\mu_v + N_T\beta_4\mu_v + N_T\gamma_v I_h^* + \mu_h(1 + \beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*)),$$

$$b_3 = \mu_h\mu_v((1+N_T\beta_4)\sigma_1\mu_h + N_T\beta_4\mu_v) + N_T\mu_h(-q(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\gamma_v + \beta_4\sigma_1\mu_v^2\mu_h(\sigma_1\mu_h\mu_v(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*) + N_T(\beta_4\mu_v(\sigma_1\beta_4 + \mu_v)(\beta_1 I_{v1}^* + \beta_2 I_{v2}^* + \beta_3 I_{v3}^*) + \gamma_v(I_h^*(q + q\beta_3 + q\sigma_1 + \sigma_1\mu_h + \mu_v + \sigma_1\mu_v + \beta_1(q + (q + \sigma_1\mu_h + \mu_v)I_{v1}^*) + \beta_2(q + (q+\sigma_1\mu_h + \mu_v)I_{v2}^*) + \beta_3(q + \sigma_1\mu_h + \mu_v)I_{v3}^*) + q(\beta_1+\beta_2+\beta_3)R_h^* +$$

$$b_4 = N_T\mu_h^2(-q(\beta_1+\beta_2+\beta_3)\gamma_v + \beta_4\sigma_1\mu_v^2) + N_T\mu_h^2(q\beta_3\gamma_v I_h^* + q\gamma_v\sigma_1 I_h^* + \sigma_1\gamma_v\mu_v I_h^* + \beta_3\beta_4\sigma_1\mu_v^2 I_{v3}^* + q\beta_3\gamma_v\sigma_1 I_h^* I_{v3}^* + \beta_3\gamma_v\mu_v\sigma_1 I_h^* I_{v3}^* + q\beta_3\gamma_v R_h^* + q\beta_3\gamma_v(I_{v3}^* + E_{v3}^*)S_h^* + \beta_1(\beta_4\sigma_1\mu_v^2 I_{v1}^* + \gamma_v(I_h^*(q + \sigma_1(q+\mu_v)I_{v1}^*) + q(R_h^* + (I_{v1}^* + E_{v1}^*)S_h^*)) + \beta_2(\beta_4\sigma_1\mu_v^2 I_{v2}^* + \gamma_v(I_h^*(q + \sigma_1(q+\mu_v)I_{v2}^*) + q(R_h^* + (I_{v2}^* + E_{v2}^*)S_h^*))).$$

The eigenvalues are given by

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}(-\mu_v - N_T\beta_4\mu_v - N_T\gamma_v I_h^* - \sqrt{(\mu_v + N_T\beta_4\mu_v + N_T\gamma_v I_h^*)^2 - 4(N_T\beta_4\mu_v^2 + qN_T\gamma_v I_h^* + N_T\gamma_v\mu_v I_h^*)}$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{2}(-\mu_v - N_T\beta_4\mu_v - N_T\gamma_v I_h^* + \sqrt{(\mu_v + N_T\beta_4\mu_v + N_T\gamma_v I_h^*)^2 - 4(N_T\beta_4\mu_v^2 + qN_T\gamma_v I_h^* + N_T\gamma_v\mu_v I_h^*)}$$

Since

$$\mu_v + N_T\beta_4\mu_v + N_T\gamma_v I_h^* > \sqrt{(\mu_v + N_T\beta_4\mu_v + N_T\gamma_v I_h^*)^2 - 4(N_T\beta_4\mu_v^2 + qN_T\gamma_v I_h^* + N_T\gamma_v\mu_v I_h^*)}$$

So, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ are always negative.

The remaining eigenvalues are calculated from

$$\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 = 0.$$

From the Routh-Hurwitz criteria, the eigenvalues $\lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$ and λ_8 are negative when

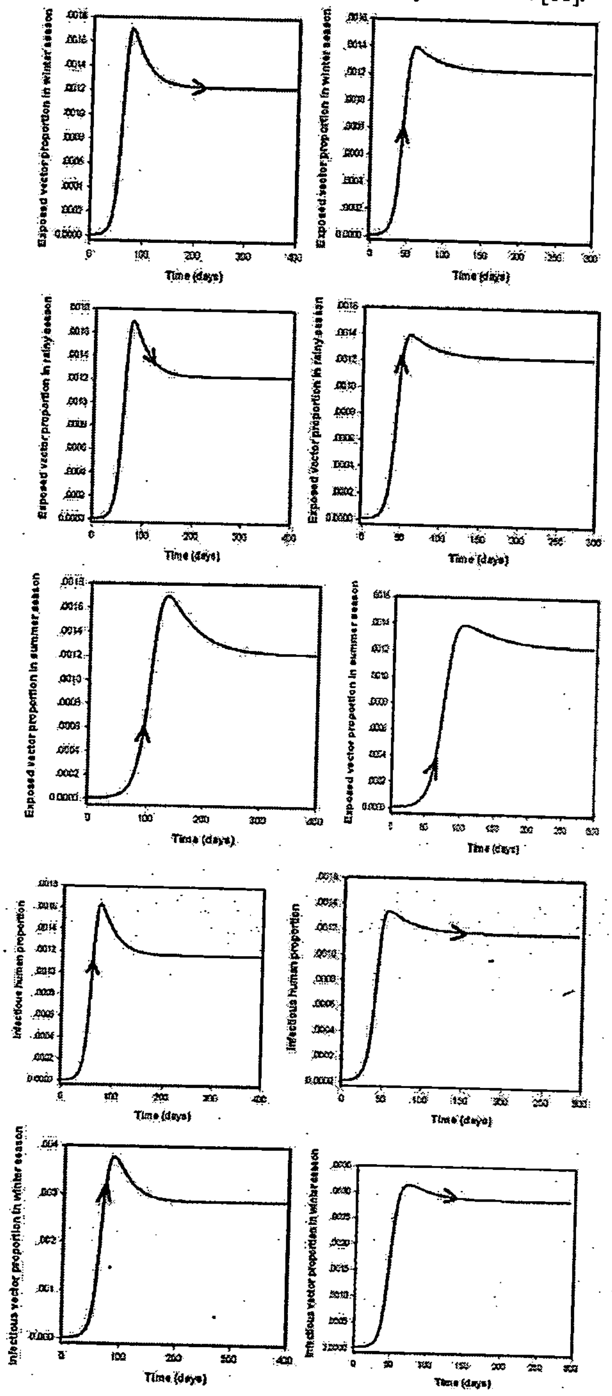
1) $b_1 > 0$,
2) $b_3 > 0$,
3) $b_4 \geq 0$ and
4) $b_1 b_2 b_3 > b_3^2 + b_1^2 b_4$.

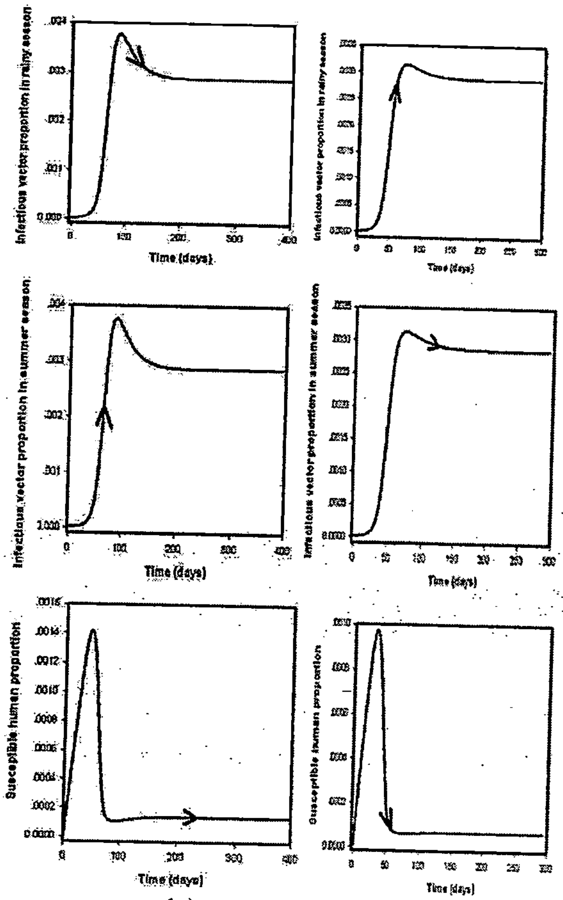
From the calculations, we found that the above conditions satisfied when $R_0 > 1$. So the endemic disease state is local asymptotically stability for $R_0 > 1$.

B. *Numerical Solutions*

In this section, we use the numerical methods to simulate the results of system (3). The comparison for the different threshold conditions (R_0) of the endemic equilibrium state is presented. The parameters in this simulation are: $\mu_h = 1/(365 \times 70)$ corresponds to the life expectancy of 70 years for human, $q = 1/3$ correspond to the 3 days which the exposed vector change to be the infectious vector,

$r = 1/30$ correspond to the recovery of 30 days, $\mu_v = 1/7$ correspond to the life expectancy of 7 days for vector [11].





1a) 1b)

Fig 1. Numerical solutions of the system (3), demonstrate the time series ; $\overline{S_h}, \overline{I_h}, \overline{E_{v1}}, \overline{I_{v1}}, \overline{E_{v2}}, \overline{I_{v2}}, \overline{E_{v3}}, \overline{I_{v3}}$ respectively for $N_T = 25{,}000$, $N_{v1} = 5{,}000$, $N_{v3} = 10{,}000$, $\mu_h = 1/(365 \times 70)$ per day, $\mu_v = 1/7$ per day, $r = 1/30$ per day, $q = 1/3$ per day, $\gamma_h = 0.00001$, $\gamma_v = 0.00002$.

a) $R_0 = 1.00878$. The fractions of populations spiral to the endemic state (0.000139935, 0.00117262, 0.00122622, 0.0028612, 0.00122622, 0.0028612, 0.00122622, 0.0028612).

b) $R_0 = 2.05713$. The fractions of populations spiral to the endemic state (0.000068335, 0.00117271, 0.00122631, 0.00286139, 0.00122631, 0.00286139, 0.00122631, 0.00286139).

IV. DISCUSSION AND CONCLUSION

The transmission of Chikunkunya in human and mosquitoes is studied through the method of dynamical modeling. Routh-Hurwitz stability condition is used for determining the behavior of the population. The threshold condition (R_0) is found to classify the stability property of each equilibrium state. We compare the dynamical behavior of each individual population in fig.1. We can see that the shorter days of