

รายงานการวิจัย  
แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่เชื้อตามโครงสร้างอายุ  
และซีโรไทป์ของโรคไข้เลือดออก  
MATHEMATICAL MODEL FOR THE TRANSMISSION BY AGE  
STRUCTURE AND SEROTYPES OF DENGUE DISEASE

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พันธณี พงศ์สัมพันธ์  
(หัวหน้าโครงการ)

RCH

RA

644

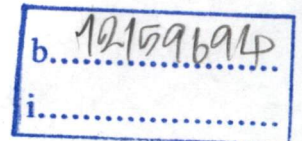
D4

พ564ช

เลขหมู่.....

เลขทะเบียน.....105840

วัน,เดือน,ปี.....- 4 . S . A . 2552



ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ประจำปีงบประมาณ 2552

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

## กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ Professor Dr. I-Ming Tang, Mahidol University, Thailand และ Professor Dr. Marc A. Dubois, Service de Physique de l'Etat Condensé, Commissariat à l'Energie Atomique CEA Saclay –Orme des Merisiers, Cedex, France เป็นอย่างสูง ที่กรุณาให้คำปรึกษาแนะนำต่างๆ ในการทำงานวิจัย และดูแลเอาใจใส่การทำงานและให้ความรู้ พร้อมกับประสบการณ์ที่ดีต่างๆ ตลอดมา

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์สาขาคณิตศาสตร์ รวมถึงเจ้าหน้าที่ประจำสาขาวิชาทุกท่านที่ช่วยเหลือในด้านการอำนวยความสะดวกเกี่ยวกับอุปกรณ์ที่จำเป็นต่างๆ

ขอกราบขอบพระคุณครอบครัว ที่ได้ให้การสนับสนุนทุกประการทางการทำวิจัย และยังให้กำลังใจตลอดมาจนถึงปัจจุบัน และต้องขอขอบคุณเพื่อนๆ ทุกคนที่ช่วยเหลือให้คำแนะนำต่างๆ งานวิจัยสำเร็จสมบูรณ์ยิ่งขึ้น รวมทั้งนางสาว รุจิรา คงนุ้ย ซึ่งเป็นผู้ช่วยวิจัยของงานวิจัยฉบับนี้

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากปัญหาพิเศษฉบับนี้ ผู้จัดทำขออุทิศแด่บิดา มารดา และผู้มีพระคุณทุกท่าน

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ได้ให้ทุนสนับสนุนการทำงานวิจัยนี้

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. พันธณี พงศ์สัมพันธ์

ชื่อโครงการวิจัย	แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่เชื้อตามโครงสร้างอายุและซีโรไทป์ของโรคไข้เลือดออก Mathematical model for the transmission by age structure and serotypes of dengue disease
ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจาก	คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ประจำปี 2552	จำนวนเงิน 50,000 บาท
ระยะเวลาทำการวิจัย 1 ปี	ตั้งแต่ เดือน ตุลาคม ปี 2551 ถึงเดือน กันยายน ปี 2552
หน่วยงาน	คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ผู้ดำเนินการวิจัย	ผศ.ดร.พันธินี พงศ์สัมพันธ์ (หัวหน้าโครงการ) สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง โทรศัพท์ 02-737-3000 ต่อ 6196

### บทคัดย่อ

โรคไข้เลือดออกเป็นโรคที่เกิดจากเชื้ออาร์โบไวรัส (arboviral-disease) ซึ่งสามารถถูกพบได้ในประเทศแถบร้อน โดยเฉพาะประเทศไทย โรคนี้สามารถถูกถ่ายทอดโดยการกัดของยุง *Aedes Aegypti* การระบาดของไวรัสเด็งก็ถูกนำมาศึกษาโดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยพิจารณาถึงอิทธิพลของอายุและชนิดของเชื้อที่เป็น เราพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ขึ้นมาใหม่จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไวรัสเด็งก็ของ Esteva และ Vargas (1998) ซึ่งไม่มีอิทธิพลของโครงสร้างอายุ โดยการเพิ่มอิทธิพลของอายุและชนิดของเชื้อที่เป็น เราประยุกต์วิธีการของ standard dynamical modeling มาวิเคราะห์ลักษณะของคำตอบในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แต่ละแบบ พร้อมทั้งแสดงเงื่อนไขของตัวแปรที่ทำให้เกิดความเสถียรภายใน (local asymptotically stable) ของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรค (disease free state) และสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง (disease endemic state) ผลลัพธ์เชิงตัวเลขของแบบจำลองได้ถูกนำมาแสดง เพื่อใช้ในการสนับสนุนสมมติฐานในการศึกษา

## ABSTRACT

Dengue disease is the arboviral-disease that can be found in tropical regions of the world, especially Thailand. It can be transmitted by the bites of the infected *Aedes Aegypti*. The transmission of dengue virus is studied by formulating a mathematical model which can be modified to describe the transmission of the disease by considering the age structure and serotypes. We have reformulated the mathematical model proposed by Esteva and Vargas (1998) which contains no age structure. We add the age structure and serotypes which would make the model more appropriated. We obtain the conditions required of the parameters for the disease free and endemic equilibrium points to be local asymptotically stable. Numerical solutions are obtained to support the theoretical predictions.

## สารบัญ

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	i
บทคัดย่อภาษาไทย	ii
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	iii
สารบัญ	iv
สารบัญภาพ	v
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย	1
1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย	1
1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย	2
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	2
1.5 ระเบียบวิธีการวิจัย	3
1.6 ทฤษฎีหรือกรอบแนวความคิดของโครงการวิจัย	3
บทที่ 2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้เลือดออก	4
บทที่ 3 การวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้เลือดออก	22
บทที่ 4 สรุปวิจารณ์ และเสนอแนะงานวิจัยในอนาคต	142
บรรณานุกรม	143
ภาคผนวก ก นิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง	145
ภาคผนวก ข ผลงานการวิจัย	160

## สารบัญภาพ

	หน้า
รูปที่ 2.1 วงจรชีวิตยุงลาย ( <i>Aedes aegypti</i> )	6
รูปที่ 2.2 แผนภาพแสดงการแพร่ของโรคไข้เลือดออก	10
รูปที่ 2.3 แผนภาพแสดงการแพร่เชื้อไวรัสเดงกี	12
รูปที่ 2.4 แผนภาพแสดงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้เลือดออก	14
รูปที่ 2.5 แผนภาพแสดงการระบาดของโรค	15
รูปที่ 2.6 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง 2 ชนิดเชื้อ	17
รูปที่ 2.7 กราฟแสดงจำนวนอัตราการป่วยต่อประชากรแสนคน ตั้งแต่ปี 1997-2007 จากข้อมูลของกรมควบคุมโรค สำนักโรคระบาดวิทยา กระทรวงสาธารณสุข	19
รูปที่ 2.8 กราฟแสดงร้อยละผู้ป่วยจำแนกตาม serotype ตั้งแต่ปี 2000-2007	20
รูปที่ 2.9 กราฟแสดงจำนวนผู้ป่วย โดยให้แยกเป็น โครงสร้างอายุตั้งแต่ปี 1997-2007	21
รูปที่ 3.10 แผนภาพแสดงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับชนิดเชื้อ 2 ชนิดต่างกัน	22
รูปที่ 3.11 ผลเฉลยสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ $S, I_{D1}, I_{D2}, R$ ตามลำดับ สำหรับ $R_0 < 1$	38
รูปที่ 3.12 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและ $I_V$ สำหรับ $R_0 < 1$	39
รูปที่ 3.13 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(S, I_{D1})$ , $(S, I_{D2})$ , $(S, R)$ , $(S, I_V)$ สำหรับ $R_0 < 1$	40
รูปที่ 3.14 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(I_{D1}, I_{D2})$ , $(I_{D1}, R)$ $(I_{D1}, I_V)$ , $(I_{D2}, R)$ สำหรับ $R_0 < 1$	41
รูปที่ 3.15 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(I_{D2}, I_V)$ , $(R, I_V)$ สำหรับ $R_0 < 1$	42

## หน้า

- รูปที่ 3.16 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_{D1}, I_{D2})$  ,  
 $(S, I_{D1}, R)$  ,  $(S, I_{D1}, I_V)$  สำหรับ  $R_0 < 1$  43
- รูปที่ 3.17 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของเวลากับ  $S, I_{D1}, I_{D2}, R$   
 สำหรับ  $R_0 > 1$  44
- รูปที่ 3.18 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของเวลากับ  $I_V$  สำหรับ  
 $R_0 > 1$  45
- รูปที่ 3.19 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_{D1})$  ,  $(S, I_{D2})$  ,  
 $(S, R)$  ,  $(S, I_V)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  46
- รูปที่ 3.20 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D1}, I_{D2})$  ,  
 $(I_{D1}, R)$  ,  $(I_{D1}, I_V)$  ,  $(I_{D2}, R)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  47
- รูปที่ 3.21 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D2}, I_V)$  ,  $(R, I_V)$   
 สำหรับ  $R_0 > 1$  48
- รูปที่ 3.22 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_{D1}, I_{D2})$  ,  
 $(S, I_{D1}, R)$  ,  $(S, I_{D1}, I_V)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  49
- รูปที่ 3.23 กราฟแสดงความสัมพันธ์จุดสมดุลระหว่างสัดส่วนของคนที่ไวต่อการติดเชื้อและค่า  
 สืบพันธุ์พื้นฐาน  $R_0$  50
- รูปที่ 3.24 กราฟแสดงความสัมพันธ์จุดสมดุลระหว่างสัดส่วนของยุงที่ติดเชื้อและค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน  
 $R_0$  51
- รูปที่ 3.25 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ  $S$  สำหรับ  
 $R_0 > 1$  52

## หน้า

- รูปที่ 3.26 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ  $I_{D1}$  สำหรับ  $R_0 > 1$  53
- รูปที่ 3.27 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ  $I_{D2}$  สำหรับ  $R_0 > 1$  54
- รูปที่ 3.28 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ  $R$  สำหรับ  $R_0 > 1$  55
- รูปที่ 3.29 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ  $I_V$  สำหรับ  $R_0 > 1$  56
- รูปที่ 3.30 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_{D1})$  สำหรับ  $R_0 > 1$  57
- รูปที่ 3.31 ผลเฉลยของสมการ (3.1)-(3.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_{D2})$  สำหรับ  $R_0 > 1$  58
- รูปที่ 3.32 ผลเฉลยของสมการ (3.1)-(3.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, R)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  59
- รูปที่ 3.33 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_V)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  60
- รูปที่ 3.34 ผลเฉลยของสมการ (3.1)-(3.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D1}, I_{D2})$  สำหรับ  $R_0 > 1$  61
- รูปที่ 3.35 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D1}, R)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  62
- รูปที่ 3.36 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D1}, I_V)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  63
- รูปที่ 3.37 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D2}, R)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  64

## หน้า

รูปที่ 3.38 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(I_{D2}, I_V)$ สำหรับ $R_0 > 1$	65
รูปที่ 3.39 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(R, I_V)$ สำหรับ $R_0 > 1$	66
รูปที่ 3.40 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(S, I_{D1}, I_{D2})$ สำหรับ $R_0 > 1$	67
รูปที่ 3.41 ผลเฉลยของสมการ (3.1)-(3.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(S, I_{D1}, R)$ สำหรับ $R_0 > 1$	68
รูปที่ 3.42 ผลเฉลยของสมการ (3.1)-(3.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(S, I_{D1}, I_V)$ สำหรับ $R_0 > 1$	69
รูปที่ 3.43.1 แผนภาพแสดงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับชนิดเชื้อ 4 ชนิดต่างกัน	72
รูปที่ 3.43 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของเวลากับ $S, I_{D1}, I_{D2}, I_{D3}$ สำหรับ $R_0 < 1$	86
รูปที่ 3.44 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของเวลากับ $I_{D4}, R, I_V$ สำหรับ $R_0 < 1$	87
รูปที่ 3.45 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ $(S, I_{D1}), (S, I_{D2}), (S, I_{D3}), (S, I_{D4})$ สำหรับ $R_0 < 1$	88
รูปที่ 3.46 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ $(S, R), (S, I_V), (I_{D1}, I_{D2}), (I_{D1}, I_{D3})$ สำหรับ $R_0 < 1$	89
รูปที่ 3.47 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ $(I_{D1}, I_{D4}), (I_{D1}, R), (I_{D1}, I_V), (I_{D2}, I_{D3})$ สำหรับ $R_0 < 1$	90

	หน้า
รูปที่ 3.48 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ ของ $(I_{D2}, I_{D4}), (I_{D2}, R), (I_{D2}, I_V), (I_{D3}, I_{D4})$ สำหรับ $R_0 < 1$	91
รูปที่ 3.49 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ ของ $(I_{D3}, R), (I_{D3}, I_V), (I_{D4}, R), (I_{D4}, I_V)$ สำหรับ $R_0 < 1$	92
รูปที่ 3.50 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ $(R, I_V)$ สำหรับ $R_0 < 1$	93
รูปที่ 3.51 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ $(S, I_{D1}, I_{D2}), (S, I_{D1}, I_{D3}),$ $(S, I_{D1}, I_{D4}), (S, I_{D1}, R)$ สำหรับ $R_0 < 1$	94
รูปที่ 3.52 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ $(S, I_{D1}, I_V)$ สำหรับ $R_0 < 1$	95
รูปที่ 3.53 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ $S, I_{D1}, I_{D2}, I_{D3}$ สำหรับ $R_0 > 1$	96
รูปที่ 3.54 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ $I_{D4}, R, I_V$ สำหรับ $R_0 > 1$	97
รูปที่ 3.55 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(S, I_{D1}),$ $(S, I_{D2}), (S, I_{D3}), (S, I_{D4})$ สำหรับ $R_0 > 1$	98
รูปที่ 3.56 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(S, R), (S, I_V),$ $(I_{D1}, I_{D2}), (I_{D1}, I_{D3})$ สำหรับ $R_0 > 1$	99

	หน้า
รูปที่ 3.57 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(I_{D1}, I_{D4}), (I_{D1}, R), (I_{D1}, I_v), (I_{D2}, I_{D3})$ สำหรับ $R_0 > 1$	100
รูปที่ 3.58 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(I_{D2}, I_{D4}), (I_{D2}, R), (I_{D2}, I_v), (I_{D3}, I_{D4})$ สำหรับ $R_0 > 1$	101
รูปที่ 3.59 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(I_{D3}, R), (I_{D3}, I_v), (I_{D4}, R), (I_{D4}, I_v)$ สำหรับ $R_0 > 1$	102
รูปที่ 3.60 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(R, I_v)$ สำหรับ $R_0 > 1$	103
รูปที่ 3.61 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(S, I_{D1}, I_{D2}), (S, I_{D1}, I_{D3}), (S, I_{D1}, I_{D4}), (S, I_{D1}, R)$ สำหรับ $R_0 > 1$	104
รูปที่ 3.62 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $(S, I_{D1}, I_v)$ สำหรับ $R_0 > 1$	105
รูปที่ 3.63 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ คนที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 คนที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 และสัดส่วนคนที่ติดเชื้อชนิดที่ 3 เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0$ )	106
รูปที่ 3.64 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 คนที่ฟื้นไข้และสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0$ )	107
รูปที่ 3.65 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อกับเวลา เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ )	108





## หน้า

- รูปที่ 3.90 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 กับคนพื้นไข่ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) 133
- รูปที่ 3.91 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 กับยุงที่ติดเชื้อ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) 134
- รูปที่ 3.92 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนพื้นไข่กับยุงที่ติดเชื้อ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) 135
- รูปที่ 3.93 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) 136
- รูปที่ 3.94 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 3 เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) 137
- รูปที่ 3.95 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) 138
- รูปที่ 3.96 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และคนพื้นไข่ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) 139
- รูปที่ 3.97 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และยุงที่ติดเชื้อ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) 140

## บทที่ 1

### บทนำ

#### 1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่มีความสำคัญยิ่งในการศึกษาด้านวิศวกรรม ฟิสิกส์ เคมี ชีววิทยา เศรษฐศาสตร์ แพทยศาสตร์และสาขาอื่นๆอีกมากมาย ในงานวิจัยชิ้นนี้ได้นำคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ทางการแพทย์ เพื่อศึกษา วิเคราะห์ และนำไปสู่การควบคุมการระบาดของโรคไข้เลือดออก ซึ่งปัจจัยของอายุ และซีโรไทป์เป็นปัจจัยที่ทำให้การระบาดของโรคนี้มีความแตกต่างกัน โรคไข้เลือดออกนี้เป็นปัญหาทางสาธารณสุขที่สำคัญของประเทศในแถบเอเชียตะวันออกเฉียงใต้รวมทั้งประเทศไทย

งานวิจัยชิ้นนี้เป็นการสร้าง พัฒนา และศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการแพร่เชื้อตามอายุและซีโรไทป์ของโรคไข้เลือดออก พร้อมทั้งวิเคราะห์และหาวิธีการแก้ปัญหา โดยใช้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์มาวิเคราะห์แบบจำลองที่ได้เพื่อนำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรค ลดจำนวนผู้ป่วย และใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการควบคู่กับสถิติการเกิดโรคของประเทศไทยทั่วภูมิภาคของโรคที่เฝ้าระวังของทางสำนักระบาดวิทยา กระทรวงสาธารณสุขต่อไป

#### 1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1. เพื่อศึกษาลักษณะการแพร่เชื้อตามอายุและซีโรไทป์ของโรคไข้เลือดออก
2. เพื่อสร้างและพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่เชื้อตามอายุและซีโรไทป์ของโรคไข้เลือดออก
3. เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์กับการแพร่เชื้อตามอายุและซีโรไทป์ของโรคไข้เลือดออก
4. เพื่อหาแนวทางใหม่ในการลดการระบาดของโรคนี้นให้น้อยลง โดยใช้ความรู้และทฤษฎีทางคณิตศาสตร์
5. เพื่อใช้ความรู้และทฤษฎีทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์กับวิทยาศาสตร์ทางการ

## แพทย์

### 6. เพื่อลดงบประมาณในการควบคุมการระบาดของโรคไข้เลือดออก

#### 1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

1. ศึกษาและค้นคว้าเกี่ยวกับโรคไข้เลือดออก ลักษณะการแพร่เชื้อตามอายุและซีโรไทป์ และสถิติผู้ป่วยตั้งแต่ปี พ.ศ. 2540 จนถึงปัจจุบัน จากสำนักกระบวนวิชา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข.
2. ศึกษาและสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้เลือดออกตามลักษณะการแพร่เชื้อตามอายุและซีโรไทป์
3. วิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้เลือดออกตามลักษณะการแพร่เชื้อตามอายุและซีโรไทป์
4. พัฒนา แก้ไขเพื่อให้ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมและสอดคล้องกับลักษณะการแพร่เชื้อตามอายุและซีโรไทป์ของโรคไข้เลือดออก
5. สรุปผลการวิจัย

#### 1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เป็นการสร้างความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
2. สามารถนำคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ในการศึกษา การวิจัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้
3. สามารถนำผลที่ได้จากวิเคราะห์ และการวิจัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ไปใช้ให้เป็นประโยชน์ทางการแพทย์ได้
4. สามารถหาแนวทางใหม่ที่จะช่วยในการลดการระบาดของโรค โดยใช้เทคนิคและทฤษฎีทางคณิตศาสตร์มาสร้างแบบจำลองการระบาดของโรคไข้เลือดออก ซึ่งเป็นการช่วยลดงบประมาณในการควบคุมการระบาดของโรค
5. เพื่อเป็นการช่วยให้ประชาชนรอดพ้นจากการเป็นโรคไข้เลือดออก ซึ่งในแต่ละปีมีประชาชนที่ป่วยจากโรคนี้นี้

เป็นจำนวนมาก

6. เพื่อเป็นการนำคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์กับวิทยาศาสตร์ทางการแพทย์

### 1.5 ระเบียบวิธีการวิจัย

1. ศึกษา ค้นคว้าเกี่ยวกับโรคไข้เลือดออก การแพร่เชื้อตามอายุผู้ป่วยและซีโรไทป์ของโรค
2. ศึกษาและวิเคราะห์ข้อมูลของโรคไข้เลือดออก
3. กำหนดตัวแปรในการวิจัย โดยที่ตัวแปรต้นคือ โครงสร้างอายุและซีโรไทป์ ตัวแปรตามคือ จำนวนผู้ป่วยโรคไข้เลือดออก
4. สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้เลือดออกกับการแพร่เชื้อตามอายุและซีโรไทป์ของโรค
5. วิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์
6. พัฒนา แก้ไข ปรับปรุงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ให้เหมาะสม
7. วิเคราะห์และสรุปผลที่ได้จากการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้ พร้อมทั้งเสนอแนวทางในการลดการระบาดของโรคนี้โดยอ้างอิงความรู้ ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์การแพทย์
8. สรุปและรายงานผลการวิจัย

### 1.6 ทฤษฎีหรือกรอบแนวความคิดของโครงการวิจัย (ภาคผนวก)

1. Standard Dynamical Analysis Method
2. The equilibrium state
3. The Routh-Hurwitz criteria
4. local asymptotical stability

## บทที่ 2

### แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้เลือดออก

#### 2.1 โรคไข้เลือดออก

โรคไข้เลือดออก เป็นกลุ่มอาการของผู้ป่วยที่เริ่มด้วยอาการมีอาการไข้เลือดออก บริเวณใต้พื้นผิวหนังและตามอวัยวะต่างๆ ซึ่งมีความรุนแรงต่างๆ กัน อาจมีอาการช็อกร่วมด้วยหรือไม่ก็ได้

#### การระบาดวิทยา

ในปี พ.ศ. 2501 พบการระบาดครั้งแรกของโรคไข้เลือดออกในประเทศไทย ในกรุงเทพมหานคร มีจำนวนผู้ป่วยประมาณ 2,500 ราย เสียชีวิต 200 กว่าราย และมีการระบาดไปทั่วทุกภาคของประเทศไทยจนถึงปัจจุบัน การระบาดมีความสัมพันธ์กันกับระดับภูมิคุ้มกันของไวรัสทั้ง 4 ไทป์ เชื่อที่เป็นสาเหตุของการเกิดโรคไข้เลือดออก คือ เชื้อไวรัสเดงกี (Dengue virus) ซึ่งเป็น RNA virus อยู่ใน Family Togaviridae กลุ่ม Subgroup flavivirus มีอยู่ 4 serotype คือ serotype 1, 2, 3, 4 เชื้อ Dengue virus ทั้ง 4 serotype นี้มี Antigen บางส่วนร่วมกัน ดังนั้น เมื่อเชื้อตัวใดตัวหนึ่งเข้าสู่ร่างกาย จะทำให้ร่างกายสร้างภูมิคุ้มกันต้านต่อเชื้อตัวนั้นซึ่งอยู่ได้ถาวร และยังคงต้านข้ามไปยังเชื้อชนิดอื่น ๆ อีก 3 ชนิด (Cross reaction) แต่อยู่ไม่ถาวร โดยทั่วไปอยู่ได้นาน 6 – 12 เดือน หลังจากระยะนี้แล้วคนที่เคยติดเชื้อ ไวรัส Dengue ชนิดหนึ่งอาจติดเชื้อ Dengue ชนิดอื่นที่แตกต่างไปจากครั้งแรกอีกได้ ถือเป็น การติดเชื้อซ้ำครั้งที่ 2 การติดเชื้อซ้ำนี้เป็นที่เชื่อกันว่า เป็นปัจจัยสำคัญที่ทำให้เกิดโรคไข้เลือดออก ในรายที่มีอาการรุนแรงถึงขั้นช็อก (Dengue Shock Syndrome) [1].

#### การติดต่อ

โรคไข้เลือดออกติดต่อโดยุงลายเป็นพาหะนำโรค การติดต่อเกิดจากการทีุ่งลายไปดูดกินเลือดจากผู้ป่วยที่มีเชื้อไวรัสเดงกี จากนั้นเชื้อไวรัสจะลงสู่กระเพาะุงลาย ฝังตัวในผนังกระเพาะุง เพิ่มแบ่งจำนวนตัวมันเอง แล้วเดินทางไปยังส่วนหัวของุงลายเข้าสู่ต่อมน้ำลาย เมื่อุงลายบินไปกัดดูดเลือดคนใหม่ก็จะปล่อยเชื้อไวรัสเดงกี เข้าสู่กระแส

เลือดของคนที่ถูกยุงลายกัด แล้วเชื้อจะเพิ่มจำนวนมากขึ้น จนทำให้เกิดอาการป่วยเป็นโรค ระยะเวลาที่เชื้อไวรัสแดงที่ เดินทางจากกระเพาะยุงลายถึงต่อมน้ำลายยุงลาย ใช้เวลาประมาณ 8 – 12 วัน ระยะที่เชื้อไวรัสแดงที่ เข้าสู่กระแสเลือดของคนที่ถูกกัดดูดเลือดใหม่ แล้วเพิ่มจำนวนจนทำให้เกิดอาการป่วยขึ้น เรียกว่าระยะฟักตัวของโรค ใช้เวลา 3 – 14 วัน

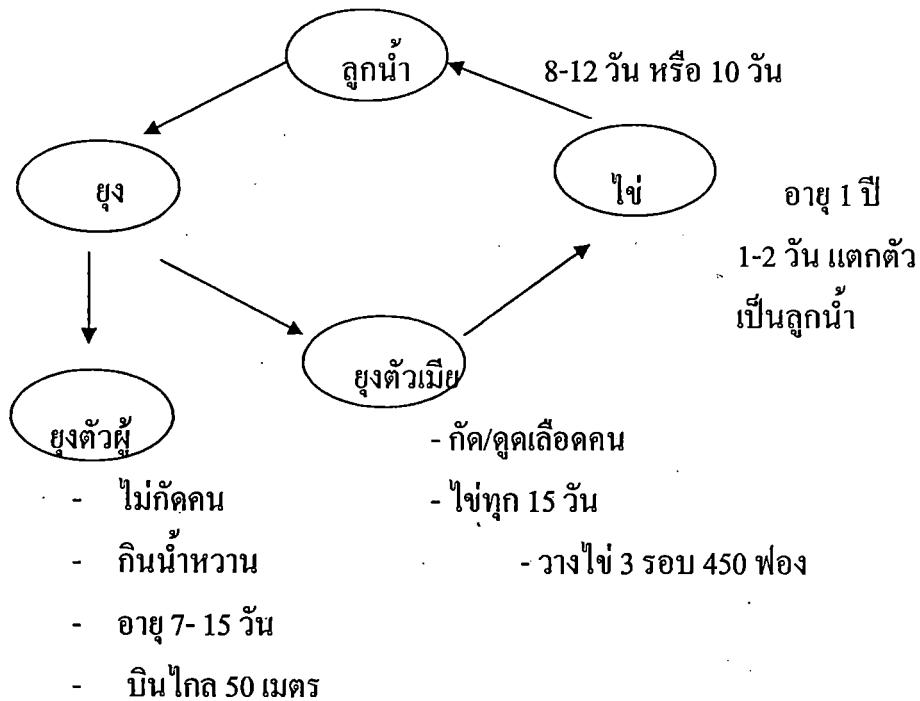
### การระบาดของโรค

การระบาดในฤดูฝน เกิดจากความถี่ในการกัดและการเจริญเติบโตของไวรัสในตัวยุง ในฤดูฝนมีมากกว่าในฤดูหนาวและฤดูร้อน และพบว่าถ้าพบผู้ป่วยในช่วงฤดูหนาวและฤดูร้อนปีใดจะมีอัตราป่วยด้วยโรคไข้เลือดออก มากกว่าปกติในช่วงฤดูฝนของปีนั้น จะเกิดการระบาดดังกล่าว

โรคไข้เลือดออกพบในทุกกลุ่มอายุ ทุกเพศ ในอดีตพบมากในเด็กอายุต่ำกว่า 5 ปี ในปัจจุบันพบในกลุ่มอายุ 5 – 9 ปี และมีผู้ป่วยผู้ใหญ่มากขึ้น

ยุงลายหากินเวลากลางวัน ช่วงเวลาที่พบมากที่สุดคือเวลา 09.00 – 11.00 น. และเวลา 13.00 – 14.30 น. ยุงลายจะพบมากในฤดูฝนช่วงหลังฝนตกชุก เพราะอุณหภูมิและความชื้นเหมาะแก่การแพร่พันธุ์ ส่วนในฤดูอื่น ๆ พบว่าความชุกชุมของยุงลายจะลดลงเล็กน้อย

วงจรชีวิตยุงลาย ยุงตัวเมียจะกัดและดูดเลือดคน โดยเฉลี่ยยุงลาย 1 ตัว สามารถกัดคนได้ 100 คน ( 1 : 100 ) บินได้ไกล 50 เมตร จะออกไข่ทุก 15 วัน ยุงตัวเมียจะมีอายุเฉลี่ย 45 วัน ช่วงชีวิตยุงลายตัวเมียสามารถวางไข่ 3 รอบ ๆ ละ ประมาณ 150 ฟอง ซึ่งจะไข่ไข่ประมาณ 3 ถังฟอง/ยุงตัวเมีย 1 ตัว



รูปที่ 2.1 วงจรชีวิตยุงลาย (*Aedes aegypti*)

### รูปแบบของโรค

องค์การอนามัยโลกได้จัดแบ่งลักษณะทางคลินิกออกเป็น 3 รูปแบบตามความรุนแรงของโรค ดังนี้ [1]

1) Undifferentiated Fever (UF) หรือ Viral Syndrome มักพบในทารกหรือเด็กเล็กที่มีอาการ คัดเชื้อแดงก็เป็นครั้งแรก ผู้ป่วยจะมีเพียงอาการไข้ บางครั้งอาจมีผื่น Maculopapular ซึ่งแยกจากไข่ออกผื่นจากไวรัสอื่น ๆ ไม่ได้ แต่จะวินิจฉัยได้จากการตรวจทาง ไวรัส และ Serology

2) ไข้แดงกึ่ง (Dengue Fever หรือ DF) มักเป็นในเด็กโตหรือผู้ใหญ่ ผู้ใหญ่อาจมีอาการไม่รุนแรง มีเพียงไข้ ร่วมกับปวดศีรษะ เมื่อยตามตัว หรือมีไข้สูงเฉียบพลัน ปวดศีรษะ ปวดรอบกระบอกตา ปวดกล้ามเนื้อ และปวดกระดูก(Breakbone Fever) และอาจมีผื่น บางรายอาจมีจุดเลือด (Petechiae) ที่ผิวหนัง และมีเส้นเลือดเปราะแตกง่าย บางราย

มีอาการเบื่ออาหาร อาเจียน ปวดท้องร่วมด้วย ผู้ป่วยส่วนใหญ่จะมีเม็ดเลือดขาวต่ำ บางรายอาจมีเกล็ดเลือดต่ำด้วย

3) ไข้เลือดออกเดงกี (DHF) โรคนี้มีลักษณะเฉพาะ นอกจากมีไข้สูงและมีอาการ

คล้ายกับไข้เดงกี ในระยะแรกแล้ว ผู้ป่วยจะมี Hemorrhagic Manifestation และมีเกร็ดเลือดต่ำร่วมกับมีการรั่วของพลาสมา ซึ่งถ้าพลาสมารั่วออกมากก็จะทำให้เกิดภาวะช็อกที่เรียกว่า Dengue Shock Syndrome (DSS) การรั่วของพลาสมาสามารถตรวจพบได้จากการมีระดับปริมาตรเม็ดเลือดแดงอัดแน่น (Hematocrit) สูงขึ้น มีสารน้ำในช่องเยื่อหุ้มปอดและช่องท้อง

สำหรับความแตกต่างระหว่างไข้เลือดออกเดงกีและไข้เดงกี ที่ชัดเจนคือ ในไข้เลือด

ออกเดงกี จะมีเกร็ดเลือดต่ำร่วมกับการรั่วของพลาสมา และในไข้เลือดออกเดงกี จะมีภาวะช็อกเกิดขึ้น ทำให้ถึงตายได้ อายุของผู้ป่วยไข้เลือดออกเดงกี จะเป็นเด็กอายุต่ำกว่า 16 ปีมากกว่า ผู้ใหญ่ ส่วนไข้เดงกี มีอาการมากแบบ Breakbone Fever นั้นจะพบในผู้ใหญ่มากกว่าเด็ก การเกิดโรคเป็นแบบใดขึ้นอยู่กับปัจจัยหลายประการ ปัจจัยที่สำคัญคือ อายุ ภาวะภูมิคุ้มกันของผู้ป่วย และชนิดของไวรัสเดงกีที่มีในขณะ นั้น

อาการทางคลินิกของโรคไข้เลือดออกเดงกี

หลังจากได้รับเชื้อจากยุงประมาณ 5 - 8 วัน (ระยะฟักตัว) ผู้ป่วยจะเริ่มมีอาการของโรคซึ่งมีความรุนแรงแตกต่างกันได้ ตั้งแต่มีอาการคล้ายไข้เดงกี ไปจนถึงมีอาการรุนแรงมากจนถึงช็อกและถึงเสียชีวิตได้ ส่วนโรคไข้เลือดออกเดงกีมีอาการสำคัญที่เป็นรูปแบบค่อนข้างเฉพาะ 4 ประการ เรียงตามลำดับการเกิดก่อนหลังดังนี้

- 1) ไข้สูงลอย 2 - 7 วัน
- 2) มีอาการเลือดออก ส่วนใหญ่จะพบที่ผิวหนัง
- 3) มีตับโต กดเจ็บ
- 4) มีภาวะการไหลเวียนล้มเหลว/ภาวะช็อก

### การตรวจทางห้องปฏิบัติการ

- 1) เลือดเข้มข้นจากการเพิ่มขึ้นของ Hct เท่ากับหรือมากกว่า 20 %  
เมื่อเทียบ

กับ Hct เดิม หรือมีหลักฐานการรั่วของพลาสมา เช่น มีน้ำท่วมปอด (Pleural effusion) หรือ โรคท้องมาน (Ascites)

- 2) เกร็ดเลือดน้อยกว่า 100,000 เซล/ลบ.ซม.

### ความรุนแรงของโรค

ความรุนแรงของโรคไข้เลือดออกแบ่งได้เป็น 4 เกรด (Grade) ดังนี้

เกรด 1 (Grade 1) ผู้ป่วยไม่มีช็อก มีแต่ Positive Tourniquet Test

เกรด 2 (Grade 2) ผู้ป่วยไม่มีช็อกแต่มีเลือดออกที่อื่น เช่น เลือดกำเดา อาเจียนเป็นเลือด อุจจาระเป็นเลือด

เกรด 3 (Grade 3) ผู้ป่วยช็อก

เกรด 4 (Grade 4) ผู้ป่วยที่ช็อกนาน วัดความดันและ/จับชีพจรไม่ได้

### การดำเนินโรคของโรคไข้เลือดออก

การดำเนินโรคของโรคไข้เลือดออกแบ่งเป็น 3 ระยะ ดังต่อไปนี้ คือ

- 1) ระยะไข้สูง ลักษณะเป็นไข้สูงเฉียบพลัน 39-41 °C เป็นเวลา 2-7 วัน ซึ่งผู้ป่วยอาจมีอาการชักได้ มักมีอาการหน้าแดง ไม่มีน้ำมูกหรือไอ ในเด็กโตอาจบ่นปวดศรีษะ ปวดกล้ามเนื้อ เบื่ออาหาร อาเจียน ปวดท้อง เลือดออก ตับโตและกดเจ็บ แต่ตัวไม่เหลือง มีผื่นตามตัว (ผู้ป่วยที่มีไข้สูงลอยเกิน 7 วัน มีร้อยละ 15)

- 2) ระยะวิกฤตหรือระยะช็อก มักเกิดขึ้นพร้อมๆ กับมีไข้ลง ในรายที่ไม่รุนแรงผู้ป่วยจะดีขึ้น บางรายอาจมีเหงื่อออก มือเท้าเย็น ชีพจรเบาเร็ว ความดันเลือดเปลี่ยนแปลงเล็กน้อยในช่วงสั้นๆ แล้วกลับเป็นปกติ ในรายที่รุนแรงอาการจะเลวลง ผู้ป่วยจะกระสับกระส่าย มือเท้าเย็น ช็อกถ้าให้การรักษาไม่ทัน ผู้ป่วยจะช็อกนาน เลือดออกรุนแรงและเสียชีวิตได้

- 3) ระยะพักฟื้น ผู้ป่วยเริ่มอยากรับประทานอาหาร เริ่มมีปัสสาวะ

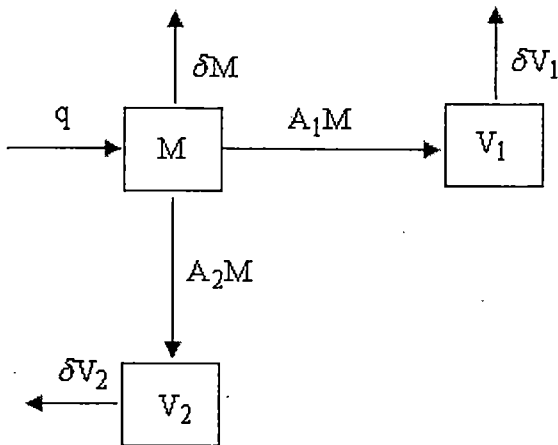
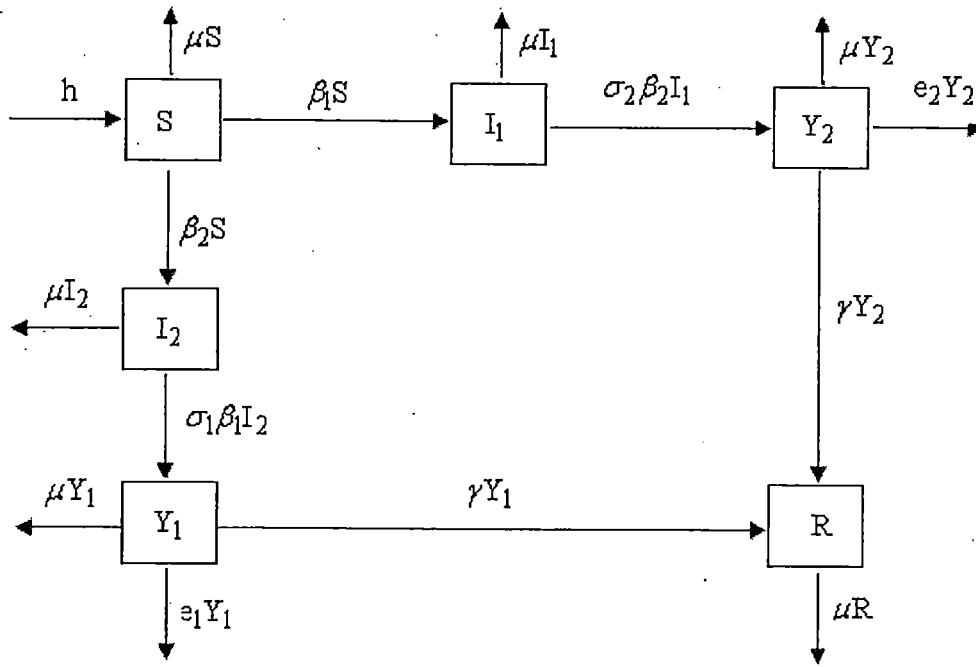
มาก อาจพบมีฝุ่นเป็นวงสีขาวกระจายอยู่ท่ามกลางฝุ่นจุด เลือดออกตามแขนขา ซีพจร  
เต้นช้า

### การรักษา

ยังไม่มีวัคซีนสำหรับไวรัสเดงกีซึ่งเป็นสาเหตุของไข้เลือดออกจำหน่าย  
เนื่องจากยังอยู่ในขั้นการทดลองและพัฒนาอยู่ การเร่งพัฒนาวัคซีนอย่างจริงจังนั้นเริ่มมา  
ตั้งแต่ พ.ศ. 2546 สำหรับประเทศไทย ได้มีการทดสอบวัคซีนไวรัสไข้เลือดออกใน  
อาสาสมัครจำนวน 3,000-5,000 คน หลังจากประสบความสำเร็จในการทดสอบในสัตว์  
และอาสาสมัครกลุ่มเล็ก และขณะนี้วัคซีนที่ถูกเลือกได้เข้าสู่การทดสอบระยะที่ 1 และ  
ระยะที่ 2 แล้ว ปัญหาสำคัญของการพัฒนาวัคซีนคือการที่ไวรัสมีจำนวนสายพันธุ์ถึง 4  
สายพันธุ์ ทำให้วัคซีนที่พัฒนาออกมาต้องยับยั้งได้ทั้ง 4 สายพันธุ์ อีกทั้งกลไกการติดเชื้อ  
ของไข้เลือดออกนั้นยังมีความซับซ้อน

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่สำคัญยิ่งสำหรับการวิเคราะห์การ  
ระบาดและการควบคุมของโรค แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบ SIR ได้ถูกนำมาใช้  
เพื่อศึกษาการแพร่ระบาดของโรคไข้เลือดออก แบบจำลองแบบ SIR ประกอบด้วย  
ประชากร 3 กลุ่มคือ กลุ่มที่ไวต่อการติดเชื้อ กลุ่มติดเชื้อ และกลุ่มฟื้นไข้ [2-6]

สำหรับประวัติการศึกษาเกี่ยวกับโรคไข้เลือดออก เริ่มเมื่อปี 1997 Feng และ  
Velasco Hernandez [7] ได้ศึกษาและวิเคราะห์ระบบสมการเชิงอนุพันธ์เพื่อศึกษาโรค  
ไข้เลือดออก 2 สายพันธุ์ แบบจำลองของพวกเขาคือ



รูปที่ 2.2 แผนภาพแสดงการแพร่ของโรคไข้วัดออก

เมื่อกำหนด

- S แทนจำนวนประชากรคนที่ไวต่อการติดเชื้อ
- $I_1$  แทนจำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อครั้งแรกด้วย serotype ที่ 1
- $I_2$  แทนจำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อครั้งแรกด้วย serotype ที่ 2
- $Y_1$  แทนจำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อซ้ำด้วย serotype ที่ 1
- $Y_2$  แทนจำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อซ้ำด้วย serotype ที่ 2

- R แทนจำนวนประชากรที่ฟื้นไข้จากการติดเชื้อซ้ำ
- $\beta_1$  แทนอัตราการถ่ายทอดเชื้อ serotype ที่ 1 จากยุงไปสู่คน
- $\beta_2$  แทนอัตราการถ่ายทอดเชื้อ serotype ที่ 2 จากยุงไปสู่คน
- $\sigma_1$  แทนอัตราการมีระบบภูมิคุ้มกันต่อ serotype ที่ 1
- $\sigma_2$  แทนอัตราการมีระบบภูมิคุ้มกันต่อ serotype ที่ 2
- $e_1$  แทนอัตราการตายของคนที่เกิดจากการติดเชื้อซ้ำด้วย serotype ที่ 1
- $e_2$  แทนอัตราการตายของคนที่เกิดจากการติดเชื้อซ้ำด้วย serotype ที่ 2
- $\gamma$  แทนอัตราการฟื้นไข้ของคนติดเชื้อซ้ำ
- $\mu$  แทนอัตราการตายของประชากรคน
- h แทนอัตราการเพิ่มจำนวนประชากรคน
- q แทนอัตราการเพิ่มจำนวนของยุง
- M แทนจำนวนยุงที่ไวต่อการติดเชื้อ
- $A_1$  แทนอัตราการถ่ายทอดเชื้อ serotype ที่ 1 จากคนไปสู่ยุง
- $A_2$  แทนอัตราการถ่ายทอดเชื้อ serotype ที่ 2 จากคนไปสู่ยุง
- $\delta$  แทนอัตราการตายของยุง
- $V_1$  แทนจำนวนยุงที่ติดเชื้อ serotype ที่ 1
- $V_2$  แทนจำนวนยุงที่ติดเชื้อ serotype ที่ 2

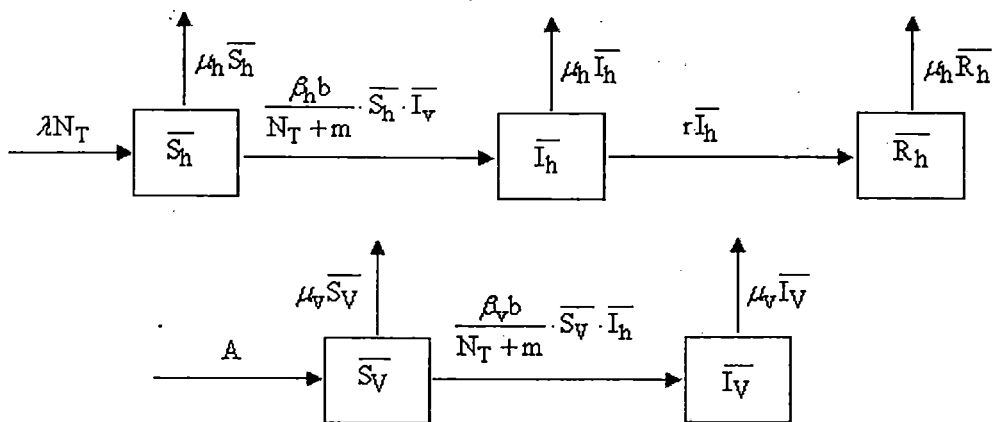
จากแผนภาพสามารถอธิบายได้ด้วยสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= h - \mu S - \beta_1 S - \beta_2 S, \\
 \frac{dI_1}{dt} &= \beta_1 S - \mu I_1 - \sigma_2 \beta_2 I_1, \\
 \frac{dI_2}{dt} &= \beta_2 S - \mu I_2 - \sigma_1 \beta_1 I_2, \\
 \frac{dY_1}{dt} &= \sigma_1 \beta_1 I_2 - \mu Y_1 - e_1 Y_1 - \gamma Y_1, \\
 \frac{dY_2}{dt} &= \sigma_2 \beta_2 I_1 - \mu Y_2 - e_2 Y_2 - \gamma Y_2, \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma Y_2 + \gamma Y_1 - \mu R, \\
 \frac{dM}{dt} &= q - \delta M - A_1 M - A_2 M, \\
 \frac{dV_1}{dt} &= A_1 M - \delta V_1,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\frac{dV_2}{dt} = A_2M - \delta V_2.$$

จากการวิเคราะห์แสดงให้เห็นว่าการแพร่ระบาดของโรคไม่เสถียรพฤติกรรม การระบาดจะขึ้นอยู่กับวัฏจักรของ 2 ชนิดเชื้อ พวกเขาแสดงเหตุผลสนับสนุนว่าการติดเชื้อทั้งสองชนิดขึ้นอยู่กับอัตราการติดเชื้อของพาหะและความถี่

ในปี 1998 Esteva และ Vargas [8] สร้างแบบจำลองเพื่อศึกษาการระบาดของไวรัสเดงกี โดยแบ่งประชากรออกเป็น 2 กลุ่ม คือ ประชากรคน และประชากรยุง แบบจำลองแบบ SIR ถูกนำมาศึกษาสำหรับประชากรคน แบบจำลองแบบ SI ถูกนำมาใช้สำหรับประชากรยุง เนื่องจากยุงถ้ามีเชื้อแล้วจะติดเชื้อไปตลอดชีวิต ประชากร 2 กลุ่มสามารถถ่ายทอดเชื้อไวรัสสู่กันได้ โดยการกำหนดอัตราการตายของประชากรคนเป็น  $\mu_h$  สำหรับอัตราการตายของยุงเป็น  $\mu_v$  ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังนี้



รูปที่ 2.3 แผนภาพแสดงการแพร่เชื้อไวรัสเดงกี

โดยกำหนดให้

- $\bar{S}_h$  แทนจำนวนประชากรคนที่ไวต่อการติดเชื้อ,
- $\bar{I}_h$  แทนจำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อ,
- $\bar{R}_h$  แทนจำนวนประชากรคนที่ฟื้นไข้,
- $\bar{S}_v$  แทนจำนวนประชากรยุงที่ไวต่อการติดเชื้อ,
- $\bar{I}_v$  แทนจำนวนประชากรยุงที่ติดเชื้อ,
- $\lambda$  แทนอัตราการเกิดของประชากรคน,

- $N_T$  แทนจำนวนประชากรคนโดยรวม,
- $\mu_h$  แทนอัตราการตายของประชากรคน,
- $\beta_h$  แทนความน่าจะเป็นในการถ่ายทอดเชื้อไวรัสเดงกีจากยุงไปสู่คน,
- $b$  แทนอัตราการกัดของยุงโดยเฉลี่ยต่อตัวต่อวัน,
- $m$  แทนจำนวนสิ่งมีชีวิตอื่น ๆ ที่สามารถเป็นแหล่งให้เลือดได้,
- $r$  แทนอัตราการฟื้นไข้ของคน,
- $A$  แทนค่าคงที่ของจำนวนยุง,
- $\mu_v$  แทนอัตราการตายของยุง,
- $\beta_v$  แทนความน่าจะเป็นในการถ่ายทอดเชื้อไวรัสเดงกีจากคนไปยังยุง.

จากแบบจำลองสามารถอธิบายได้ด้วยระบบสมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

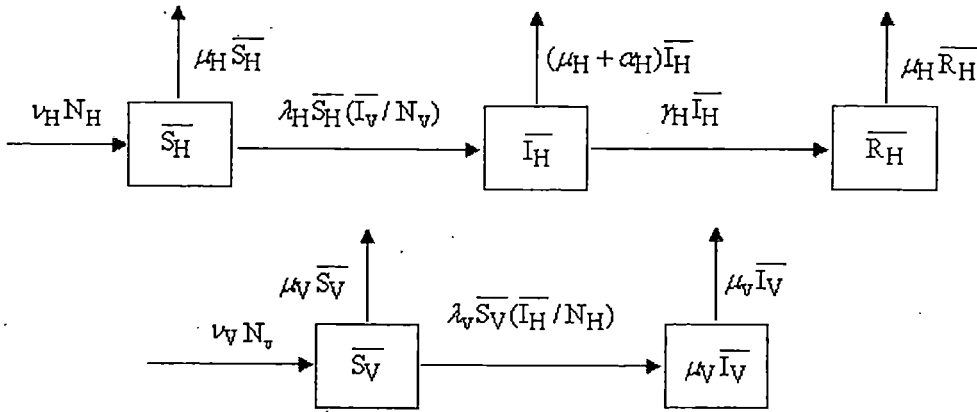
$$\begin{aligned}
 \frac{d\overline{S}_h}{dt} &= \lambda N_T - \mu_h \overline{S}_h - \frac{b\beta_h}{N_T + m} \overline{S}_h \overline{I}_v, \\
 \frac{d\overline{I}_h}{dt} &= \frac{b\beta_h}{N_T + m} \overline{S}_h \overline{I}_v - \mu_h \overline{I}_h - r \overline{I}_h, \\
 \frac{d\overline{R}_h}{dt} &= r \overline{I}_h - \mu_h \overline{R}_h, \\
 \frac{d\overline{S}_v}{dt} &= A - \mu_v \overline{S}_v - \frac{b\beta_v}{N_T + m} \overline{S}_v \overline{I}_h \\
 \frac{d\overline{I}_v}{dt} &= \frac{b\beta_v}{N_T + m} \overline{S}_v \overline{I}_h - \mu_v \overline{I}_v
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

ด้วยเงื่อนไข 2 ข้อ คือ

$$N_T = \overline{S}_h + \overline{I}_h + \overline{R}_h \text{ และ } N_V = \overline{S}_v + \overline{I}_v.$$

จากการศึกษาแบบจำลองนี้ การแพร่ระบาดจะเกิดขึ้นเมื่อกลุ่มที่ไวต่อการติดเชื้อ กลายเป็นกลุ่มที่ติดเชื้อหลังจากที่ถูกกัดจากยุงที่มีเชื้อ การควบคุมประชากรยุงถูกอธิบาย ในรูปสมการเพื่ออธิบายจุดวิกฤตของการระบาดเรื้อรัง

ในปี 1999 Esteva และ Vargas [9] กำหนดกฎเกณฑ์ของแบบจำลองเพื่อศึกษา ตัวแปรประชากรคน แบบจำลองของพวกเขาเพิ่มอิทธิพลการเพิ่มขึ้นของประชากรคน ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังนี้



รูปที่ 2.4 แผนภาพแสดงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้เลือดออก โดยที่กำหนด

- $\bar{S}_H$  แทนจำนวนประชากรคนที่ไวต่อการติดเชื้อ,
- $\bar{I}_H$  แทนจำนวนประชากรคนที่ติดเชื้อ,
- $\bar{R}_H$  แทนจำนวนประชากรคนที่ฟื้นไข้,
- $\bar{S}_V$  แทนจำนวนประชากรยุงที่ไวต่อการติดเชื้อ,
- $\bar{I}_V$  แทนจำนวนประชากรยุงที่ติดเชื้อ,
- $N_H$  แทนจำนวนคน,
- $N_V$  แทนจำนวนยุง,
- $\mu_V$  แทนอัตราการตายของยุง,
- $\lambda_H$  แทนอัตราการเกิดของคน,
- $\lambda_V$  แทนอัตราการเกิดของยุง,
- $\alpha_H$  แทนอัตราการตายของคน,
- $\gamma_H$  แทนอัตราการฟื้นไข้ของประชากรคน.

จากแบบจำลองข้างต้นสามารถเขียนสมการได้ดังนี้

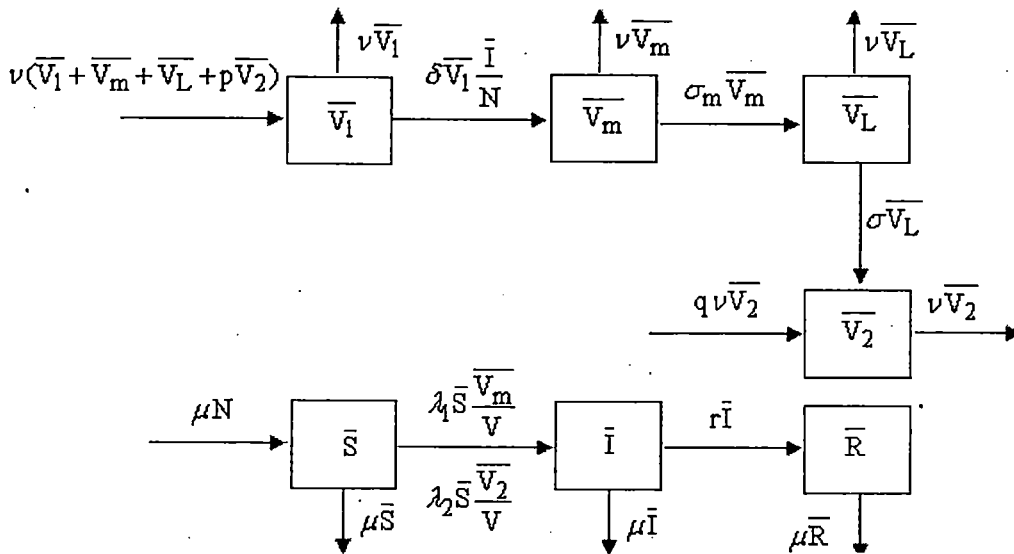
$$\frac{d\bar{S}_H}{dt} = v_H N_H - \mu_H \bar{S}_H - \lambda_H \bar{S}_H (\bar{I}_V / N_V),$$

$$\frac{d\bar{I}_H}{dt} = \lambda_H \bar{S}_H (\bar{I}_V / N_V) - \gamma_H \bar{I}_H - (\mu_H + \alpha_H) \bar{I}_H,$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{R}_H}{dt} &= \gamma_H \bar{I}_H - \mu_H \bar{R}_H, \\ \frac{d\bar{S}_V}{dt} &= \mu_V N_V - \mu_V \bar{S}_V - \lambda_V \bar{S}_V (\bar{I}_H / N_H), \\ \frac{d\bar{I}_V}{dt} &= \lambda_V \bar{S}_V (\bar{I}_H / N_H) - \mu_V \bar{I}_V \end{aligned} \quad (2.3)$$

จากการศึกษาเขาพบเงื่อนไขที่ควบคุมการระบาดของโรคและการเปลี่ยนแปลงของประชากรคน

ในปี 2000 Esteva และ Vargas [10] สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบสมการเชิงเส้นการระบาดของโรคไข้เลือดออก เขาพิจารณาการถ่ายทอดของประชากรหญิงและศึกษาผล อิทธิพลที่มีต่อการระบาดของโรค



รูปที่ 2.5 แผนภาพแสดงการระบาดของโรค

กำหนดให้

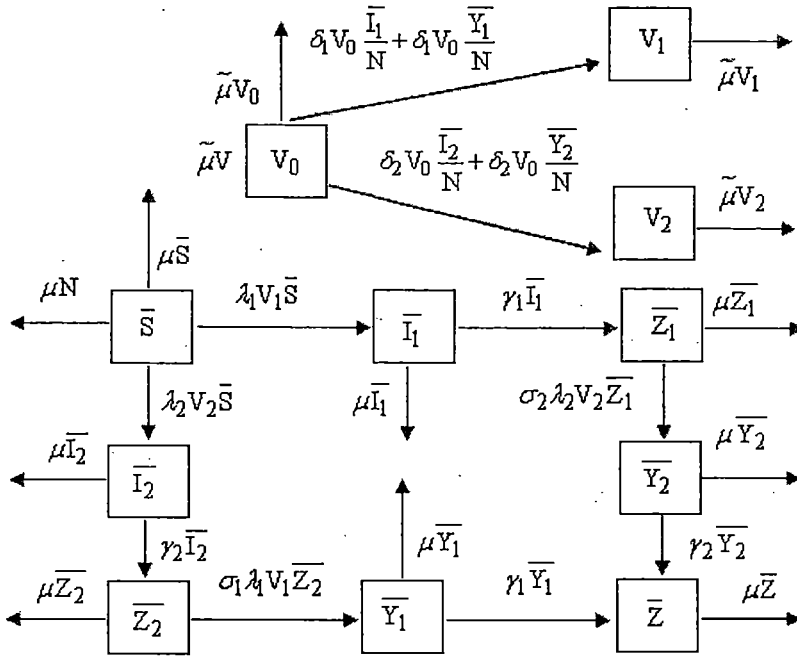
- $\bar{V}_1$  แทนจำนวนหญิงที่ไวต่อการติดเชื้อ
- $\bar{V}_m$  แทนจำนวนหญิงที่ได้รับเชื้อไวรัสจากคนที่ติดเชื้อและแพร่เชื้อทันที
- $\bar{V}_L$  แทนจำนวนหญิงที่ได้รับเชื้อไวรัสและแฝงเชื้อไว้ในตัว
- $\bar{V}_2$  แทนจำนวนหญิงที่ติดเชื้อ
- $\bar{S}$  แทนจำนวนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ

- $\bar{I}$  แทนจำนวนคนที่ติดเชื้อ
- $\bar{R}$  แทนจำนวนคนที่ฟื้นไข้
- $\nu$  แทนอัตราการตายของยุง
- $\delta$  แทนอัตราส่วนในการถ่ายทอดเชื้อระหว่างยุงที่ไวต่อการติดเชื้อมีเชื้อมีเชื้อ
- $1/\sigma_m$  แทนค่าเฉลี่ยของช่วงเวลาที่ยุงอยู่ในกลุ่ม  $V_m$
- $1/\sigma$  แทนค่าเฉลี่ยของช่วงเวลาที่ยุงอยู่ในช่วงมีเชื้อแฝง
- $q$  แทนความน่าจะเป็นที่ยุงติดเชื้อ
- $N$  แทนจำนวนประชากรคน
- $\lambda_1$  แทนอัตราการติดเชื้อจากยุงที่มีเชื้อในกลุ่ม  $\bar{V}_m$  มาสู่คน
- $\lambda_2$  แทนอัตราการติดเชื้อจากยุงที่มีเชื้อในกลุ่ม  $\bar{V}_2$  มาสู่คน
- $r$  แทนอัตราการฟื้นไข้

สามารถเขียนเป็นระบบสมการได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{V}_1}{dt} &= \nu(\bar{V}_1 + \bar{V}_m + \bar{V}_L + p\bar{V}_2) - \nu\bar{V}_1 - \delta\bar{V}_1 \frac{\bar{I}}{N}, \\
 \frac{d\bar{V}_m}{dt} &= \delta\bar{V}_1 \frac{\bar{I}}{N} - \nu\bar{V}_m - \sigma_m \bar{V}_m, \\
 \frac{d\bar{V}_L}{dt} &= \sigma_m \bar{V}_m - \nu\bar{V}_L - \sigma \bar{V}_L, \\
 \frac{d\bar{V}_2}{dt} &= \sigma_1 \bar{V}_L + q\nu\bar{V}_2 - \nu\bar{V}_2, \\
 \frac{d\bar{S}}{dt} &= \mu N - \mu\bar{S} - \lambda_1 \bar{S} \frac{\bar{V}_m}{V} - \lambda_2 \bar{S} \frac{\bar{V}_2}{V}, \\
 \frac{d\bar{I}}{dt} &= \lambda_1 \bar{S} \frac{\bar{V}_m}{V} + \lambda_2 \bar{S} \frac{\bar{V}_2}{V} - \mu\bar{I} - r\bar{I}, \\
 \frac{d\bar{R}}{dt} &= r\bar{I} - \mu\bar{R}
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

ในปี 2003 Esteva และ Vargas [11] สร้างระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้น สำหรับการระบาดของโรคไข้เลือดออกพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง 2 ชนิดเชื้อ



รูปที่ 2.6 แผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง 2 ชนิดเชื้อ

โดยกำหนดให้

- $\bar{S}$  แทนจำนวนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ (รวมทั้งเชื้อชนิดที่ 1 และชนิดเชื้อชนิดที่ 2),
- $\bar{I}_1$  แทนจำนวนคนที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 เป็นครั้งแรก,
- $\bar{I}_2$  แทนจำนวนคนที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 เป็นครั้งแรก,
- $\bar{Z}_1$  แทนจำนวนคนที่ฟื้นไข้จากการติดเชื้อชนิดที่ 1 เป็นครั้งแรก,
- $\bar{Z}_2$  แทนจำนวนคนที่ฟื้นไข้จากการติดเชื้อชนิดที่ 2 เป็นครั้งแรก,
- $\bar{Z}$  แทนจำนวนคนที่ฟื้นไข้ทั้งหมด,
- $\bar{Y}_1$  แทนจำนวนคนที่ฟื้นไข้จากการติดเชื้อชนิดที่ 1 เป็นครั้งที่สอง,
- $\bar{Y}_2$  แทนจำนวนคนที่ฟื้นไข้จากการติดเชื้อชนิดที่ 2 เป็นครั้งที่สอง,
- $\mu$  แทนอัตราการตายของคนตามธรรมชาติ,
- $N$  แทนจำนวนคนทั้งหมด,
- $\lambda_1$  แทนอัตราการติดเชื้อของยุงกับชนิดเชื้อชนิดที่ 1,
- $\lambda_2$  แทนอัตราการติดเชื้อของยุงกับชนิดเชื้อชนิดที่ 2,
- $V_0$  แทนสัดส่วนของยุงติดเชื้อทั้งหมด,
- $V_1$  แทนสัดส่วนของยุงที่ติดเชื้อชนิดที่ 1,

- $V_2$  แทนสัดส่วนของยุงที่ติดเชื้อมนิตที่ 2,  
 $\mu$  แทนอัตราการตายตามธรรมชาติของยุง,  
 $\gamma_1$  แทนอัตราการฟื้นไข้จากชนิดเชื้อมนิตที่ 1,  
 $\gamma_2$  แทนอัตราการฟื้นไข้จากชนิดเชื้อมนิตที่ 2,  
 $\sigma_1$  แทนอัตราที่คนที่ไวต่อการติดเชื้อมนิตที่ 2 ติดเชื้อมนิตที่ 1 ด้วยชนิดเชื้อมนิตที่ 1,  
 $\sigma_2$  แทนอัตราที่คนที่ไวต่อการติดเชื้อมนิตที่ 2 ติดเชื้อมนิตที่ 2 ด้วยชนิดเชื้อมนิตที่ 2,

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = \mu N - \mu \bar{S} - \lambda_1 V_1 \bar{S} - \lambda_2 V_2 \bar{S},$$

$$\frac{d\bar{I}_1}{dt} = \lambda_1 V_1 \bar{S} - \mu \bar{I}_1 - \gamma_1 \bar{I}_1,$$

$$\frac{d\bar{I}_2}{dt} = \lambda_2 V_2 \bar{S} - \mu \bar{I}_2 - \gamma_2 \bar{I}_2,$$

$$\frac{d\bar{Z}_1}{dt} = \gamma_1 \bar{I}_1 - \mu \bar{Z}_1 - \sigma_2 \lambda_2 V_2 \bar{Z}_1,$$

$$\frac{d\bar{Z}_2}{dt} = \gamma_2 \bar{I}_2 - \mu \bar{Z}_2 - \sigma_1 \lambda_1 V_1 \bar{Z}_2, \quad (2.5)$$

$$\frac{d\bar{Y}_1}{dt} = \sigma_1 \lambda_1 V_1 \bar{Z}_2 - \gamma_1 \bar{Y}_1 - \mu \bar{Y}_1,$$

$$\frac{d\bar{Y}_2}{dt} = \sigma_2 \lambda_2 V_2 \bar{Z}_1 - \gamma_2 \bar{Y}_2 - \mu \bar{Y}_2,$$

$$\frac{d\bar{Z}}{dt} = \gamma_1 \bar{Y}_1 + \gamma_2 \bar{Y}_2 - \mu \bar{Z},$$

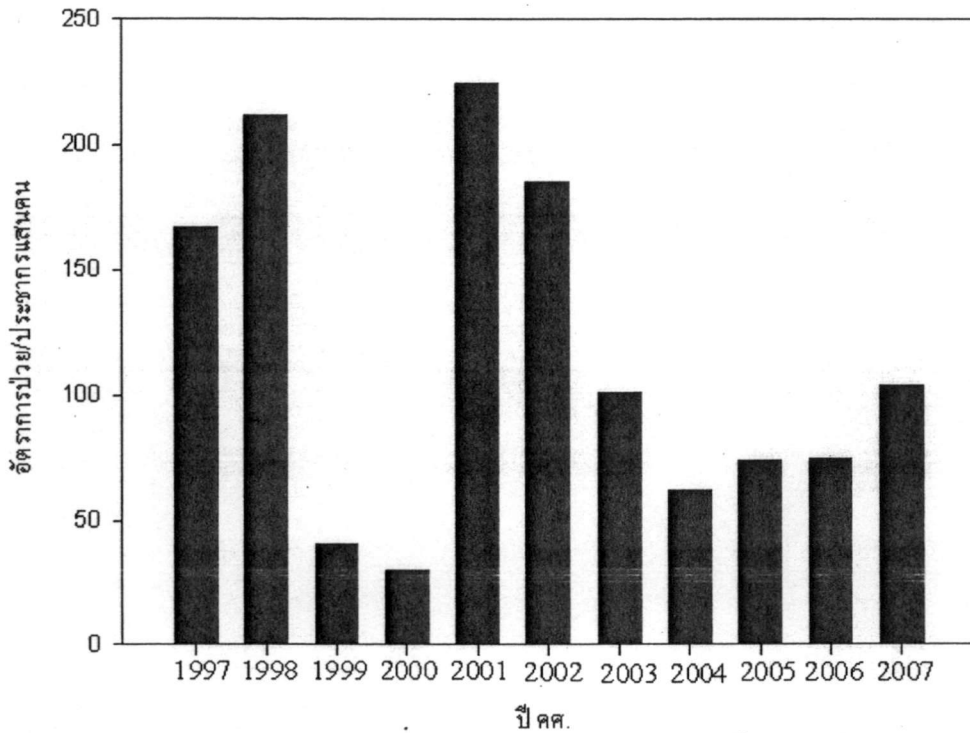
$$\frac{dV_0}{dt} = \mu V - \mu V_0 - \delta_1 V_0 \frac{\bar{I}_1}{N} - \delta_1 V_0 \frac{\bar{Y}_1}{N} - \delta_2 V_0 \frac{\bar{I}_2}{N} - \delta_2 V_0 \frac{\bar{Y}_2}{N},$$

$$\frac{dV_1}{dt} = \delta_1 V_0 \frac{\bar{I}_1}{N} + \delta_1 V_0 \frac{\bar{Y}_1}{N} - \mu V_1,$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \delta_2 V_0 \frac{\bar{I}_2}{N} + \delta_2 V_0 \frac{\bar{Y}_2}{N} - \mu V_2$$

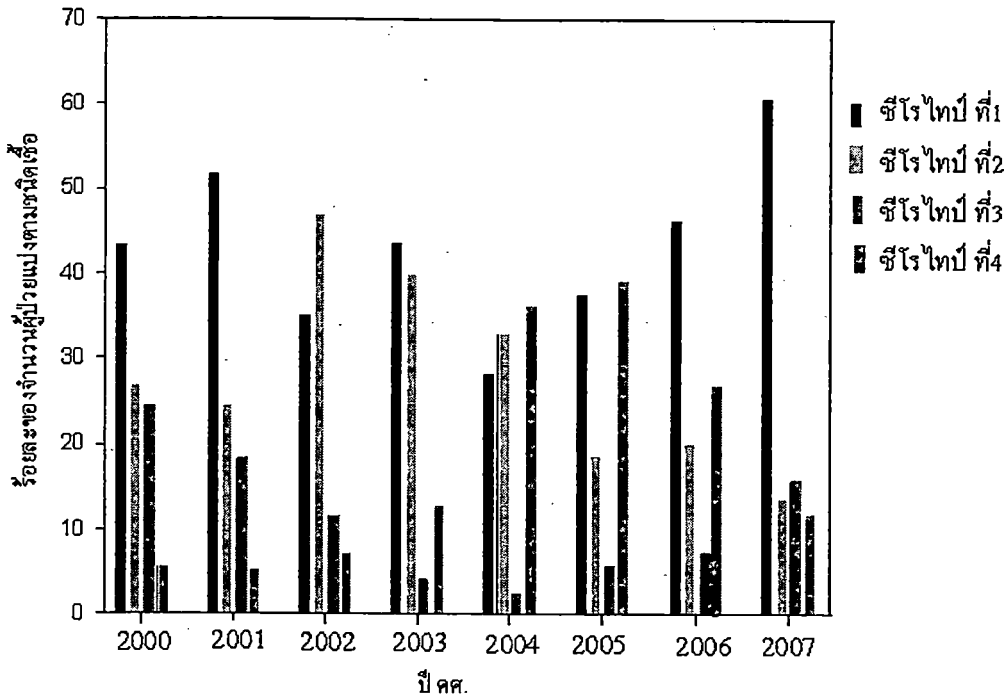
เขาอธิบายการระบาดของไข้เลือดออกกับความสัมพันธ์ของการติดเชื้อครั้งแรกและครั้งที่สอง

พิจารณาข้อมูลจากสำนักโรคติดต่อวิทยา กระทรวงสาธารณสุข กราฟแสดงอัตราการป่วยต่อประชากรแสนคนตั้งแต่ปี 1997-2007 [12] แสดงดังรูปต่อไปนี้



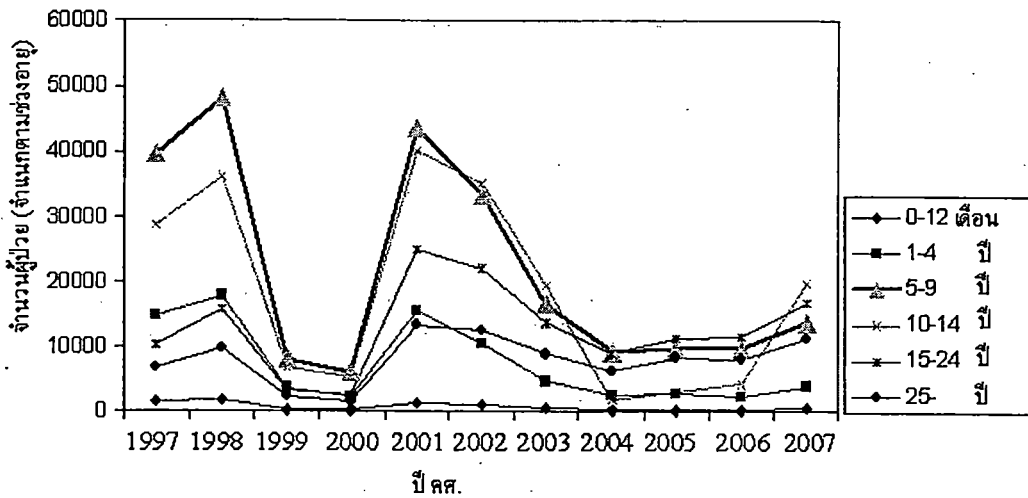
รูปที่ 2.7 กราฟแสดงจำนวนอัตราการป่วยต่อประชากรแสนคน ตั้งแต่ปี 1997-2007 จากข้อมูลของกรมควบคุมโรค สำนักโรคติดต่อวิทยา กระทรวงสาธารณสุข

จากข้อมูลแสดงให้เห็นว่าในช่วง ปี 1997-2004 อัตราการป่วยเป็นแบบ 2 ปี เว้น 2 ปี ในปี 2001 มีอัตราการป่วยสูงสุดในช่วง 11 ปี ย้อนหลัง และในปี 2005 และ 2006 อัตราการป่วยใกล้เคียงกัน



รูปที่ 2.8 กราฟแสดงร้อยละผู้ป่วยจำแนกตาม serotype ตั้งแต่ปี 2000-2007 [12].

จากกราฟแสดงร้อยละของจำนวนผู้ป่วยจำแนกตามชนิดเชื้อ ตั้งแต่ปี 2000-2007 จากร้อยละของจำนวนผู้ป่วยปี 2000-2001 และปี 2003 ซีโรไทป์ที่มีร้อยละของจำนวนผู้ป่วยสูงสุด 2 อันดับแรกคือ ซีโรไทป์ที่ 1 และ ซีโรไทป์ที่ 2 ในปี 2002 ซีโรไทป์ที่มีจำนวนผู้ป่วยสูงสุดคือ ซีโรไทป์ที่ 2 ในปี 2004-2005 ซีโรไทป์ที่ 4 มีจำนวนผู้ป่วยมากที่สุด สำหรับในปี 2006 และ 2007 ชนิดเชื้อซีโรไทป์ที่ 1 มีจำนวนผู้ป่วยสูงสุด โดยตั้งแต่ปี 2000-2007 มีจำนวนผู้ป่วยชนิดเชื้อซีโรไทป์ที่ 1 ซีโรไทป์ที่ 2 ซีโรไทป์ที่ 4 และ ซีโรไทป์ที่ 3 ตามลำดับ



รูปที่ 2.9 กราฟแสดงจำนวนผู้ป่วย โดยให้แยกเป็น โครงสร้างอายุตั้งแต่ปี 1997-2007 [12].

จากกราฟแสดงจำนวนผู้ป่วยจำแนกตามโครงสร้างอายุตั้งแต่ปี 1997-2007 ในช่วงปี 1997-2001 ผู้ป่วยในช่วงอายุ 5-9 ปี มีจำนวนสูงสุดในแต่ละปี ในปี 2002-2003 มีผู้ป่วยในช่วงอายุ 10-14 ปี จำนวนสูงสุด ตั้งแต่ในปี 2004-2007 ช่วงอายุที่มีจำนวนผู้ป่วยสูงสุดคือ ช่วงอายุ 15-24 ปี

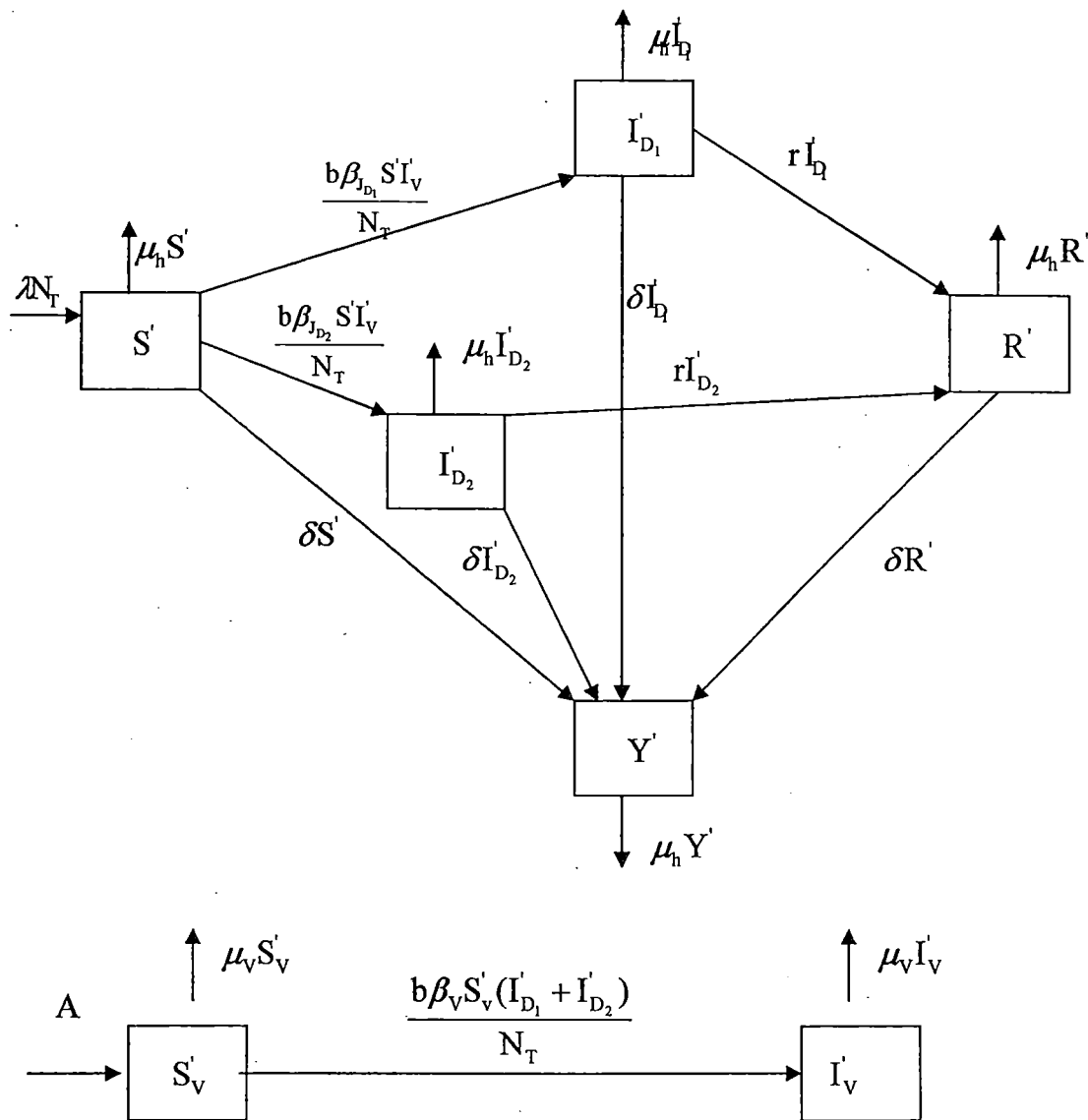
ในงานวิจัยชิ้นนี้ เราจะสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้เลือดออกกับความสัมพันธ์ของอายุและซีโรไทป์ของโรคไข้เลือดออก เราเริ่มจากการสร้างแบบจำลองอายุของผู้ป่วยโรคไข้เลือดออก กับการแพร่ระบาดของสองซีโรไทป์ ต่อจากนั้นพัฒนาแบบจำลองอายุโดยพิจารณาการแพร่ระบาดของโรคไข้เลือดออกทั้งสี่ซีโรไทป์

### บทที่ 3

#### แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโรคไข้เลือดออก และการวิเคราะห์

#### 3.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับชนิดเชื้อ 2 ชนิดต่างกัน

เราวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่ระบาดของโรคไข้เลือดออก โดยการพิจารณาอิทธิพลของโครงสร้างอายุและชนิดเชื้อ 2 ชนิดต่างกัน ภายใต้การตั้งสมมุติฐานว่าประชากรผู้ใหญ่ไม่เคยติดเชื้อในวัยเด็กมาก่อน



รูปที่ 3.10 แผนภาพแสดงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับชนิดเชื้อ 2 ชนิดต่างกัน

นิยามตัวแปรและพารามิเตอร์ในแบบจำลอง ดังนี้

$S'$	แทนจำนวนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ
$I'_{D_1}$	แทนจำนวนคนที่ติดเชื้อชนิดที่ 1
$I'_{D_2}$	แทนจำนวนคนที่ติดเชื้อชนิดที่ 2
$R'$	แทนจำนวนคนฟื้นไข้
$Y'$	แทนจำนวนผู้ใหญ่ที่ไวต่อการติดเชื้อ
$S'_V$	แทนจำนวนยุงที่ไวต่อการติดเชื้อ
$I'$	แทนจำนวนยุงที่ติดเชื้อ
$K$	แทนอัตราส่วนที่คนติดเชื้อชนิดที่ 1
$\mu_h$	แทนอัตราการตายของประชากรคน
$\delta$	แทนอัตราที่เด็กจะกลายเป็นผู้ใหญ่
$\lambda$	แทนอัตราการเกิดของประชากรคน
$b$	แทนอัตราการกัดของยุง 1 ตัว/ 1 วัน
$\beta_{J_{D_1}}$	แทนความน่าจะเป็นในการถ่ายทอดเชื้อจากยุงไปยังเด็กและเด็กติดเชื้อชนิดที่ 1
$\beta_{J_{D_2}}$	แทนความน่าจะเป็นในการถ่ายทอดเชื้อจากยุงไปยังเด็กและเด็กติดเชื้อชนิดที่ 2
$N_T$	แทนจำนวนประชากรคนทั้งหมด
$R$	แทนอัตราการฟื้นไข้
$A$	แทนจำนวนยุง(คงที่)
$\mu_v$	แทนอัตราการตายของยุง

จากแผนภาพข้างต้น เราสามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\frac{dS'}{dt} = \lambda N_T - [\mu_h + \delta + \frac{b\beta_{J_{D_1}}}{N_T} I'_V + \frac{b\beta_{J_{D_2}}}{N_T} I'_V] S' \quad (3.1)$$

$$\frac{dI'_{D_1}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D_1}}}{N_T} S' I'_V - (\mu_h + r + \delta) I'_{D_1} \quad (3.2)$$

$$\frac{dI'_{D_2}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D_2}}}{N_T} S' I'_V - (\mu_h + r + \delta) I'_{D_2} \quad (3.3)$$

$$\frac{dR'}{dt} = r(I'_{D_1} + I'_{D_2}) - (\mu_h + \delta) R' \quad (3.4)$$

$$\frac{dY'}{dt} = \delta(I'_{D_1} + I'_{D_2} + S' + R') - \mu_h Y' \quad (3.5)$$

$$\frac{dS'_V}{dt} = A - [\frac{b\beta_V}{N_T} (I'_{D_1} + I'_{D_2}) + \mu_v] S'_V \quad (3.6)$$

$$\frac{dI'_V}{dt} = \frac{b\beta_V S'_V}{N_T} (I'_{D_1} + I'_{D_2}) - \mu_v I'_V \quad (3.7)$$

โดยที่มีเงื่อนไขคือ

$$N_T = S' + I'_{D_1} + I'_{D_2} + R' + Y', \quad N_V = S'_V + I'_V.$$

การตั้งสมมติฐานให้ประชากรแต่ละกลุ่มทั้งหมดคงที่ เราจะได้ว่า

$$\frac{dN_T}{dt} = \frac{dN_V}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{i) } \frac{d}{dt} N_T &= \frac{d}{dt} (S' + I'_{D_1} + I'_{D_2} + R' + Y') \\ &= \lambda N_T - \mu_h (S' + I'_{D_1} + I'_{D_2} + R' + Y') \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \lambda = \mu_h$$

แสดงว่าอัตราการเกิดของประชากรคนเท่ากับอัตราการตายของประชากรคน

$$\text{ii) } \frac{d}{dt} N_V = \frac{d}{dt} (S'_V + I'_V)$$

$$\text{ดังนั้น } A - \mu_v N_V = 0, \quad N_V = \frac{A}{\mu_v}$$

เราลดจำนวนสมการลงโดยการกำหนดตัวแปรใหม่ดังนี้

$$S = \frac{S'}{N_T}, I_{D_1} = \frac{I'_{D_1}}{N_T}, I_{D_2} = \frac{I'_{D_2}}{N_T}, R = \frac{R'}{N_T}, Y = \frac{Y'}{N_T}, S_V = \frac{S'_V}{N_V}, I_V = \frac{I'_V}{N_V}.$$

เราจะได้สมการใหม่ดังนี้

$$\frac{dS}{dt} = \mu_h - \left[ \mu_h + \delta + \frac{b\beta_{J_{D_1}} I_V (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D_2}} I_V (A/\mu_v)}{N_T} \right] S \quad (4.1)$$

$$\frac{dI_{D_1}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D_1}} S I_V (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D_1} \quad (4.2)$$

$$\frac{dI_{D_2}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D_2}} S I_V (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D_2} \quad (4.3)$$

$$\frac{dR}{dt} = r(I_{D_1} + I_{D_2}) - (\mu_h + \delta) R \quad (4.4)$$

$$\frac{dI_V}{dt} = b\beta_V S_V I_{D_1} + b\beta_V S_V I_{D_2} - \mu_V I_V \quad (4.5)$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$1 = S + I_{D_1} + I_{D_2} + R + Y, \quad 1 = S_V + I_V.$$

### 3.3 ผลการวิเคราะห์

จุดสมดุล ( $S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*$ ) ได้จากการกำหนดให้ด้านขวามือของแต่ละสมการเท่ากับ 0

$$\mu_h - \left[ \mu_h + \delta + \frac{b\beta_{J_{D_1}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D_2}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} \right] S^* = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{b\beta_{J_{D_1}} S^* I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D_1}^* = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{b\beta_{J_{D_2}} S^* I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D_2}^* = 0 \quad (5.3)$$

$$r(I_{D_1}^* + I_{D_2}^*) - (\mu_h + \delta) R^* = 0 \quad (5.4)$$

$$b\beta_V (1 - I_V^*) I_{D_1}^* + b\beta_V (1 - I_V^*) I_{D_2}^* - \mu_V I_V^* = 0 \quad (5.5)$$

จากสมการ (5.1), จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \mu_h - \left[ \mu_h + \delta + \frac{b\beta_{J_{D_1}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D_2}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} \right] S^* &= 0 \\ S^* &= \frac{\mu_h}{\mu_h + \delta + \frac{b\beta_{J_{D_1}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D_2}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T}} \\ S^* &= \frac{\frac{\mu_h}{\mu_h + \delta}}{1 + \frac{b\beta_{J_{D_1}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T(\mu_h + \delta)} + \frac{b\beta_{J_{D_2}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T(\mu_h + \delta)}} \\ S^* &= \frac{\frac{\mu_h}{\mu_h + \delta} \cdot \frac{b\beta_{J_{D_1}}}{\mu_v N_T}}{\frac{b\beta_{J_{D_1}}}{\mu_v N_T} + \frac{b^2 \beta_{J_{D_1}}^2 (A/\mu_v) I_V^*}{\mu_v N_T^2 (\mu_h + \delta)} + \frac{b^2 \beta_{J_{D_1}} \beta_{J_{D_2}} I_V^* (A/\mu_v)}{\mu_v N_T^2 (\mu_h + \delta)}} \\ S^* &= \frac{\frac{\beta_1}{M_1}}{\beta_1 + R_1 I_V^* + R_2 I_V^*} \\ S^* &= \frac{\beta_1}{M_1 [\beta_1 + (R_1 + R_2) I_V^*]} \end{aligned} \tag{6.1}$$

โดยที่

$$\beta_1 = \frac{b\beta_{J_{D_1}}}{\mu_v N_T}, M_1 = \frac{\mu_h + \delta}{\mu_h}, R_1 = \frac{b^2 \beta_{J_{D_1}}^2 (A/\mu_v)}{\mu_v N_T^2 (\mu_h + \delta)}, R_2 = \frac{b^2 \beta_{J_{D_1}} \beta_{J_{D_2}} (A/\mu_v)}{\mu_v N_T^2 (\mu_h + \delta)}$$

จากสมการ(5.2), จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{b\beta_{J_{D_1}} S^* I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D_1}^* &= 0 \\ I_{D_1}^* &= \frac{b\beta_{J_{D_1}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T (\mu_h + \delta + r)} \cdot S^* \\ I_{D_1}^* &= \frac{b\beta_{J_{D_1}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T (\mu_h + \delta + r)} \cdot \frac{\beta_1}{M_1 [\beta_1 + (R_1 + R_2) I_V^*]} \\ I_{D_1}^* &= \frac{R_1 I_V^*}{\beta_1 M_2} \cdot \frac{\beta_1}{M_1 [\beta_1 + (R_1 + R_2) I_V^*]} \\ I_{D_1}^* &= \frac{R_1 I_V^*}{M_1 M_2 [\beta_1 + (R_1 + R_2) I_V^*]} \end{aligned} \tag{6.2}$$

โดยที่

$$M_2 = \frac{\mu_h + \delta + r}{\mu_h + \delta}$$

จากสมการ (5.3),

$$\frac{b\beta_{J_{D_2}} S^* I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D_2}^* = 0$$

$$I_{D_2}^* = \frac{b\beta_{J_{D_2}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T (\mu_h + \delta + r)} \cdot S^*$$

$$I_{D_2}^* = \frac{R_2 I_V^*}{\beta_1 M_2} \cdot \frac{\beta_1}{M_1 [\beta_1 + (R_1 + R_2) I_V^*]}$$

$$I_{D_2}^* = \frac{R_2 I_V^*}{M_1 M_2 [\beta_1 + (R_1 + R_2) I_V^*]} \quad (6.3)$$

จากสมการ (5.4),

$$r(I_{D_1}^* + I_{D_2}^*) - (\mu_h + \delta) R^* = 0$$

$$R^* = \frac{r(I_{D_1}^* + I_{D_2}^*)}{(\mu_h + \delta)}$$

$$R^* = \frac{r I_{D_1}^*}{(\mu_h + \delta)} + \frac{r I_{D_2}^*}{(\mu_h + \delta)}$$

$$R^* = \frac{r}{(\mu_h + \delta)} \cdot I_{D_1}^* + \frac{r}{(\mu_h + \delta)} \cdot I_{D_2}^*$$

$$R^* = \frac{M_3 R_1 I_V^*}{M_1 M_2 [\beta_1 + (R_1 + R_2) I_V^*]} + \frac{M_3 R_2 I_V^*}{M_1 M_2 [\beta_1 + (R_1 + R_2) I_V^*]}$$

$$R^* = \frac{M_3 (R_1 + R_2) I_V^*}{M_1 M_2 [\beta_1 + (R_1 + R_2) I_V^*]} \quad (6.4)$$

โดยที่

$$M_3 = \frac{r}{\mu_h + \delta}$$

จากสมการ (5.5), จะได้ว่า

$$b\beta_V (1 - I_V^*) I_{D_1}^* + b\beta_V (1 - I_V^*) I_{D_2}^* - \mu_V I_V^* = 0$$

$$\begin{aligned}
 & b\beta_V(1-I_V^*)\frac{R_1I_V^*}{M_1M_2[\beta_1+(R_1+R_2)I_V^*]} + b\beta_V(1-I_V^*)\frac{R_2I_V^*}{M_1M_2[\beta_1+(R_1+R_2)I_V^*]} - \mu_V I_V^* = 0 \\
 & I_V^*[b\beta_V(1-I_V^*)\frac{R_1}{M_1M_2[\beta_1+(R_1+R_2)I_V^*]} + b\beta_V(1-I_V^*)\frac{R_2}{M_1M_2[\beta_1+(R_1+R_2)I_V^*]} - \mu_V] = 0
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

ผลเฉลยแรกของการสมการ (7.1) , คือ  $I_V^* = 0$  .

เราจะพิจารณา

$$b\beta_V(1-I_V^*)\frac{R_1}{M_1M_2[\beta_1+(R_1+R_2)I_V^*]} + b\beta_V(1-I_V^*)\frac{R_2}{M_1M_2[\beta_1+(R_1+R_2)I_V^*]} - \mu_V = 0 \tag{7.2}$$

$$b\beta_V(I_V^*-1)\frac{R_1}{M_1M_2[\beta_1+(R_1+R_2)I_V^*]} + b\beta_V(I_V^*-1)\frac{R_2}{M_1M_2[\beta_1+(R_1+R_2)I_V^*]} + \mu_V = 0$$

$$\frac{b\beta_V(I_V^*-1)R_1 + b\beta_V(I_V^*-1)R_2 + \mu_V M_1M_2[\beta_1+(R_1+R_2)I_V^*]}{M_1M_2[\beta_1+(R_1+R_2)I_V^*]} = 0$$

$$b\beta_V(I_V^*-1)R_1 + b\beta_V(I_V^*-1)R_2 + \mu_V M_1M_2[\beta_1+(R_1+R_2)I_V^*] = 0$$

$$b\beta_V R_1(I_V^*-1) + b\beta_V R_2(I_V^*-1) + \mu_V M_1M_2\beta_1 + \mu_V M_1M_2(R_1+R_2)I_V^* = 0$$

$$b\beta_V R_1 I_V^* - b\beta_V R_1 + b\beta_V R_2 I_V^* - b\beta_V R_2 + \mu_V M_1M_2\beta_1 + \mu_V M_1M_2(R_1+R_2)I_V^* = 0$$

$$[b\beta_V R_1 + b\beta_V R_2 + \mu_V M_1M_2(R_1+R_2)]I_V^* - b\beta_V R_1 - b\beta_V R_2 + \mu_V M_1M_2\beta_1 = 0$$

$$[b\beta_V R_1 + b\beta_V R_2 + \mu_V M_1M_2(R_1+R_2)]I_V^* = b\beta_V R_1 + b\beta_V R_2 - \mu_V M_1M_2\beta_1$$

$$I_V^* = \frac{b\beta_V R_1 + b\beta_V R_2 - \mu_V M_1M_2\beta_1}{[b\beta_V R_1 + b\beta_V R_2 + \mu_V M_1M_2(R_1+R_2)]}$$

เราสามารถเห็นว่า  $0 < I_V^* < 1$  , ดังนั้น  $\frac{b\beta_V R_1 + b\beta_V R_2 - \mu_V M_1M_2\beta_1}{[b\beta_V R_1 + b\beta_V R_2 + \mu_V M_1M_2(R_1+R_2)]} < 1$

จากการวิเคราะห์เราจะได้ผลเฉลย  $I_V^* = 0$  , และ  $I_V^* = \frac{b\beta_V R_1 + b\beta_V R_2 - \mu_V M_1M_2\beta_1}{[b\beta_V R_1 + b\beta_V R_2 + \mu_V M_1M_2(R_1+R_2)]}$

$$S^* = \frac{\beta_1}{M_1[\beta_1+(R_1+R_2)I_V^*]} \tag{8.1}$$

$$I_{D_1}^* = \frac{R_1 I_V^*}{M_1M_2[\beta_1+(R_1+R_2)I_V^*]} \tag{8.2}$$

$$I_{D_2}^* = \frac{R_2 I_V^*}{M_1M_2[\beta_1+(R_1+R_2)I_V^*]} \tag{8.3}$$

$$R^* = \frac{M_3(R_1 + R_2)I_V^*}{M_1M_2[\beta_1 + (R_1 + R_2)I_V^*]} \quad (8.4)$$

1) จุดสมดุลสถานะไร้โรค  $I_V^* = 0$  , จะได้ว่า

$$S^* = \frac{1}{M_1}$$

$$I_{D_1}^* = 0$$

$$I_{D_2}^* = 0$$

$$R^* = 0$$

2) จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง  $I_V^* = \frac{b\beta_V R_1 + b\beta_V R_2 - \mu_V M_1 M_2 \beta_1}{[b\beta_V R_1 + b\beta_V R_2 + \mu_V M_1 M_2 (R_1 + R_2)]}$

$$S^* = \frac{\beta_1}{M_1[\beta_1 + (R_1 + R_2)I_V^*]}$$

$$I_{D_1}^* = \frac{R_1 I_V^*}{M_1 M_2 [\beta_1 + (R_1 + R_2)I_V^*]}$$

$$I_{D_2}^* = \frac{R_2 I_V^*}{M_1 M_2 [\beta_1 + (R_1 + R_2)I_V^*]}$$

$$R^* = \frac{M_3(R_1 + R_2)I_V^*}{M_1 M_2 [\beta_1 + (R_1 + R_2)I_V^*]}$$

จุดสมดุลของสมการ (4.1)-(4.5) คือ

1. จุดสมดุลสถานะไร้โรค  $E_1 = (\frac{1}{M_1}, 0, 0, 0, 0)$

2. จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง  $E_2 = (S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*)$

โดยที่

$$S^* = \frac{\beta_1}{M_1[\beta_1 + (R_1 + R_2)I_V^*]}$$

$$I_{D_1}^* = \frac{R_1 I_V^*}{M_1 M_2 [\beta_1 + (R_1 + R_2) I_V^*]}$$

$$I_{D_2}^* = \frac{R_2 I_V^*}{M_1 M_2 [\beta_1 + (R_1 + R_2) I_V^*]}$$

$$R^* = \frac{M_3 (R_1 + R_2) I_V^*}{M_1 M_2 [\beta_1 + (R_1 + R_2) I_V^*]}$$

กำหนดให้

$$X(S, I_{D_1}, I_{D_2}, R, I_V) = \mu_h - \left[ \mu_h + \delta + \frac{b\beta_{J_{D_1}} I_V (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D_2}} I_V (A/\mu_v)}{N_T} \right] S$$

$$Y(S, I_{D_1}, I_{D_2}, R, I_V) = \frac{b\beta_{J_{D_1}} S I_V (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D_1}$$

$$Z(S, I_{D_1}, I_{D_2}, R, I_V) = \frac{b\beta_{J_{D_2}} S I_V (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D_2}$$

$$W(S, I_{D_1}, I_{D_2}, R, I_V) = r(I_{D_1} + I_{D_2}) - (\mu_h + \delta) R$$

$$V(S, I_{D_1}, I_{D_2}, R, I_V) = b\beta_V S_V I_{D_1} + b\beta_V S_V I_{D_2} - \mu_V I_V$$

$$\begin{aligned} X_S(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) &= -\mu_h - \delta - \frac{b\beta_{J_{D_1}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} - \frac{b\beta_{J_{D_2}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} \\ &= -\mu_h M_1 - \frac{\mu_h M_1 R_1 I_V^*}{\beta_1} - \frac{\mu_h M_1 R_2 I_V^*}{\beta_1} \end{aligned}$$

$$X_{I_{D_1}}(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = 0$$

$$X_{I_{D_2}}(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = 0$$

$$X_R(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = 0$$

$$\begin{aligned} X_{I_V}(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) &= -\frac{b\beta_{J_{D_1}} (A/\mu_v)}{N_T} S^* - \frac{b\beta_{J_{D_2}} (A/\mu_v)}{N_T} S^* \\ &= -\frac{\mu_h M_1 R_1 S^*}{\beta_1} - \frac{\mu_h M_1 R_2 S^*}{\beta_1} \end{aligned}$$

$$Y_S(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = \frac{b\beta_{J_{D_1}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} = \frac{\mu_h M_1 R_1 I_V^*}{\beta_1}$$

$$Y_{I_{D_1}}(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = -(\mu_h + \delta + r) = -\mu_h M_1 M_2$$

$$Y_{I_{D_2}}(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = 0$$

$$Y_R(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = 0$$

$$Y_{I_V}(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = \frac{b\beta_{I_{D_1}}(A/\mu_v)}{N_T} S^* = \frac{\mu_h M_1 R_1 S^*}{\beta_1}$$

$$Z_S(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = \frac{b\beta_{I_{D_2}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} = \frac{\mu_h M_1 R_2 I_V^*}{\beta_1}$$

$$Z_{I_{D_1}}(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = 0$$

$$Z_{I_{D_2}}(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = -(\mu_h + \delta + r) = -\mu_h M_1 M_2$$

$$Z_R(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = 0$$

$$Z_{I_V}(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = \frac{b\beta_{I_{D_2}}(A/\mu_v)}{N_T} S^* = \frac{\mu_h M_1 R_2 S^*}{\beta_1}$$

$$W_S(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = 0$$

$$W_{I_{D_1}}(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = r$$

$$W_{I_{D_2}}(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = r$$

$$W_R(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = -\mu_h - \delta = -\mu_h M_1$$

$$W_{I_V}(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = 0$$

$$V_S(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = 0$$

$$V_{I_{D_1}}(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = b\beta_V(1 - I_V^*)$$

$$V_{I_{D_2}}(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = b\beta_V(1 - I_V^*)$$

$$V_R(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = 0$$

$$V_V(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = 0$$

$$V_{I_V}(S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) = -b\beta_V I_{D_1}^* - b\beta_V I_{D_2}^* - \mu_v$$

จุดสมดุลสถานะไร้โรค  $E_1 = (\frac{1}{M_1}, 0, 0, 0, 0)$ .

จาโคเบียนเมตริกซ์ของสมการ (5.1)-(5.5) คือ

$$J_{E_1} - \lambda I_5 = \begin{bmatrix} -\mu_h M_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_h R_1}{\beta_1} - \frac{\mu_h R_2}{\beta_1} \\ 0 & -\mu_h M_1 M_2 - \lambda & 0 & 0 & \frac{\mu_h R_1}{\beta_1} \\ 0 & 0 & -\mu_h M_1 M_2 - \lambda & 0 & \frac{\mu_h R_2}{\beta_1} \\ 0 & r & r & -\mu_h M_1 - \lambda & 0 \\ 0 & b\beta_v & b\beta_v & 0 & -\mu_v - \lambda \end{bmatrix}$$

ค่าเฉพาะเจาะจงสามารถหาได้โดยการแก้สมการพหุนามลักษณะเฉพาะ

$$\det(J_{E_1} - \lambda I_5) = 0 \tag{9.1}$$

ซึ่ง

$$(\mu_h M_1 + \lambda)^2 (\lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0 \tag{9.2}$$

โดยที่

$$a_2 = 2M_1 M_2 \mu_h + \mu_v \tag{9.3}$$

$$a_1 = M_1^2 M_2^2 \mu_h^2 + 2M_1 M_2 \mu_v \mu_h - \frac{bR_1 \beta_v \mu_h}{\beta_1} - \frac{bR_2 \beta_v \mu_h}{\beta_1} \tag{9.4}$$

$$a_0 = M_1^2 M_2^2 \mu_h^2 \mu_v - \frac{bR_1 M_1 M_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} - \frac{bR_2 M_1 M_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} \tag{9.5}$$

ค่าเฉพาะเจาะจง คือ

$$\lambda_1 = -\mu_h M_1, \lambda_2 = -\mu_h M_1, \lambda_3, \lambda_4 \text{ และ } \lambda_5 \text{ สามารถหาได้โดยการแก้สมการ} \\ \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \tag{9.6}$$

โดย  $a_2, a_1, a_0$  นิยามดังสมการ (9.3)-(9.5).

ค่าเฉพาะเจาะจง  $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  จะมีส่วนจริงเป็นลบเมื่อสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

i)  $a_2 > 0$  ,

ii)  $a_0 > 0$  ,

iii)  $a_1 a_2 > a_0$ .

เมื่อพิจารณาดังนี้

i)  $a_2 = 2M_1 M_2 \mu_h + \mu_v$  มีค่าเป็นบวกเสมอ,

ii)  $a_0 = M_1^2 M_2^2 \mu_h^2 \mu_v - \frac{bR_1 M_1 M_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} - \frac{bR_2 M_1 M_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1}$  เป็นบวกเมื่อ

$$M_1^2 M_2^2 \mu_h^2 \mu_v > \frac{bM_1 M_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} (R_1 + R_2) \text{ or } M_1 M_2 \beta_1 \mu_v > b\beta_v (R_1 + R_2) \text{ หรือคือ}$$

$$B_0 = \frac{b\beta_v (R_1 + R_2)}{M_1 M_2 \beta_1 \mu_v} < 1$$

iii)

$$\begin{aligned} a_1 a_2 - a_0 &= 2M_1^3 M_2^3 \mu_h^3 + 3M_1^2 M_2^2 \mu_h^2 \mu_v + M_1 M_2 \mu_h \mu_v^2 + (M_1 M_2 \mu_h \mu_v^2 - \frac{bR_1 \beta_v \mu_h \mu_v}{\beta_1} - \frac{bR_2 \beta_v \mu_h \mu_v}{\beta_1}) \\ &\quad + (M_1^2 M_2^2 \mu_h^2 \mu_v - \frac{bR_1 M_1 M_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} - \frac{bR_2 M_1 M_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1}) \\ &= 2M_1^3 M_2^3 \mu_h^3 + 3M_1^2 M_2^2 \mu_h^2 \mu_v + M_1 M_2 \mu_h \mu_v^2 + \frac{a_0}{M_1 M_2 \mu_h \mu_v} + a_0 \end{aligned}$$

ทั้ง 3 เงื่อนไขสอดคล้อง Routh-Hurwitz สำหรับ  $\frac{b\beta_v (R_1 + R_2)}{M_1 M_2 \beta_1 \mu_v} < 1$ . นั้นแสดงว่าจุด

สมดุลสถานะไร้โรคเสถียรเมื่อ  $R_0 < 1$ , เมื่อกำหนด  $R_0 = \frac{b\beta_v (R_1 + R_2)}{M_1 M_2 \beta_1 \mu_v}$ .

2) จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง  $E_2 = (S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*)$  เมื่อกำหนด

$$S^* = \frac{\beta_1}{M_1 [\beta_1 + (R_1 + R_2) I_V^*]}$$

$$I_{D_1}^* = \frac{R_1 I_V^*}{M_1 M_2 [\beta_1 + (R_1 + R_2) I_V^*]}$$

$$I_{D_2}^* = \frac{R_2 I_V^*}{M_1 M_2 [\beta_1 + (R_1 + R_2) I_V^*]}$$

$$R^* = \frac{M_3 (R_1 + R_2) I_V^*}{M_1 M_2 [\beta_1 + (R_1 + R_2) I_V^*]}$$

$$I_V^* = \frac{b\beta_V R_1 + b\beta_V R_2 - \mu_V M_1 M_2 \beta_1}{[b\beta_V R_1 + b\beta_V R_2 + \mu_V M_1 M_2 (R_1 + R_2)]}$$

เรามี

$$J_{E_2} - \lambda I_5 = \begin{bmatrix} -\mu_h M_1 - \frac{\mu_h M_1 R_1 I_V^*}{\beta_1} - \frac{\mu_h M_1 R_2 I_V^*}{\beta_1} - \lambda & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_h M_1 R_1 S^*}{\beta_1} - \frac{\mu_h M_1 R_2 S^*}{\beta_1} \\ \frac{\mu_h M_1 R_1 I_V^*}{\beta_1} & -\mu_h M_1 M_2 - \lambda & 0 & 0 & \frac{\mu_h M_1 R_1 S^*}{\beta_1} \\ \frac{\mu_h M_1 R_2 I_V^*}{\beta_1} & 0 & -\mu_h M_1 M_2 - \lambda & 0 & \frac{\mu_h M_1 R_2 S^*}{\beta_1} \\ 0 & r & r & -\mu_h M_1 - \lambda & 0 \\ 0 & b\beta_V (1 - I_V^*) & b\beta_V (1 - I_V^*) & 0 & -b\beta_V I_{D_1}^* - b\beta_V I_{D_2}^* - \mu_V - \lambda \end{bmatrix}$$

ค่าเฉพาะเจาะจงสามารถหาโดยการแก้สมการ

$$\det(J_{E_2} - \lambda I_5) = 0 \tag{10.1}$$

ซึ่ง

$$(\mu_h M_1 + \lambda)(\lambda^4 + d_3 \lambda^3 + d_2 \lambda^2 + d_1 \lambda + d_0) = 0 \tag{10.2}$$

ค่าเฉพาะเจาะจง คือ  $\lambda_1 = -\mu_h M_1$

$\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  และ  $\lambda_5$  สามารถหาโดยการแก้สมการ

$$\lambda^4 + d_3 \lambda^3 + d_2 \lambda^2 + d_1 \lambda + d_0 = 0 \tag{10.3}$$

ซึ่ง

$$d_3 = bI_{D_1}^* \beta_V + bI_{D_2}^* \beta_V + M_1 \mu_h + 2M_1 M_2 \mu_h + \frac{I_V^* M_1 R_1 \mu_h}{\beta_1} + \frac{I_V^* M_1 R_2 \mu_h}{\beta_1} + \mu_V, \tag{10.4}$$

$$d_2 = bI_{D_1}^* M_1 \beta_V \mu_h + bI_{D_2}^* \beta_V M_1 \mu_h + 2M_1 bI_{D_1}^* M_1 M_2 \beta_V \mu_h + 2M_1 bI_{D_2}^* M_1 M_2 \beta_V \mu_h +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{bI_{D_1}^* I_V^* M_1 R_1 \mu_h \beta_v}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* I_V^* M_1 R_2 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{bI_V^* S^* M_1 R_1 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{bI_V^* I_{D_1}^* M_1 R_2 \beta_v \mu_h}{\beta_1} \\
 & + \frac{bI_{D_2}^* I_V^* M_1 R_2 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{bI_V^* S^* M_1 R_2 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + 2M_1^2 M_2 \mu_h^2 + M_1^2 M_2^2 \mu_h^2 + \frac{2I_V^* M_1^2 M_2 R_1 \mu_h^2}{\beta_1} \\
 & + \frac{2I_V^* M_1^2 M_2 R_2 \mu_h^2}{\beta_1} + M_1 \mu_h \mu_v + M_1 M_2 \mu_h \mu_v + \frac{I_V^* M_1 R_1 \mu_h \mu_v}{\beta_1} + \frac{I_V^* M_1 R_2 \mu_h \mu_v}{\beta_1} \\
 & + \frac{bY^* M_1 R_1 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{bR^* M_1 R_1 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* M_1 R_1 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{I_{D_2}^* M_1 R_1 \beta_v \mu_h}{\beta_1} \\
 & + \frac{bY^* M_1 R_2 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{bR^* M_1 R_2 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* M_1 R_2 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* M_1 R_2 \beta_v \mu_h}{\beta_1} \\
 & + (M_1 M_2 \mu_h \mu_v - \frac{bM_1 R_1 \beta_v \mu_h}{\beta_1} - \frac{bM_1 R_2 \beta_v \mu_h}{\beta_1})
 \end{aligned} \tag{10.5}$$

$$\begin{aligned}
 d_1 = & 2bI_{D_1}^* M_1^2 M_2 \beta_v \mu_h^2 + 2bI_{D_2}^* \beta_v M_1^2 M_2 \beta_v \mu_h^2 + bI_{D_1}^* M_1^2 M_2^2 \beta_v \mu_h^2 + bI_{D_2}^* M_1^2 M_2^2 \beta_v \mu_h^2 \\
 & + \frac{bI_V^* S^* M_1^2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{2bI_V^* I_{D_1}^* M_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{2bI_V^* I_{D_2}^* M_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} \\
 & + \frac{bI_V^* S^* M_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_V^* S^* M_1^2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{2bI_{D_1}^* I_V^* M_1^2 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{2bI_V^* I_{D_2}^* M_1^2 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_V^* S^* M_1^2 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} \\
 & + M_1^3 M_2 \mu_h^3 + \frac{I_V^* M_1^3 M_2^2 R_1 \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{I_V^* M_1^3 M_2^2 R_2 \mu_h^3}{\beta_1} + M_1^2 M_2 \mu_h^2 \mu_v + \frac{2I_V^* M_1^2 M_2 R_1 \mu_h^2 \mu_v}{\beta_1} + \frac{2I_V^* M_1^2 M_2 R_2 \mu_h^2 \mu_v}{\beta_1} \\
 & + \frac{bY^* M_1^2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bR^* M_1^2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* M_1^2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* M_1^2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} \\
 & + \frac{bY^* M_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bR^* M_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* M_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* M_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} \\
 & + \frac{bY^* M_1^2 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bR^* M_1^2 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* M_1^2 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* M_1^2 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} \\
 & + \frac{bY^* M_1^2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bR^* M_1^2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* M_1^2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* M_1^2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} \\
 & + (M_1^2 M_2 \mu_h^2 \mu_v - \frac{bM_1^2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} - \frac{bM_1^2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1}) + (M_1^2 M_2 \mu_h^2 \mu_v - \frac{bM_1^2 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} - \frac{bM_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1})
 \end{aligned} \tag{10.6}$$

$$\begin{aligned}
 d_0 = & bI_{D_1}^* M_1^3 M_2^2 \beta_v \mu_h^3 + bI_{D_2}^* M_1^3 M_2^2 \beta_v \mu_h^3 + \frac{bI_V^* S^* M_1^3 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* I_V^* M_1^3 M_2^2 R_1 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} \\
 & + \frac{bI_{D_2}^* I_V^* M_1^3 M_2^2 R_1 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bS^* I_V^* M_1^3 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* I_V^* M_1^3 M_2^2 R_2 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* I_V^* M_1^3 M_2^2 R_2 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} \\
 & + \frac{I_V^* M_1^3 M_2^2 R_1 \mu_h^3 \mu_v}{\beta_1} + \frac{I_V^* M_1^3 M_2^2 R_2 \mu_h^3 \mu_v}{\beta_1} + \frac{bY^* M_1^3 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bR^* M_1^3 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} \\
 & + \frac{bI_{D_1}^* M_1^3 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* M_1^3 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bY^* M_1^3 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bR^* M_1^3 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} \\
 & + \frac{bI_{D_1}^* M_1^3 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* M_1^3 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + (M_1^3 M_2^2 \mu_h^3 \mu_v - \frac{bM_1^3 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} - \frac{bM_1^3 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1})
 \end{aligned}$$

(10.7)

ค่าเฉพาะเจาะจง  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$  มีส่วนจริงเป็นลบถ้าสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

- i)  $d_3 > 0$  ,
- ii)  $d_1 > 0$  ,
- iii)  $d_0 > 0$  ,
- iv)  $d_3 d_2 d_1 > d_1^2 + d_3^2 d_0$ .

เมื่อเราพิจารณา

- i)  $d_3$  มีค่าเป็นบวกเสมอ
- ii)  $d_1 > 0$  , เราสามารถพิจารณาจากสมการ (10.6)
- iii)  $d_0 > 0$  , จากสมการ (10.7)
- iv)  $d_3 d_2 d_1 > d_1^2 + d_3^2 d_0$ .

แสดงว่าจุดสมดุลสถานะ โรคเรื้อรังเสถียรเมื่อ  $R_0 > 1$ .

จากค่าของ

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \frac{b\beta_v (R_1 + R_2)}{\mu_v M_1 M_2 \beta_1} \\
 &= \frac{b^2 \beta_v (\beta_{JD1} + \beta_{JD2}) (A / \mu_v) \mu_h}{N_T (\mu_h + \delta) (\mu_h + \delta + r) \mu_v}
 \end{aligned}$$

$R_0 = \sqrt{R_0'}$  แทนค่าสืบพันธุ์พื้นฐานของโรค หมายความว่าคนที่ไวต่อการติดเชื้อสามารถติดเชื้อได้เมื่อถูกยุงที่มีเชื้อกัด โดย  $\frac{b(A/\mu_v)}{N_T} \cdot \frac{1}{(\mu_h + \delta + r)} \cdot \frac{\mu_h}{(\mu_h + \delta)}$  และอัตราส่วน  $\beta_v \cdot \frac{b(A/\mu_v)}{N_T} \cdot \frac{1}{(\mu_h + \delta + r)} \cdot \frac{\mu_h}{(\mu_h + \delta)}$  โดยที่ยุงจะกัดคนได้ตลอดชีวิตยุง  $\frac{b}{\mu_v}$  และสัดส่วน  $(\beta_{J_{D1}} + \beta_{J_{D2}}) \cdot \frac{b}{\mu_v}$  จากการกัดของยุง คนก็จะติดเชื้อได้

### 3.4 ผลเฉลยของสมการ

ผลเฉลยที่แสดงในส่วนนี้ค่าของตัวแปรได้จากค่าสังเกตจริง อายุเฉลี่ยของคนคือ 70 ปี อายุเฉลี่ยที่คนอยู่ในวัยเด็กคือ 15 ปี อายุเฉลี่ยของยุง 14 วัน จำนวนครั้งการกัดของยุง 3 ครั้งต่อ 1 วัน 1 ตัว ซึ่งจะได้อัตราคือ 1/3 วัน เวลาของการฟื้นไข้คือ 3 วัน จำนวนประชากรคนเท่ากับ 100,000 คน ความน่าจะเป็นในการถ่ายทอดเชื้อเป็นการเลือกค่าที่เหมาะสม

สำหรับ  $R_0 < 1$ ,

$$\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ ต่อวัน}, \mu_v = 1/14 \text{ ต่อวัน}, b = 1/3 \text{ ต่อวัน}, \beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5,$$

$$\beta_v = 0.5, r = 1/3 \text{ ต่อวัน}, N_T = 100,000, A = 5,000, \delta = 1/(365 \times 15) \text{ ต่อวัน}, M_1 = 5.66667$$

$$R_0 = 0.345652, R_0' = 0.587922. \text{ ผลเฉลยเข้าสู่สภาวะไร้โรค } E_1 = \left(\frac{1}{M_1}, 0, 0, 0, 0\right).$$

สำหรับ  $R_0 > 1$ ,

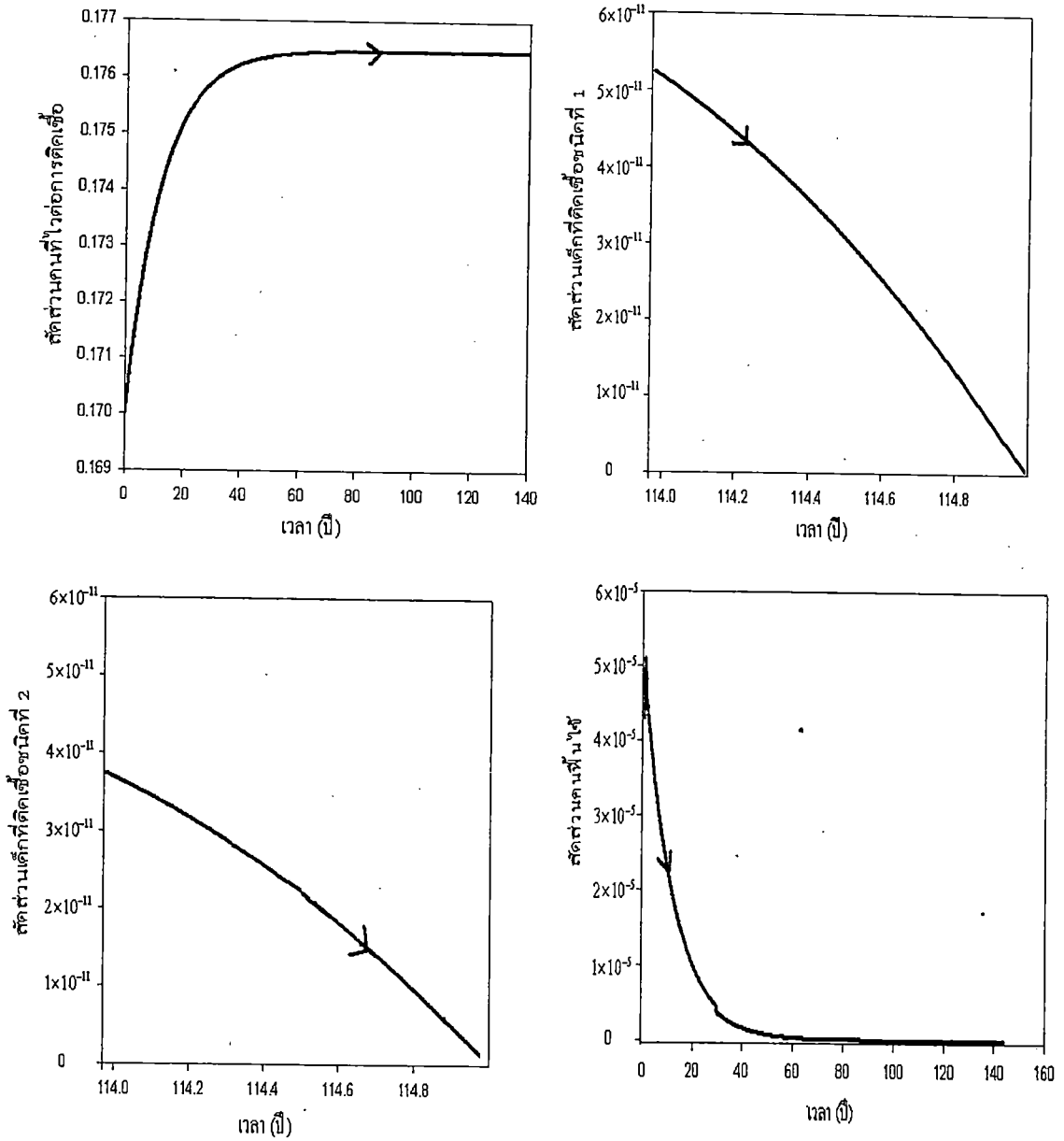
$$\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ ต่อวัน}, \mu_v = 1/14 \text{ ต่อวัน}, b = 1/3 \text{ ต่อวัน}, \beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5,$$

$$\beta_v = 0.5, r = 1/3 \text{ ต่อวัน}, N_T = 100,000, A = 100,000, M_1 = 5.66667,$$

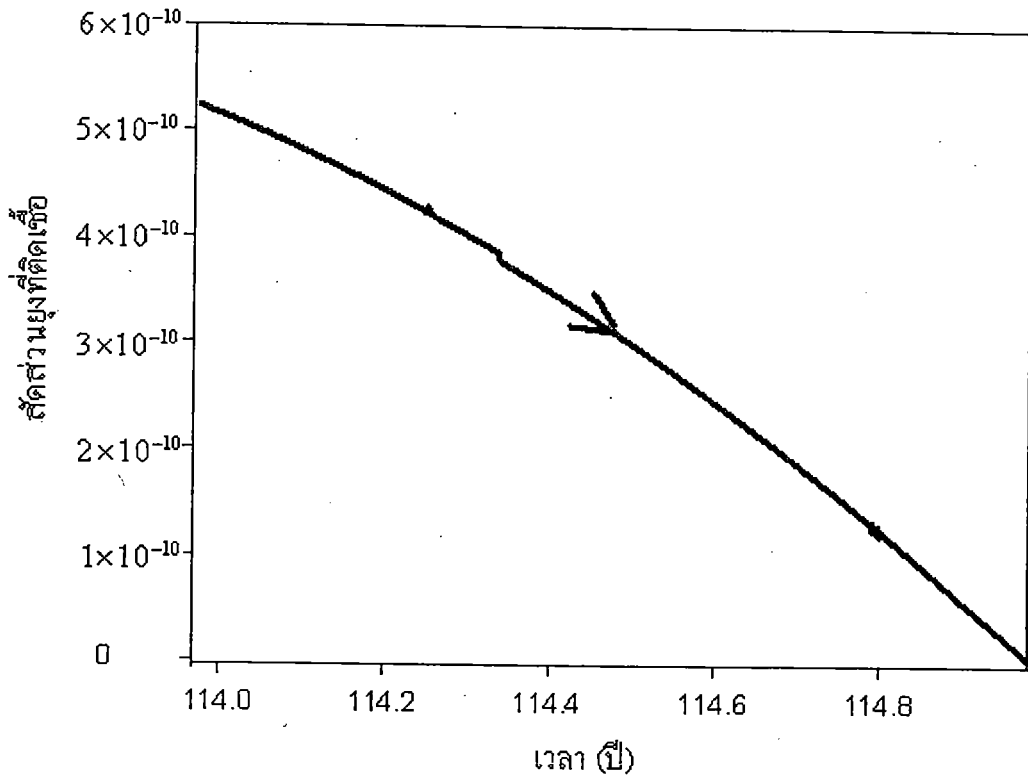
$$R_0 = 6.91305, R_0' = 2.62927. \text{ ผลเฉลยเข้าสู่สภาวะโรคเรื้อรัง } E_2 = (S^*, I_{D1}^*, I_{D2}^*, R^*, I_V^*) \text{ เมื่อ}$$

$$S^* = 0.02553316, I_{D1}^* = 0.00005854, I_{D2}^* = 0.00004182, R^* = 0.15083707 \text{ และ } I_V^* = 0.00023412.$$

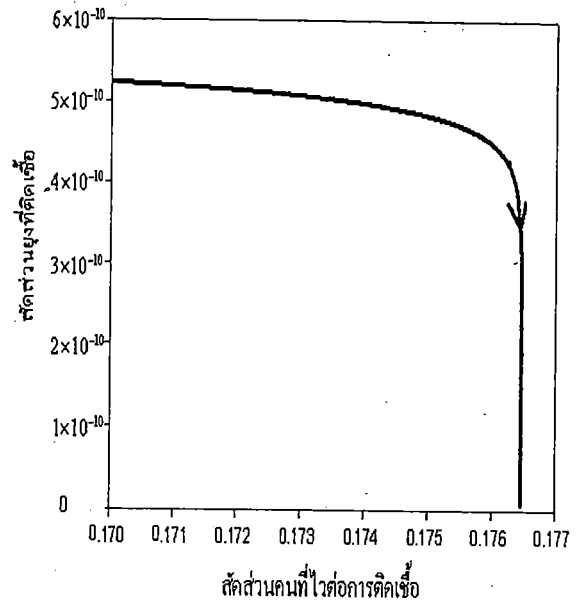
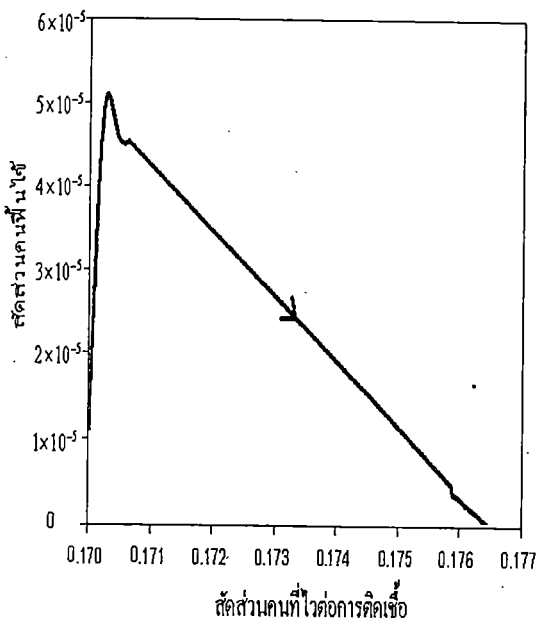
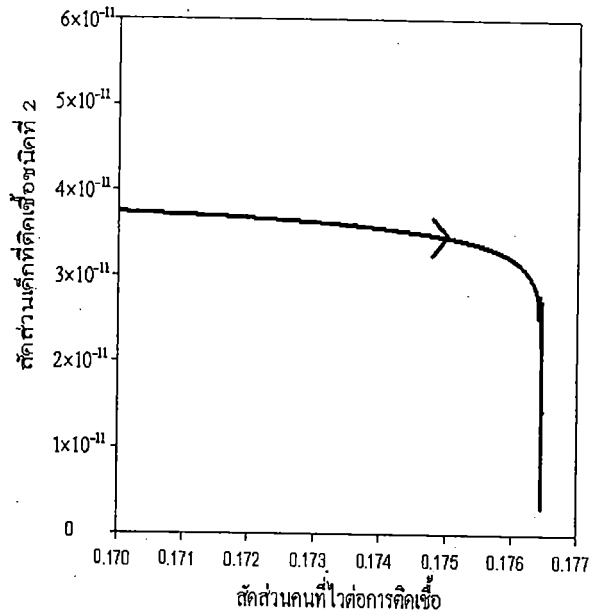
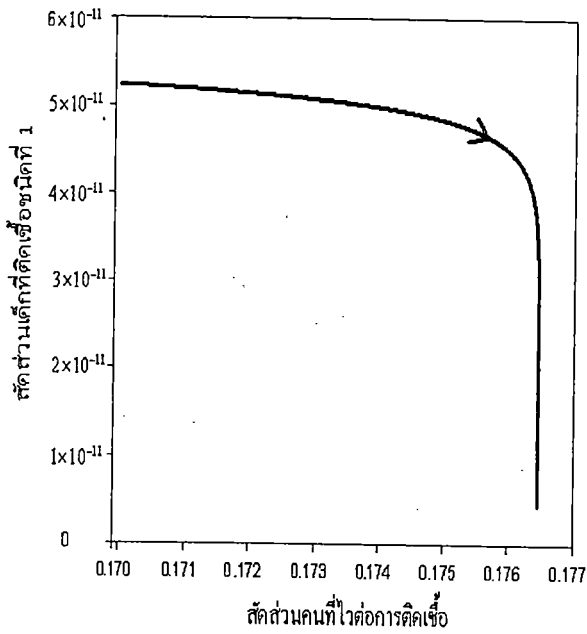
### 3.5 ผลเฉลยเชิงตัวเลข



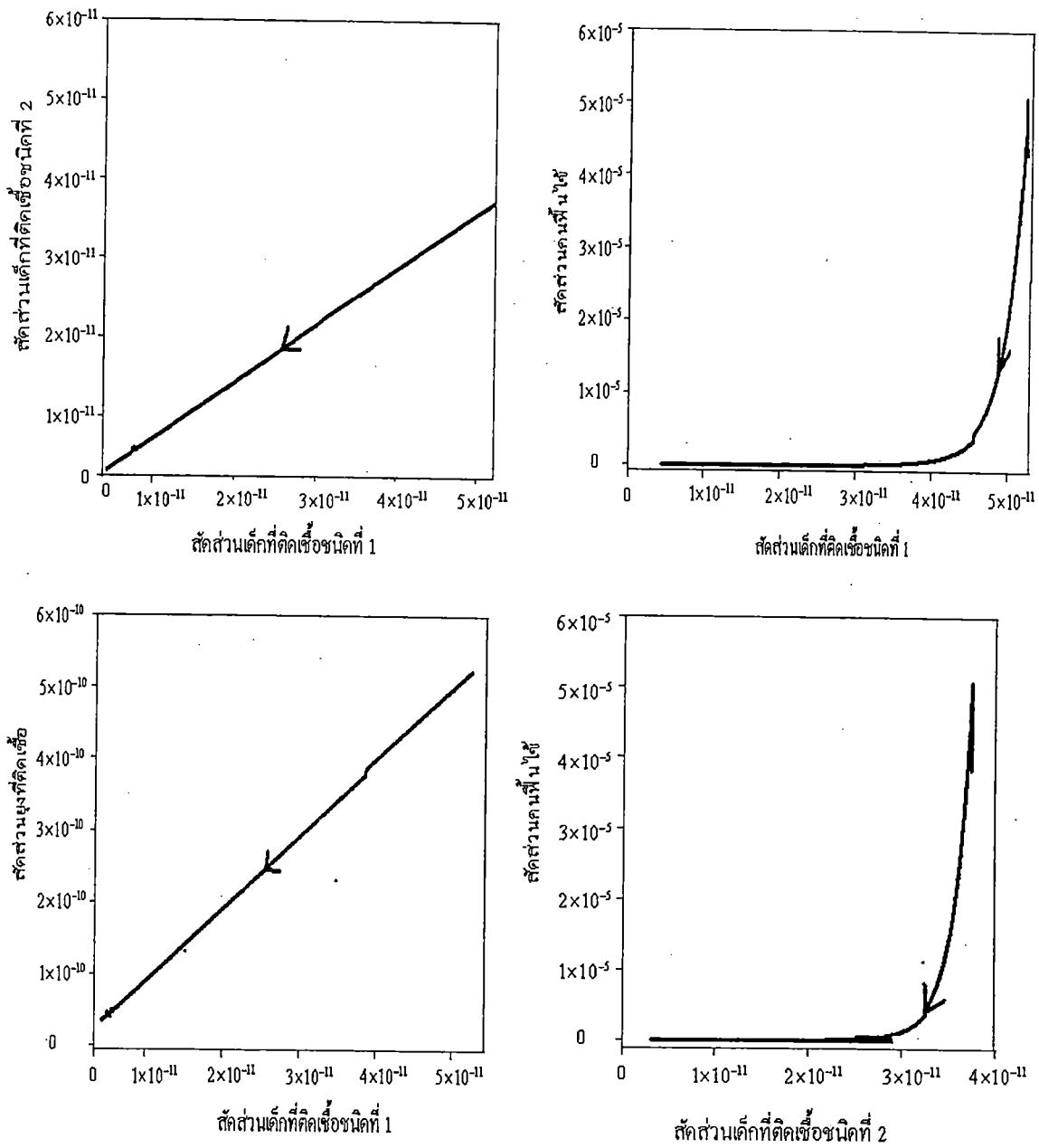
**รูปที่ 3.11** ผลเฉลยสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ  $S, I_{D1}, I_{D2}, R$  ตามลำดับ สำหรับ  $R_0 < 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $A = 5,000$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $M_1 = 5.66667$ ,  $R_0 = 0.34565$ ,  $R'_0 = 0.58792$ . สัดส่วนของคนทีไวต่อการติดเชื้อ คนที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 คนที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 และสัดส่วนของคนฟื้นไข้เข้าสู่จุดสมดุลสถานะไร้โรค



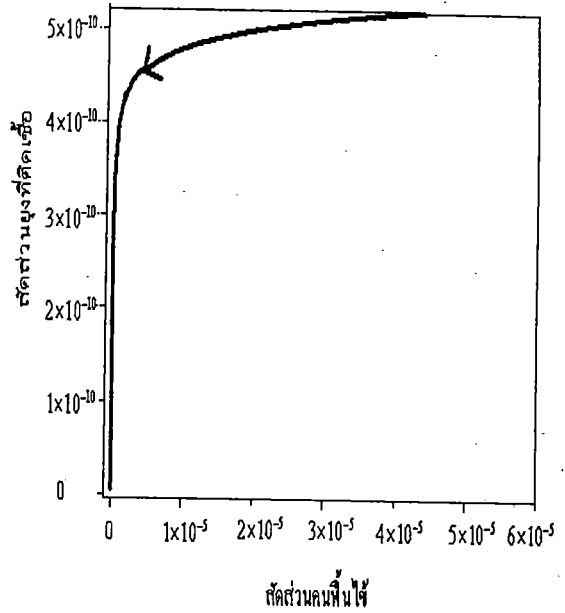
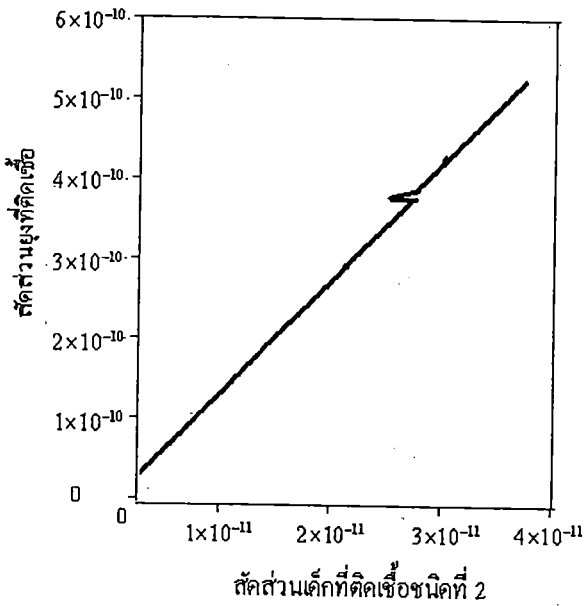
**รูปที่ 3.12** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลาและ  $I_v$  สำหรับ  $R_0 < 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7$ ,  $\beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $A = 5,000$ ,  $M_1 = 5.66667$ ,  $R_0 = 0.34565$ ,  $R'_0 = 0.58792$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ . สัดส่วนของยุงที่ติดเชื้อลู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะไร้โรค



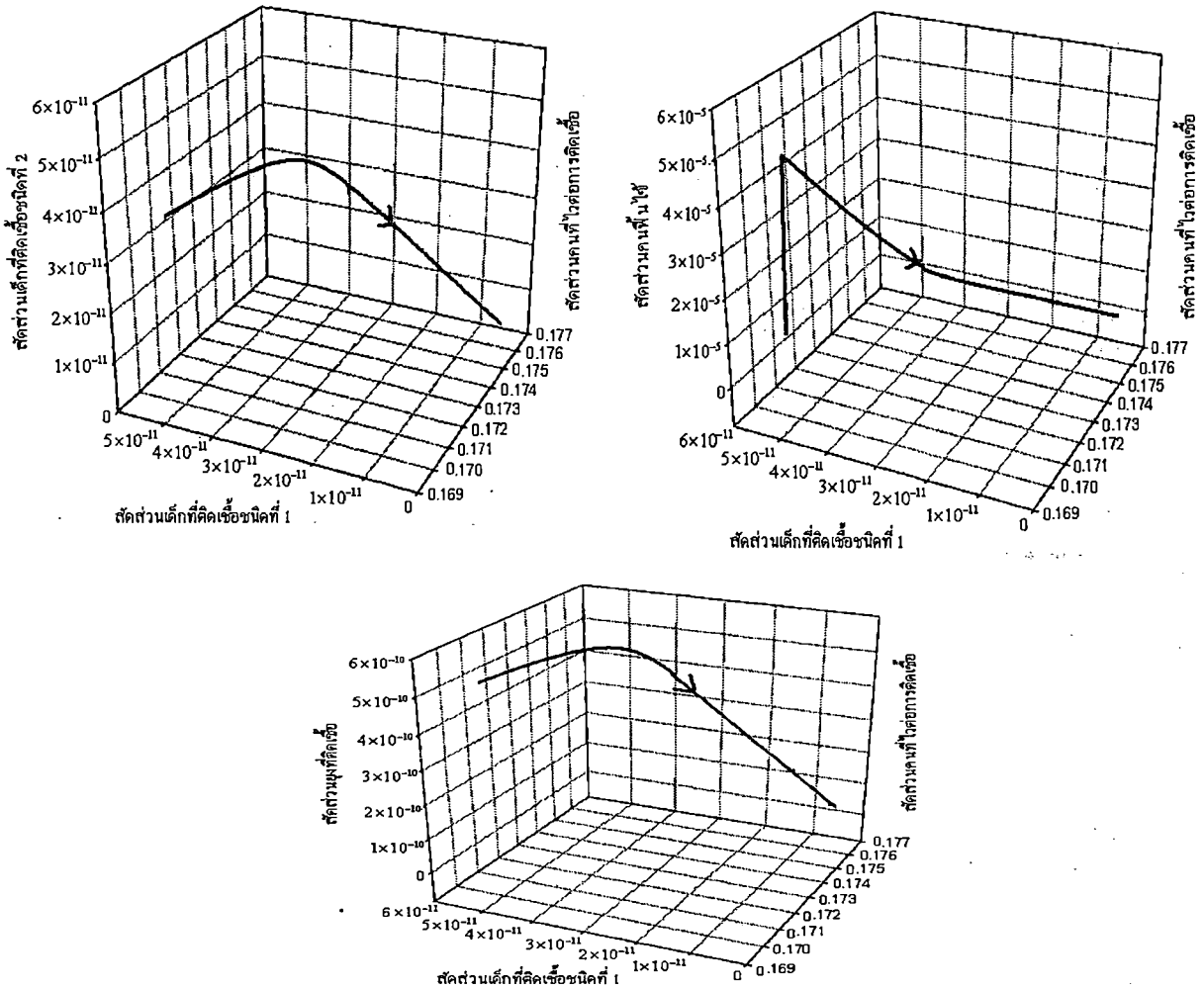
รูปที่ 3.13 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_{D1})$ ,  $(S, I_{D2})$ ,  $(S, R)$ ,  $(S, I_v)$  สำหรับ  $R_0 < 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_v = 0.5, r = 1/3 \text{ day}^{-1}, N_T = 100,000, A = 5,000, \delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}, M_1 = 5.66667, R_0 = 0.34565, R'_0 = 0.58792$ . สัดส่วน ผู้เข้าสู่จุดสมดุลสถานะไร้โรค



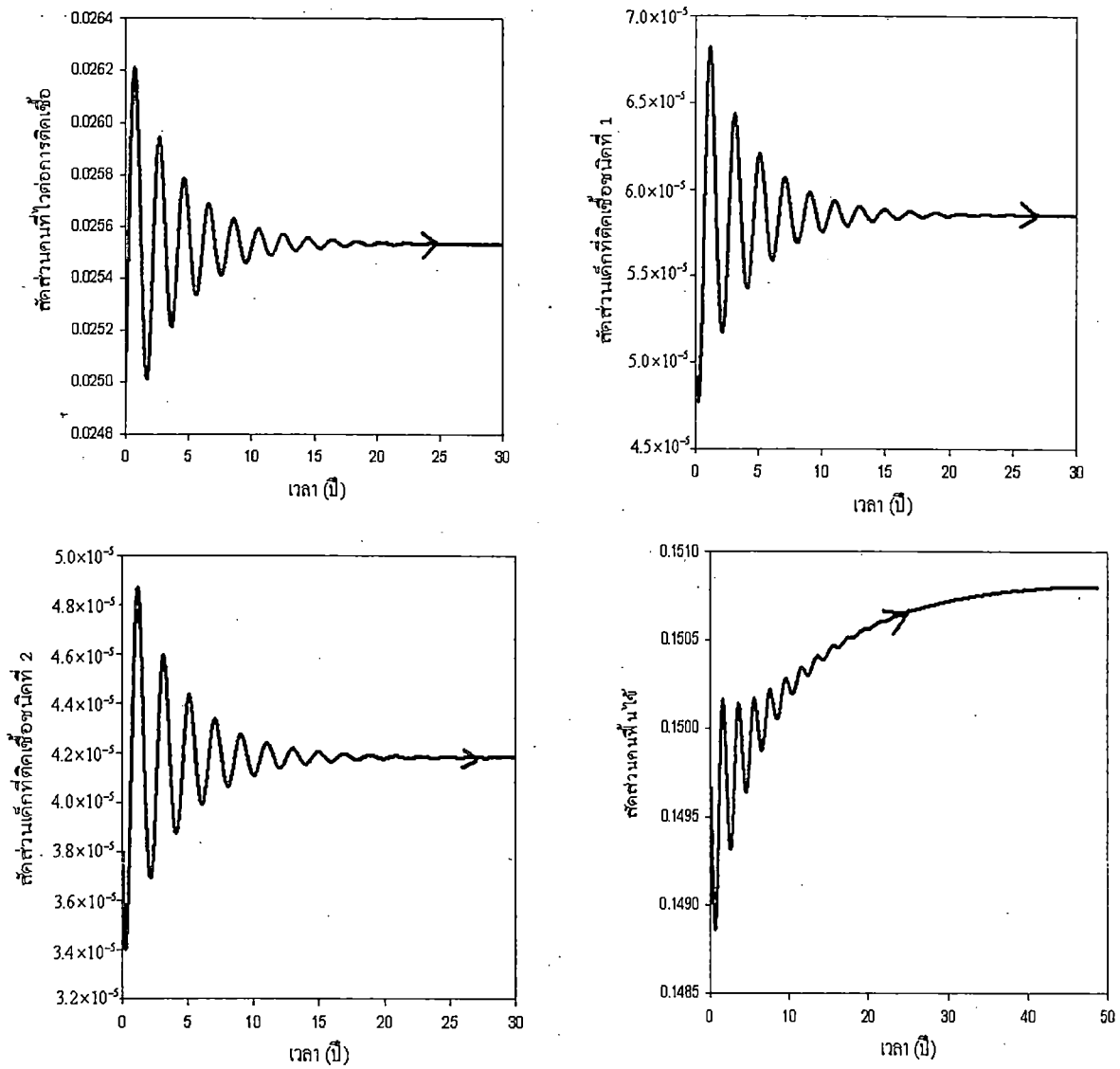
**รูปที่ 3.14** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D1}, I_{D2})$ ,  $(I_{D1}, R)$ ,  $(I_{D1}, I_V)$ ,  $(I_{D2}, R)$  สำหรับ  $R_0 < 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_v = 0.5, r = 1/3 \text{ day}^{-1}, N_T = 100,000, A = 5,000, \delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}, M_1 = 5.66667, R_0 = 0.34565, R'_0 = 0.58792$ . สัดส่วนสูงสุดสมดุลสถานะไร้โรค



**รูปที่ 3.15** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D2}, I_V)$ ,  $(R, I_V)$  สำหรับ  $R_0 < 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_v = 0.5, r = 1/3 \text{ day}^{-1}, N_T = 100,000, A = 5,000, \delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}, M_1 = 5.66667, R_0 = 0.34565, R'_0 = 0.58792$   
 สัดส่วนผู้เข้าสู่จุดสมดุลสถานะไร้โรค



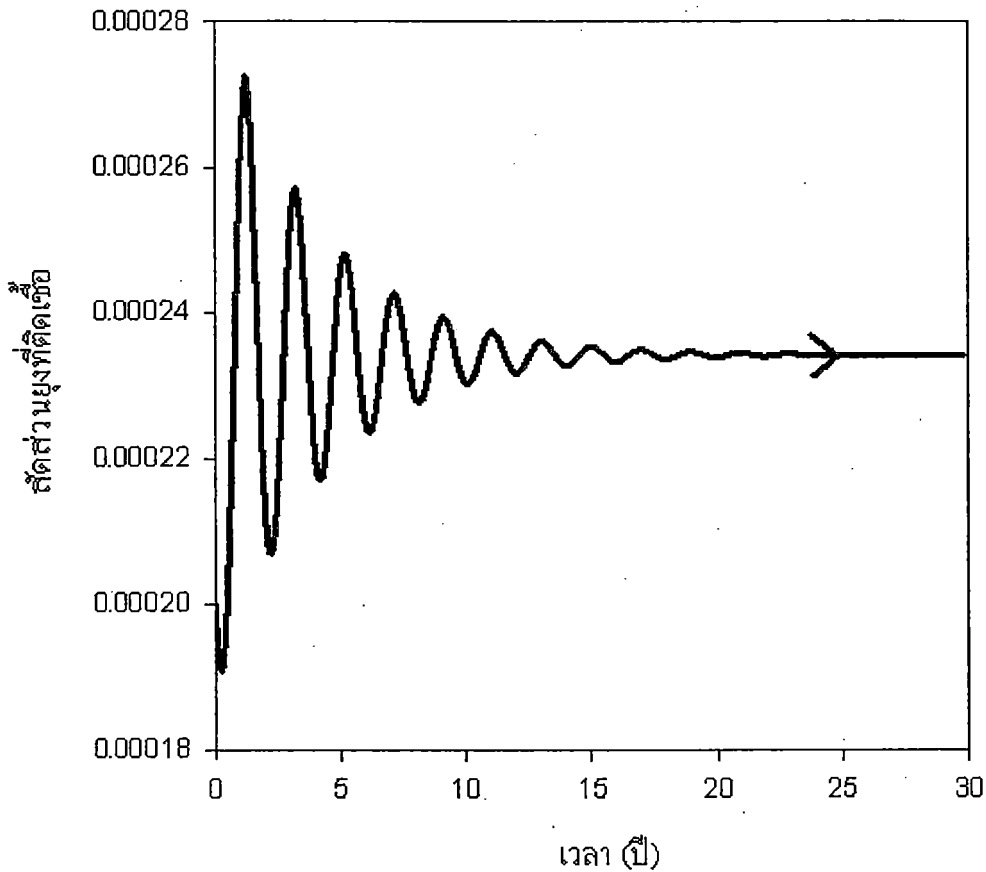
รูปที่ 3.16 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_{D1}, I_{D2})$ ,  $(S, I_{D1}, R)$ ,  $(S, I_{D1}, I_v)$  สำหรับ  $R_0 < 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_v = 0.5, r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000, A = 5,000, \delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}, M_1 = 5.66667, R_0 = 0.34565, R'_0 = 0.58792$ . สัดส่วนเข้าสู่จุดสมดุลสถานะไร้โรค



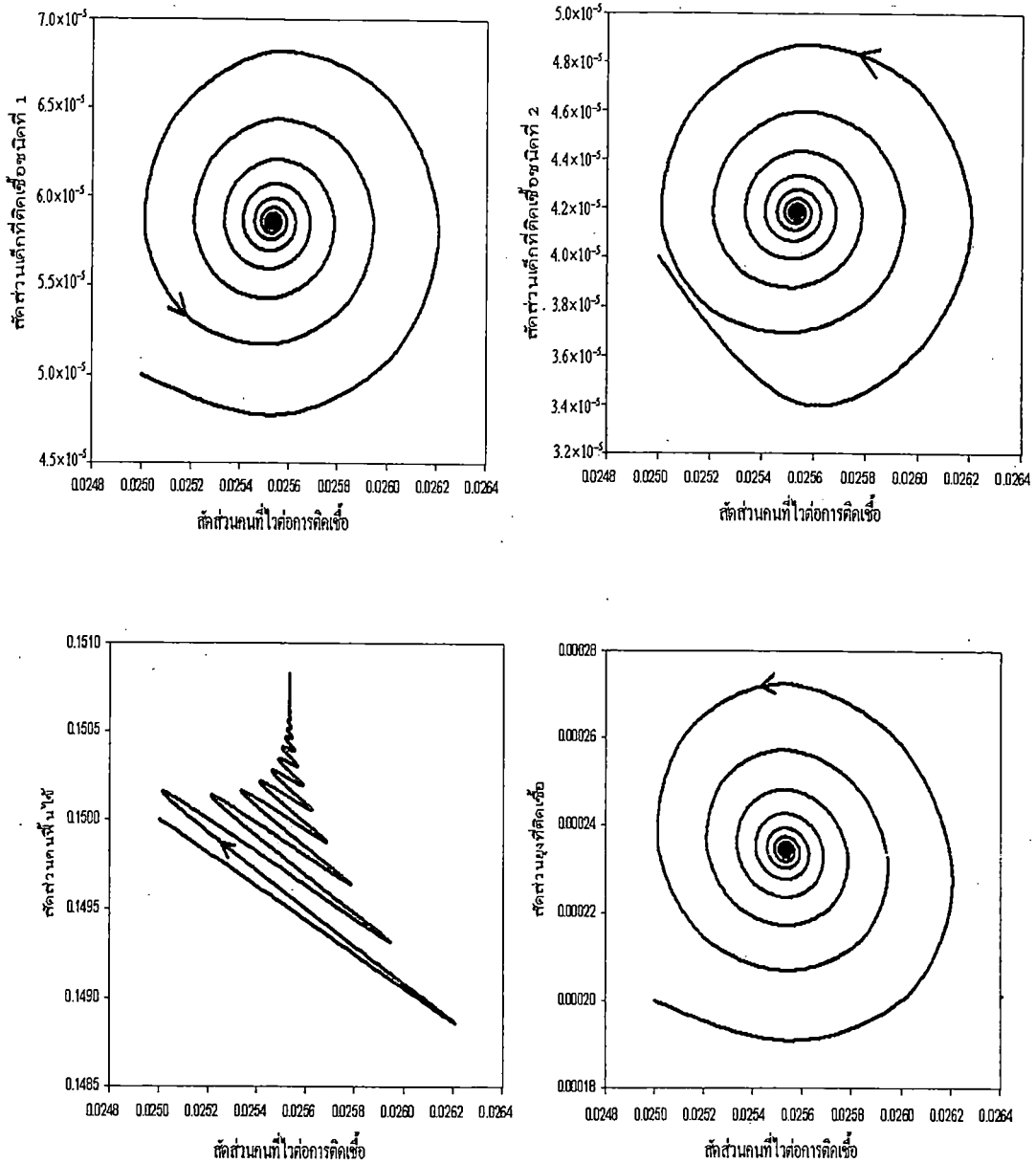
รูปที่ 3.17 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของเวลากับ  $S, I_{D1}, I_{D2}, R$  สำหรับ

$R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $A = 100,000$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,

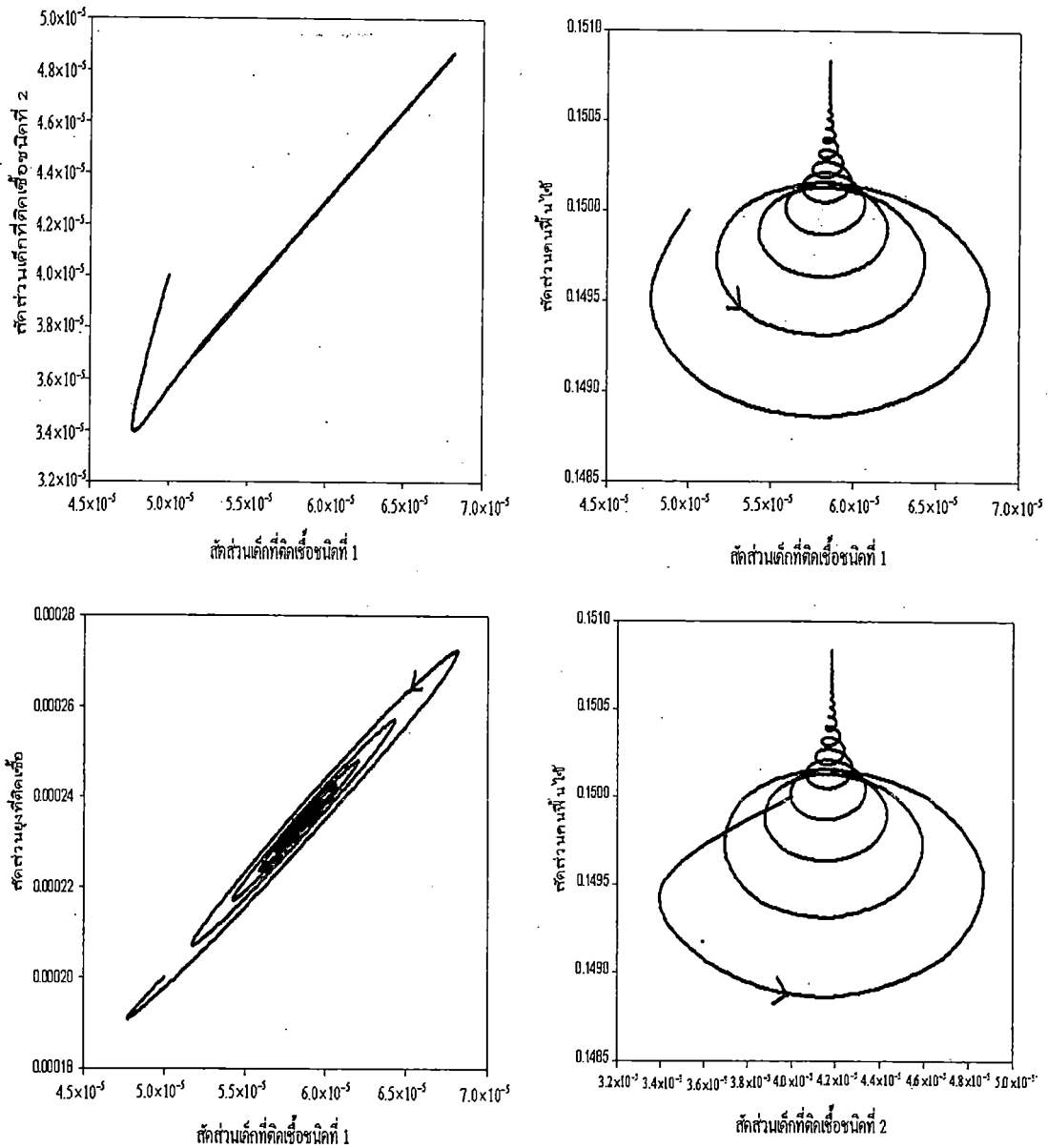
$M_1 = 5.66667$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R'_0 = 2.62927$ . สัดส่วนของคนที่ไม่ไวต่อการติดเชื้อ คนที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 คนที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 และสัดส่วนคนฟื้นไข้ ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง  $S^* = 0.02553316$ ,  $I_{D1}^* = 0.00005854$ ,  $I_{D2}^* = 0.00004182$ ,  $R^* = 0.15083707$ .



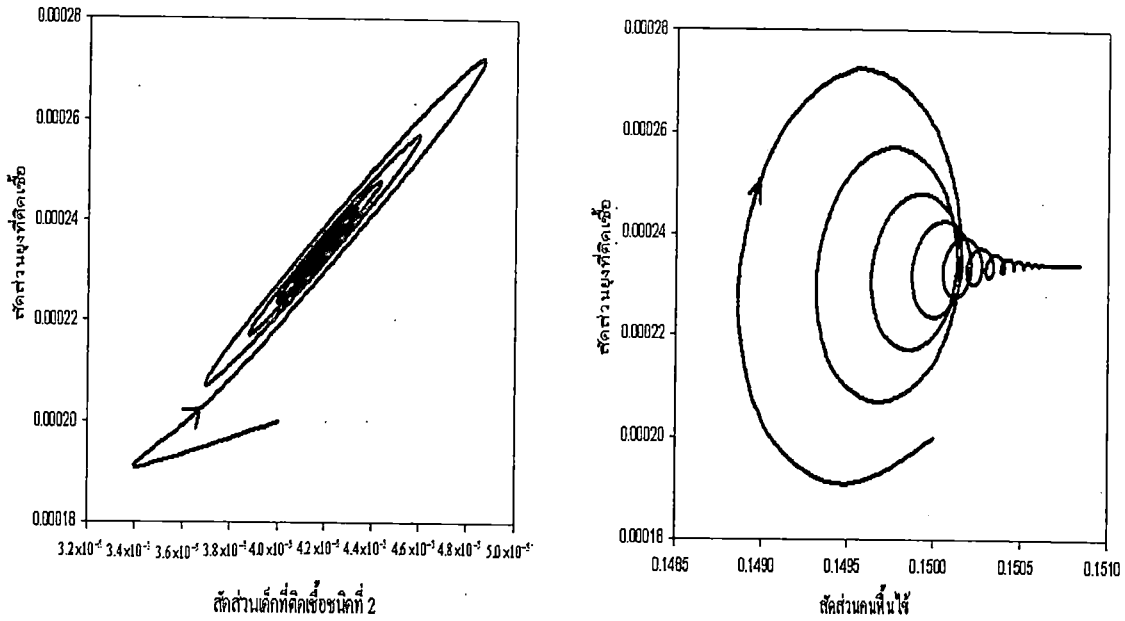
**รูปที่ 3.18** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของเวลากับ  $I_V$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7$ ,  $\beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $A = 100,000$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $M_1 = 5.66667$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R'_0 = 2.62927$ . สัดส่วนของยุงที่ติดเชื้อ ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง  $I_V^* = 0.00023412$ .



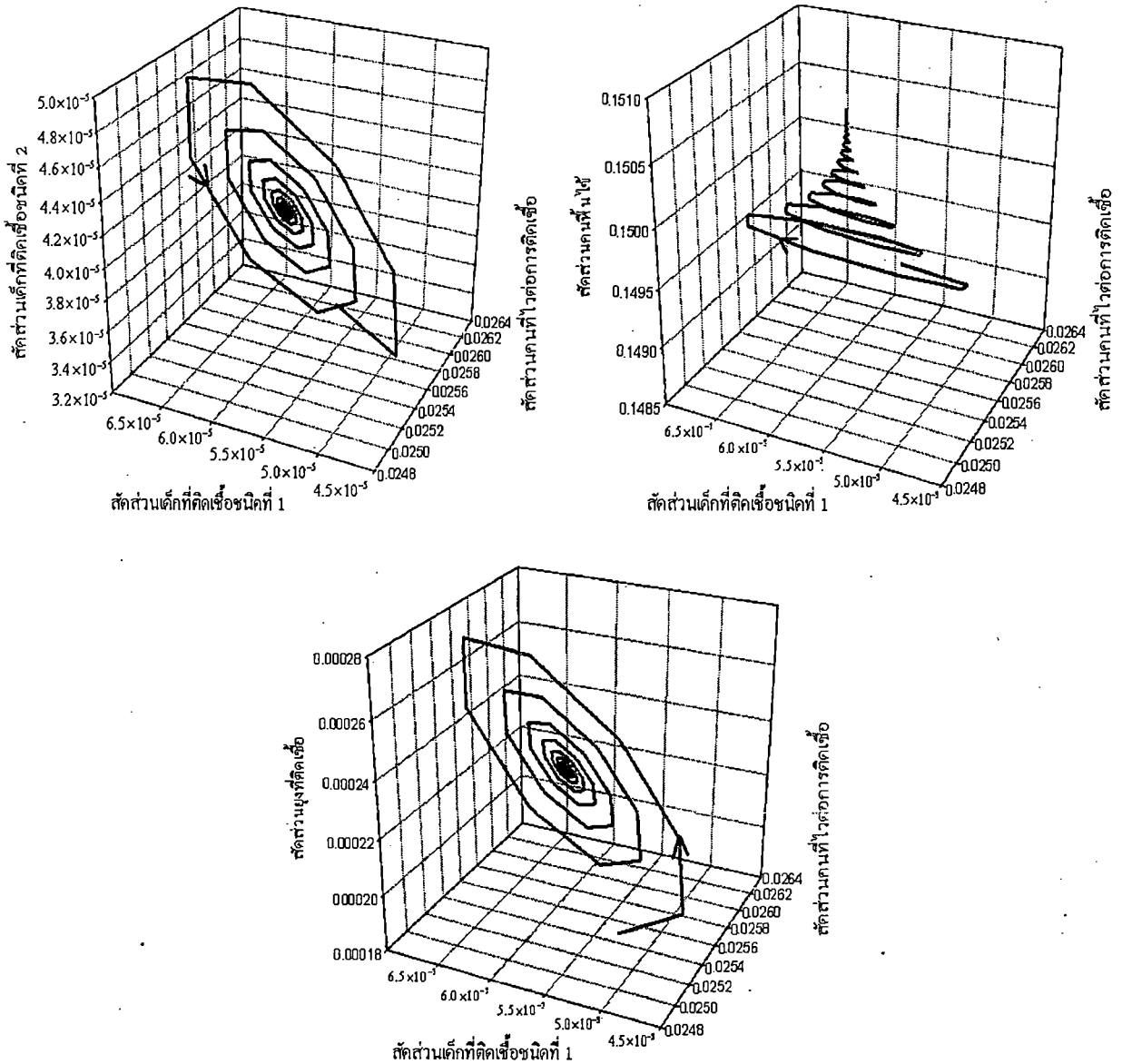
**รูปที่ 3.19** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_{D1})$ ,  $(S, I_{D2})$ ,  $(S, R)$ ,  $(S, I_V)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_v = 0.5, r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000, A = 100,000$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}, M_1 = 5.66667, R_0 = 6.91305, R'_0 = 2.62927$ . สัตว์ส่วนลู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง



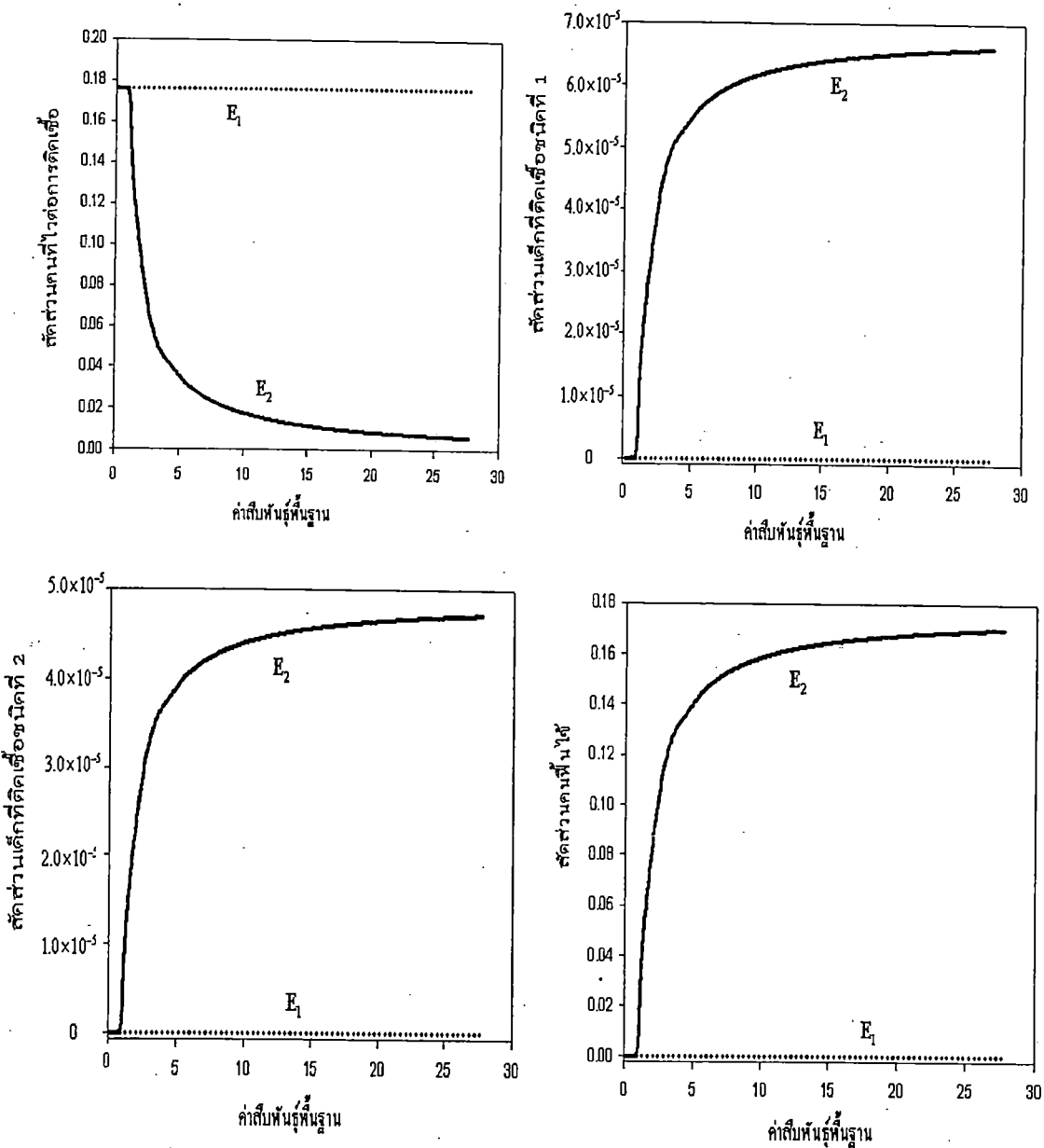
รูปที่ 3.20 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D1}, I_{D2})$ ,  $(I_{D1}, R)$ ,  $(I_{D1}, I_V)$ ,  $(I_{D2}, R)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_v = 0.5, r = 1/3 \text{ day}^{-1}, N_T = 100,000, A = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}, M_1 = 5.66667, R_0 = 6.91305, R'_0 = 2.62927$ . สัดส่วนเข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง



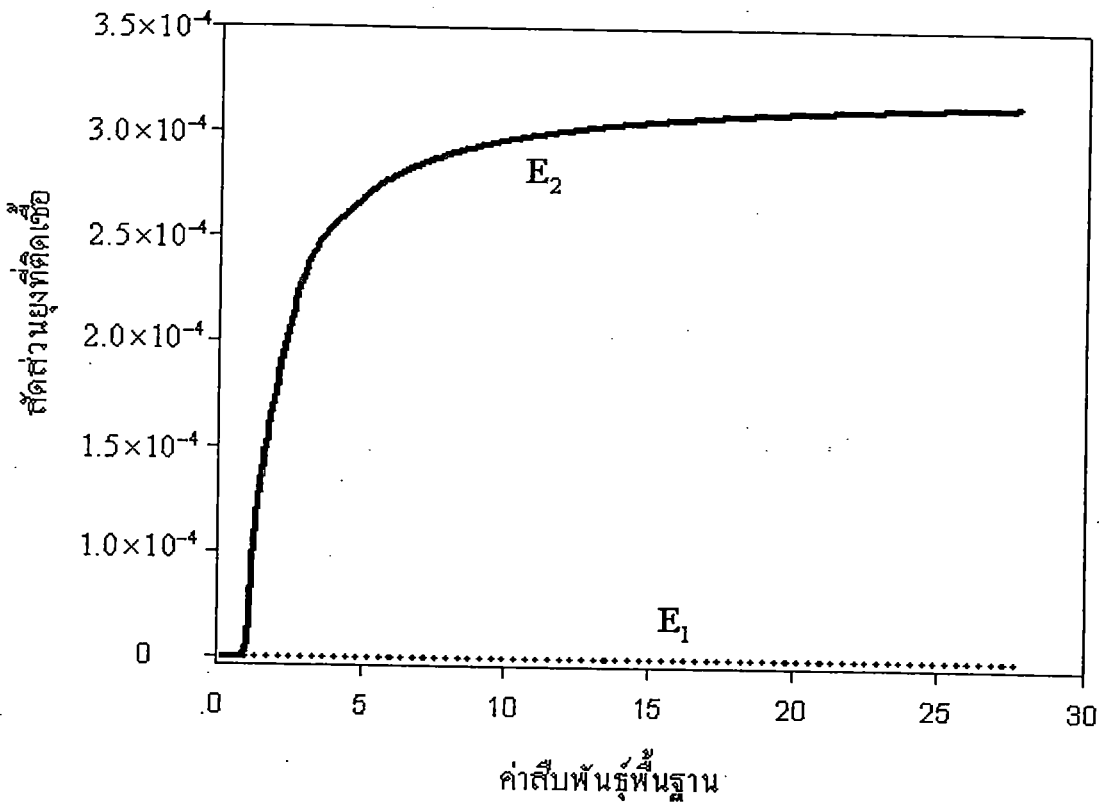
**รูปที่ 3.21** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D2}, I_V)$  ,  $(R, I_V)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_v = 0.5, r = 1/3 \text{ day}^{-1}, N_T = 100,000, A = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}, M_1 = 5.66667, R_0 = 6.91305, R'_0 = 2.62927$  สัดส่วนผู้เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง



รูปที่ 3.22 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_{D1}, I_{D2})$ ,  $(S, I_{D1}, R)$ ,  $(S, I_{D1}, I_V)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_v = 0.5, r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000, A = 100,000$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}, M_1 = 5.66667, R_0 = 6.91305, R'_0 = 2.62927$ . สัดส่วนผู้เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

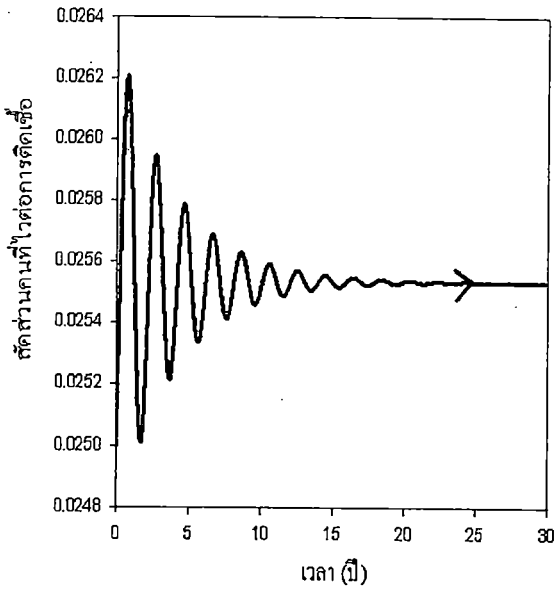


**รูปที่ 3.23** กราฟแสดงความสัมพันธ์จุดสมมูลระหว่างสัดส่วนของคนที่ไม่ต่อการติดเชื้อและค่า  
 สืบพันธุ์พื้นฐาน  $R_0$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  
 $\beta_{J_{D1}} = 0.7$ ,  $\beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $A = 100,000$ ,  
 $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $M_1 = 5.66667$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R'_0 = 2.62927$ . ——— แทนเมื่อสถานะเสถียร  
 และ - - - - - แทนสถานะไม่เสถียร สำหรับ  $R_0 < 1$ ,  $E_1$  จะเสถียร สำหรับ  $R_0 > 1$ ,  $E_2$  จะเสถียร

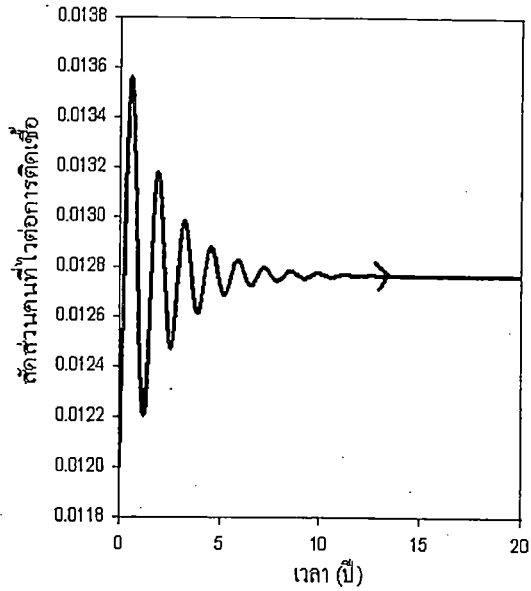


รูปที่ 3.24 กราฟแสดงความสัมพันธ์จุดสมดุลระหว่างสัดส่วนของยุงที่ติดเชื้อและค่าสืบพันธุ์พื้นฐาน  $R_0$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7$ ,  $\beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $A = 100,000$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $M_1 = 5.66667$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R'_0 = 2.62927$ . — แทนเมื่อสถานะเสถียรและ - - - - - แทนสถานะไม่เสถียร สำหรับ  $R_0 < 1$ ,  $E_1$  จะเสถียร สำหรับ  $R_0 > 1$ ,  $E_2$  จะเสถียร

ในส่วนนี้เราเปรียบเทียบค่าตัวแปรเมื่อค่าสัณฐานพื้นฐานมีค่าแตกต่างกัน ซึ่งแสดงตามรูปต่อไปนี้



3.25 a)



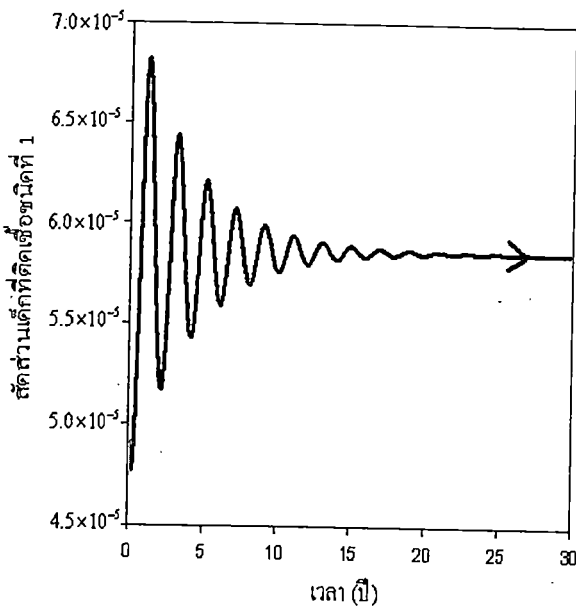
3.25 b)

**รูปที่ 3.25** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ  $S$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7$ ,  $\beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $M_1 = 5.66667$ .

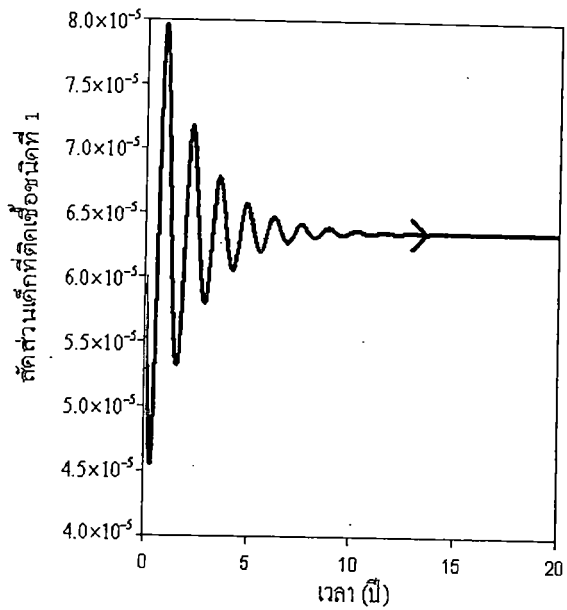
สัดส่วนของคนที่ไวต่อการติดเชื้อเข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.25a)  $A = 100,000$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R'_0 = 2.62927$ ,  $S^* = 0.02553316$ .

3.25 b)  $A = 200,000$ ,  $R_0 = 13.8261$ ,  $R'_0 = 3.71835$ ,  $S^* = 0.01276683$ .



3.26a)



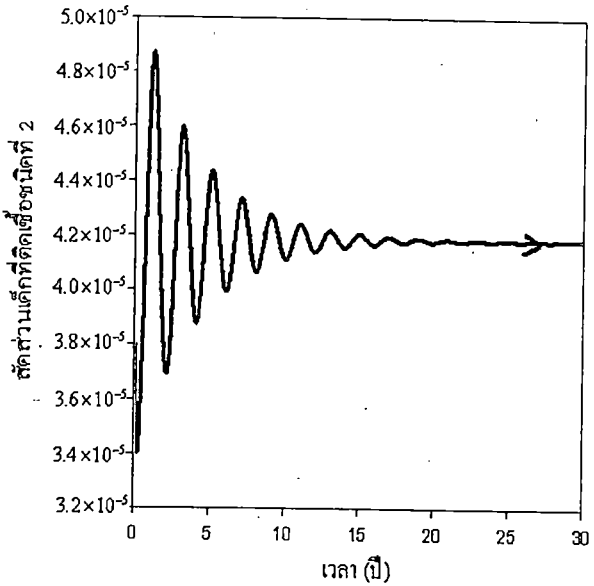
3.26b)

รูปที่ 3.26 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ  $I_{D1}$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7$ ,  $\beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $M_1 = 5.66667$ .

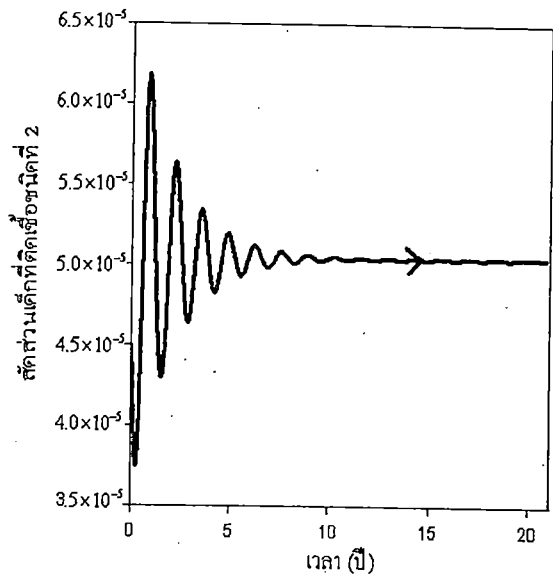
สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.26a)  $A = 100,000$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R'_0 = 2.62927$ ,  $I_{D1}^* = 0.00005854$ .

3.26b)  $A = 200,000$ ,  $R_0 = 13.8261$ ,  $R'_0 = 3.71835$ ,  $I_{D1}^* = 0.00006350$ .



3.27a)



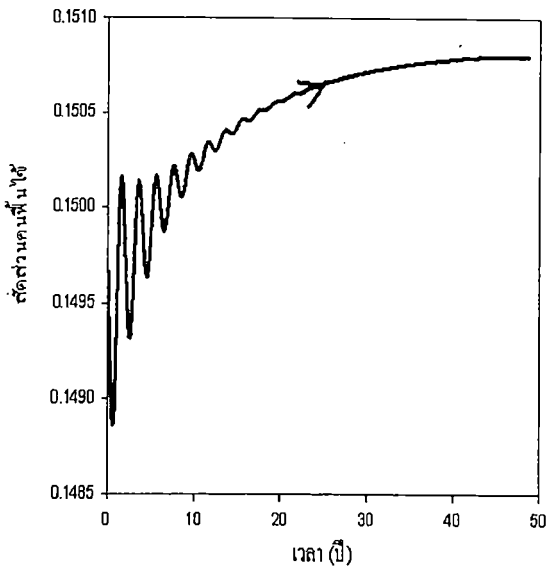
3.27b)

**รูปที่ 3.27** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ  $I_{D2}$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7$ ,  $\beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $M_1 = 5.66667$ .

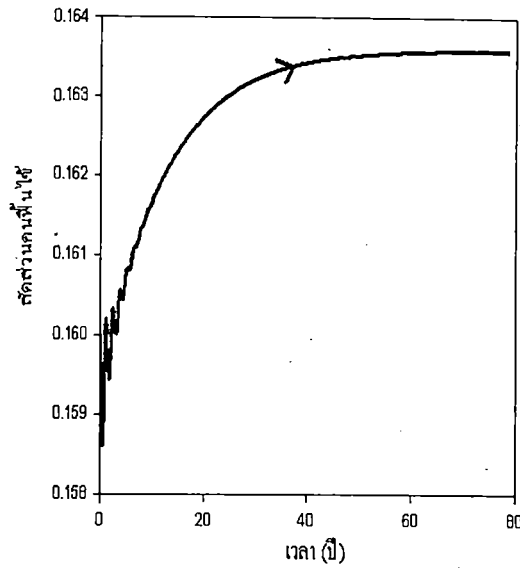
สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.27a)  $A = 100,000$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R'_0 = 2.62927$ ,  $I_{D2}^* = 0.00004182$ .

3.27b)  $A = 200,000$ ,  $R_0 = 13.8261$ ,  $R'_0 = 3.71835$ ,  $I_{D2}^* = 0.00004535$ .



3.28a)



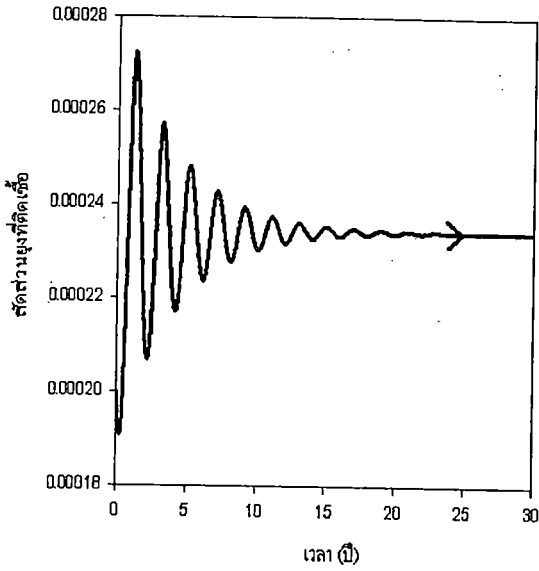
3.28b)

**รูปที่ 3.28** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ  $R$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $M_1 = 5.66667$ .

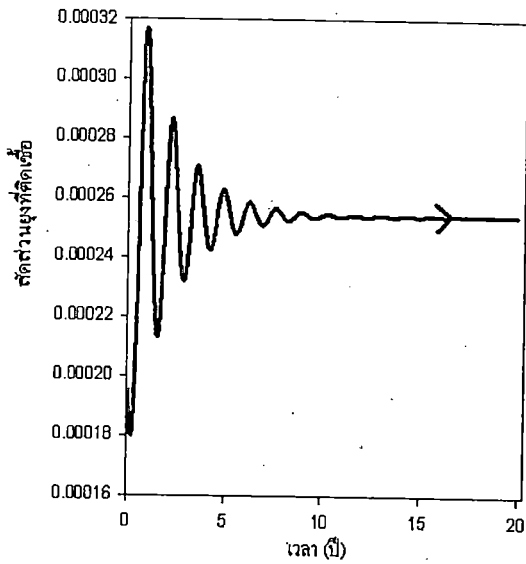
สัดส่วนของคนไข้ที่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะ โรคเรื้อรัง

$$3.28a) \quad A = 100,000, R_0 = 6.91305, R'_0 = 2.62927, R^* = 0.15083707.$$

$$3.28b) \quad A = 200,000, R_0 = 13.8261, R'_0 = 3.71835, R^* = 0.16359491.$$



3.29a)



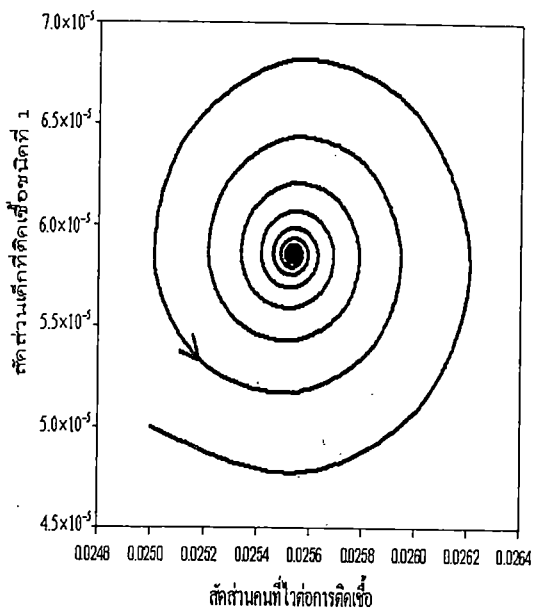
3.29b)

รูปที่ 3.29 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ  $I_v$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7$ ,  $\beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $M_1 = 5.66667$ .

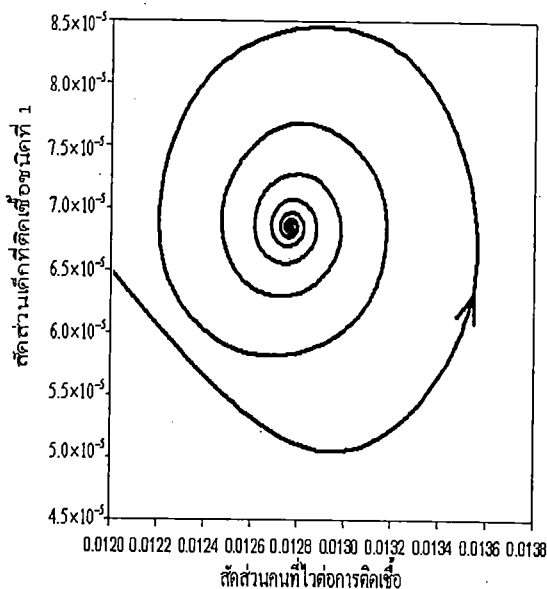
สัดส่วนของยุงที่ติดเชื้อ เข้าสู่สู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.29a)  $A = 100,000$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R_0' = 2.62927$ ,  $I_v^* = 0.00023412$ .

3.29b)  $A = 200,000$ ,  $R_0 = 13.8261$ ,  $R_0' = 3.71835$ ,  $I_v^* = 0.00025392$ .



3.30)



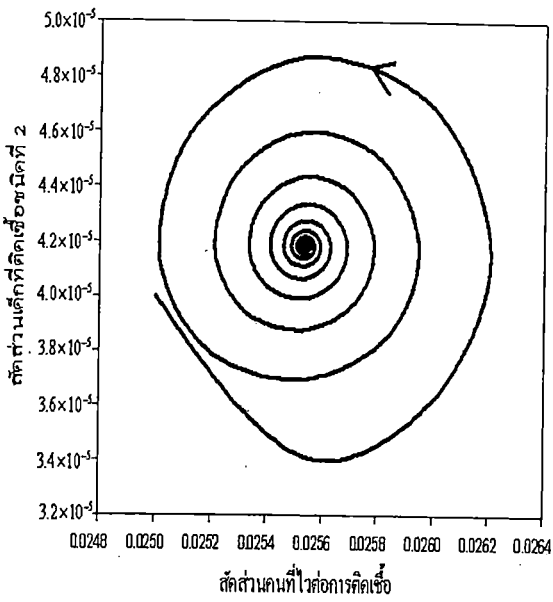
3.30b)

**รูปที่ 3.30** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_{D1})$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $M_1 = 5.66667$ .

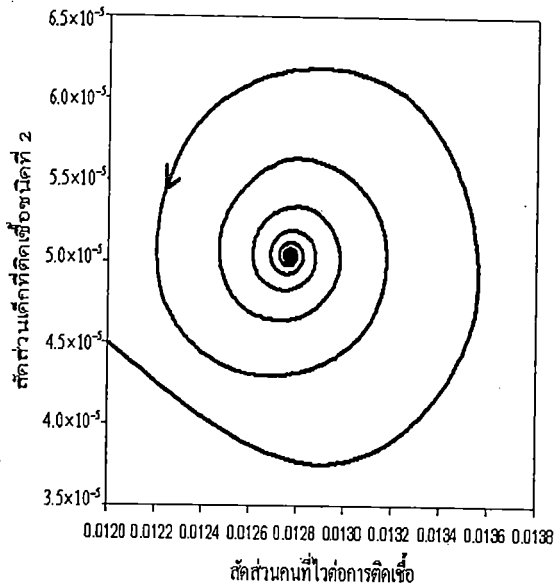
สัดส่วนของคนทีไวต่อการติดเชื้อและเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 กู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.30a)  $A = 100,000, R_0 = 6.91305, R'_0 = 2.62927, S^* = 0.02553316, I_{D1}^* = 0.00005854$ .

3.30b)  $A = 200,000, R_0 = 13.8261, R'_0 = 3.71835, S^* = 0.01276683, I_{D1}^* = 0.00006350$ .



3.31a)



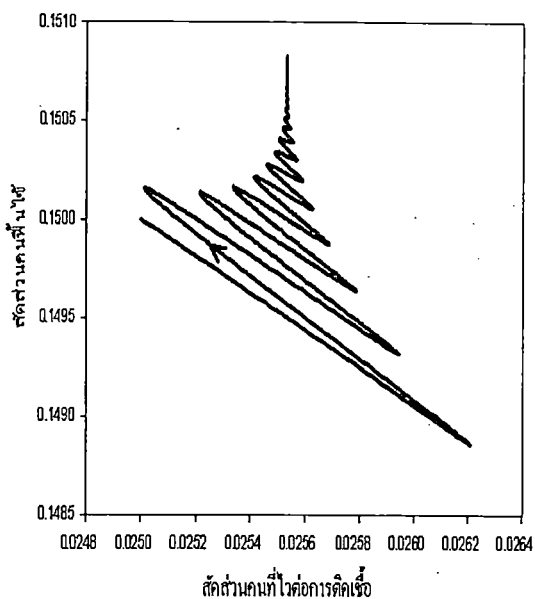
3.31b)

**รูปที่ 3.31** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_{D2})$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7$ ,  $\beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $M_1 = 5.66667$ .

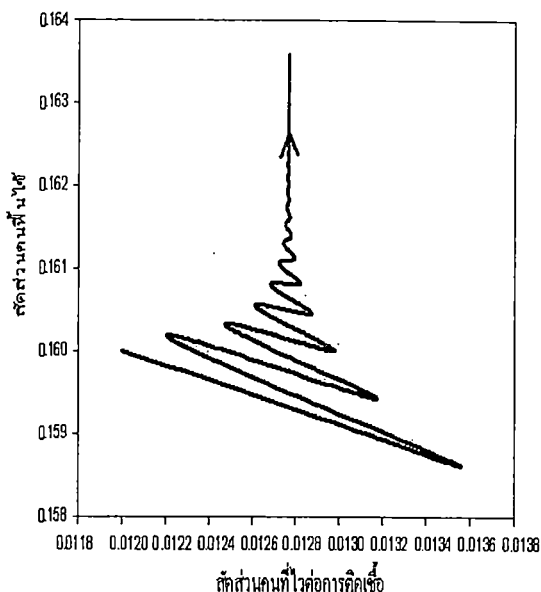
สัดส่วนของคนที่ไม่ต่อการติดเชื้อและเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 ทั่วเข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.31a)  $A = 100,000$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R'_0 = 2.62927$ ,  $S^* = 0.02553316$ ,  $I_{D2}^* = 0.00004182$ .

3.31b)  $A = 200,000$ ,  $R_0 = 13.8261$ ,  $R'_0 = 3.71835$ ,  $S^* = 0.01276683$ ,  $I_{D2}^* = 0.00004535$ .



3.32 a)



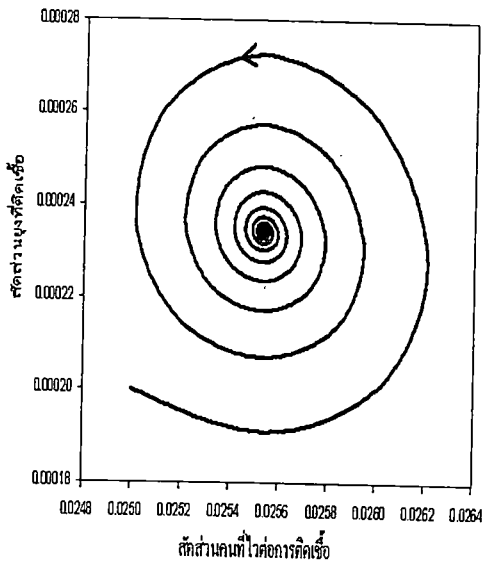
3.32 b)

**รูปที่ 3.32** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง (S,R) สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7$ ,  $\beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $M_1 = 5.66667$ .

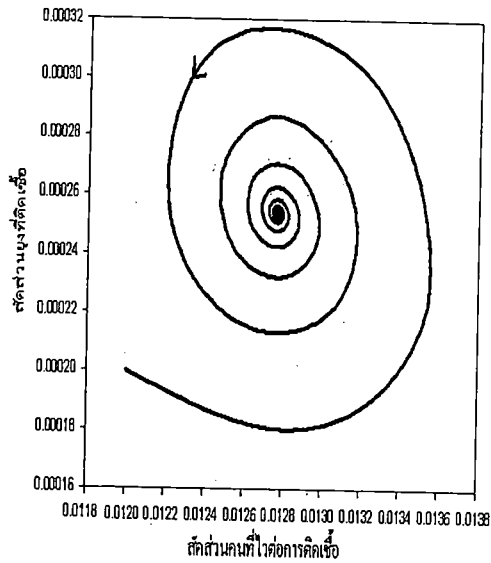
สัดส่วนของคนทีไวต่อการติดเชื้อและคนป่วย ู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.32a)  $A = 100,000$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R'_0 = 2.62927$ ,  $S^* = 0.02553316$ ,  $R^* = 0.15083707$ .

3.32b)  $A = 200,000$ ,  $R_0 = 13.8261$ ,  $R'_0 = 3.71835$ ,  $S^* = 0.01276683$ ,  $R^* = 0.16359491$ .



3.33 a)



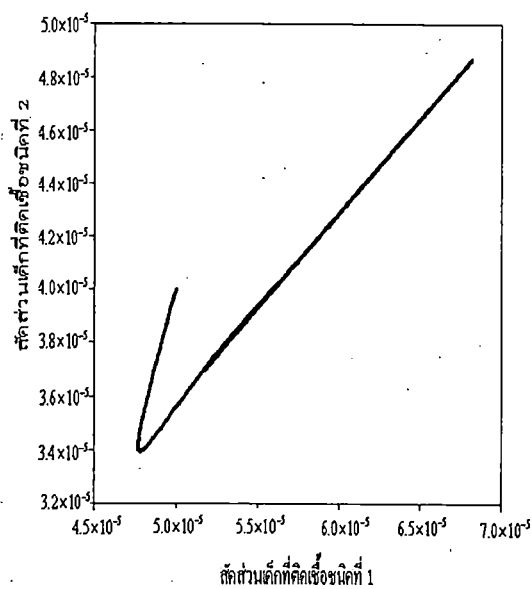
3.33 b)

รูปที่ 3.33 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_v)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $M_1 = 5.66667$ .

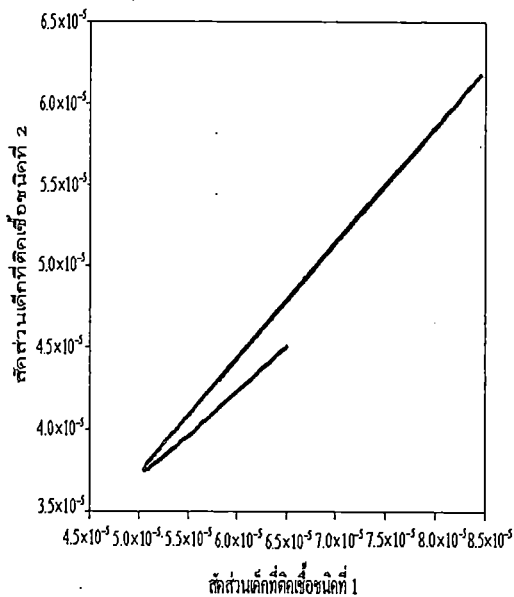
สัดส่วนของคนที่ไวต่อการติดเชื้อและยุงที่ติดเชื้อ ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.33a)  $A = 100,000$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R'_0 = 2.62927$ ,  $S^* = 0.02553316$ ,  $I_v^* = 0.00023412$ .

3.33b)  $A = 200,000$ ,  $R_0 = 13.8261$ ,  $R'_0 = 3.71835$ ,  $S^* = 0.01276683$ ,  $I_v^* = 0.00025392$ .



3.34 a)



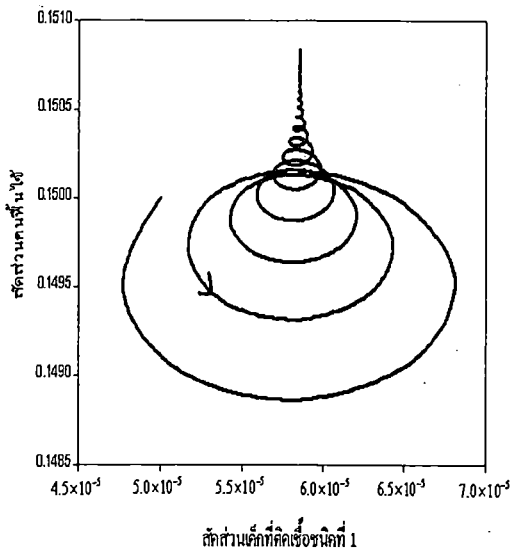
3.34 b)

**รูปที่ 3.34** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D1}, I_{D2})$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_v = 0.5, r = 1/3 \text{ day}^{-1}, \delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}, N_T = 100,000, M_1 = 5.66667$

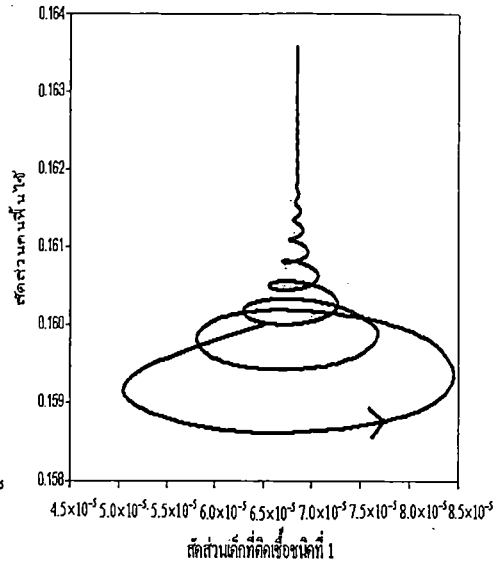
สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 ใกล้เคียงจุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.34a)  $A = 100,000, R_0 = 6.91305, R'_0 = 2.62927, I_{D1}^* = 0.00005854, I_{D2}^* = 0.00004182.$

3.34b)  $A = 200,000, R_0 = 13.8261, R'_0 = 3.71835, I_{D1}^* = 0.00006350, I_{D2}^* = 0.00004535.$



3.35 a)

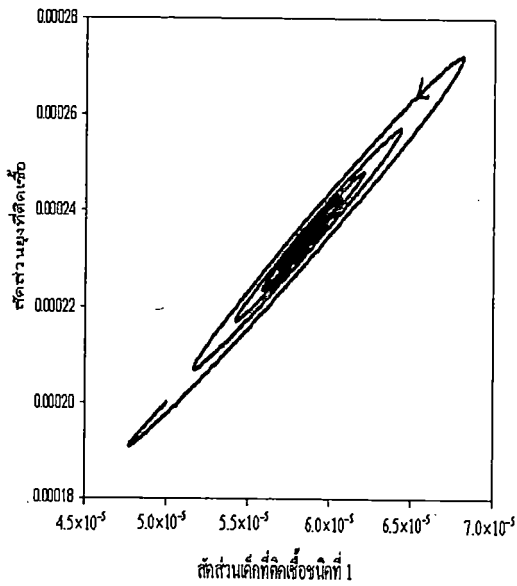


3.35 b)

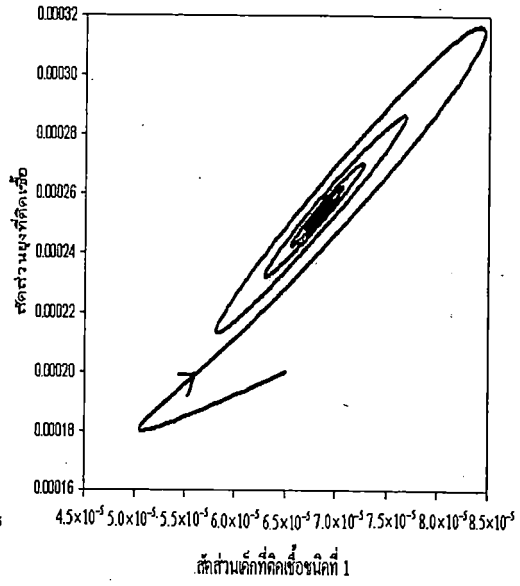
**รูปที่ 3.35** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D1}, R)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7$ ,  $\beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $M_1 = 5.66667$ . สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และคนฟื้นไข้ ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.35a)  $A = 100,000$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R_0^* = 2.62927$ ,  $I_{D1}^* = 0.00005854$ ,  $R^* = 0.15083707$ .

3.35b)  $A = 200,000$ ,  $R_0 = 13.8261$ ,  $R_0^* = 3.71835$ ,  $I_{D1}^* = 0.00006350$ ,  $R^* = 0.16359491$ .



3.36 a)



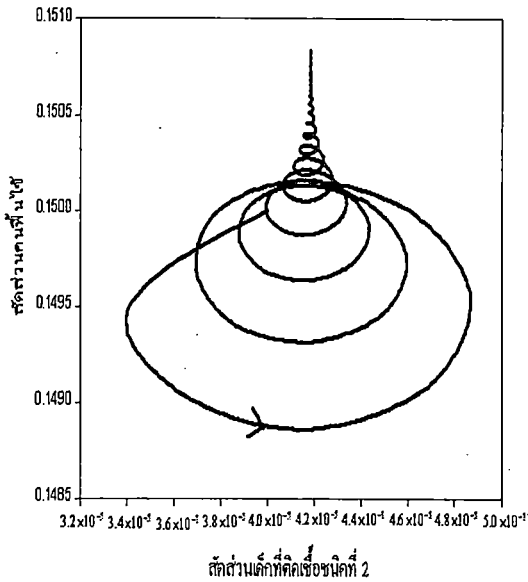
3.36 b)

รูปที่ 3.36 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D1}, I_V)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7$ ,  $\beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $M_1 = 5.66667$ .

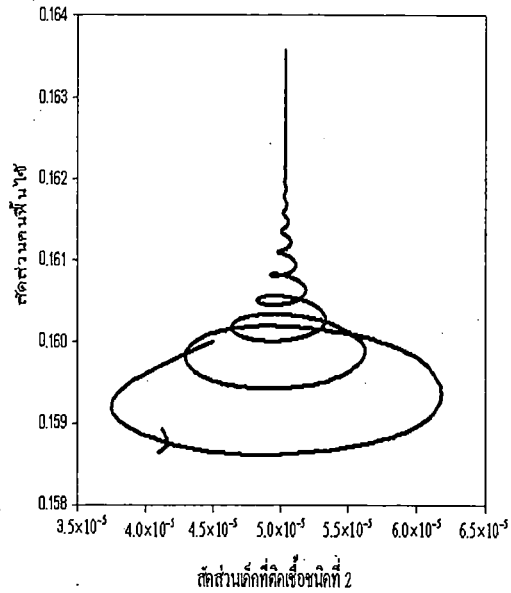
สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และยุงที่ติดเชื้อ คู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.36a)  $A = 100,000$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R'_0 = 2.62927$ ,  $I_{D1}^* = 0.00005854$ ,  $I_V^* = 0.00023412$ .

3.36b)  $A = 200,000$ ,  $R_0 = 13.8261$ ,  $R'_0 = 3.71835$ ,  $I_{D1}^* = 0.00006350$ ,  $I_V^* = 0.0002539$ .



3.37 a)



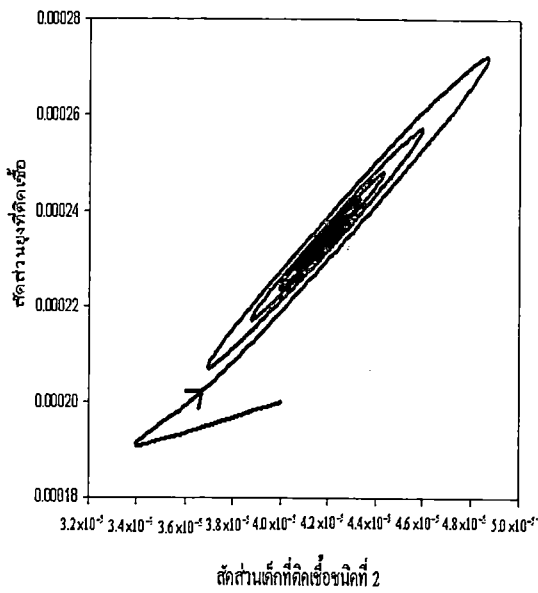
3.37 b)

**รูปที่ 3.37** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D2}, R)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7$ ,  $\beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $M_1 = 5.66667$ .

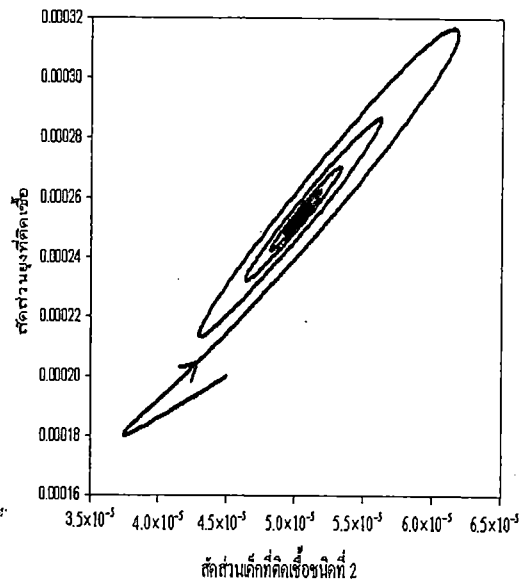
สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 และคนฟื้นไข้ ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.37a)  $A = 100,000$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R'_0 = 2.62927$ ,  $I_{D2}^* = 0.00004182$ ,  $R^* = 0.15083707$ .

3.37 b)  $A = 200,000$ ,  $R_0 = 13.8261$ ,  $R'_0 = 3.71835$ ,  $I_{D2}^* = 0.00004535$ ,  $R^* = 0.16359491$ .



3.38 a)



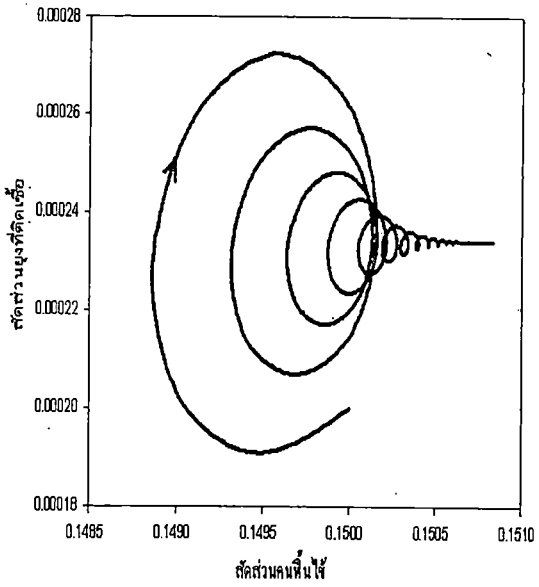
3.38 b)

**รูปที่ 3.38** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D2}, I_V)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}, \delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}, N_T = 100,000, M_1 = 5.66667$ .

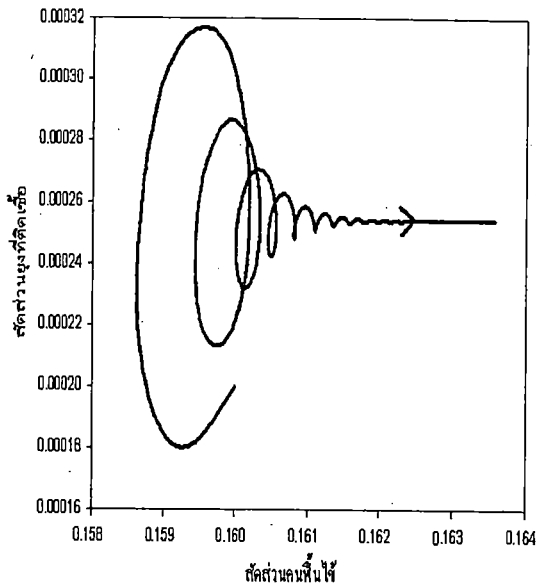
สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 และยุงที่ติดเชื้อ คู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

$$3.38) A = 100,000, R_0 = 6.91305, R'_0 = 2.62927, I_{D2}^* = 0.00004182, I_V^* = 0.00023412.$$

$$3.38b) A = 200,000, R_0 = 13.8261, R'_0 = 3.71835, I_{D2}^* = 0.00004535, I_V^* = 0.0002539.$$



3.39 a)



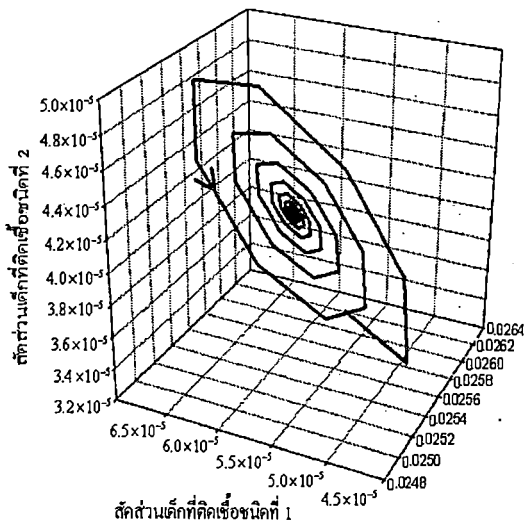
3.39 b)

**รูปที่ 3.39** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(R, I_v)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7$ ,  $\beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $M_1 = 5.66667$ .

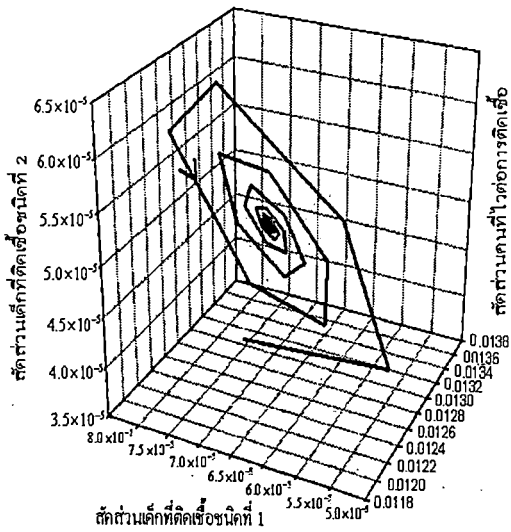
สัดส่วนของคนที่มีไข้และยุงที่ติดเชื้อ ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.39a)  $A = 100,000$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R_0' = 2.62927$ ,  $R^* = 0.15083707$ ,  $I_v^* = 0.00023412$ .

3.39b)  $A = 200,000$ ,  $R_0 = 13.8261$ ,  $R_0' = 3.71835$ ,  $R^* = 0.16359491$ ,  $I_v^* = 0.0002539$ .



3.40 a)

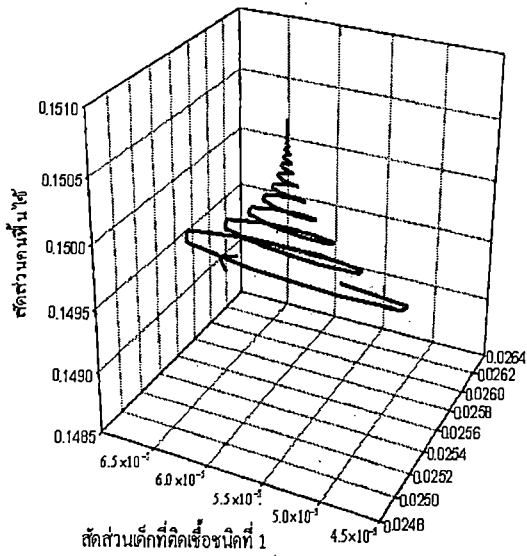


3.40 b)

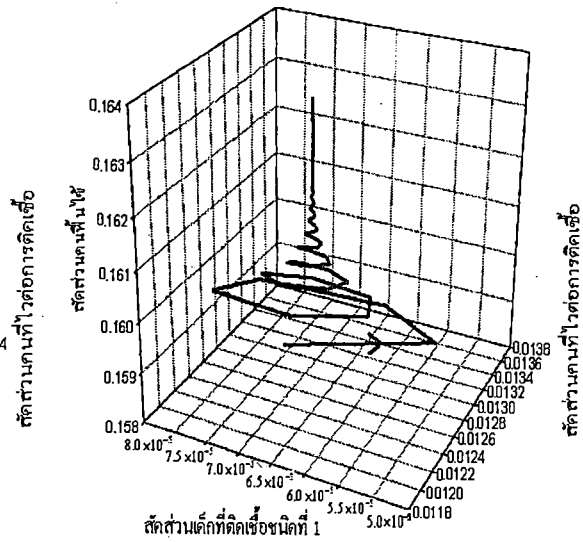
**รูปที่ 3.40** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_{D1}, I_{D2})$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $M_1 = 5.66667$ . สัดส่วนของคนที่ไม่ต้องการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.40a)  $A = 100,000$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R'_0 = 2.62927$ ,  $S^* = 0.02553316$ ,  $I_{D1}^* = 0.00005854$ ,  
 $I_{D2}^* = 0.00004182$

3.40b)  $A = 200,000$ ,  $R_0 = 13.8261$ ,  $R'_0 = 3.71835$ ,  $S^* = 0.01276683$ ,  $I_{D1}^* = 0.00006350$ ,  
 $I_{D2}^* = 0.00004535$



3.41 a)

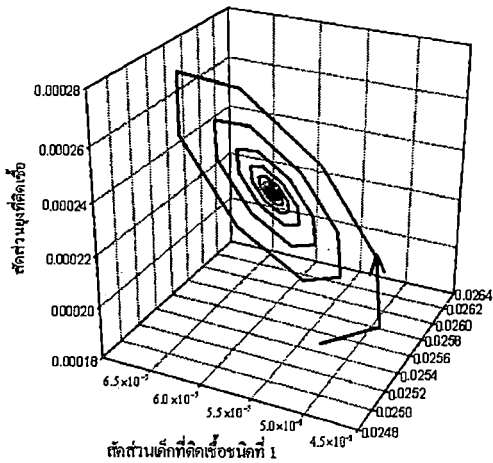


3.41 b)

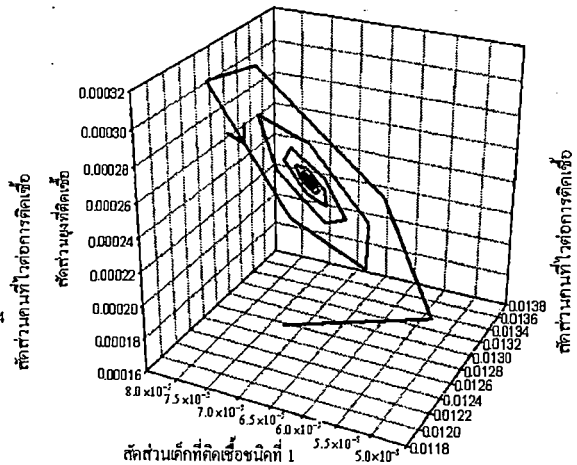
**รูปที่ 3.41** ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_{D1}, R)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $M_1 = 5.66667$ .  
 สัดส่วนของคนที่ไม่ติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และคนที่มีไข้ ถูเข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.41a)  $A = 100,000$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R'_0 = 2.62927$ ,  $S^* = 0.02553316$ ,  $I_{D1}^* = 0.00005854$ ,  
 $R^* = 0.15083707$

3.41b)  $A = 200,000$ ,  $R_0 = 13.8261$ ,  $R'_0 = 3.71835$ ,  $S^* = 0.01276683$ ,  $I_{D1}^* = 0.00006350$ ,  
 $R^* = 0.16359491$



3.42 a)



3.42 b)

รูปที่ 3.42 ผลเฉลยของสมการ (4.1)-(4.5) กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_{D1}, I_V)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  เมื่อ  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $N_T = 100,000$ ,  $M_1 = 5.66667$ .

สัดส่วนของคนที่ไม่ต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และยุงที่ติดเชื้อ ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.42a)  $A = 100,000$ ,  $R_0 = 6.91305$ ,  $R'_0 = 2.62927$ ,  $S^* = 0.02553316$ ,  $I_{D1}^* = 0.00005854$ ,  $I_V^* = 0.00023412$ .

3.42b)  $A = 200,000$ ,  $R_0 = 13.8261$ ,  $R'_0 = 3.71835$ ,  $S^* = 0.01276683$ ,  $I_{D1}^* = 0.00006350$ ,  $I_V^* = 0.0002539$ .

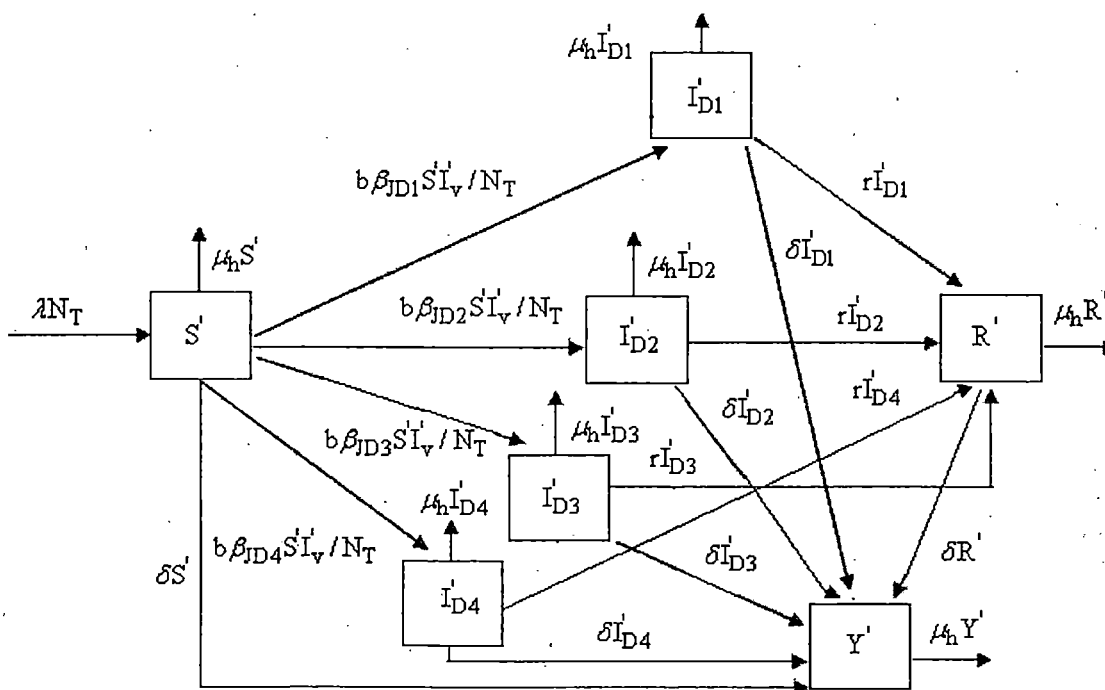
ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานของโรคสำหรับรูปทางด้านซ้าย a) และรูปทางด้านขวา b) มีค่าเท่ากับ 6.91305 และ 13.8261 ตามลำดับ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่ามากขึ้น สัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 คนพื้นไข่และสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อมีค่าเพิ่มขึ้น ในขณะที่สัดส่วนของคนที่ไม่ต้องการติดเชื้อลดลง

ต่อมาเราวิเคราะห์และพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการระบาดของไข้เลือดออก สำหรับโครงสร้างอายุเมื่อพิจารณาทั้ง 4 ชนิดเชื้อ แบบจำลองนี้อยู่ภายใต้เงื่อนไขดังนี้

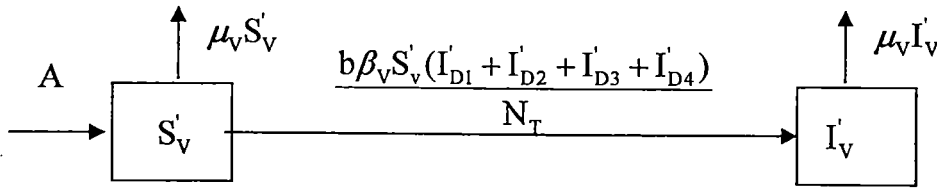
1. ประชากรรวมคงที่ แบ่งเป็น 7 กลุ่มย่อย ดังนี้คือ คนที่ไวต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 3 เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 กลุ่มฟื้นไข้ และกลุ่มประชากรผู้ใหญ่ กลุ่มเด็กหมายถึงเด็กที่มีอายุน้อยกว่า 15 ปี กลุ่มผู้ใหญ่หมายถึงกลุ่มคนที่มีอายุตั้งแต่ 15 ปีขึ้นไป กลุ่มคนที่ไวต่อการติดเชื้อหมายถึงคนที่ไม่เคยติดเชื้อหรือฟื้นไข้ กลุ่มที่ติดเชื้อหมายถึงคนที่ติดเชื้อและสามารถถ่ายทอดเชื้อไวรัสไปสู่ผู้อื่นได้ กลุ่มฟื้นไข้หมายถึงคนที่ได้รับเชื้อและหายจากการติดเชื้อ
2. ประชากรแบ่งออกเป็น 2 กลุ่มย่อย คือ บุ่งที่ไวต่อการติดเชื้อและบุ่งที่ติดเชื้อ เนื่องจากถ้าบุ่งติดเชื้อแล้วเชื่อนั้นจะอยู่ตลอดชีวิต

### 3.6 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับชนิดเชื้อ 4 ชนิดต่างกัน

การระบาดแสดงได้ดังแผนภาพต่อไปนี้ สำหรับประชากรคน



ประชากรยุง



รูปที่ 3.43.1 แผนภาพแสดงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับชนิดเชื้อ 4 ชนิดต่างกัน

เมื่อกำหนดตัวแปรดังต่อไปนี้

$S'$	แทนจำนวนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ
$I'_{D1}$	แทนจำนวนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1
$I'_{D2}$	แทนจำนวนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2
$I'_{D3}$	แทนจำนวนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 3
$I'_{D4}$	แทนจำนวนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4
$R'$	แทนจำนวนคนที่ฟื้นไข้
$Y'$	แทนจำนวนผู้ใหญ่ที่ไวต่อการติดเชื้อ
$S'_v$	แทนจำนวนยุงที่ไวต่อการติดเชื้อ
$I'_v$	แทนจำนวนยุงที่ติดเชื้อ
$K$	แทนสัดส่วนที่คนจะติดเชื้อชนิดแรก
$\mu_h$	แทนอัตราการตายของคน
$\delta$	แทนอัตราที่เด็กจะกลายเป็นผู้ใหญ่
$\lambda$	แทนอัตราการเกิดของคน
$b$	แทนอัตราการกัดของยุง
$\beta_{J_{D1}}$	แทนความน่าจะเป็นที่เชื้อไวรัสแดงที่ชนิดที่ 1 จะถ่ายทอดจากยุงไปสู่เด็ก
$\beta_{J_{D2}}$	แทนความน่าจะเป็นที่เชื้อไวรัสแดงที่ชนิดที่ 2 จะถ่ายทอดจากยุงไปสู่เด็ก
$\beta_{J_{D3}}$	แทนความน่าจะเป็นที่เชื้อไวรัสแดงที่ชนิดที่ 3 จะถ่ายทอดจากยุงไปสู่เด็ก
$\beta_{J_{D4}}$	แทนความน่าจะเป็นที่เชื้อไวรัสแดงที่ชนิดที่ 4 จะถ่ายทอดจากยุงไปสู่เด็ก

$N_T$	แทนจำนวนประชากรคน โดยรวม
R	แทนจำนวนคนฟื้นไข้
A	แทนจำนวนยุงค้ำคองที่
$\mu_v$	แทนอัตราการตายของยุง

จากแผนภาพไดอะแกรม สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$\frac{dS'}{dt} = \lambda N_T - (\mu_h + \delta + \frac{b\beta_{J_{D1}}}{N_T} I'_V + \frac{b\beta_{J_{D2}}}{N_T} I'_V + \frac{b\beta_{J_{D3}}}{N_T} I'_V + \frac{b\beta_{J_{D4}}}{N_T} I'_V) S' \quad (11.1)$$

$$\frac{dI'_{D1}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D1}}}{N_T} S' I'_V - (\mu_h + r + \delta) I'_{D1} \quad (11.2)$$

$$\frac{dI'_{D2}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D2}}}{N_T} S' I'_V - (\mu_h + r + \delta) I'_{D2} \quad (11.3)$$

$$\frac{dI'_{D3}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D3}}}{N_T} S' I'_V - (\mu_h + r + \delta) I'_{D3} \quad (11.4)$$

$$\frac{dI'_{D4}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D4}}}{N_T} S' I'_V - (\mu_h + r + \delta) I'_{D4} \quad (11.5)$$

$$\frac{dR'}{dt} = r(I'_{D1} + I'_{D2} + I'_{D3} + I'_{D4}) - (\mu_h + \delta) R' \quad (11.6)$$

$$\frac{dY'}{dt} = \delta(I'_{D1} + I'_{D2} + I'_{D3} + I'_{D4} + S' + R') - \mu_h Y' \quad (11.7)$$

$$\frac{dS'_v}{dt} = A - (\frac{b\beta_v}{N_T} (I'_{D1} + I'_{D2} + I'_{D3} + I'_{D4}) + \mu_v) S'_v \quad (11.8)$$

$$\frac{dI'_v}{dt} = \frac{b\beta_v S'_v}{N_T} (I'_{D1} + I'_{D2} + I'_{D3} + I'_{D4}) - \mu_v I'_v \quad (11.9)$$

ด้วย 2 เงื่อนไขคือ

$$N_T = S' + I'_{D1} + I'_{D2} + I'_{D3} + I'_{D4} + R' + Y', \quad N_V = S'_v + I'_v \quad (11.10)$$

เนื่องจากจำนวนประชากรแต่ละกลุ่มคงที่ จะได้ว่า

$$\frac{dN_T}{dt} = \frac{dN_V}{dt} = 0.$$

i) 
$$\frac{d}{dt} N_T = \frac{d}{dt} (S' + I'_{D1} + I'_{D2} + I'_{D3} + I'_{D4} + R' + Y')$$

$$= \lambda N_T - \mu_h (S' + I'_{D1} + I'_{D2} + I'_{D3} + I'_{D4} + R' + Y')$$

$$= \lambda N_T - \mu_h N_T - 0$$

แสดงว่า  $\lambda = \mu_h$

ผลจากสมการนี้ชี้ให้เห็นว่า อัตราการเกิดของคนเท่ากับอัตราการตาย

ii) 
$$\frac{d}{dt} N_V = \frac{d}{dt} (S'_V + I'_V)$$

$$= A - \mu_v N_V = 0$$

แสดงว่า  $N_V = \frac{A}{\mu_v}$ . ผลจากสมการคือ จำนวนยุงเท่ากับค่าคงที่ของจำนวนยุงหารด้วยอัตราการ

ตายของยุง

เราจัดระบบสมการใหม่ โดยการกำหนดให้

$$S = \frac{S'}{N_T}, I_{D1} = \frac{I'_{D1}}{N_T}, I_{D2} = \frac{I'_{D2}}{N_T}, I_{D3} = \frac{I'_{D3}}{N_T}, I_{D4} = \frac{I'_{D4}}{N_T}, R = \frac{R'}{N_T}, Y = \frac{Y'}{N_T}, S_V = \frac{S'_V}{N_V}, I_V = \frac{I'_V}{N_V}$$

จะได้ว่า

$$\frac{dS}{dt} = \mu_h - (\mu_h + \delta + \frac{b\beta_{J_{D1}} I_V (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D2}} I_V (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D3}} I_V (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D4}} I_V (A/\mu_v)}{N_T}) S$$

(12.1)

$$\frac{dI_{D1}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D1}} S I_V (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D1}$$

(12.2)

$$\frac{dI_{D2}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D2}} S I_V (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D2}$$

(12.3)

$$\frac{dI_{D3}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D3}} S I_V (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D3}$$

(12.4)

$$\frac{dI_{D4}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D4}} S I_V (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D4}$$

(12.5)

$$\frac{dR}{dt} = r(I_{D1} + I_{D2} + I_{D3} + I_{D4}) - (\mu_h + \delta) R$$

(12.6)

$$\frac{dI_V}{dt} = b\beta_V S_V (I_{D1} + I_{D2} + I_{D3} + I_{D4}) - \mu_V I_V$$

(12.7)

ด้วยเงื่อนไข 2 ข้อ คือ

$$S + I_{D1} + I_{D2} + I_{D3} + I_{D4} + R + Y = 1, S_V + I_V = 1.$$

(12.8)

## 2.7 ผลการวิเคราะห์

จุดสมดุล ( $S^*, I_{D1}^*, I_{D2}^*, I_{D3}^*, I_{D4}^*, R^*, I_V^*$ ) สามารถหาได้โดยกำหนดให้ด้านขวามือของสมการ (12.1) –

(12.7) เท่ากับศูนย์

จะได้ว่า

$$\mu_h - \left[ \mu_h + \delta + \frac{b\beta_{J_{D1}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D2}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D3}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D4}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} \right] S^* = 0 \quad (13.1)$$

$$\frac{b\beta_{J_{D1}} S^* I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D1}^* = 0 \quad (13.2)$$

$$\frac{b\beta_{J_{D2}} S^* I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D2}^* = 0 \quad (13.3)$$

$$\frac{b\beta_{J_{D3}} S^* I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D3}^* = 0 \quad (13.4)$$

$$\frac{b\beta_{J_{D4}} S^* I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D4}^* = 0 \quad (13.5)$$

$$r(I_{D1}^* + I_{D2}^* + I_{D3}^* + I_{D4}^*) - (\mu_h + \delta) R^* = 0 \quad (13.6)$$

$$b\beta_V (1 - I_V^*) (I_{D1}^* + I_{D2}^* + I_{D3}^* + I_{D4}^*) - \mu_V I_V^* = 0 \quad (13.7)$$

จากสมการ (13.1), เราได้

$$\mu_h - \left[ \mu_h + \delta + \frac{b\beta_{J_{D1}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D2}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D3}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D4}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} \right] S^* = 0$$

$$S^* = \frac{\mu_h}{\mu_h + \delta + \frac{b\beta_{J_{D1}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D2}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D3}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D4}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T}}$$

$$S^* = \frac{\frac{\mu_h}{\mu_h + \delta}}{1 + \frac{b\beta_{J_{D1}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T (\mu_h + \delta)} + \frac{b\beta_{J_{D2}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T (\mu_h + \delta)} + \frac{b\beta_{J_{D3}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T (\mu_h + \delta)} + \frac{b\beta_{J_{D4}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T (\mu_h + \delta)}}$$

$$S^* = \frac{\frac{\mu_h}{\mu_h + \delta} \cdot \frac{b\beta_{J_{D1}}}{\mu_v N_T}}{\frac{b\beta_{J_{D1}}}{\mu_v N_T} + \frac{b^2\beta_{J_{D1}}^2(A/\mu_v)I_V^*}{\mu_v N_T^2(\mu_h + \delta)} + \frac{b^2\beta_{J_{D1}}\beta_{J_{D2}}I_V^*(A/\mu_v)}{\mu_v N_T^2(\mu_h + \delta)} + \frac{b^2\beta_{J_{D1}}\beta_{J_{D3}}I_V^*(A/\mu_v)}{\mu_v N_T^2(\mu_h + \delta)} + \frac{b^2\beta_{J_{D1}}\beta_{J_{D4}}I_V^*(A/\mu_v)}{\mu_v N_T^2(\mu_h + \delta)}}$$

$$S^* = \frac{\beta_1}{M_1}$$

$$S^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)I_V^*}$$

$$S^* = \frac{\beta_1}{M_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \quad (14.1)$$

โดยที่

$$\beta_1 = \frac{b\beta_{J_{D1}}}{\mu_v N_T}, M_1 = \frac{\mu_h + \delta}{\mu_h}, R_1 = \frac{b^2\beta_{J_{D1}}^2(A/\mu_v)}{\mu_v N_T^2(\mu_h + \delta)}, R_2 = \frac{b^2\beta_{J_{D1}}\beta_{J_{D2}}(A/\mu_v)}{\mu_v N_T^2(\mu_h + \delta)}, R_3 = \frac{b^2\beta_{J_{D1}}\beta_{J_{D3}}(A/\mu_v)}{\mu_v N_T^2(\mu_h + \delta)},$$

$$R_4 = \frac{b^2\beta_{J_{D1}}\beta_{J_{D4}}(A/\mu_v)}{\mu_v N_T^2(\mu_h + \delta)}, P_1 = R_1 + R_2 + R_3 + R_4.$$

จากสมการ (13.2), เราได้

$$\frac{b\beta_{J_{D1}}S^*I_V^*(A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r)I_{D1}^* = 0$$

$$I_{D1}^* = \frac{b\beta_{J_{D1}}I_V^*(A/\mu_v)}{N_T(\mu_h + \delta + r)} \cdot S^*$$

$$I_{D1}^* = \frac{R_1 I_V^*}{\beta_1 M_2} \cdot \frac{\beta_1}{M_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)}$$

$$I_{D1}^* = \frac{R_1 I_V^*}{M_1 M_2 (\beta_1 + P_1 I_V^*)}$$

$$I_{D1}^* = \frac{R_1 I_V^*}{J_1 (\beta_1 + P_1 I_V^*)}$$

โดยที่

$$M_2 = \frac{\mu_h + \delta + r}{\mu_h + \delta}, J_1 = M_1 M_2$$

จากสมการ (13.3), เราได้

$$\frac{b\beta_{J_{D2}} S^* I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D2}^* = 0$$

$$I_{D2}^* = \frac{b\beta_{J_{D2}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T (\mu_h + \delta + r)} \cdot S^*$$

$$I_{D2}^* = \frac{R_2 I_V^*}{\beta_1 M_2} \cdot \frac{\beta_1}{M_1 (\beta_1 + P_1 I_V^*)}$$

$$I_{D2}^* = \frac{R_2 I_V^*}{M_1 M_2 (\beta_1 + P_1 I_V^*)}$$

$$I_{D2}^* = \frac{R_2 I_V^*}{J_1 (\beta_1 + P_1 I_V^*)}$$

จากสมการ (13.4) เราได้

$$\frac{b\beta_{J_{D3}} S^* I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D3}^* = 0$$

$$I_{D3}^* = \frac{b\beta_{J_{D3}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T (\mu_h + \delta + r)} \cdot S^*$$

$$I_{D3}^* = \frac{R_3 I_V^*}{\beta_1 M_2} \cdot \frac{\beta_1}{M_1 (\beta_1 + P_1 I_V^*)}$$

$$I_{D3}^* = \frac{R_3 I_V^*}{M_1 M_2 (\beta_1 + P_1 I_V^*)}$$

$$I_{D3}^* = \frac{R_3 I_V^*}{J_1 (\beta_1 + P_1 I_V^*)}$$

จากสมการ (13.5), เราได้

$$\frac{b\beta_{J_{D4}} S^* I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D4}^* = 0$$

$$I_{D4}^* = \frac{b\beta_{J_{D4}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T (\mu_h + \delta + r)} \cdot S^*$$

$$I_{D4}^* = \frac{R_4 I_V^*}{\beta_1 M_2} \cdot \frac{\beta_1}{M_1 (\beta_1 + P_1 I_V^*)}$$

$$I_{D4}^* = \frac{R_4 I_V^*}{M_1 M_2 (\beta_1 + P_1 I_V^*)}$$

$$I_{D4}^* = \frac{R_4 I_V^*}{J_1 (\beta_1 + P_1 I_V^*)}$$

จากสมการ (13.6), เราได้

$$r(I_{D1}^* + I_{D2}^* + I_{D3}^* + I_{D4}^*) - (\mu_h + \delta)R^* = 0$$

$$R^* = \frac{r(I_{D1}^* + I_{D2}^* + I_{D3}^* + I_{D4}^*)}{(\mu_h + \delta)}$$

$$R^* = \frac{r}{(\mu_h + \delta)} \cdot \left( \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \right) I_V^*$$

$$R^* = \frac{M_3 P_1 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)}$$

$$R^* = \frac{J_2 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)}$$

โดยที่  $M_3 = \frac{r}{(\mu_h + \delta)}$ ,  $J_2 = M_3 P_1$

จากสมการ (13.7), เราได้

$$b\beta_V(1 - I_V^*)(I_{D1}^* + I_{D2}^* + I_{D3}^* + I_{D4}^*) - \mu_V I_V^* = 0$$

$$b\beta_V(I_V^* - 1)(I_{D1}^* + I_{D2}^* + I_{D3}^* + I_{D4}^*) + \mu_V I_V^* = 0$$

$$\frac{b\beta_V(I_V^* - 1)P_1 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} + \mu_V I_V^* = 0 \tag{14.2}$$

เราสามารถเห็นได้โดยง่ายว่า ผลเฉลยแรกของสมการที่ (14.2) คือ  $I_V^* = 0$  ต่อไปเราจะพิจารณาสมการ

$$\frac{b\beta_V(I_V^* - 1)P_1}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} + \mu_V = 0$$

$$b\beta_V(I_V^* - 1)P_1 + \mu_V J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*) = 0$$

$$b\beta_V P_1 I_V^* - b\beta_V P_1 + \mu_V J_1 \beta_1 + \mu_V J_1 P_1 I_V^* = 0$$

$$(b\beta_V P_1 + \mu_V J_1 P_1) I_V^* = b\beta_V P_1 - \mu_V J_1 \beta_1$$

$$I_V^* = \frac{b\beta_V P_1 - \mu_V J_1 \beta_1}{b\beta_V P_1 + \mu_V J_1 P_1}$$

เนื่องจากเราจะเห็นว่า  $0 < I_V^* < 1$ , ดังนั้น  $\frac{b\beta_V P_1 - \mu_V J_1 \beta_1}{b\beta_V P_1 + \mu_V J_1 P_1} < 1$

จากการวิเคราะห์ดังกล่าว เราจะได้จุดสมดุลดังนี้

1) จุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อ  $I_V^* = 0$  โดยที่

$$S^* = \frac{1}{M_1},$$

$$I_{D1}^* = 0,$$

$$I_{D2}^* = 0,$$

$$I_{D3}^* = 0$$

$$I_{D4}^* = 0$$

$$R^* = 0$$

2) จุดสมดุลการระบาดของโรคเรื้อรัง  $I_V^* = \frac{b\beta_V P_1 - \mu_V J_1 \beta_1}{b\beta_V P_1 + \mu_V J_1 P_1}$

$$S^* = \frac{\beta_1}{M_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \tag{15.1}$$

$$I_{D1}^* = \frac{R_1 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \tag{15.2}$$

$$I_{D2}^* = \frac{R_2 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \tag{15.3}$$

$$I_{D3}^* = \frac{R_3 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \tag{15.4}$$

$$I_{D4}^* = \frac{R_4 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \tag{15.5}$$

$$R^* = \frac{J_2 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \tag{15.6}$$

จุดสมดุลของสมการ (12.1)-(12.7) คือ

1. จุดสมดุลสภาวะไร้โรค  $E_1 = (\frac{1}{M_1}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$  และ

2. จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง  $E_2 = (S^*, I_{D1}^*, I_{D2}^*, I_{D3}^*, I_{D4}^*, R^*, I_V^*)$

โดยที่

$$S^* = \frac{\beta_1}{M_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \tag{16.1}$$

$$I_{D1}^* = \frac{R_1 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \tag{16.2}$$

$$I_{D2}^* = \frac{R_2 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \quad (16.3)$$

$$I_{D3}^* = \frac{R_3 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \quad (16.4)$$

$$I_{D4}^* = \frac{R_4 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \quad (16.5)$$

$$R^* = \frac{J_2 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \quad (16.6)$$

$$I_V^* = \frac{b\beta_V P_1 - \mu_V J_1 \beta_1}{b\beta_V P_1 + \mu_V J_1 P_1} \quad (16.7)$$

ต่อไปกำหนดให้

$$X(S^*, I_{D1}^*, I_{D2}^*, I_{D3}^*, I_{D4}^*, R^*, I_V^*) = \mu_h - [\mu_h + \delta + \frac{b\beta_{J_{D1}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D2}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D3}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D4}} I_V^* (A/\mu_v)}{N_T}] S^*$$

$$Y(S^*, I_{D1}^*, I_{D2}^*, I_{D3}^*, I_{D4}^*, R^*, I_V^*) = \frac{b\beta_{J_{D1}} S^* I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D1}^*$$

$$Z(S^*, I_{D1}^*, I_{D2}^*, I_{D3}^*, I_{D4}^*, R^*, I_V^*) = \frac{b\beta_{J_{D2}} S^* I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D2}^*$$

$$T(S^*, I_{D1}^*, I_{D2}^*, I_{D3}^*, I_{D4}^*, R^*, I_V^*) = \frac{b\beta_{J_{D3}} S^* I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D3}^*$$

$$V(S^*, I_{D1}^*, I_{D2}^*, I_{D3}^*, I_{D4}^*, R^*, I_V^*) = \frac{b\beta_{J_{D4}} S^* I_V^* (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D4}^*$$

$$W(S^*, I_{D1}^*, I_{D2}^*, I_{D3}^*, I_{D4}^*, R^*, I_V^*) = r(I_{D1}^* + I_{D2}^* + I_{D3}^* + I_{D4}^*) - (\mu_h + \delta) R^*$$

$$Q(S^*, I_{D1}^*, I_{D2}^*, I_{D3}^*, I_{D4}^*, R^*, I_V^*) = b\beta_V (1 - I_V^*) (I_{D1}^* + I_{D2}^* + I_{D3}^* + I_{D4}^*) - \mu_V I_V^*$$

1. จุดสมดุลสภาวะไร้โรค  $E_1 = (\frac{1}{M_1}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ .

จาโคเบียนเมตริกซ์ของสมการ (12.1)-(12.7) เพื่อหาค่าจุดสมดุลนี้คือเมตริกซ์

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} -\mu_h M_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu_h P_1}{\beta_1} \\ 0 & -\mu_h J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_h R_1}{\beta_1} \\ 0 & 0 & -\mu_h J_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_h R_2}{\beta_1} \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_h J_1 & 0 & 0 & \frac{\mu_h R_3}{\beta_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_h M_1 & 0 & \frac{\mu_h R_4}{\beta_1} \\ 0 & r & r & r & r & -\mu_h M_1 & 0 \\ 0 & b\beta_v & b\beta_v & b\beta_v & b\beta_v & 0 & -\mu_v \end{bmatrix}$$

$$J_{E_1} - \lambda I_7 = \begin{bmatrix} -\mu_h M_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu_h P_1}{\beta_1} \\ 0 & -\mu_h J_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_h R_1}{\beta_1} \\ 0 & 0 & -\mu_h J_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_h R_2}{\beta_1} \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_h J_1 - \lambda & 0 & 0 & \frac{\mu_h R_3}{\beta_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_h M_1 - \lambda & 0 & \frac{\mu_h R_4}{\beta_1} \\ 0 & r & r & r & r & -\mu_h M_1 - \lambda & 0 \\ 0 & b\beta_v & b\beta_v & b\beta_v & b\beta_v & 0 & -\mu_v - \lambda \end{bmatrix}$$

ค่าเฉพาะเจาะจง สามารถหาโดยการแก้สมการ

$$\det(J_{E_1} - \lambda I_7) = 0 \quad (17.1)$$

โดยที่

$$(\mu_h M_1 + \lambda)^2 (\mu_h J_1 + \lambda)^3 (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0 \quad (17.2)$$

ซึ่ง

$$A_1 = \mu_h J_1 + \mu_v \quad (17.3)$$

$$A_0 = \mu_h \mu_v J_1 - \frac{b\beta_v \mu_h P_1}{\beta_1} \quad (17.4)$$

ค่าเฉพาะเจาะจง ที่หาได้คือ

$$\lambda_1 = -\mu_h M_1, \lambda_2 = -\mu_h M_1, \lambda_3 = -\mu_h J_1, \lambda_4 = -\mu_h J_1, \lambda_5 = -\mu_h J_1.$$

ต่อไปเราจะตรวจสอบเครื่องหมายของ  $\lambda_6$  และ  $\lambda_7$

$$\lambda^2 + A_1\lambda + A_0 = 0 \quad (17.5)$$

โดยที่  $A_1, A_0$  นิยามในสมการ(5.3)-(5.4).

$$\lambda_6 = \frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_0}}{2}, \lambda_7 = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_0}}{2}$$

เราจะเห็นว่าค่าเฉพาะเจาะจง  $\lambda_6$  มีส่วนจริงเป็นลบเสมอ ต่อไปพิจารณาเครื่องหมายของค่าเฉพาะเจาะจง  $\lambda_7$  สำหรับ  $\lambda_7$  จะมีส่วนจริงเป็นลบเมื่อ

$$\sqrt{A_1^2 - 4A_0} < A_1 \text{ or } A_1^2 - 4A_0 < A_1^2 \text{ or } A_0 > 0. \text{ So that } \mu_h\mu_v J_1 - \frac{b\beta_v\mu_h P_1}{\beta_1} > 0 \text{ or}$$

$$\mu_h\mu_v\beta_1 J_1 - b\beta_v\mu_h P_1 > 0 \text{ or } \frac{b\beta_v\mu_h P_1}{\mu_h\mu_v\beta_1 J_1} < 1 \text{ or } \frac{b\beta_v P_1}{\mu_v\beta_1 J_1} < 1.$$

$$\text{ดังนั้น จุดสมดุลสถานะไร้โรคจะเสถียรเมื่อ } R_0 = \frac{b\beta_v P_1}{\mu_v\beta_1 J_1} < 1.$$

2) จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง,  $E_2 = (S^*, I_{D1}^*, I_{D2}^*, I_{D3}^*, I_{D4}^*, R^*, I_V^*)$  โดยที่

$$S^* = \frac{\beta_1}{M_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \quad (18.1)$$

$$I_{D1}^* = \frac{R_1 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \quad (18.2)$$

$$I_{D2}^* = \frac{R_2 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \quad (18.3)$$

$$I_{D3}^* = \frac{R_3 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \quad (18.4)$$

$$I_{D4}^* = \frac{R_4 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \quad (18.5)$$

$$R^* = \frac{J_2 I_V^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_V^*)} \quad (18.6)$$

$$I_V^* = \frac{b\beta_v P_1 - \mu_v J_1 \beta_1}{b\beta_v P_1 + \mu_v J_1 \beta_1} \quad (18.7)$$

$$\text{และ } b\beta_v P_1 - \mu_v J_1 \beta_1 > 0 \text{ or } R_0 = \frac{b\beta_v P_1}{\mu_v J_1 \beta_1} > 1.$$

เราจะได้ว่า

$$\lambda I_7 = \begin{bmatrix} -\mu_h M_1 - \frac{\mu_h M_1 P_1 I_v^*}{\beta_1} - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_h M_1 P_1 S^*}{\beta_1} \\ \frac{\mu_h M_1 R_1 I_v^*}{\beta_1} & -\mu_h J_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_h M_1 R_1 S^*}{\beta_1} \\ \frac{\mu_h M_1 R_2 I_v^*}{\beta_1} & 0 & -\mu_h J_1 - \lambda & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu_h M_1 R_2 S^*}{\beta_1} \\ \frac{\mu_h M_1 R_3 I_v^*}{\beta_1} & 0 & 0 & -\mu_h J_1 - \lambda & 0 & 0 & \frac{\mu_h M_1 R_3 S^*}{\beta_1} \\ \frac{\mu_h M_1 R_4 I_v^*}{\beta_1} & 0 & 0 & 0 & -\mu_h J_1 - \lambda & 0 & \frac{\mu_h M_1 R_4 S^*}{\beta_1} \\ 0 & r & r & r & r & -\mu_h M_1 - \lambda & 0 \\ 0 & b\beta_v(1-I_v^*) & b\beta_v(1-I_v^*) & b\beta_v(1-I_v^*) & b\beta_v(1-I_v^*) & 0 & -b\beta_v(I_{D1}^* + I_{D2}^* + I_{D3}^* + I_{D4}^*) - \mu_v - \lambda \end{bmatrix}$$

ค่าเฉพาะเจาะจง สามารถหาโดยการแก้สมการ

$$\det(J_{E_2} - \lambda I_7) = 0 \quad (19.1)$$

โดยที่

$$(\mu_h M_1 + \lambda)(\mu_h J_1 + \lambda)^3 (\lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0) = 0 \quad (19.2)$$

ซึ่ง

$$c_2 = \frac{\beta_1((J_1 + M_1)\mu_h + I_{D5}^*) + P_1 M_1 \mu_h I_v^*}{\beta_1} \quad (19.3)$$

$$c_1 = \frac{(\mu_h(M_1(-S_1^* + \beta_1 I_{D5}^*)) + (S_1^* + P_1 I_{D5}^*) I_v^*) + J_1(\beta_1 I_{D5}^* + M_1 \mu_h I_{v1}^*)}{\beta_1} \quad (19.4)$$

$$c_0 = \frac{M_1 \mu_h^2 (M_1 S_1^* (I_v^* - 1) + J_1 I_{D5}^* I_{v1}^*)}{\beta_1} \quad (19.5)$$

เมื่อกำหนด

$$I_D^* = I_{D1}^* + I_{D2}^* + I_{D3}^* + I_{D4}^*, \quad I_{D5}^* = \mu_v + b\beta_v I_D^*, \quad I_{v1}^* = \beta_1 + P_1 I_v^*, \quad S_1^* = bP_1 \beta_v I_v^*.$$

ต่อไปเราจะตรวจสอบเครื่องหมายของค่าเฉพาะเจาะจง  $\lambda_5, \lambda_6$  และ  $\lambda_7$  โดยใช้เงื่อนไข 3 ข้อ ของ

Routh-Hurwitz คือ

$$i) \quad c_2 > 0 \quad , \quad (20.1)$$

$$ii) \quad c_0 > 0 \quad , \quad (20.2)$$

$$iii) \quad c_1 c_2 > c_0 \quad , \quad (20.3)$$

$$i) \quad c_2 = \frac{\beta_1((J_1 + M_1)\mu_h + I_{D5}^*) + P_1 M_1 \mu_h I_v^*}{\beta_1} \text{ เป็นบวกเสมอ}$$

ii)  $c_0 = \frac{M_1 \mu_h^2 (M_1 S_1^* (I_v^* - 1) + J_1 I_{D5}^* I_{v1}^*)}{\beta_1}$  เป็นบวกเสมอ เนื่องจาก  $0 < I_v^* < 1$  ดังนั้น

$J_1 I_{D5}^* I_{v1}^* > M_1 S_1^* (I_v^* - 1)$  เสมอ

iii)  $c_1 c_2 - c_0 = \frac{1}{\beta_1^2} [J_1^2 \beta_1 \mu_h (\beta_1 I_{D5}^* + M_1 \mu_h I_v^*) + \mu_h (I_{D5}^* (M_1 \beta_1 + P_1 I_v^*) (\beta_1 I_{D5}^* + M_1 \mu_h I_{v1}^*) - (M_1 \beta_1 I_{D5}^* + (M_1 (-\beta_1 + M_1 (P_1 + \beta_1))) \mu_h - \beta_1 I_{D5}^*) I_v^* - \mu_h M_1 P_1 I_v^*) S_1^*) + J_1 (M_1^2 \mu_h^2 I_{v1}^2 + M_1 \beta_1 \mu_h (I_{D5}^* (\beta_1 (1 + \mu_h) + P_1 I_v^*) - (-1 + \mu_h) I_{v1}^*) - \mu_h S_1^*) + \beta_1 (\beta_1 I_{D5}^2 + \mu_h^2 I_v^* (P_1 I_{D5}^* + S_1^*)))]$

ทั้ง 3 เงื่อนไขของ Routh-Hurwitz จะสอดคล้องสำหรับ  $R_0 > 1$ . นอกเหนือจากนั้น จุดสมดุล

สภาวะโรคเรื้อรัง  $E_2$  ระบาดเฉพาะถิ่นเมื่อ  $R_0 > 1$  โดย  $R_0 = \frac{b \beta_v P_1}{\mu_v J_1 \beta_1}$ .

จาก

$$R_0 = \frac{b \beta_v P_1}{\mu_v J_1 \beta_1} = \frac{b \beta_v (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}{\mu_v M_1 M_2 \beta_1} = \frac{b^2 \beta_v (A/\mu_v) (\beta_{J_{D1}} + \beta_{J_{D2}} + \beta_{J_{D3}} + \beta_{J_{D4}}) \mu_h N_T}{\mu_v N_T^2 (\mu_h + \delta) (\mu_h + \delta + r)}$$

$R_0 = \sqrt{R_0}$  เป็นค่าสืบพันธุ์พื้นฐานของโรค ซึ่งแสดงจำนวนเฉลี่ยของกรณีผู้ป่วยจะเป็นผู้ที่ไวต่อการติดเชื้อได้ หมายความว่าคนที่ไวต่อการติดเชื้อจะติดเชื้อได้เมื่อถูกยุงที่มีเชื้อกัด โดย

$$\frac{b(A/\mu_v)}{N_T} \cdot \frac{1}{(\mu_h + \delta + r)} \cdot \frac{\mu_h}{(\mu_h + \delta)} ; \beta_v \cdot \frac{b(A/\mu_v)}{N_T} \cdot \frac{1}{(\mu_h + \delta + r)} \cdot \frac{\mu_h}{(\mu_h + \delta)}$$

นั่นคือ ยุงที่มีเชื้อจะแพร่กระจายเชื้อในสัดส่วน  $\frac{b}{\mu_v}$  เมื่อกัดคน  $(\beta_{J_{D1}} + \beta_{J_{D2}} + \beta_{J_{D3}} + \beta_{J_{D4}}) \cdot \frac{b}{\mu_v}$  ซึ่งจะทำ

ให้คนติดเชื้อ นอกเหนือจากนี้  $R_0'$  จะแสดงคนที่ติดเชื้อใหม่

## 2.8 ผลเฉลยเชิงตัวเลข

ผลเฉลยที่จะแสดงต่อไปนี้ ตัวแปรได้จากค่าการสังเกตจริง นั่นคือ อายุเฉลี่ยของคนคือ 70 ปี อายุที่เด็กจะกลายเป็นผู้ใหญ่คือ 15 ปี อายุของยุงคือ 14 วัน ยุง 1 ตัวสามารถกัดได้วันละ 3 ครั้งต่อวัน ดังนั้น อัตราการกัดของยุงคือ  $1/3$  ต่อวัน เวลาที่คนจะฟื้นไข้คือ 3 วัน จำนวนประชากรรวมเท่ากับ 100,000 คน สำหรับความน่าจะเป็นของการถ่ายทอดเชื้อเลือกตามความเหมาะสม

### 2.8.1 สำหรับ $R_0 < 1$ ,

$\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$  ต่อวัน,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5,$   
 $\beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 700, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน  
 $M_1 = 5.66667, R_0 = 0.0967827, R'_0 = 0.311099$ . ผลเฉลยเข้าสู่จุดสมดุลสภาวะไร้โรค

$$E_1 = \left( \frac{1}{M_1}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right).$$

### 2.8.2 สำหรับ $R_0 > 1$ ,

$\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5,$   
 $\beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 70,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน  
 $M_1 = 5.66667, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099$ . ผลเฉลยเข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

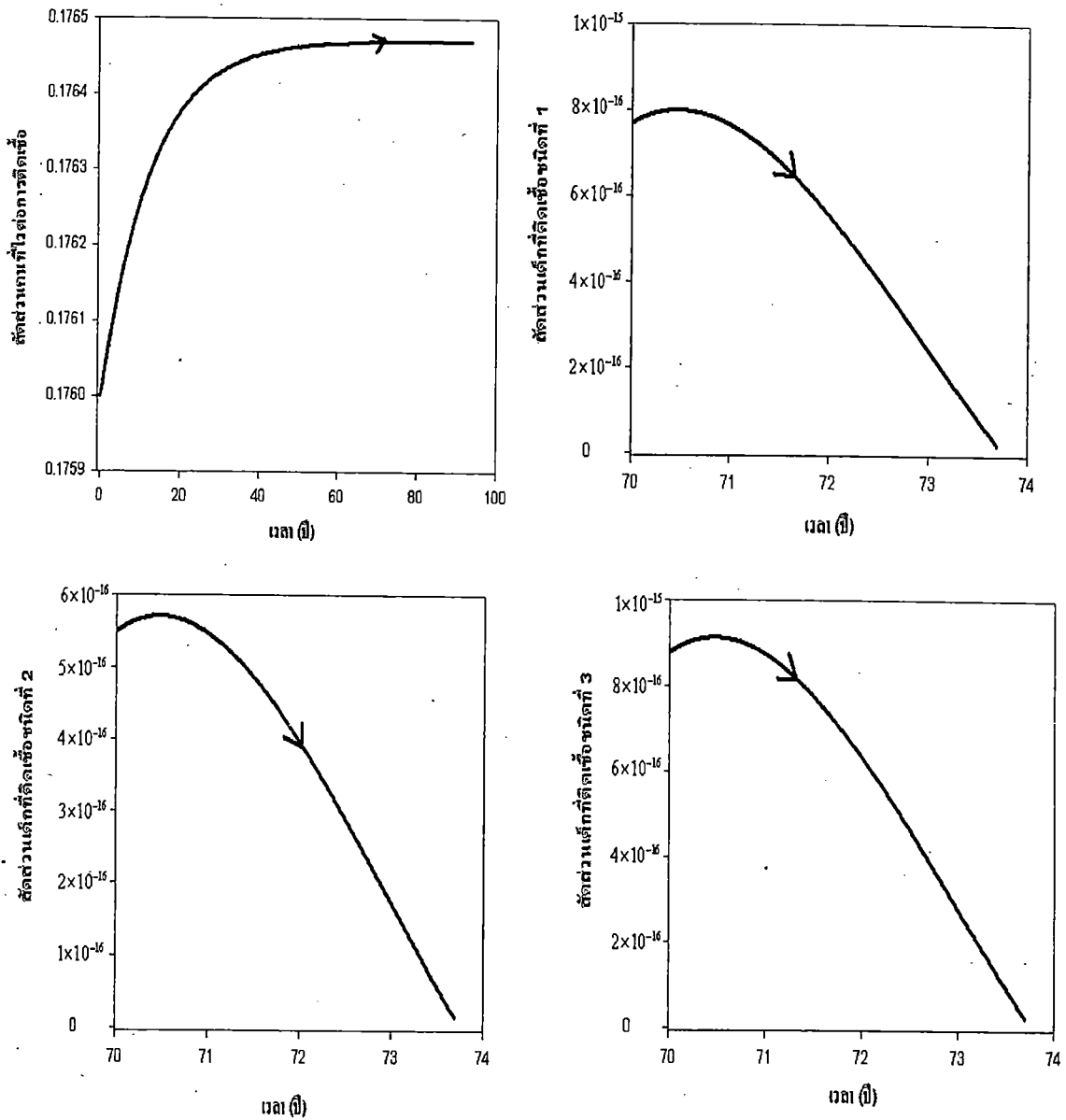
$$E_2 = (S^*, I_{D1}^*, I_{D2}^*, I_{D3}^*, I_{D4}^*, R^*, I_V^*) \text{ โดยที่ } S^* = 0.018238175, I_{D1}^* = 0.0000306868,$$

$$I_{D2}^* = 0.0000219191, I_{D3}^* = 0.0000350706, I_{D4}^* = 0.000017535, R^* = 0.158127202$$

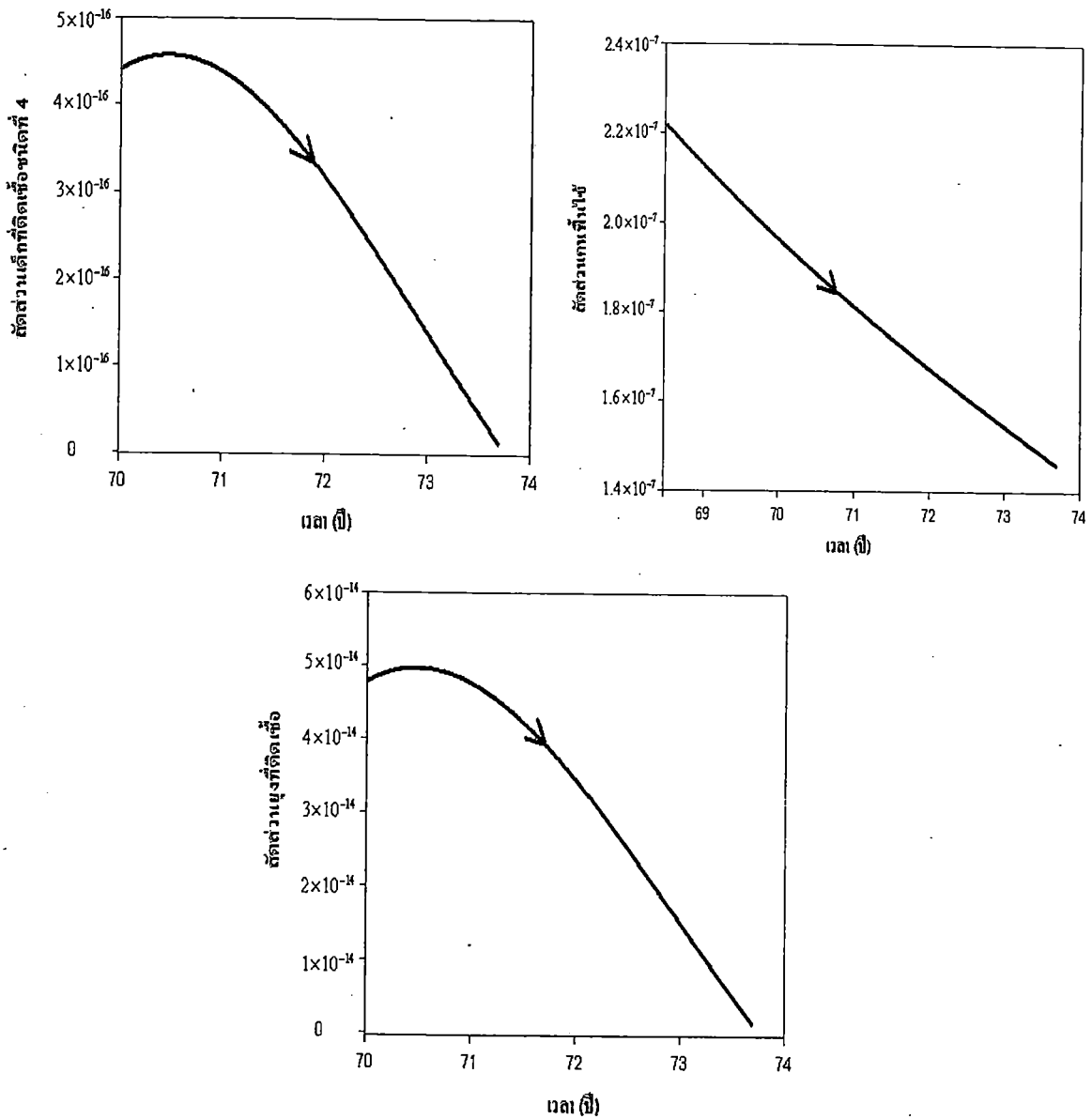
และ  $I_V^* = 0.000245434$ . โดยที่ส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนมีค่าประมาณ 0.0105958 คาบของการแกว่งมี

$$\text{ค่าเท่ากับ } \frac{2\pi}{0.0105958} \approx 593 \text{ วัน}$$

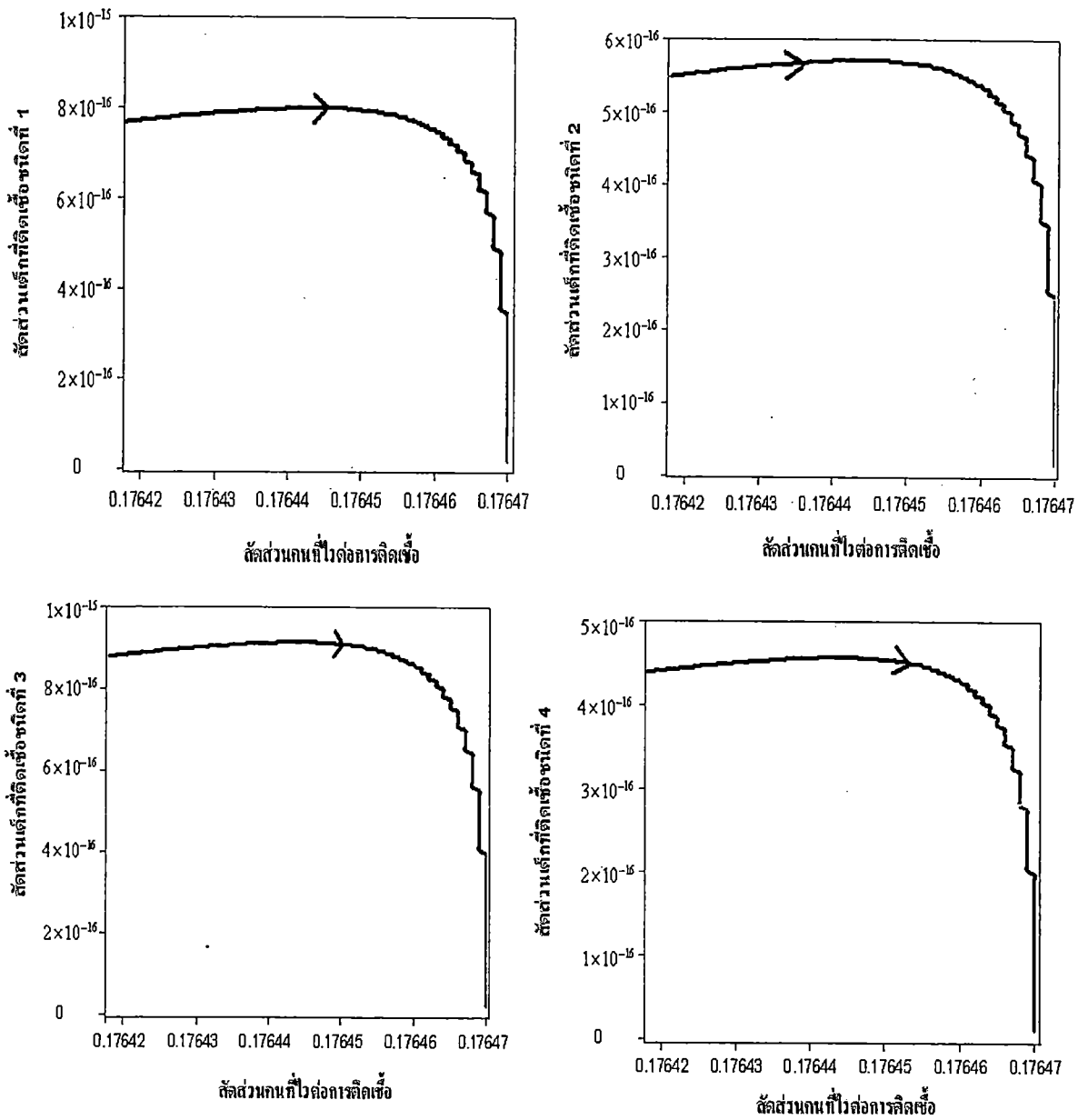
2.9 ผลเฉลยสมการดังนี้



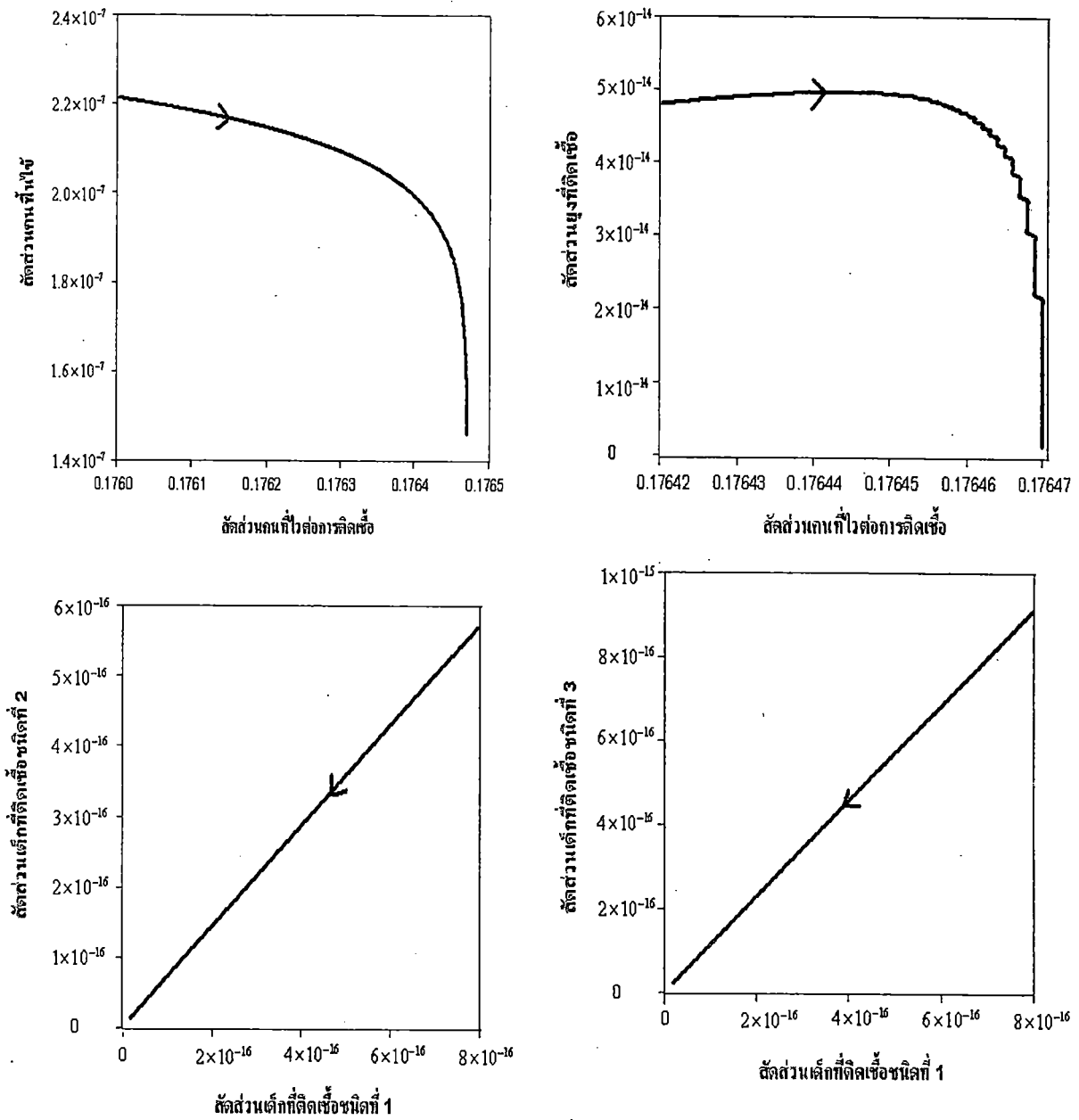
รูปที่ 3.43 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของเวลากับ  $S, I_{D1}, I_{D2}, I_{D3}$  สำหรับ  $R_0 < 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 700, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน  $M_1 = 5.66667, R_0 = 0.0967827, R'_0 = 0.311099$ . สัดส่วนของคนทีไวต่อการติดเชื้อ คนที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 คนที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 และสัดส่วนคนที่ติดเชื้อชนิดที่ 3 คู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะไร้โรค



รูปที่ 3.44 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของเวลากับ  $I_{D4}, R, I_V$  สำหรับ  $R_0 < 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 700, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน  $M_1 = 5.66667, R_0 = 0.0967827, R'_0 = 0.311099$ . สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 คนที่ฟื้นไข้และสัดส่วนหญิงที่ติดเชื้อ เข้าสู่จุดสมดุลสถานะไร้โรค

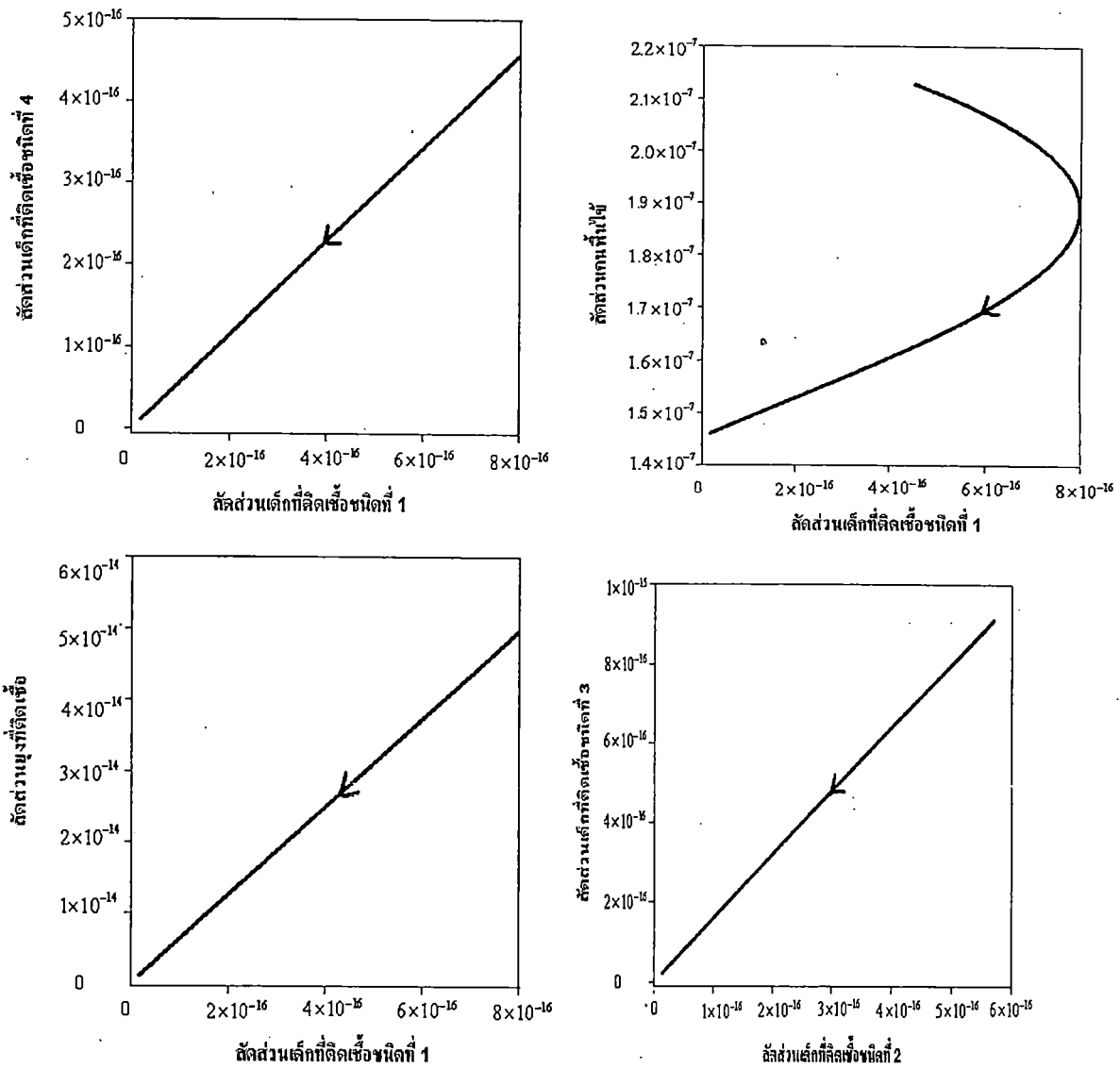


รูปที่ 3.45 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ  $(S, I_{D1})$ ,  $(S, I_{D2})$ ,  $(S, I_{D3})$ ,  $(S, I_{D4})$  สำหรับ  $R_0 < 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 700, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน  $M_1 = 5.66667, R_0 = 0.0967827, R'_0 = 0.311099$ . สัดส่วน ผู้เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะไร้โรค

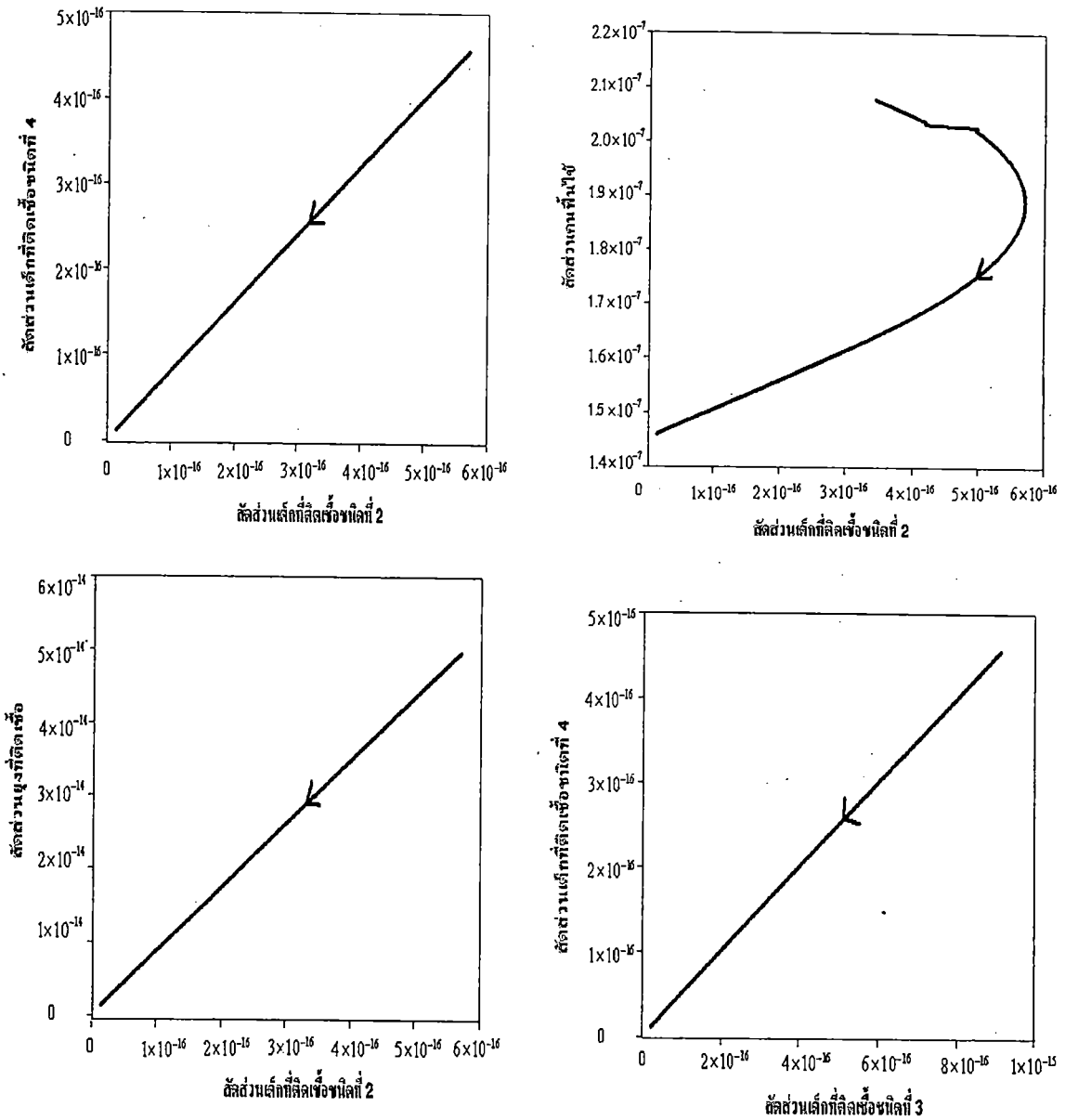


รูปที่ 3.46 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์

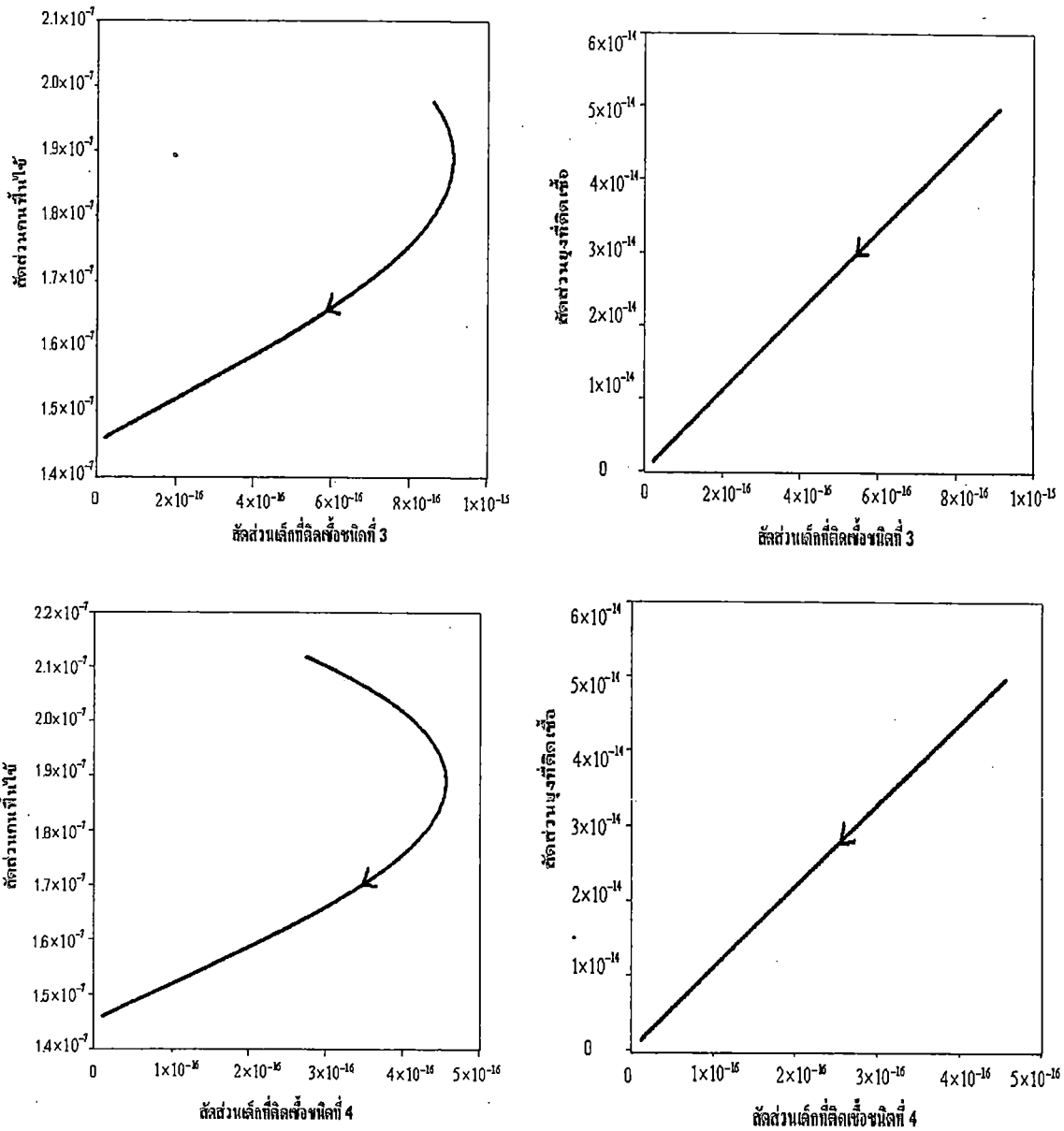
ของ  $(S, R), (S, I_v), (I_{D1}, I_{D2}), (I_{D1}, I_{D3})$  สำหรับ  $R_0 < 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 700, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน,  $M_1 = 5.66667, R_0 = 0.0967827, R'_0 = 0.311099$ . สัดส่วนผู้เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะไร้โรค



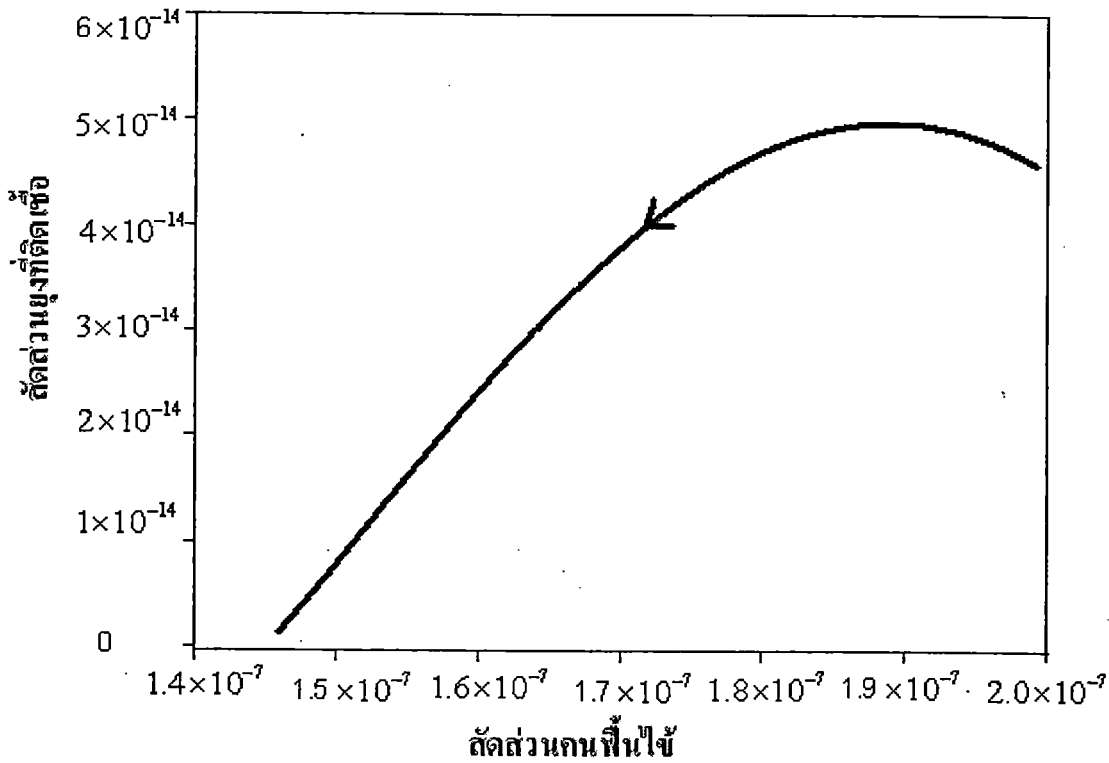
รูปที่ 3.47 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ  $(I_{D1}, I_{D4})$ ,  $(I_{D1}, R)$ ,  $(I_{D1}, I_V)$ ,  $(I_{D2}, I_{D3})$  สำหรับ  $R_0 < 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000; A = 700, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน  $M_1 = 5.66667, R_0 = 0.0967827, R'_0 = 0.311099$ . สัดส่วนผู้เข้าสู่จุดสมดุลสถานะไร้โรค



รูปที่ 3.48 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ  $(I_{D2}, I_{D4})$ ,  $(I_{D2}, R)$ ,  $(I_{D2}, I_v)$ ,  $(I_{D3}, I_{D4})$  สำหรับ  $R_0 < 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 700, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน  $M_1 = 5.66667, R_0 = 0.0967827, R'_0 = 0.311099$ . สัดส่วนผู้เข้าสู่จุดสมดุลสถานะไร้โรค



รูปที่ 3.49 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ  $(I_{D3}, R)$ ,  $(I_{D3}, I_V)$ ,  $(I_{D4}, R)$ ,  $(I_{D4}, I_V)$  สำหรับ  $R_0 < 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 700, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน  $M_1 = 5.66667, R_0 = 0.0967827, R'_0 = 0.311099$ . สัดส่วนผู้เข้าสู่จุดสมดุลสถานะไร้โรค



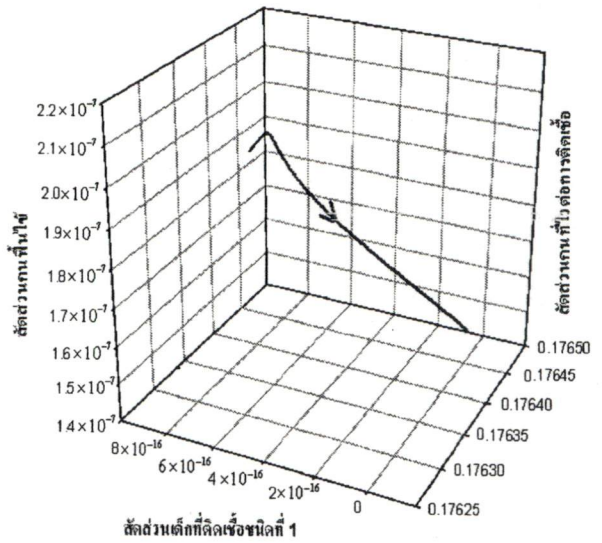
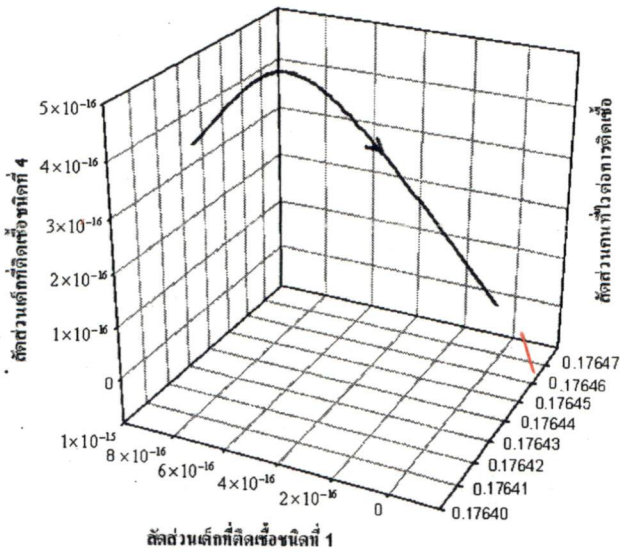
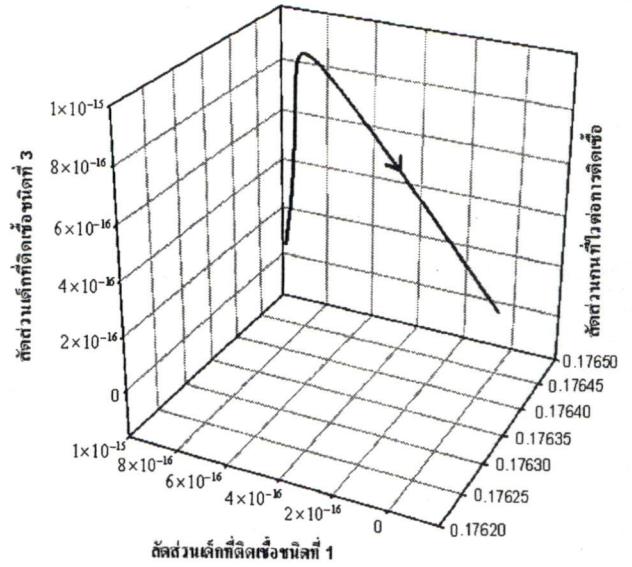
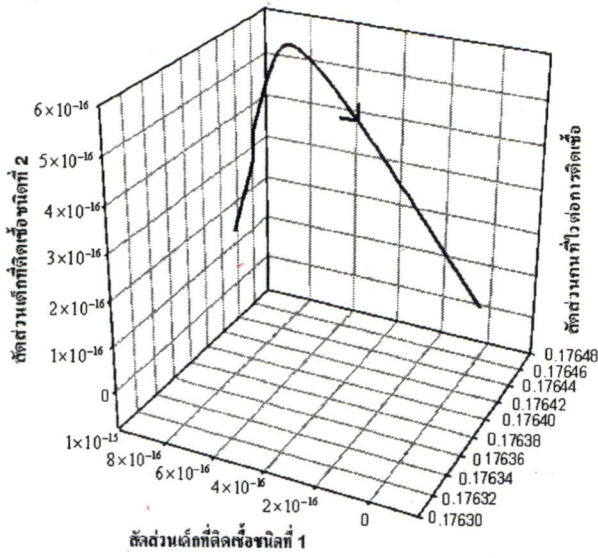
รูปที่ 3.50 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ  $(R, I_V)$  สำหรับ

$R_0 < 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5,$

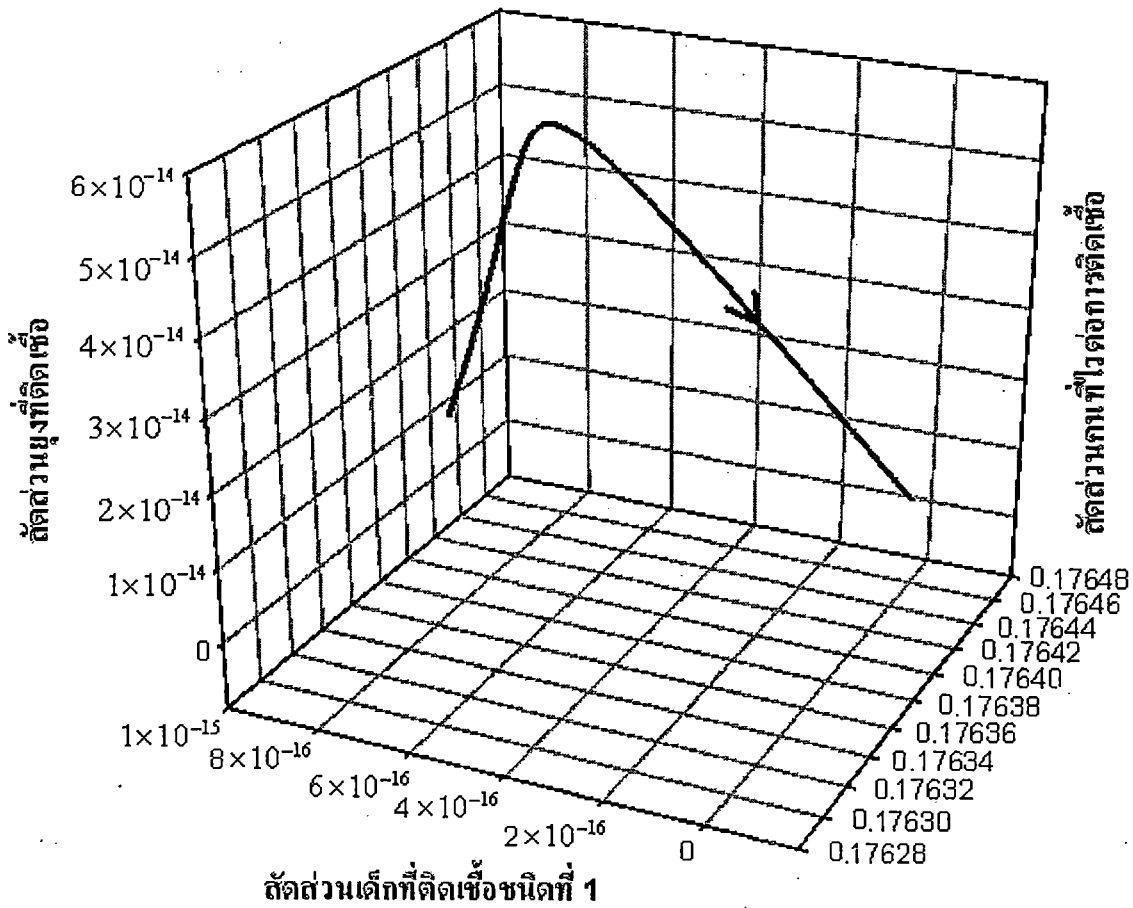
$\beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 700, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน

$M_1 = 5.66667, R_0 = 0.0967827, R'_0 = 0.311099$ . สัดส่วนของคนไข้ กับยุงที่มีเชื้อ

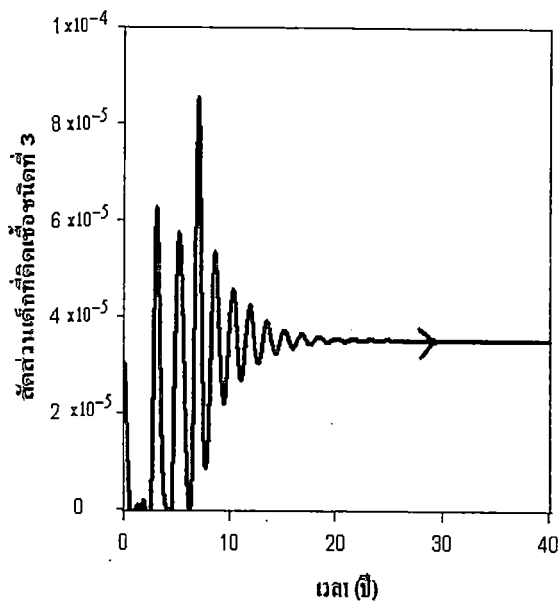
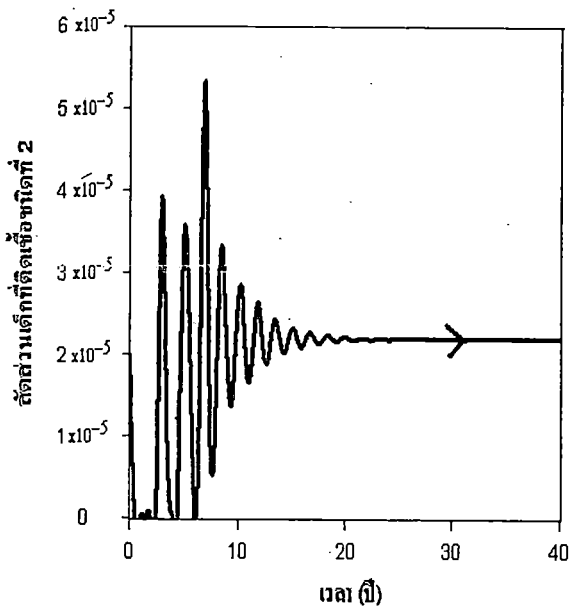
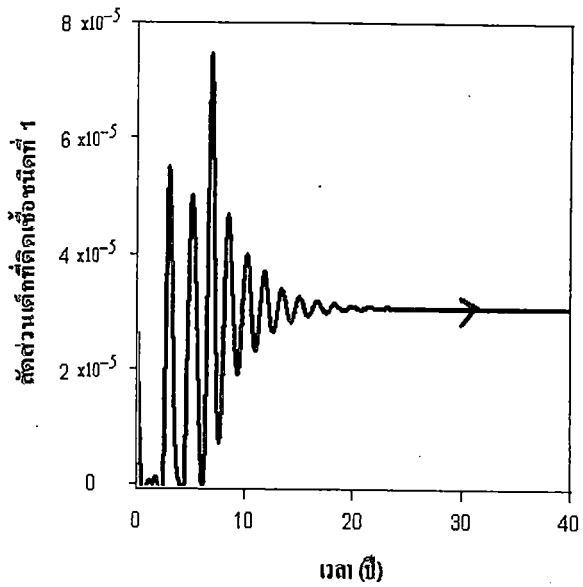
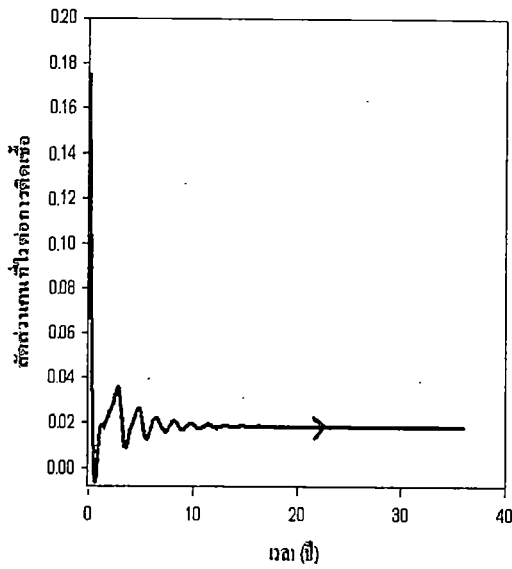
เข้าสู่จุดสมดุลสถานะไร้โรค



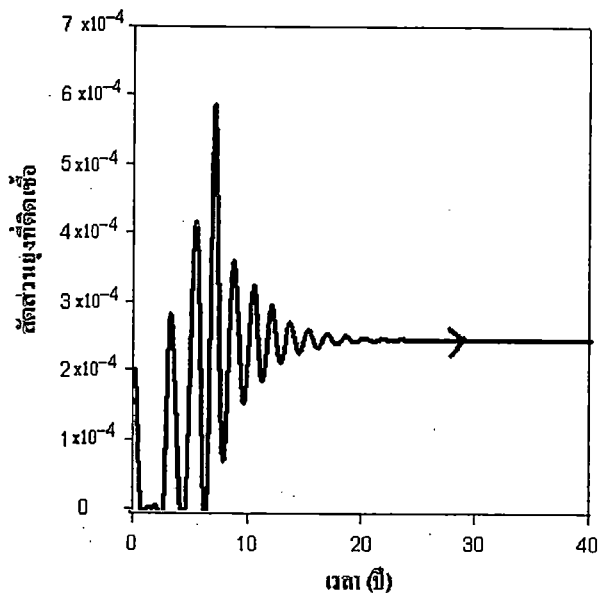
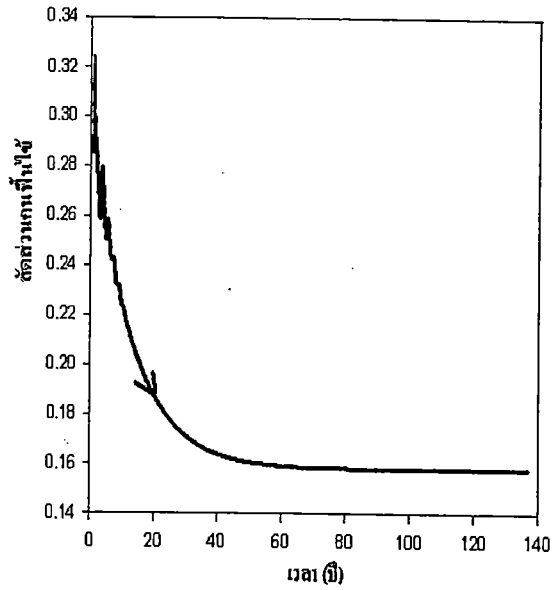
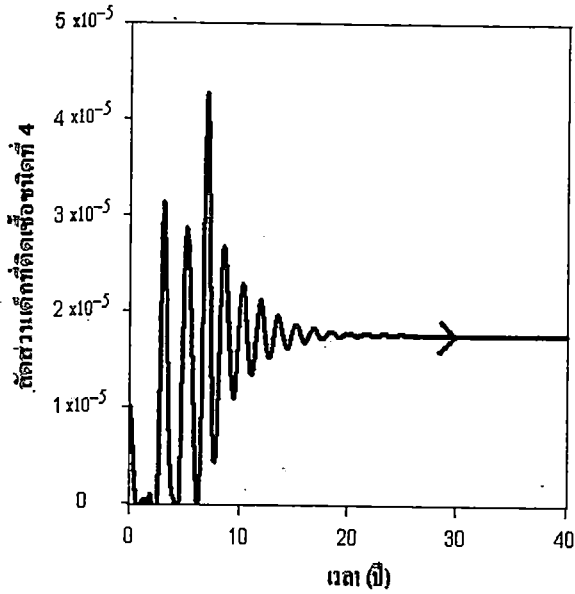
รูปที่ 3.51 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ  $(S, I_{D1}, I_{D2})$ ,  $(S, I_{D1}, I_{D3})$ ,  $(S, I_{D1}, I_{D4})$ ,  $(S, I_{D1}, R)$  สำหรับ  $R_0 < 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 700, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน  $M_1 = 5.66667, R_0 = 0.0967827, R'_0 = 0.311099$ . สัดส่วน ภูู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะไร้โรค



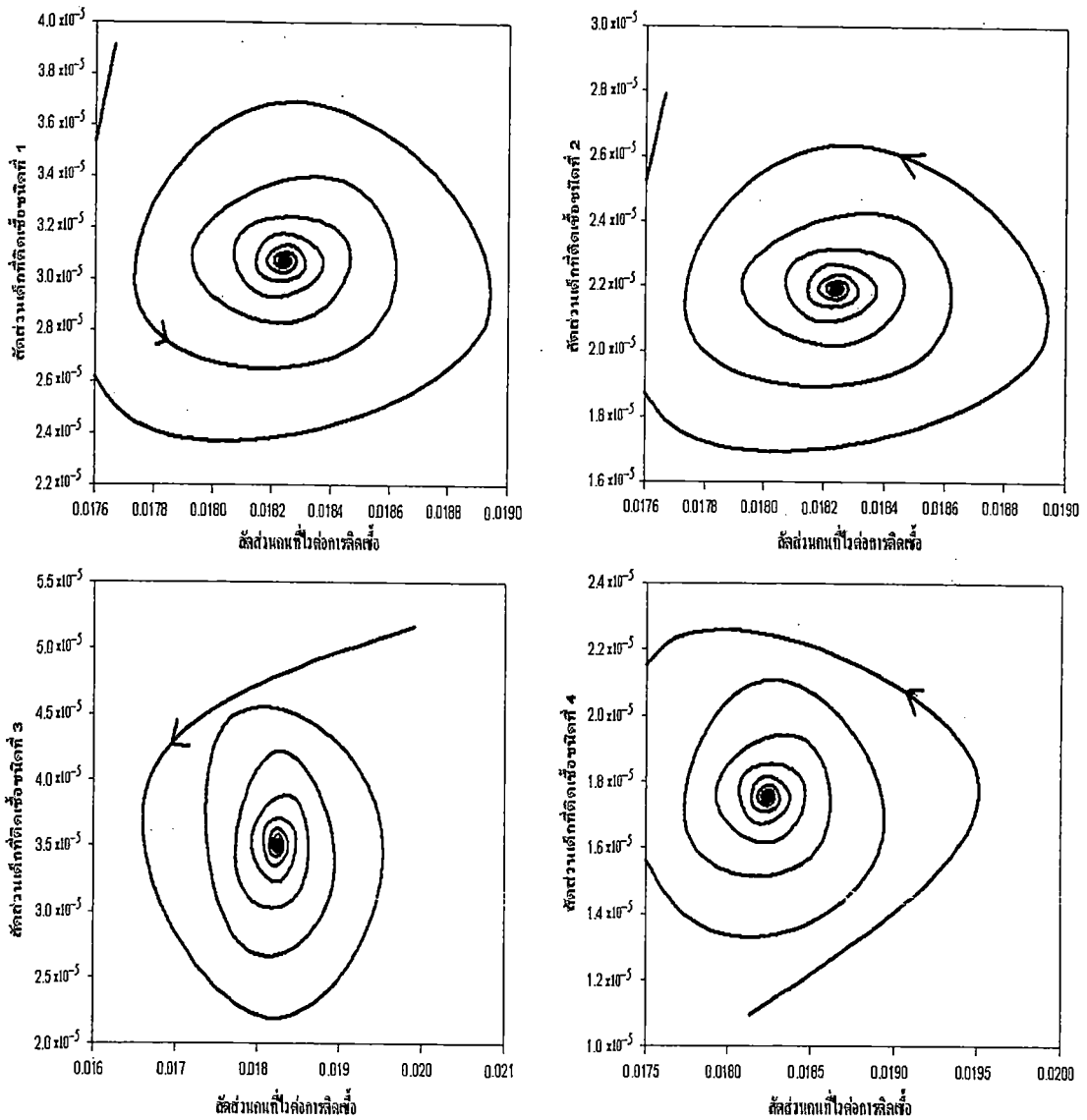
รูปที่ 3.52 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) กราฟแสดงความสัมพันธ์ของ  $(S, I_{D1}, I_V)$  สำหรับ  $R_0 < 1$  โดยที่  $\mu_H = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_V = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_V = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 700, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน  $M_1 = 5.66667, R_0 = 0.0967827, R'_0 = 0.311099$ . สัดส่วนของคนที่ไม่ไวต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 กับ ยุงที่ติดเชื้อ อยู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะไร้โรค



รูปที่ 3.53 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ  $S, I_{D1}, I_{D2}, I_{D3}$  สำหรับ  $R_0 > 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 70,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน,  $M_1 = 5.66667, R_0 = 9.67827, R_0' = 3.11099$ . สัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ คนที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 คนที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 และคนที่ติดเชื้อชนิดที่ 3 ใกล้เคียงจุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

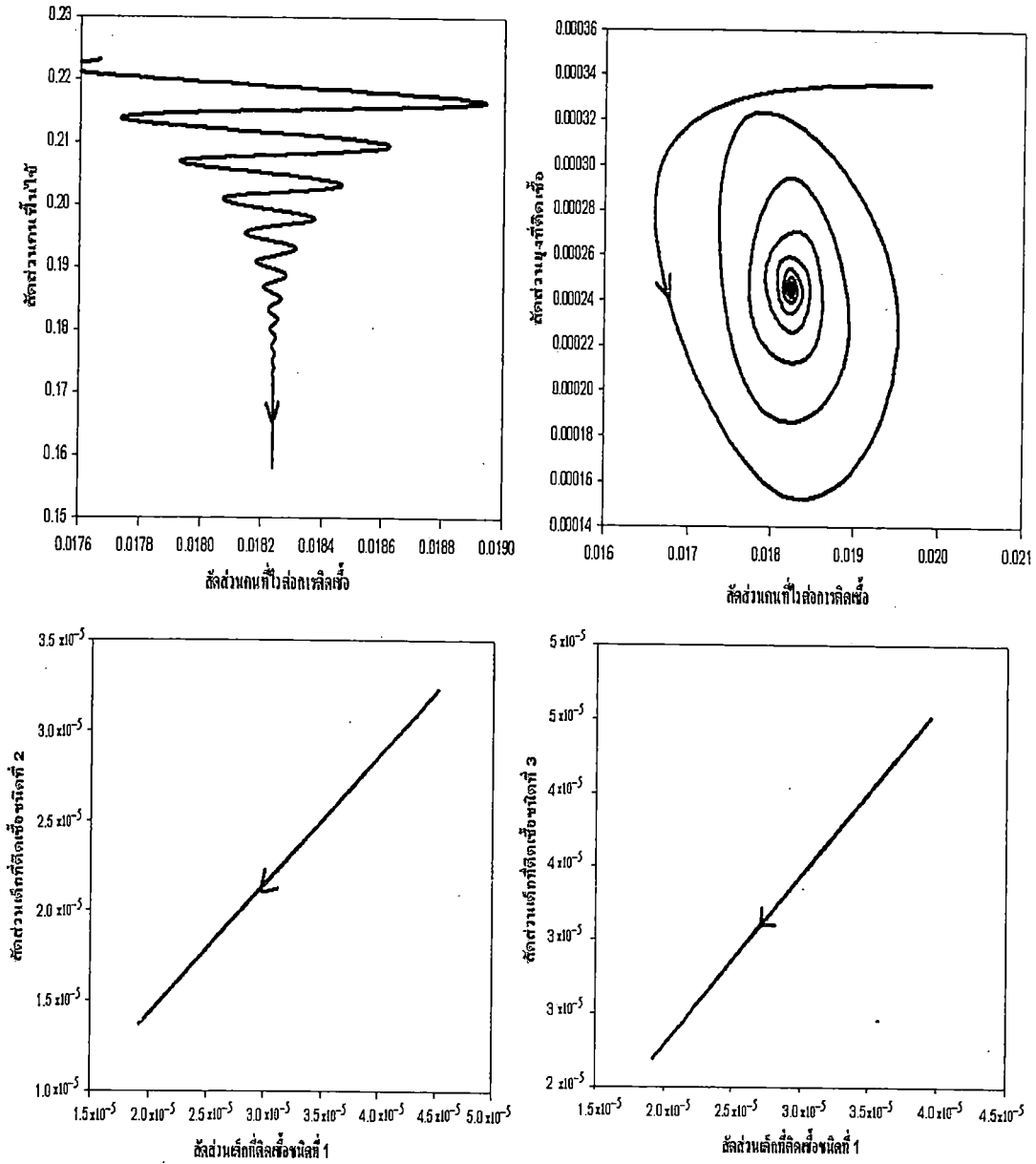


รูปที่ 3.54 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับ  $I_{D4}, R, I_V$  สำหรับ  $R_0 > 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 70,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน,  $M_1 = 5.66667, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099$ . สัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 คนพื้นไข่และสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อเข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

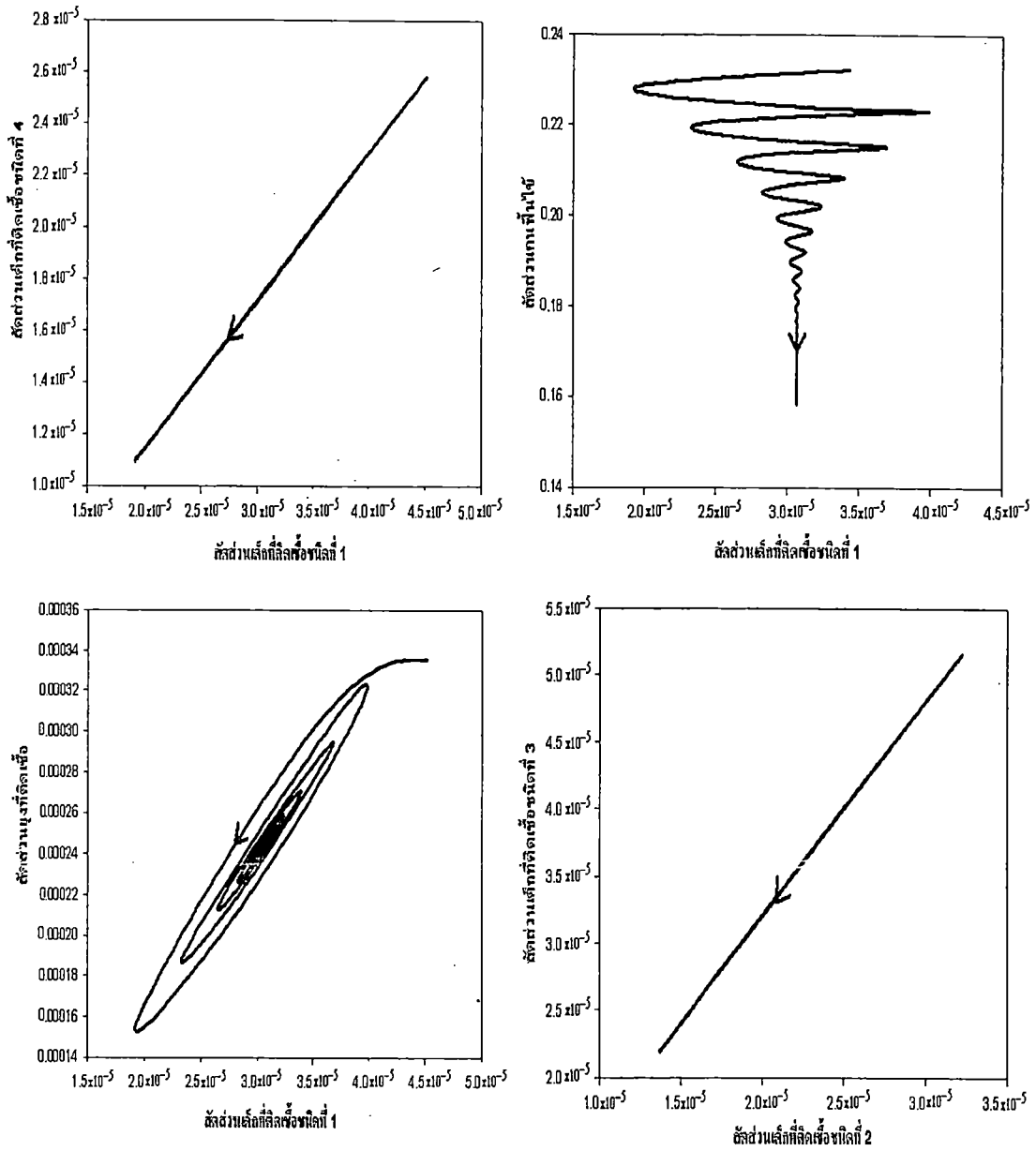


รูปที่ 3.55 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_{D1})$ ,

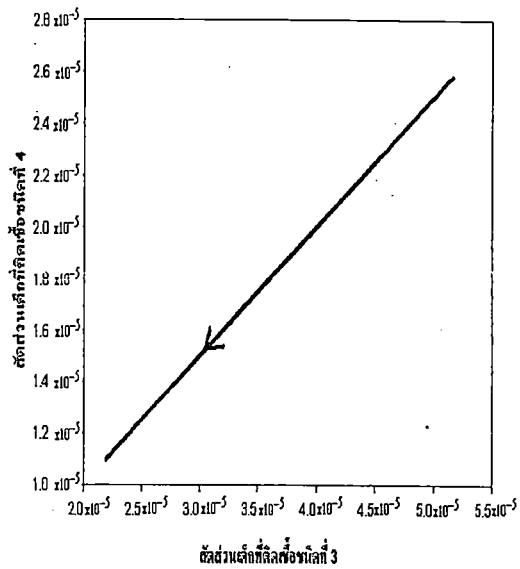
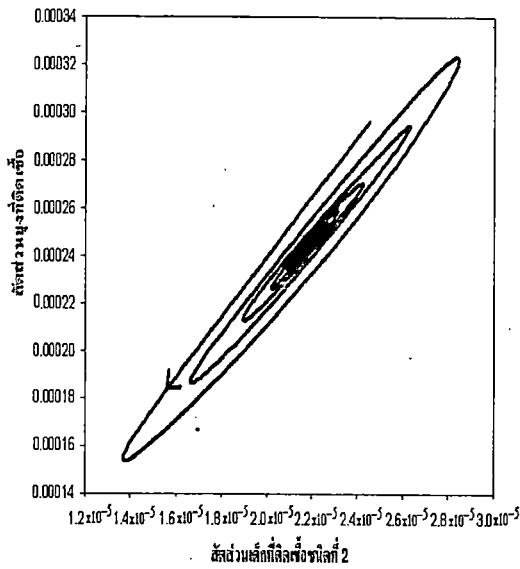
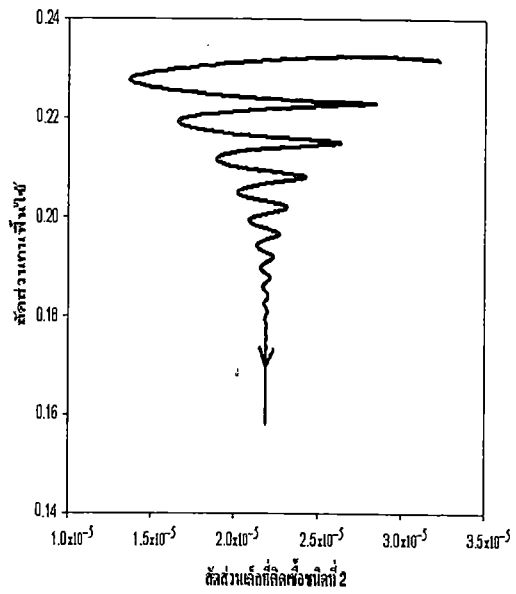
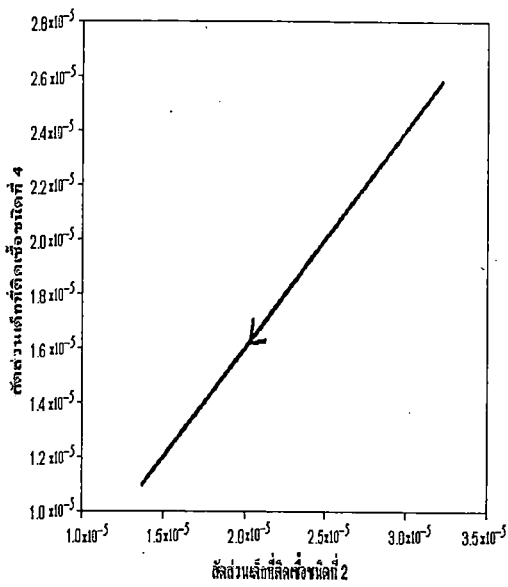
$(S, I_{D2})$ ,  $(S, I_{D3})$ ,  $(S, I_{D4})$  สำหรับ  $R_0 > 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 70,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน,  $M_1 = 5.66667, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099$ . สัดส่วน ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะ โรคเรื้อรัง



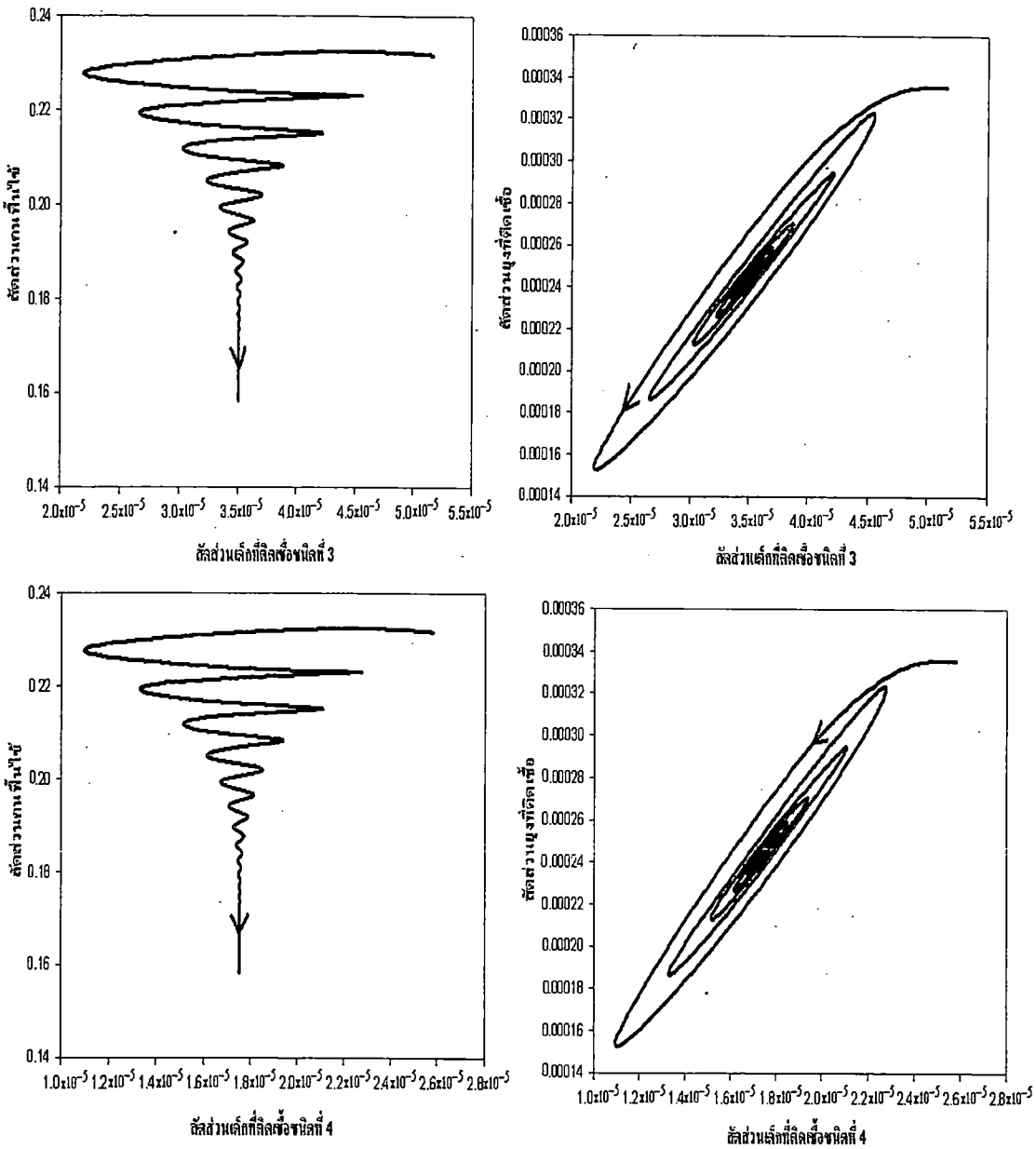
**รูปที่ 3.56** ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, R), (S, I_V), (I_{D1}, I_{D2}), (I_{D1}, I_{D3})$  สำหรับ  $R_0 > 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 70,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน,  $M_1 = 5.66667, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099$ . สัดส่วน ผู้เข้าสู่ยุคสมดุลสภาวะโรคเร็ว



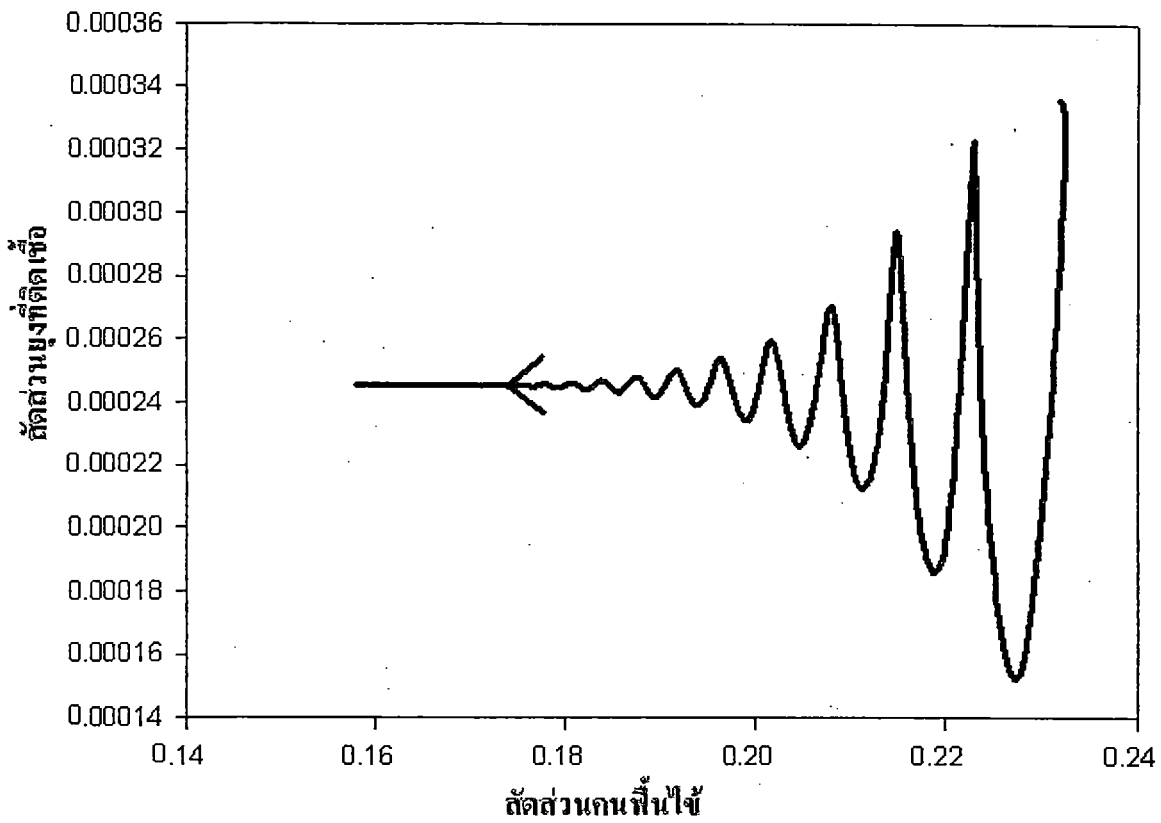
รูปที่ 3.57 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D1}, I_{D4})$ ,  $(I_{D1}, R)$ ,  $(I_{D1}, I_v)$ ,  $(I_{D2}, I_{D3})$  สำหรับ  $R_0 > 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 70,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน,  $M_1 = 5.66667, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099$ . สัดส่วน คู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง



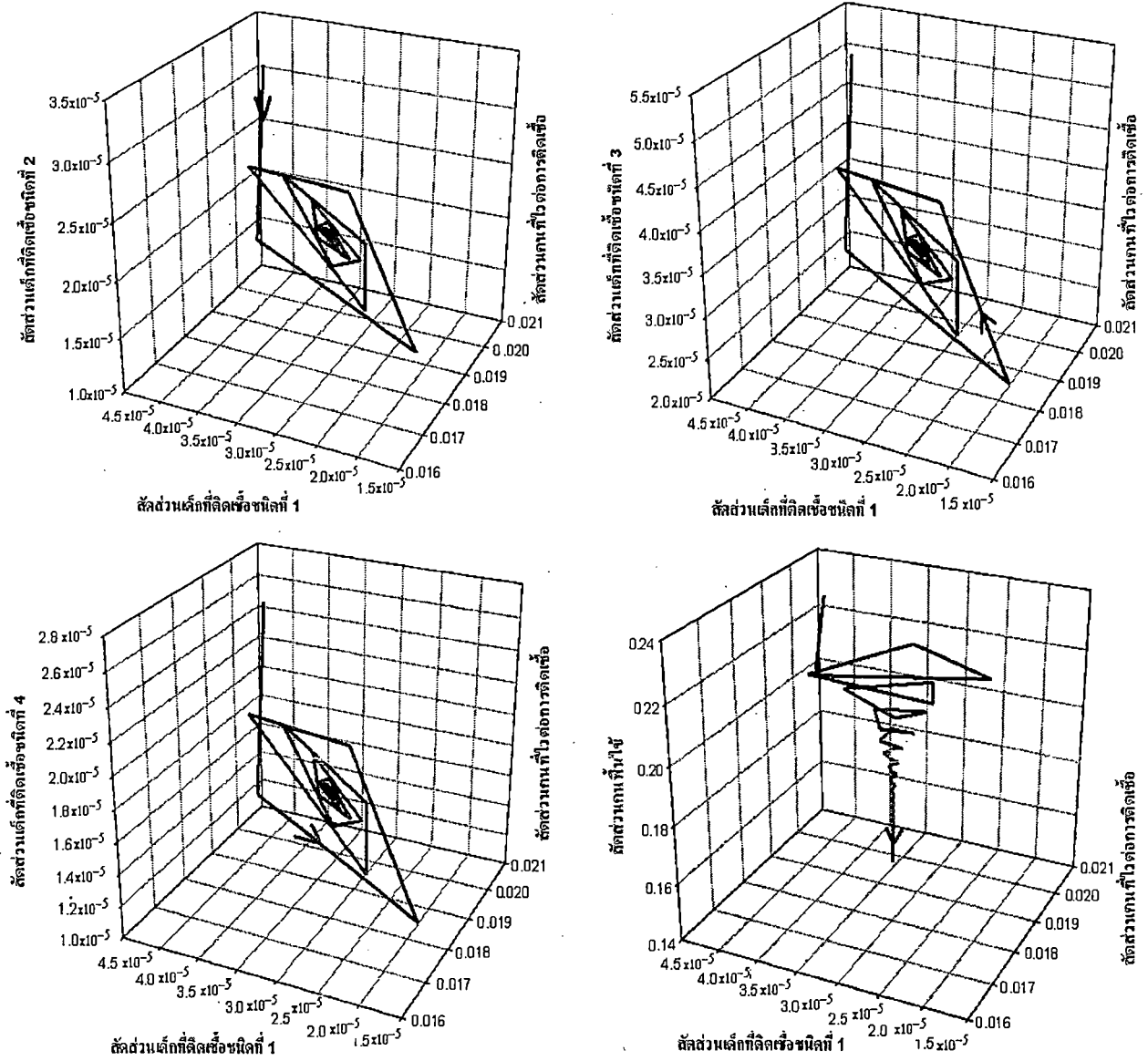
รูปที่ 3.58 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D2}, I_{D4})$ ,  $(I_{D2}, R)$ ,  $(I_{D2}, I_V)$ ,  $(I_{D3}, I_{D4})$  สำหรับ  $R_0 > 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 70,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน,  $M_1 = 5.66667, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099$ . สัดส่วน กลุ่มเข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง



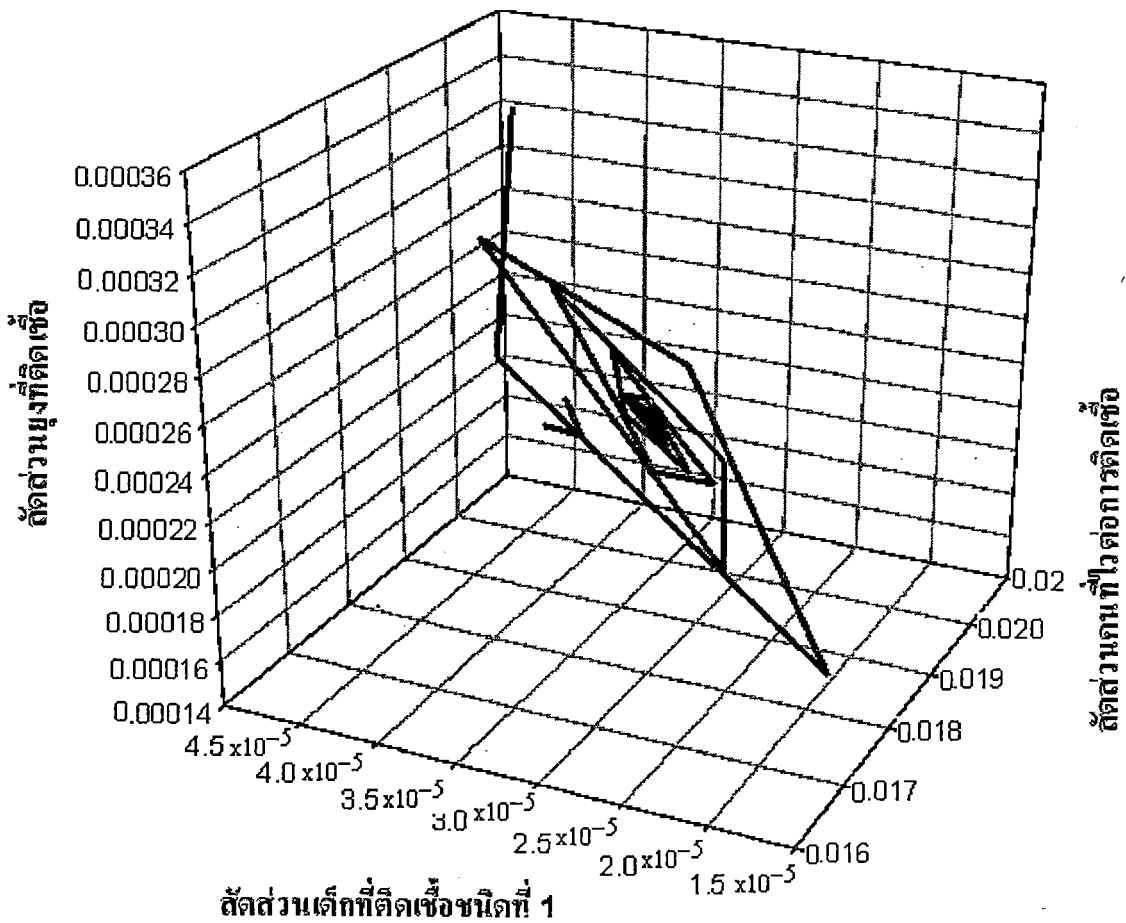
รูปที่ 3.59 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(I_{D3}, R), (I_{D3}, I_V), (I_{D4}, R), (I_{D4}, I_V)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 70,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน,  $M_1 = 5.66667, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099$ . สัดส่วน อยู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง



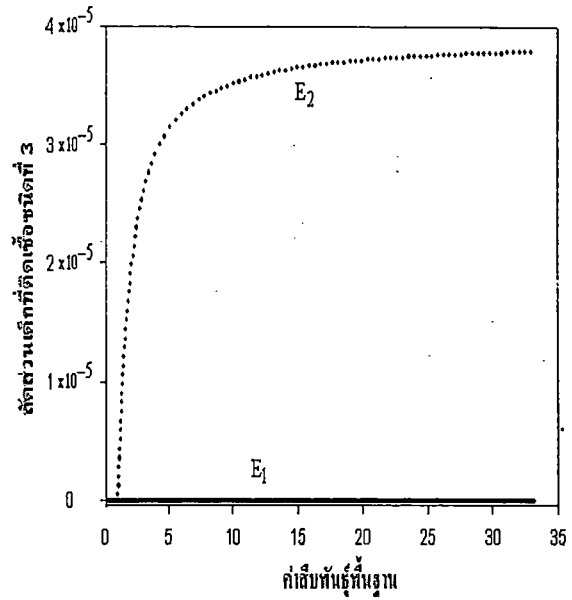
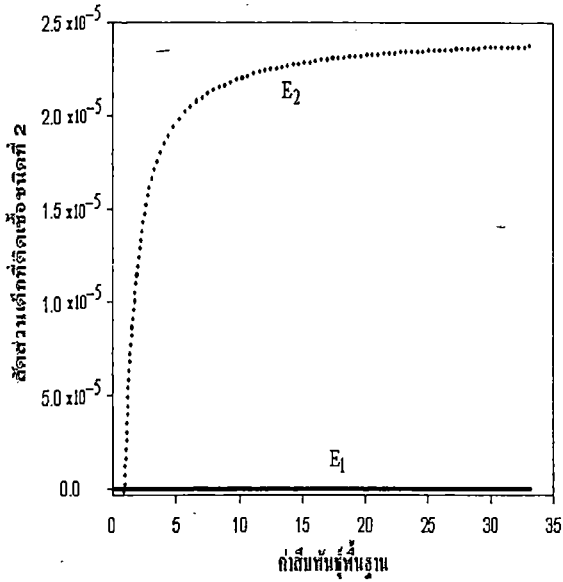
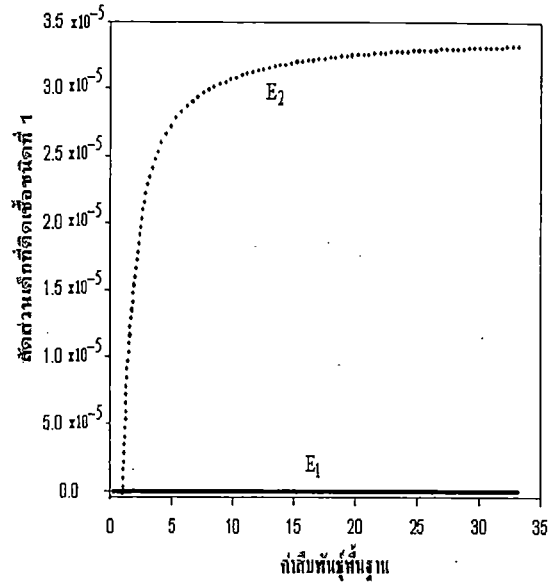
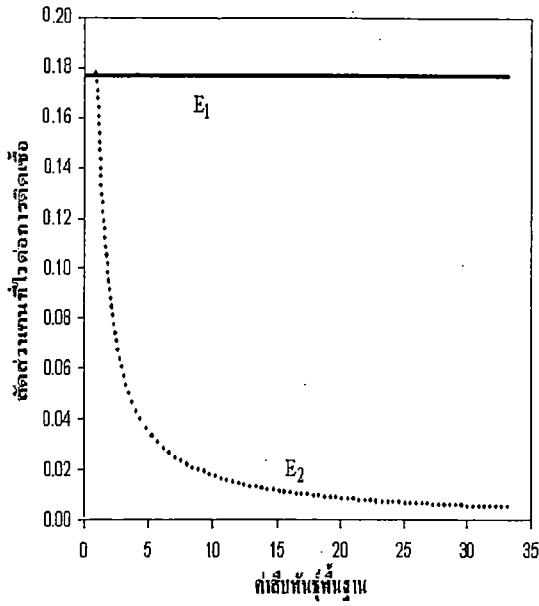
รูปที่ 3.60 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(R, I_v)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 70,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน,  $M_1 = 5.66667, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099$ . สัดส่วนกลุ่มที่ฟื้นไข้ กับผู้ที่ติดเชื้อ ถู้อู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง



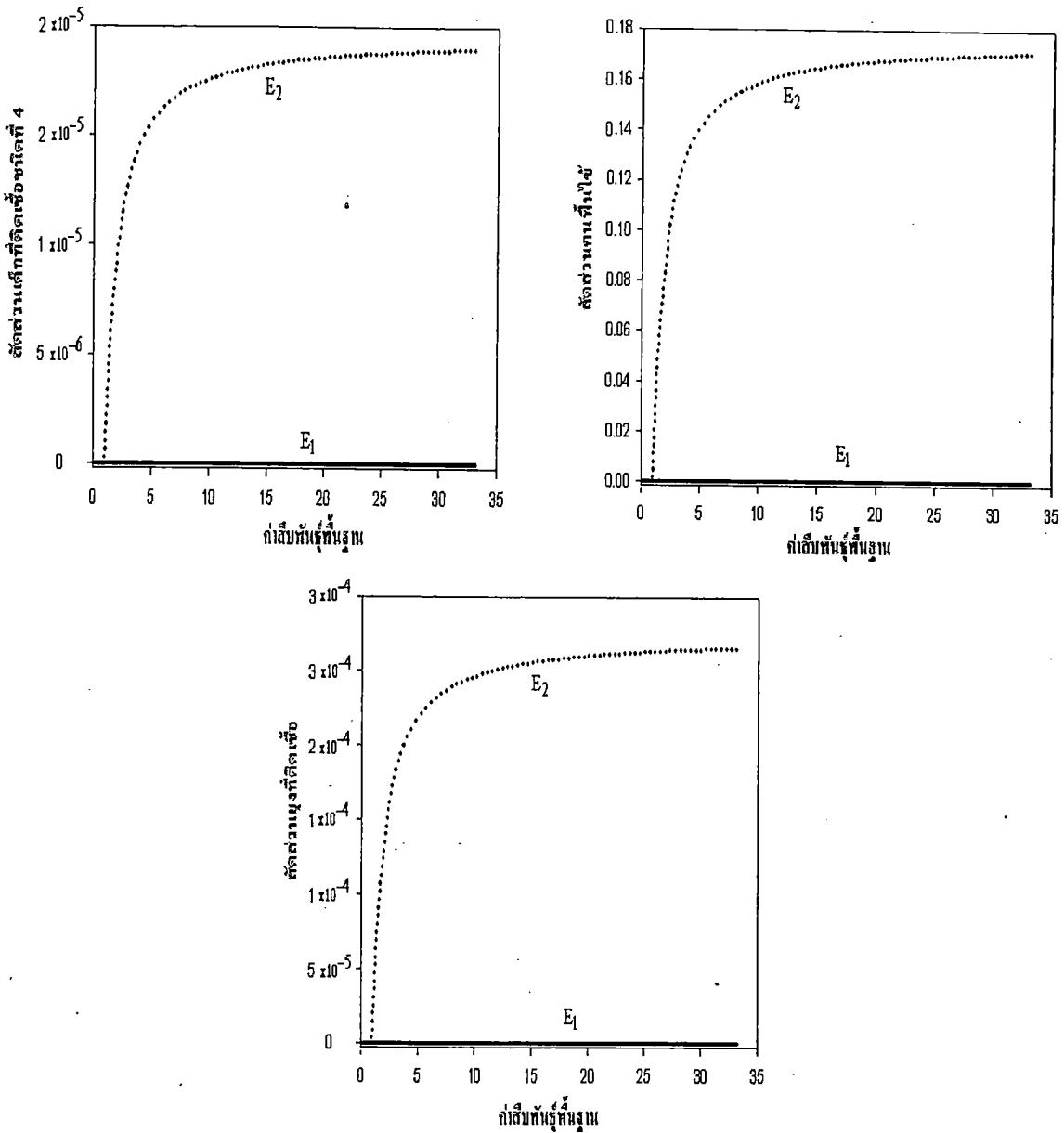
รูปที่ 3.61 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_{D1}, I_{D2}), (S, I_{D1}, I_{D3}), (S, I_{D1}, I_{D4}), (S, I_{D1}, R)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 70,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน,  $M_1 = 5.66667, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099$ . สัดส่วน ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง



รูปที่ 3.62 ผลเฉลยของสมการ (12.1)-(12.7) เขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $(S, I_{D1}, I_V)$  สำหรับ  $R_0 > 1$  โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 70,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน,  $M_1 = 5.66667, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099$ . สัดส่วนคนที่ไม่ต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชืชนิดที่ 1 และยุงที่ติดเชื้อ ถูเข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง



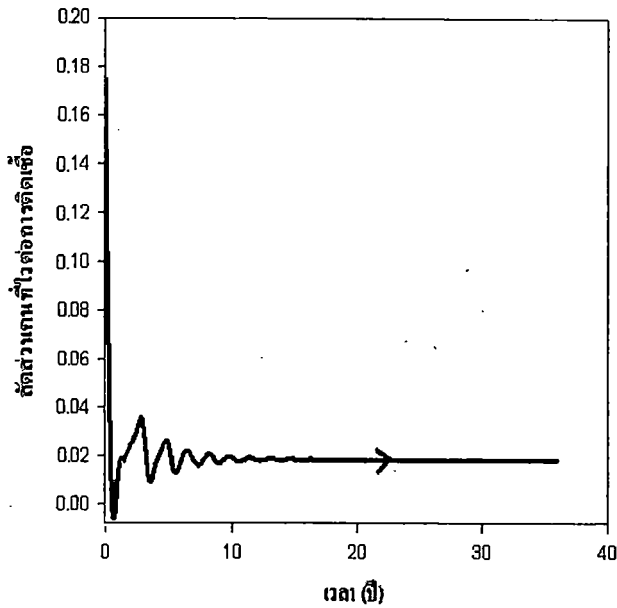
รูปที่ 3.63 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ คนที่ติดเชื้อมันที่ 1 คนที่ติดเชื้อมันที่ 2 และสัดส่วนคนที่ติดเชื้อมันที่ 3 เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 70,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน,  $M_1 = 5.66667, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099$ .  
 ———— แทนผลเฉลยที่เสถียร และ - - - - - แทนผลเฉลยที่ไม่เสถียร สำหรับ  $R_0 < 1, E_1$  จะเสถียร สำหรับ  $R_0 > 1, E_2$  จะเสถียร



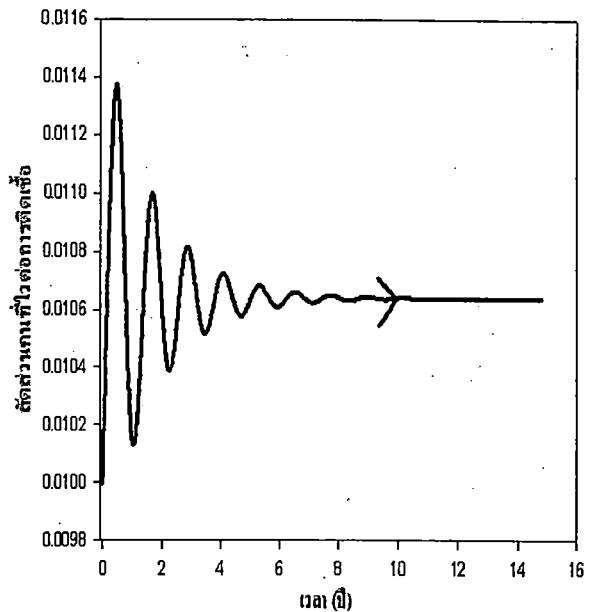
รูปที่ 3.64 กราฟแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 คนที่ไข้วัดและสัดส่วนคนที่ติดเชื้อเมื่อค่าสิบพันที่พื้นฐานต่างกัน ( $R_0$ ) โดยที่  $\mu_n = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, A = 70,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน,  $M_1 = 5.66667, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099$ . ———— แทนผลเฉลยที่เสถียร และ - - - - - แทนผลเฉลยที่ไม่เสถียร สำหรับ  $R_0 < 1, E_1$  จะเสถียร สำหรับ  $R_0 > 1, E_2$  จะเสถียร

### 2.9 ผลเฉลยของระบบสมการเมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานเปลี่ยนแปลง

นอกจากนี้เรายังเปรียบเทียบผลเฉลยของตัวแปรต่างๆ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ซึ่งแสดงได้ดังแผนภาพต่อไปนี้



3.65 a)

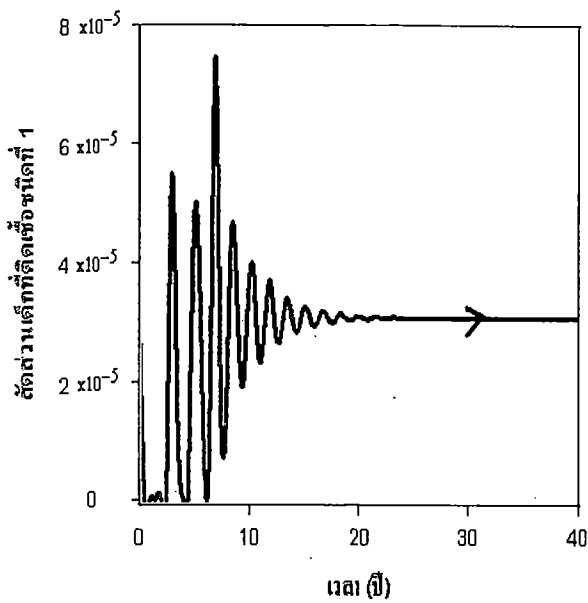


3.65 b)

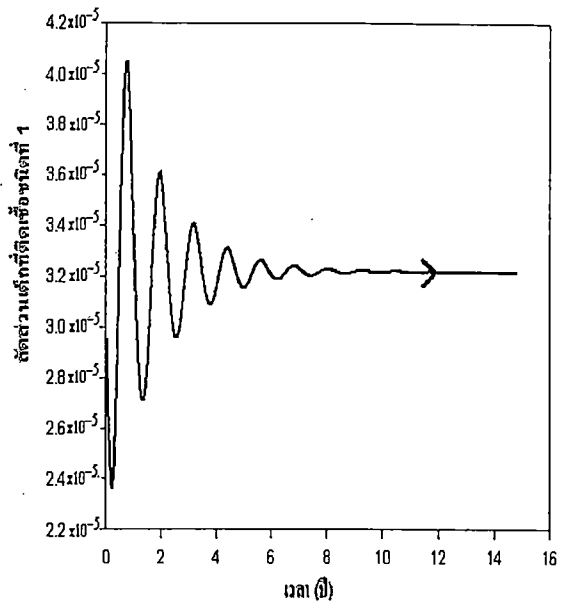
รูปที่ 3.65 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อกับเวลา เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของคนที่ไม่ไวต่อการติดเชื้อของกราฟทั้งสอง ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

2.65a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099, S^* = 0.018238175.$

2.65b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324, S^* = 0.010639061.$



3.66a)

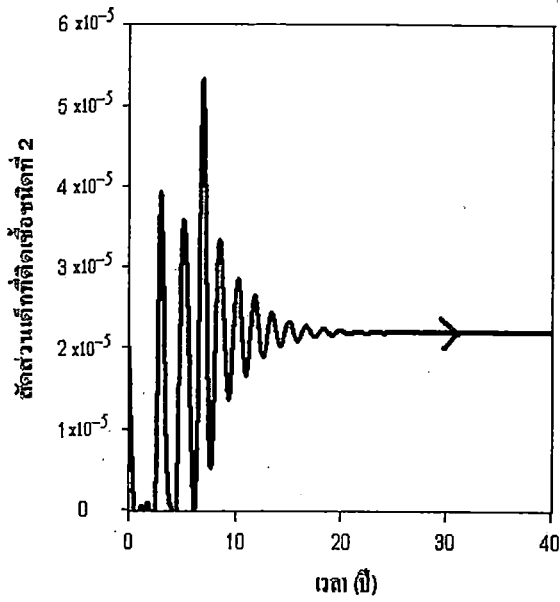


3.66b)

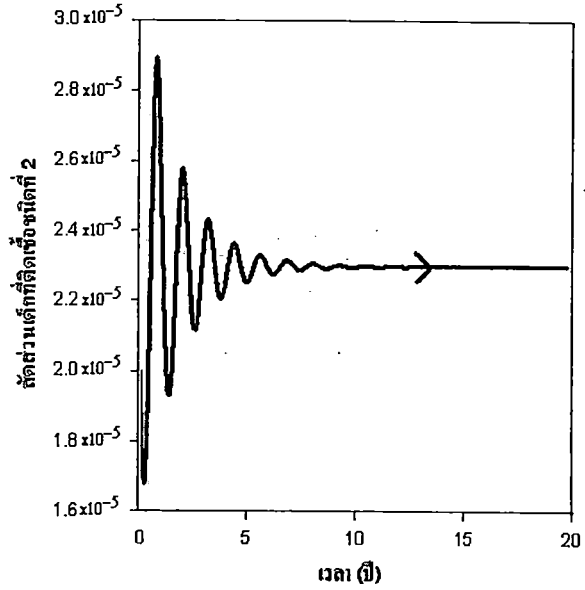
รูปที่ 3.66 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 กับเวลา เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ไวต่อการติดเชื้อชนิดที่ 1 ของกราฟทั้งสอง อยู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะ โรคเรื้อรัง

3.66a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099, I_{D1}^* = 0.000030687.$

3.66b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324, I_{D1}^* = 0.000032161.$



3.67a)

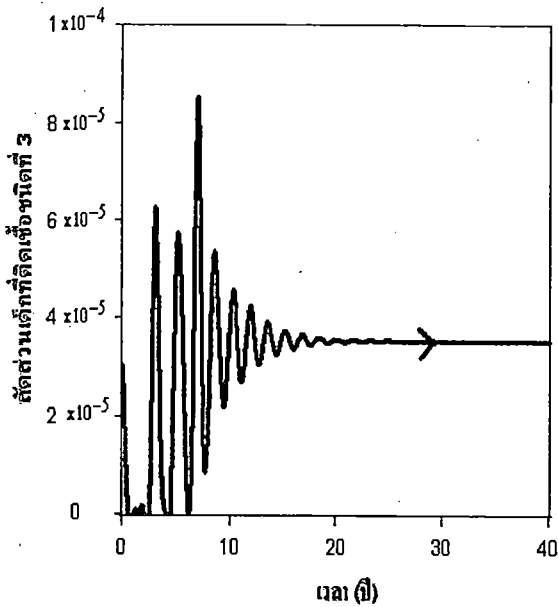


3.67b)

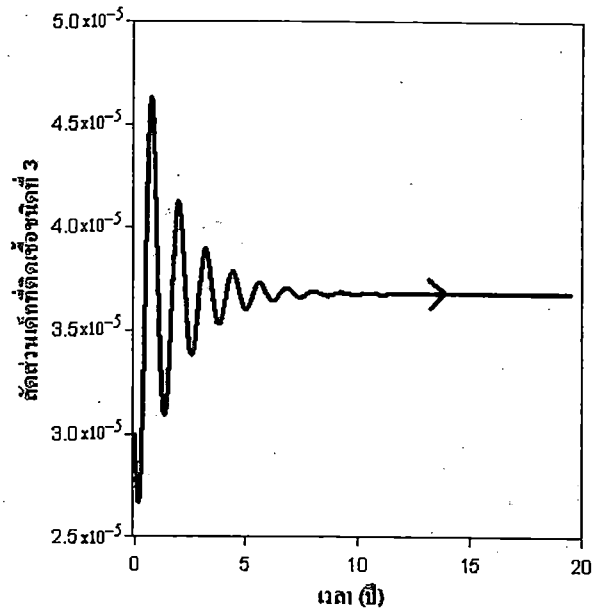
รูปที่ 3.67 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 กับเวลา เมื่อค่าสืบทอดพื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D_1}} = 0.7, \beta_{J_{D_2}} = 0.5, \beta_{J_{D_3}} = 0.8, \beta_{J_{D_4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ไวต่อการติดเชื้อชนิดที่ 2 ของกราฟทั้งสอง ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.67a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099, I_{D_2}^* = 0.0000219191.$

3.67b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324, I_{D_2}^* = 0.000022972 .$



3.68 a)

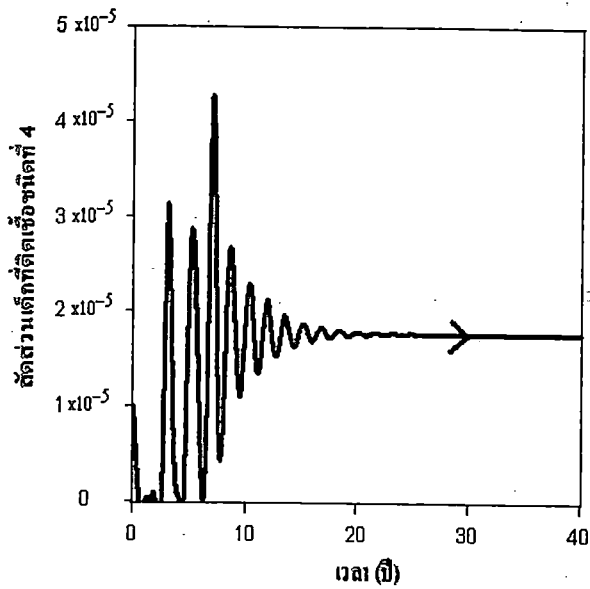


3.68 b)

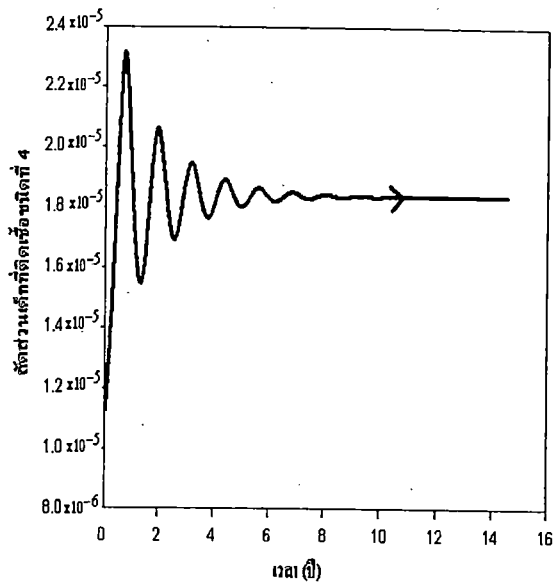
รูปที่ 3.68 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 3 กับเวลา เมื่อค่าสืบทอดพื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ไวต่อการติดเชื้อชนิดที่ 3 ของกราฟทั้งสอง อยู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะ โรคเรื้อรัง

3.68a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099, I_{D3}^* = 0.0000350706.$

3.68b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324, I_{D3}^* = 0.000036755.$



3.69a)

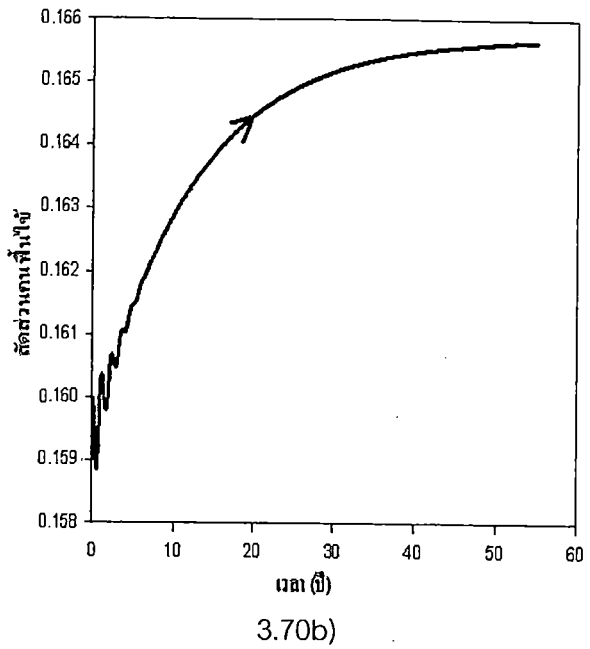
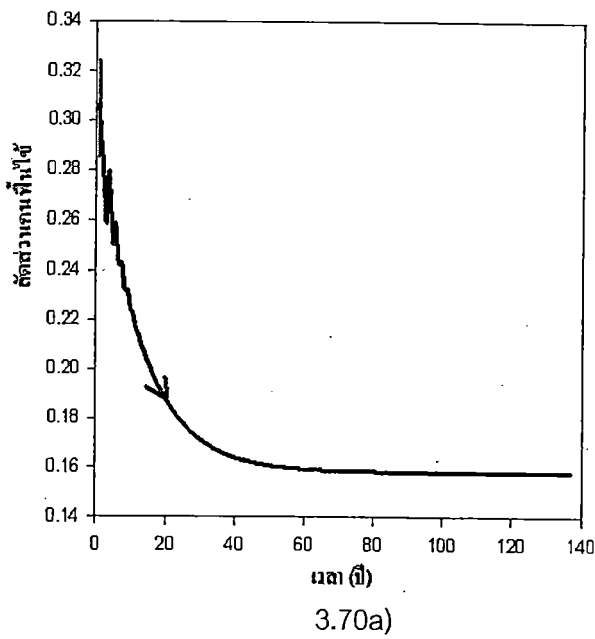


3.69b)

รูปที่ 3.69 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 กับเวลา เมื่อค่าสปีพังก์ชันพื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ไวต่อการติดเชื้อชนิดที่ 4 ของกราฟทั้งสอง อยู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.69a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099, I_{D4}^* = 0.000017535.$

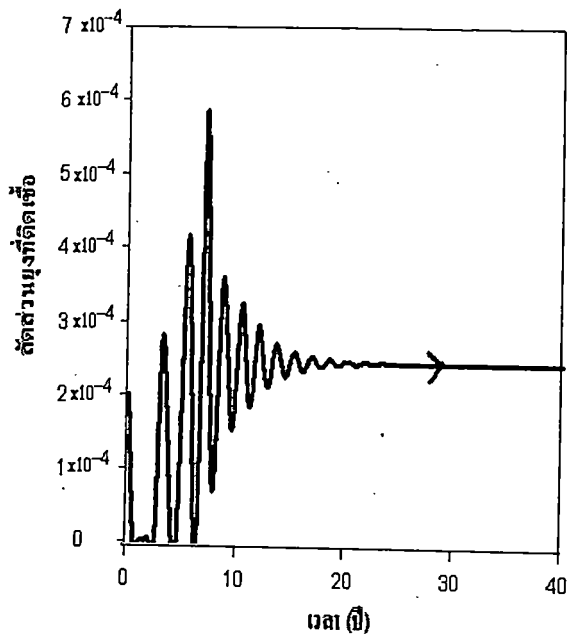
3.69b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324, I_{D4}^* = 0.000018377.$



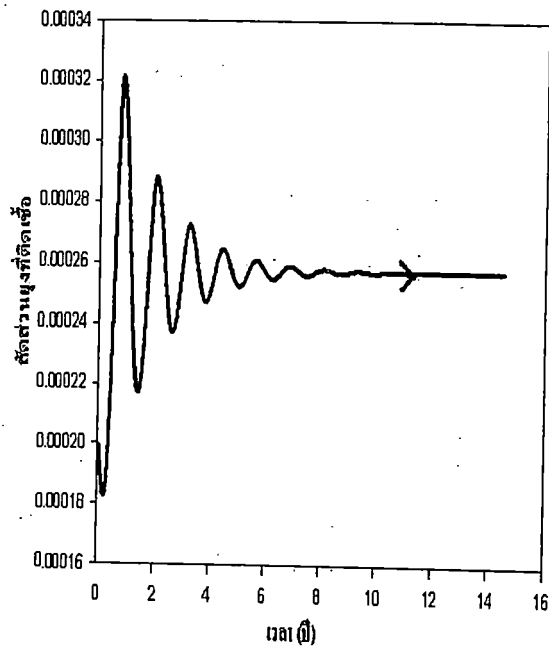
รูปที่ 3.70 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนไข้ กับเวลา เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของคนไข้ ของกราฟทั้งสอง เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะ โรคเรื้อรัง

3.70 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099, R^* = 0.158127202.$

3.70 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324, R^* = 0.165721263.$



3.71a)

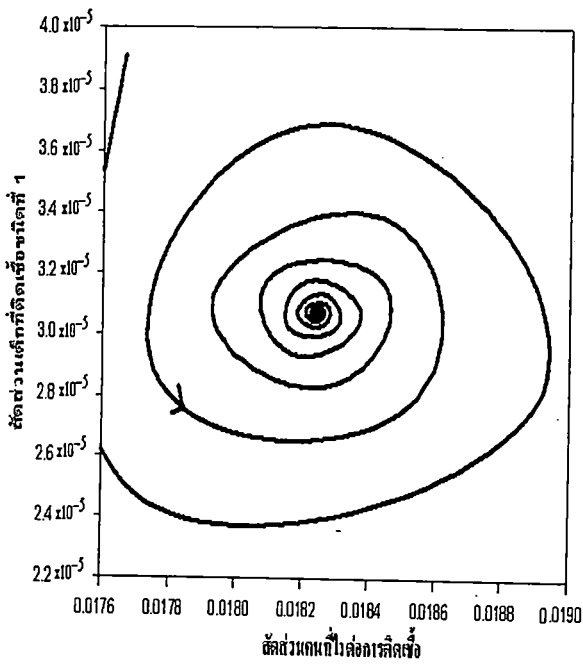


3.71b)

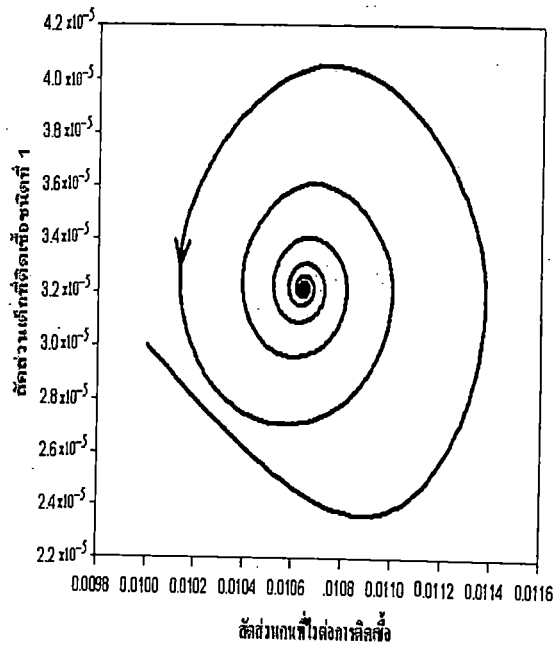
รูปที่ 3.71 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนยุงที่ติดเชื้อ กับเวลา เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของยุงที่ติดเชื้อ ของกราฟทั้งสอง อยู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะ โรคเรื้อรัง

3.71 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099, I_v^* = 0.000245434.$

3.71 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324, I_v^* = 0.000257218.$



3.72a)

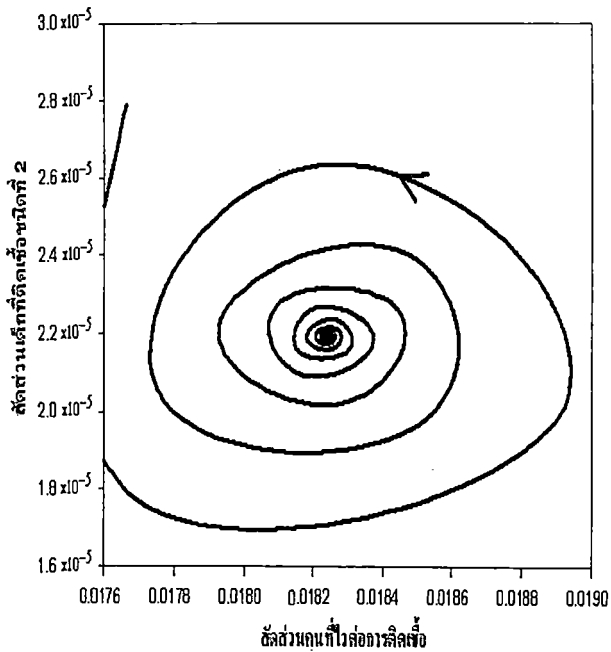


3.72b)

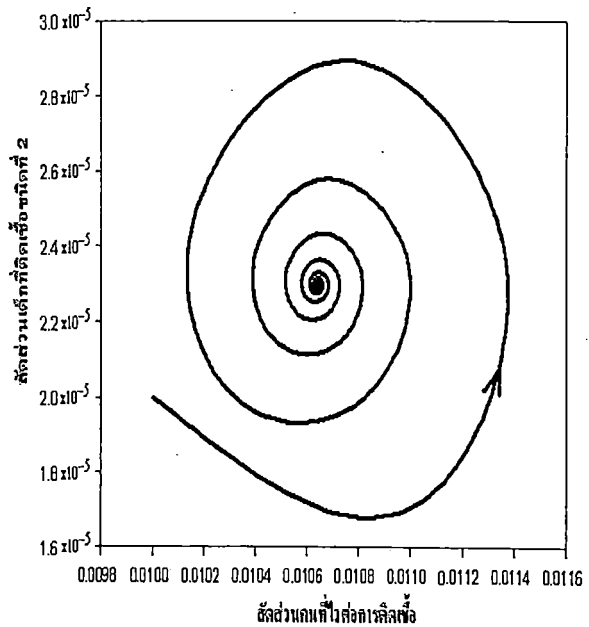
รูปที่ 3.72 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อกับเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของคนไข้ต่อการติดเชื้อและเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 ของกราฟทั้งสอง ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.72 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.72 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.73a)

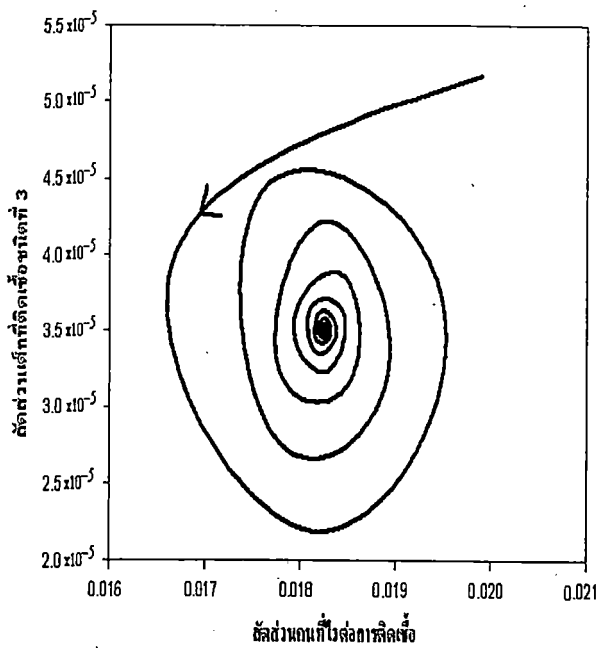


3.73b)

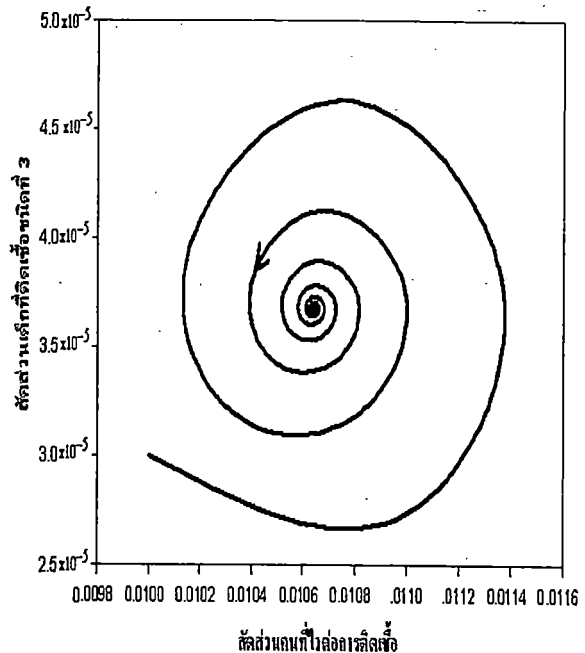
รูปที่ 3.73 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อมีเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของคนที่ไวต่อการติดเชื้อและเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 ของกราฟทั้งสอง ถู้อำนาจจุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.73 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.73 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.74 a)

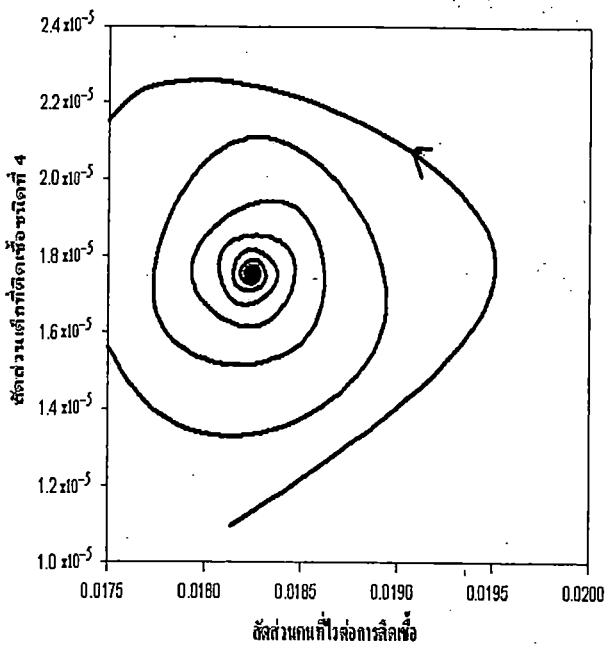


3.74 b)

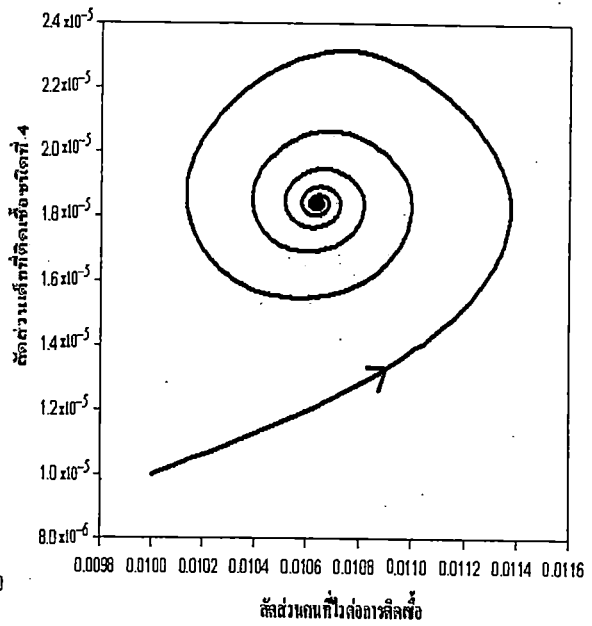
รูปที่ 3.74 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้กับเด็กที่ติดเชื้ชนิดที่ 3 เมื่อค่าสัมพัทธ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของคนทีไวต่อการติดเชื้และเด็กที่ติดเชื้ชนิดที่ 3 ของกราฟทั้งสอง ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.74 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.74 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.75 a)

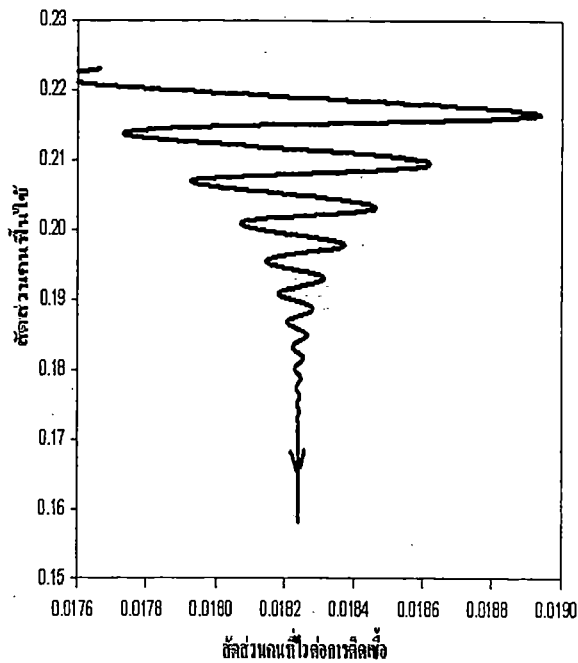


3.75 b)

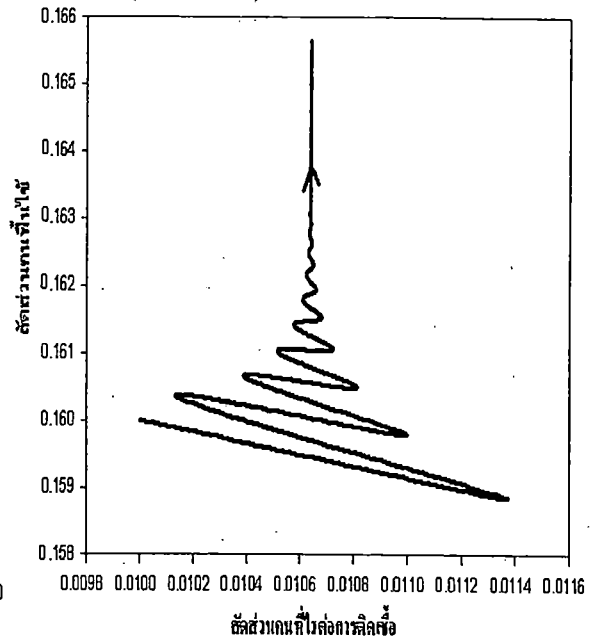
รูปที่ 3.75 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชือกับเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 เมื่อค่าสัมประสิทธิ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, \tau = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของคนที่ไม่ไวต่อการติดเชื้อและเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 ของกราฟทั้งสอง คู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.75 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.75 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.76 a)

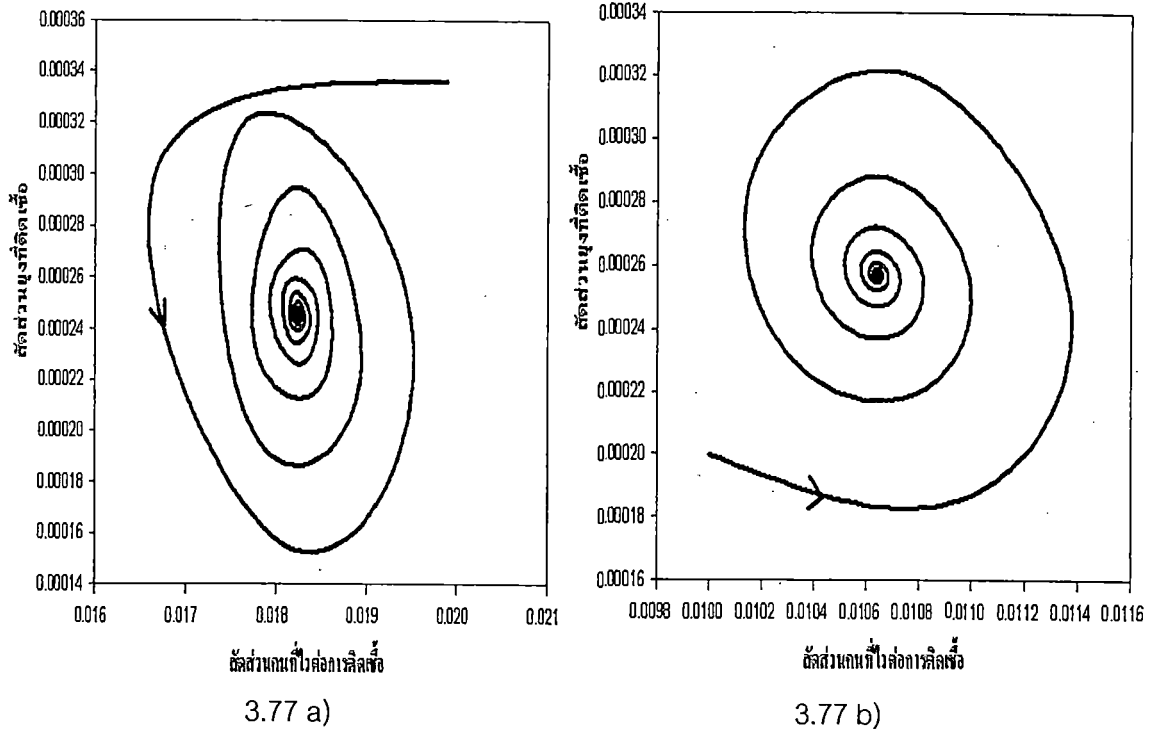


3.76 b)

รูปที่ 3.76 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อมีคนฟื้นไข้ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของคนที่ไม่ไวต่อการติดเชื้อและคนฟื้นไข้ ของกราฟทั้งสอง คู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.76 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

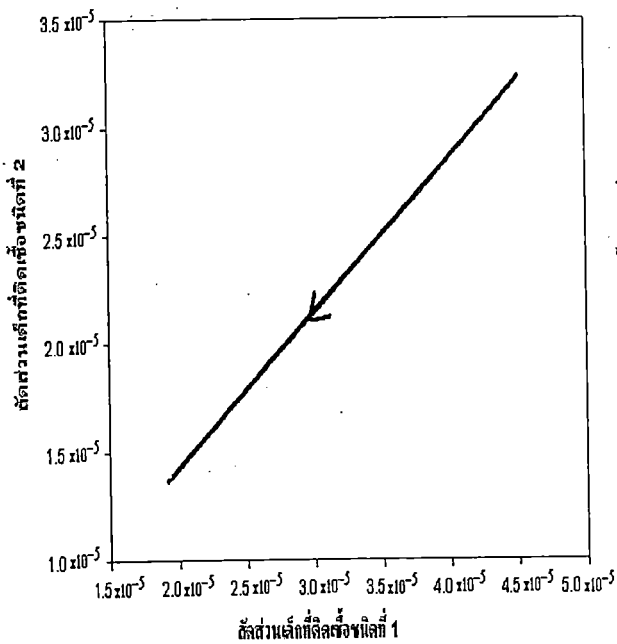
3.76 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



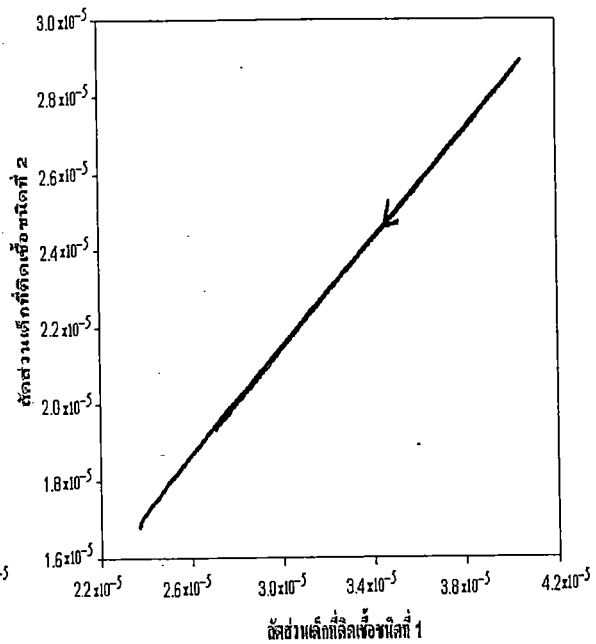
รูปที่ 3.77 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อมีกับผู้ที่ติดเชื้อ เมื่อค่าสัมพัทธ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของคนที่ไม่ไวต่อการติดเชื้อและผู้ที่ติดเชื้อ ของกราฟทั้งสอง อยู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.77 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.77 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.78 a)

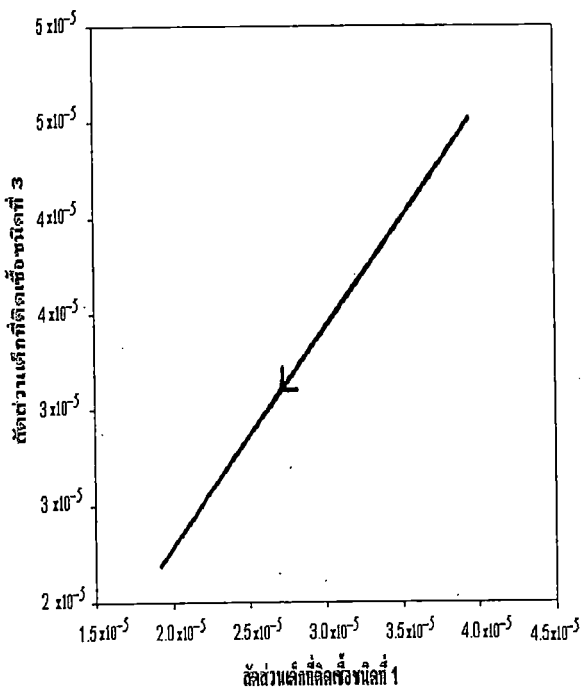


3.78 b)

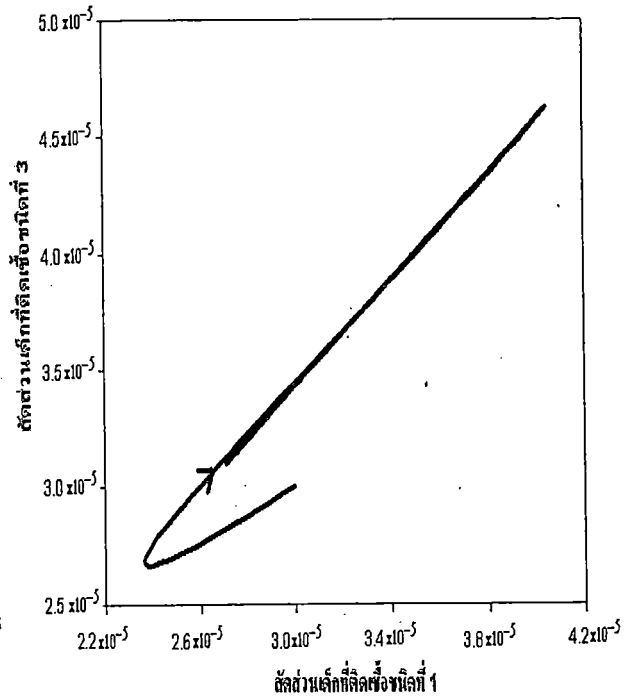
รูปที่ 3.78 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 กับเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 ของกราฟทั้งสอง ดูเข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.78 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.78 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.79 a)

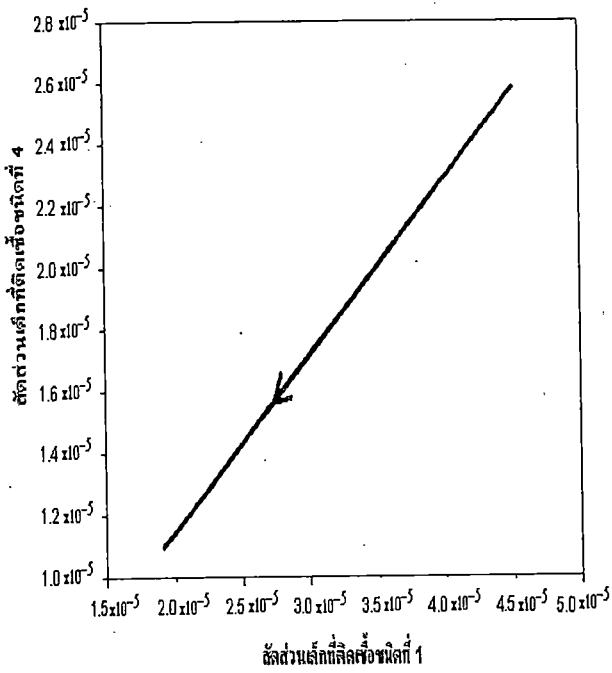


3.79 b)

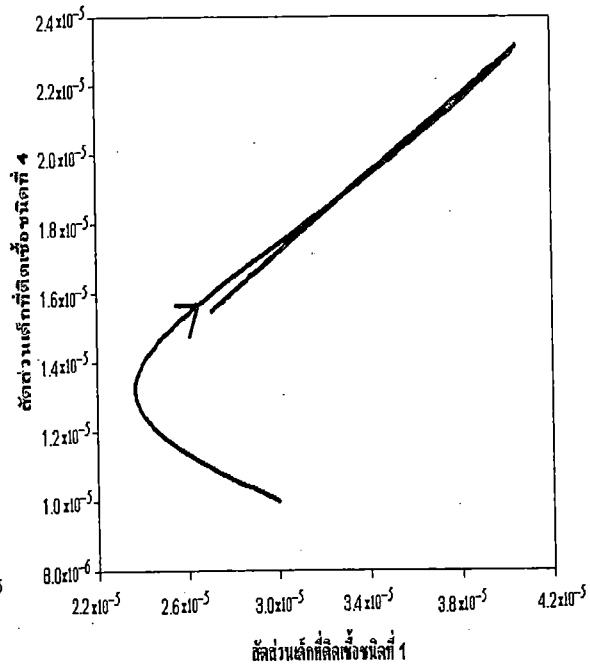
**รูปที่ 3.79** กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 กับเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 3 เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 3 ของกราฟทั้งสอง คู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.79 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.79 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.80 a)

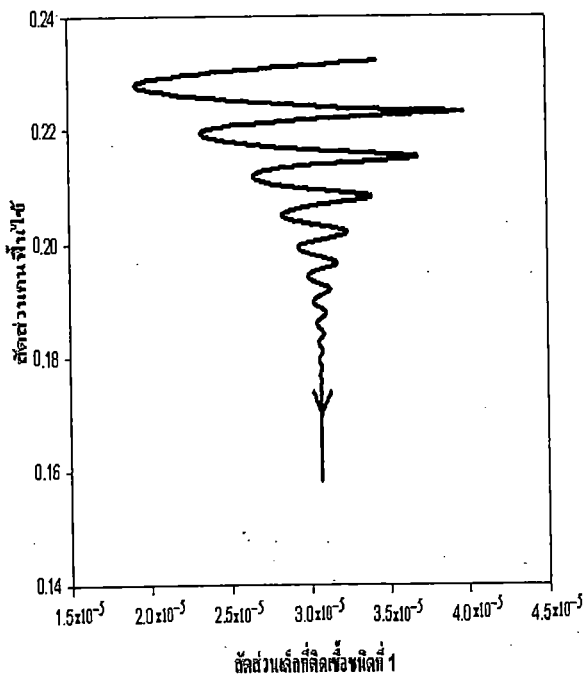


3.80 b)

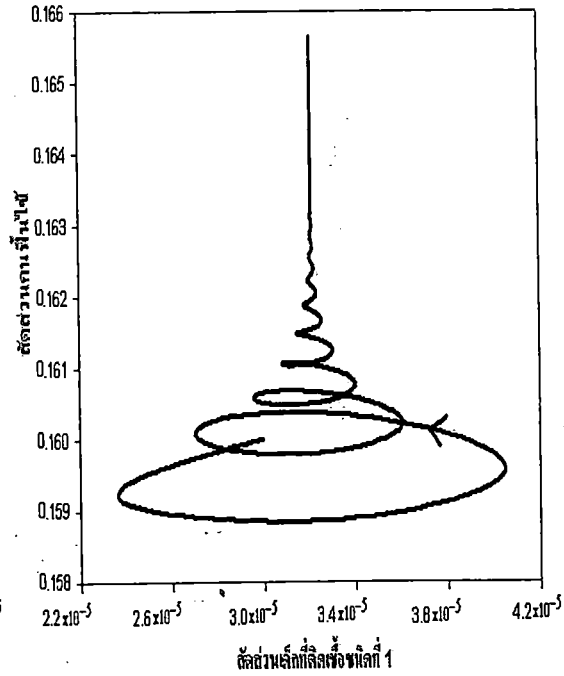
รูปที่ 3.80 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 กับเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 ของกราฟทั้งสอง ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.80 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.80 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.81 a)

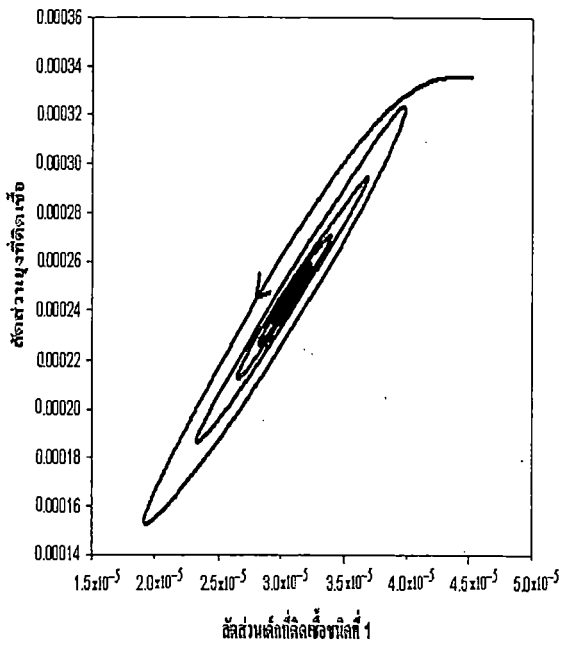


3.81 b)

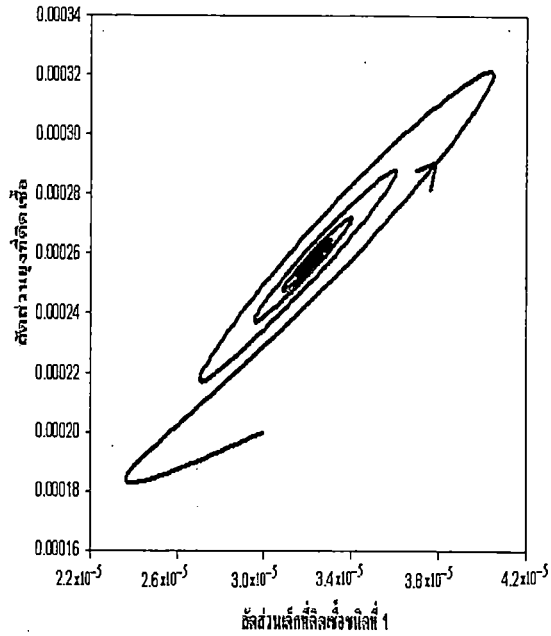
รูปที่ 3.81 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อมาก่อนที่ 1 กับคนไข้ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อมาก่อนที่ 1 และคนไข้ ของกราฟทั้งสอง ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.81 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.81 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.82 a)

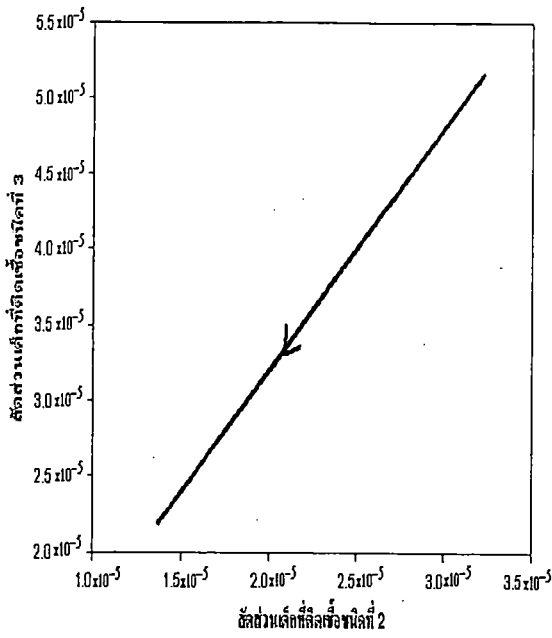


3.82 b)

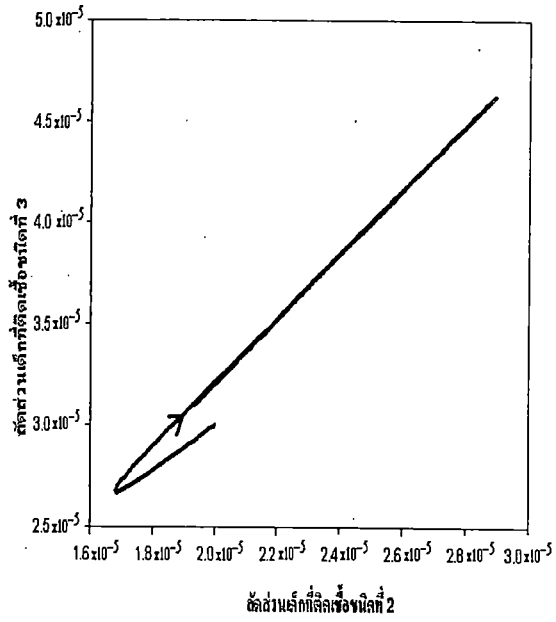
รูปที่ 3.82 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 กับยุงที่ติดเชื้อ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D_1}} = 0.7, \beta_{J_{D_2}} = 0.5, \beta_{J_{D_3}} = 0.8, \beta_{J_{D_4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และยุงที่ติดเชื้อ ของกราฟทั้งสอง อยู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.82 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.82 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



2.83 a)

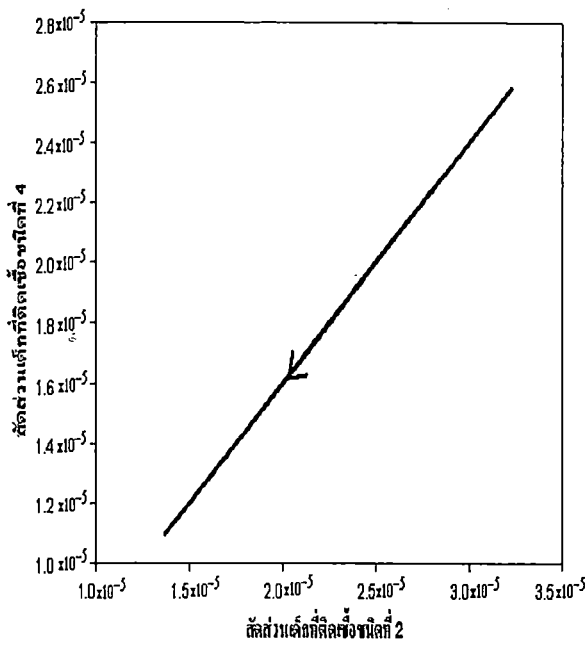


2.83 b)

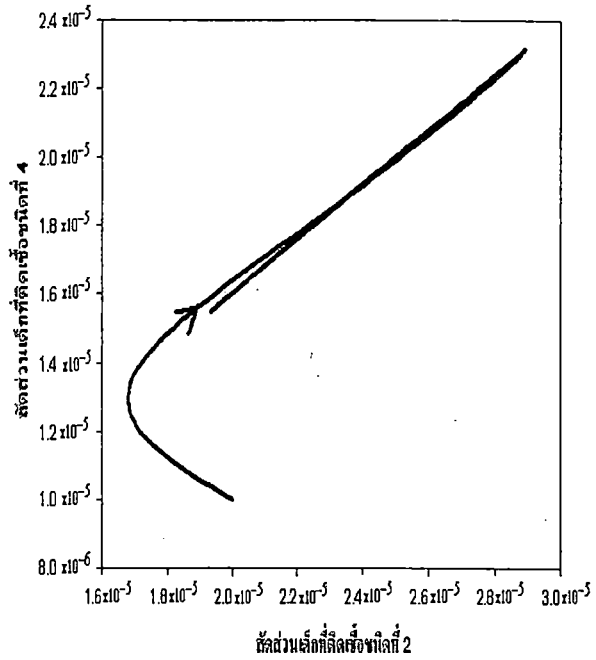
รูปที่ 3.83 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชืชนิดที่ 2 กับเด็กที่ติดเชืชนิดที่ 3 เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชืชนิดที่ 2 และเด็กที่ติดเชืชนิดที่ 3 ของกราฟทั้งสอง ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

2.83 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R_0' = 3.11099.$

2.83 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R_0' = 4.07324.$



3.84 a)

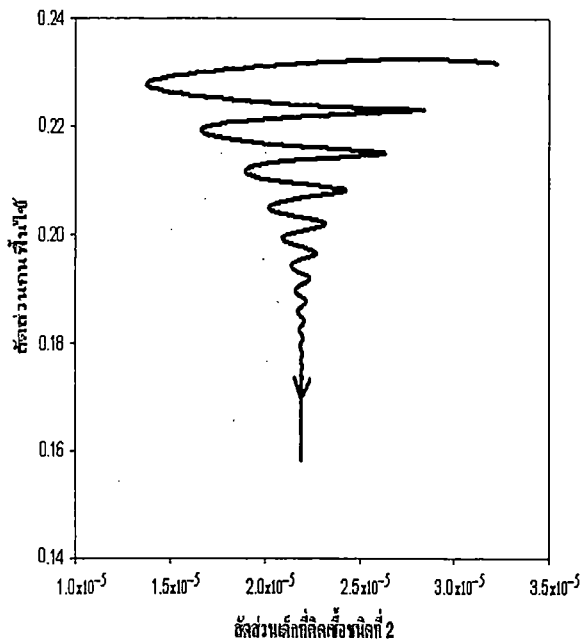


3.84 b)

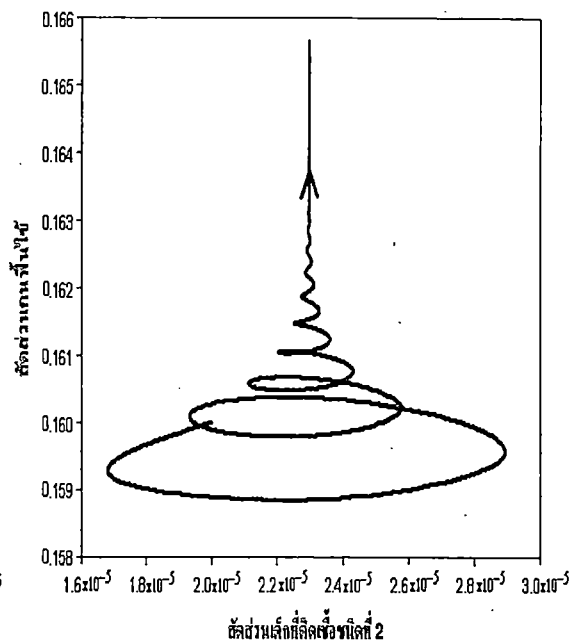
**รูปที่ 3.84** กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 กับเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 และเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 ของกราฟทั้งสอง คู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.84 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099$  .

3.84 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324$  .



3.85 a)

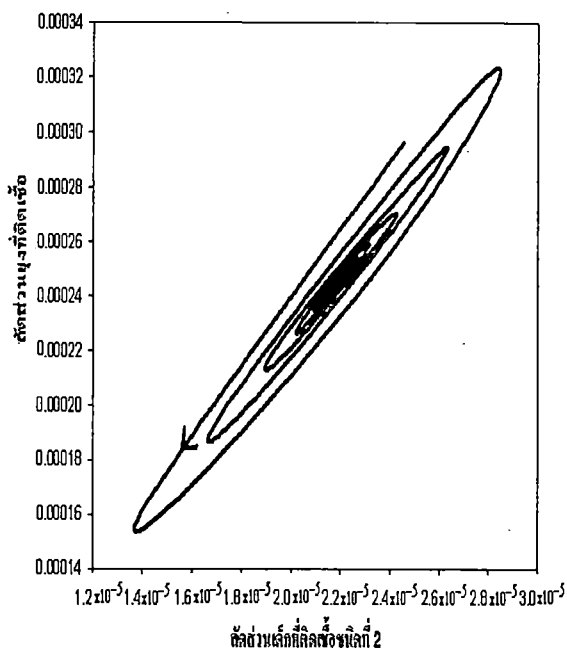


3.85 b)

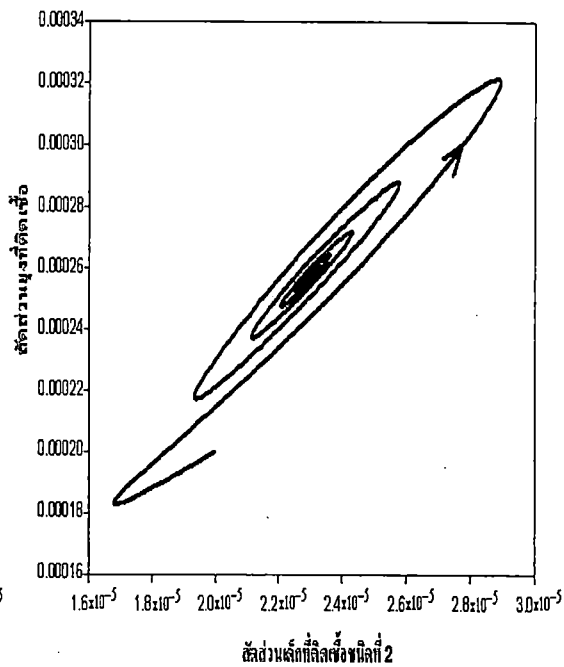
รูปที่ 3.85 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 กับคนไข้ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 และคนไข้ ของกราฟทั้งสอง ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.85 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.85 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.86 a)

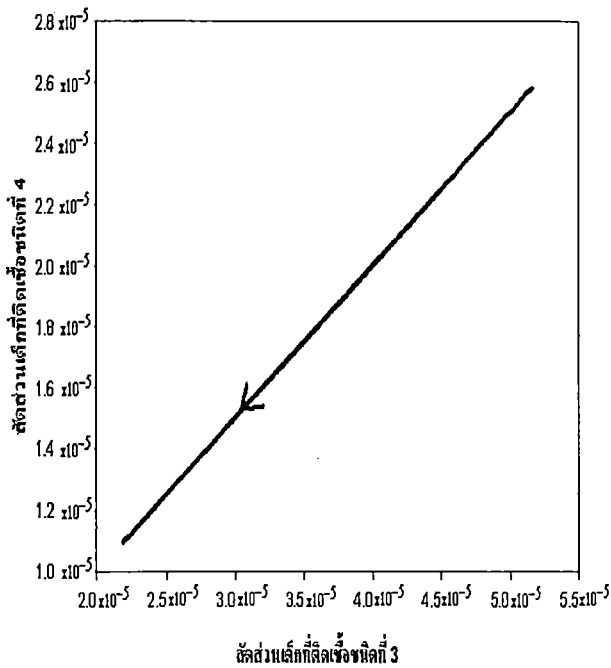


3.86 b)

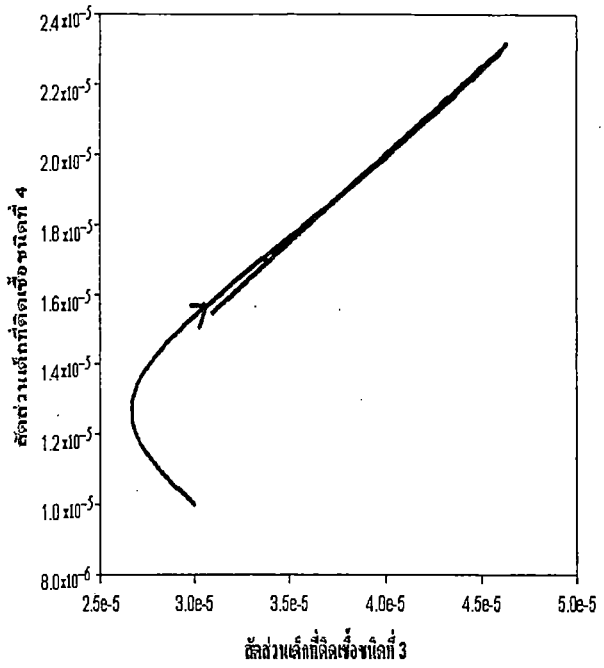
รูปที่ 3.86 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 กับยุงที่ติดเชื้อ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 และยุงที่ติดเชื้อ ของกราฟทั้งสอง ดูเข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.86 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.86 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.87 a)

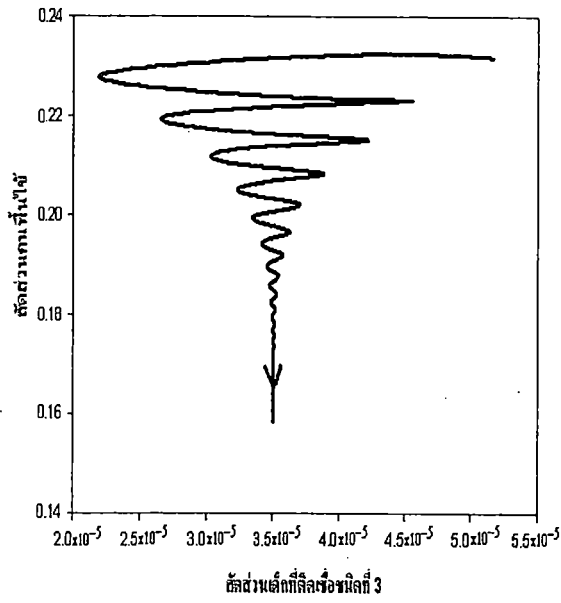


3.87 b)

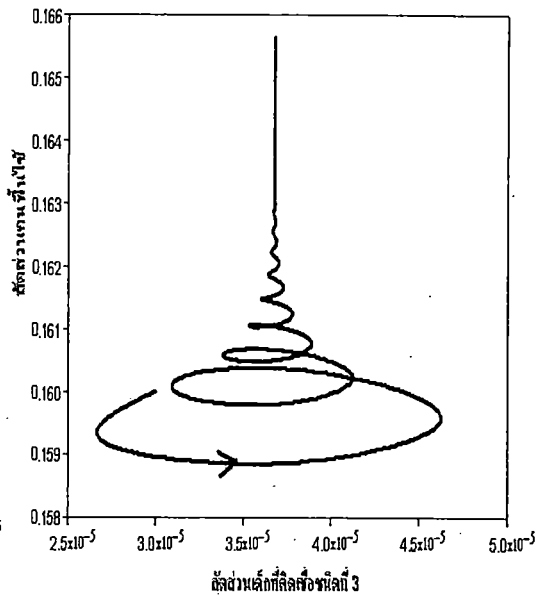
รูปที่ 3.87 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อมนิตที่ 3 กับเด็กที่ติดเชื้อมนิตที่ 4 เมื่อค่า สืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D_1}} = 0.7, \beta_{J_{D_2}} = 0.5, \beta_{J_{D_3}} = 0.8, \beta_{J_{D_4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อมนิตที่ 3 และเด็กที่ติดเชื้อมนิตที่ 4 ของกราฟทั้งสอง คู่เข้าสู่จุด สมดุลสถานะ โรครื้อรัง

3.87 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099$ .

3.87 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324$ .



3.88 a)

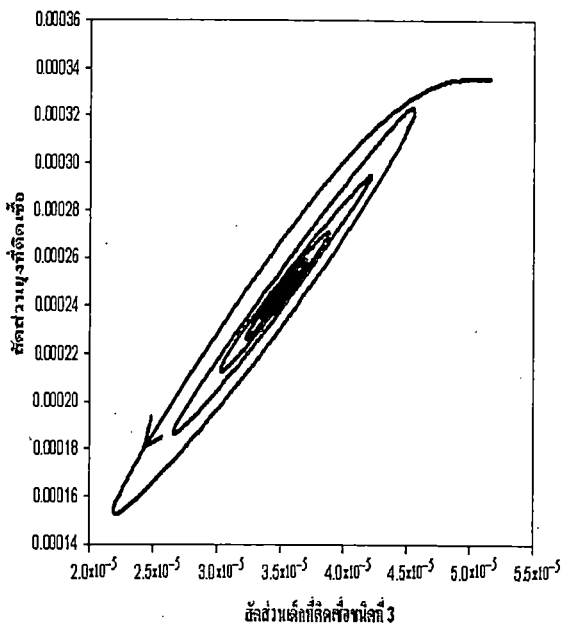


3.88 b)

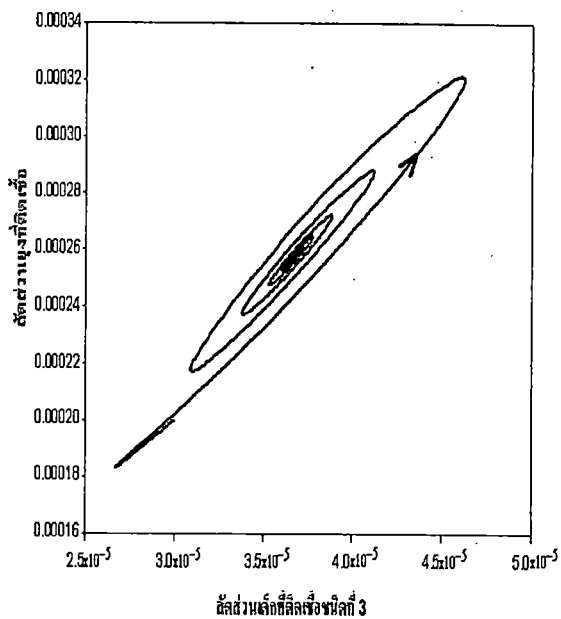
รูปที่ 3.88 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 3 กับคนไข้ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 3 และคนไข้ ของกราฟทั้งสอง ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.88 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.88 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.89 a)

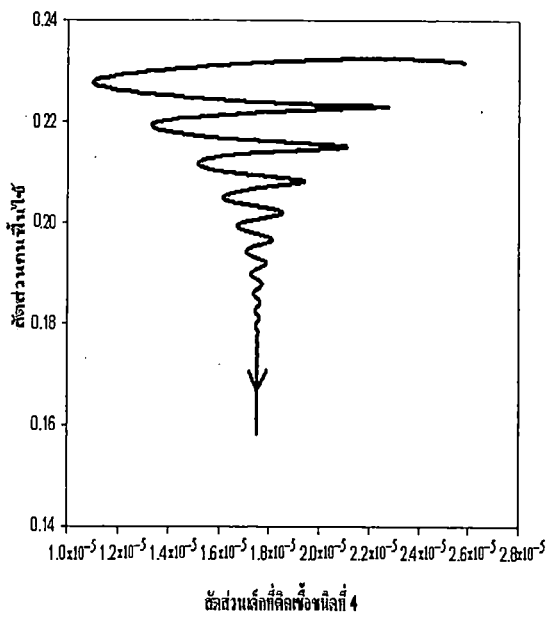


3.89 b)

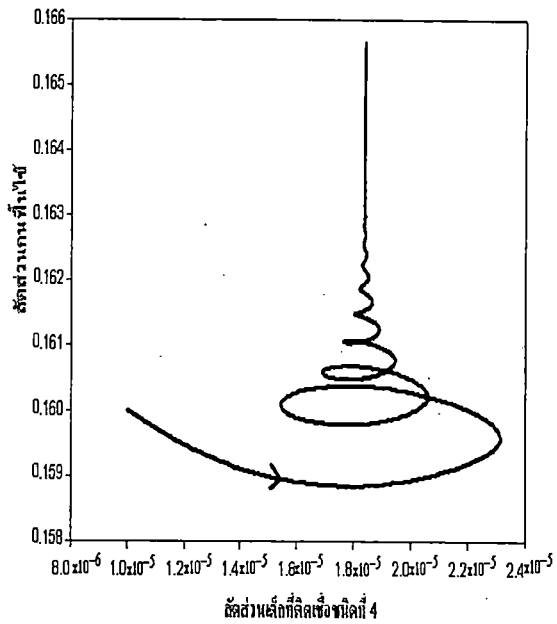
รูปที่ 3.89 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้ชนิดที่ 3 กับยุงที่ติดเชื้ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้ชนิดที่ 3 และยุงที่ติดเชื้ ของกราฟทั้งสอง อยู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.89 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.89 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.90 a)

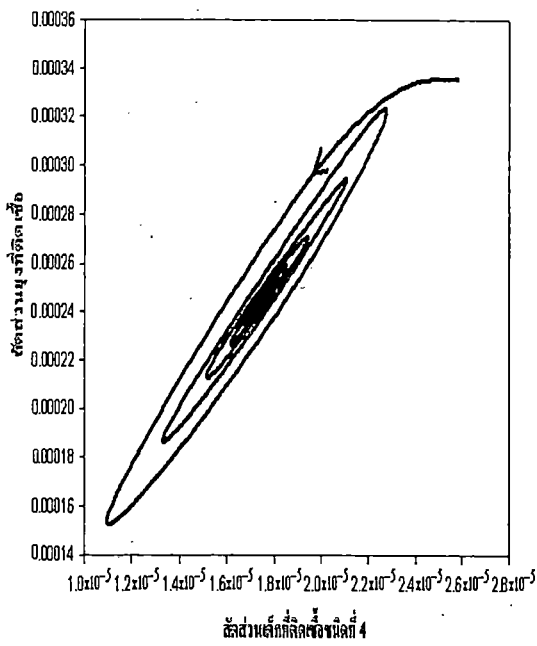


3.90 b)

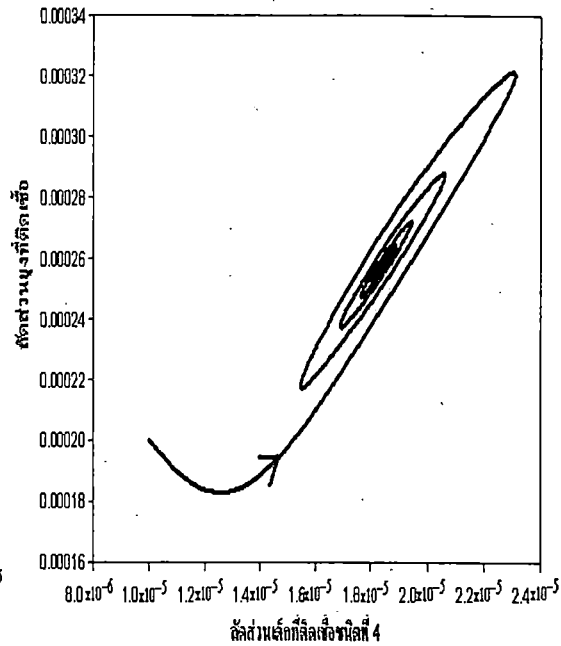
รูปที่ 3.90 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 กับคนไข้ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 และคนไข้ ของกราฟทั้งสอง คู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.90 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.90 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.91 a)

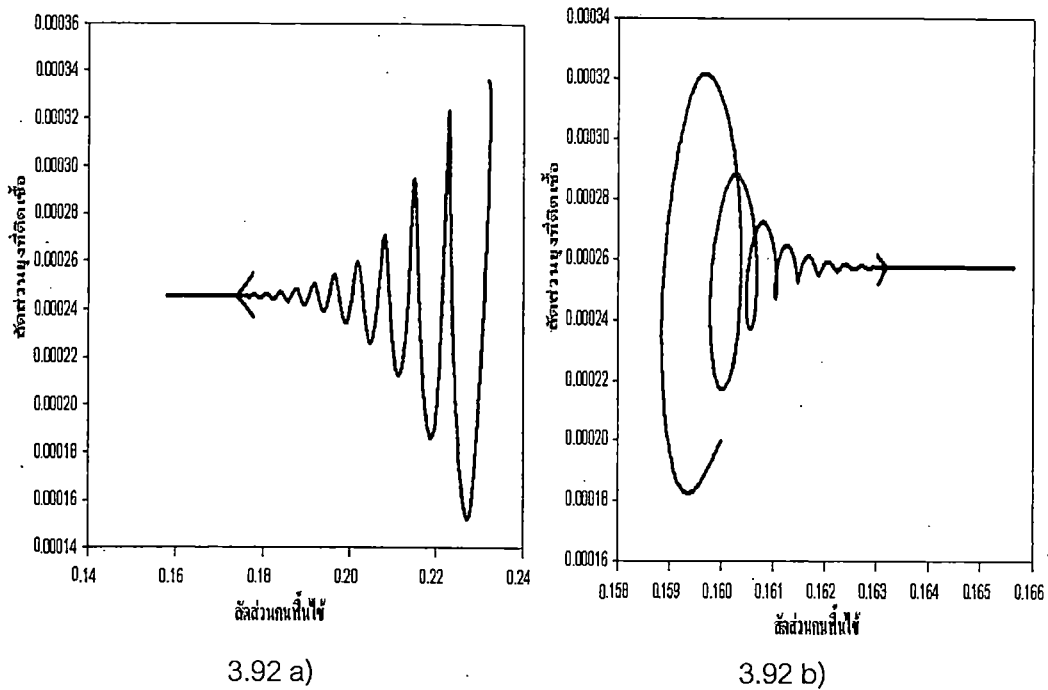


3.91 b)

รูปที่ 3.91 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 กับยุงที่ติดเชื้อ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 และยุงที่ติดเชื้อ ของกราฟทั้งสอง คู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.91 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

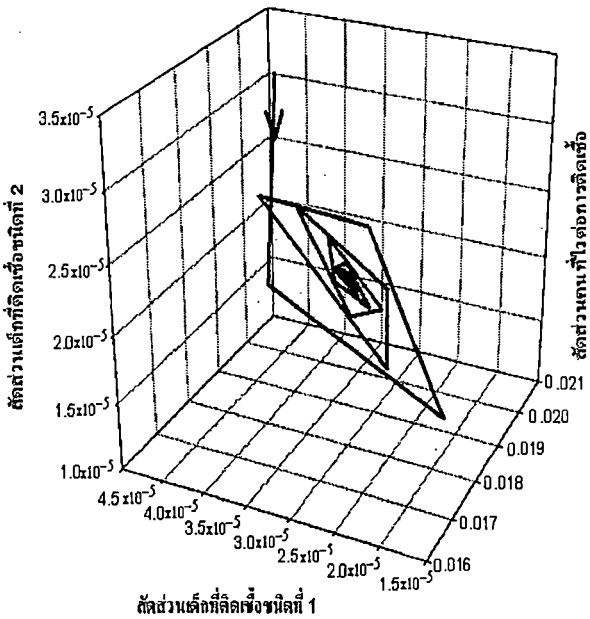
3.91 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



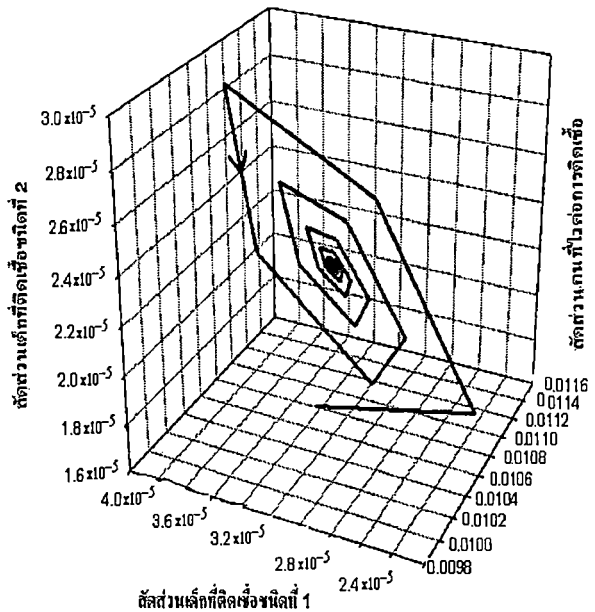
รูปที่ 3.92 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนไข้กับยุงที่ติดเชื้อ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_H = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_V = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_V = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของคนไข้และยุงที่ติดเชื้อ ของกราฟทั้งสอง ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.92 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.92 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.93 a)

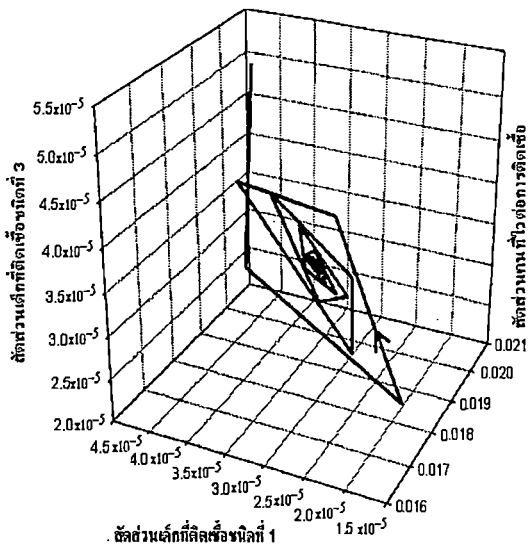


3.93 b)

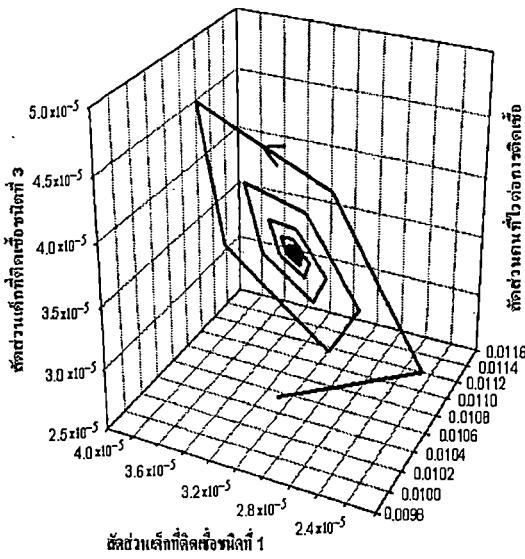
รูปที่ 3.93 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชืชนิดที่ 1 และเด็กที่ติดเชืชนิดที่ 2 เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของคนที่ไวต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชืชนิดที่ 1 และเด็กที่ติดเชืชนิดที่ 2 ของกราฟทั้งสอง ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะ โรคเรื้อรัง

3.93 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.93 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.94 a)

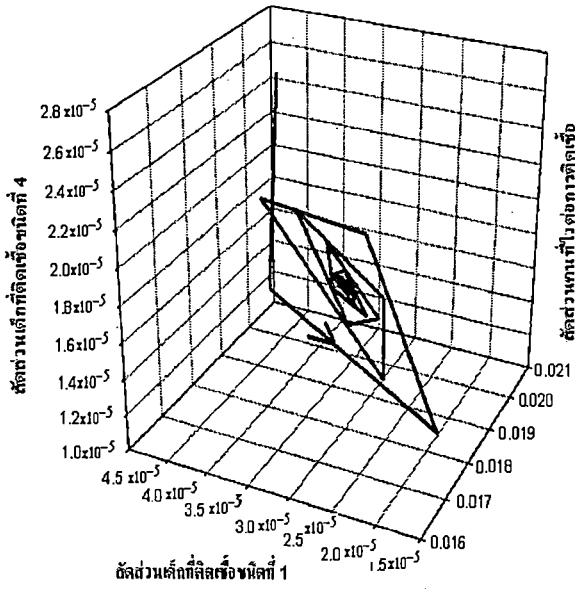


3.94 b)

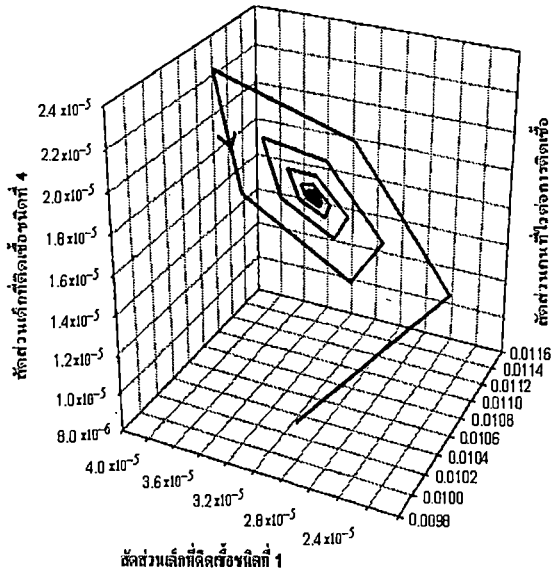
รูปที่ 3.94 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อมากขึ้นที่ 1 และเด็กที่ติดเชื้อมากขึ้นที่ 3 เมื่อค่าสปีพันฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของคนที่ไวต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อมากขึ้นที่ 1 และเด็กที่ติดเชื้อมากขึ้นที่ 3 ของกราฟทั้งสอง อยู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะ โรคเรื้อรัง

3.94 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.94 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.95 a)

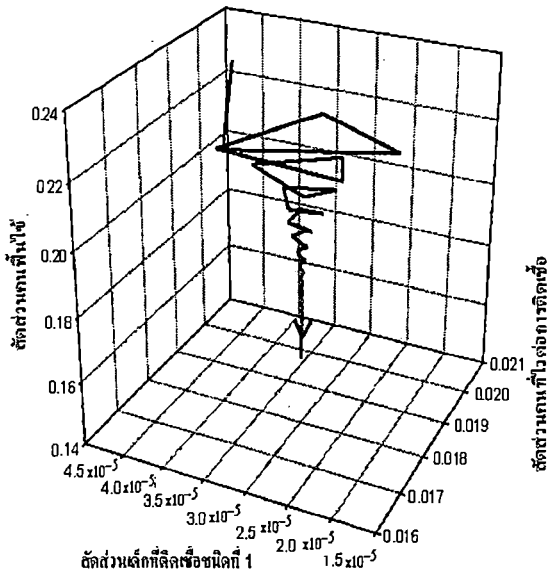


3.95 b)

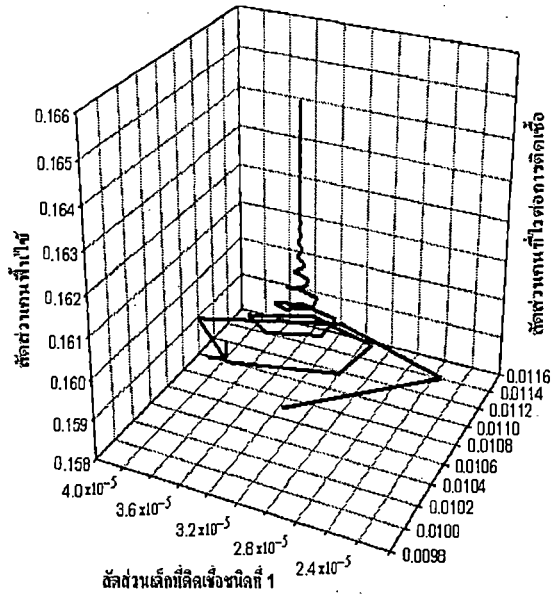
รูปที่ 3.95 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อมนิตที่ 1 และเด็กที่ติดเชื้อมนิตที่ 4 เมื่อค่าสปีพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของคนทั่วไปต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อมนิตที่ 1 และเด็กที่ติดเชื้อมนิตที่ 4 ของกราฟทั้งสอง ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะ โรคเรื้อรัง

3.95 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.95 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.96 a)

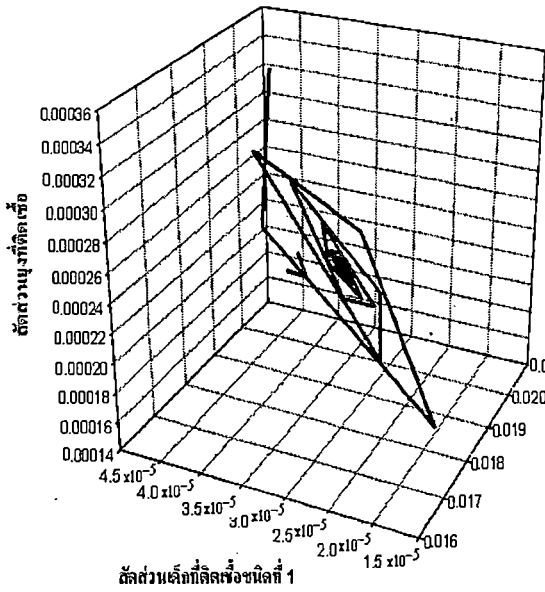


3.96 b)

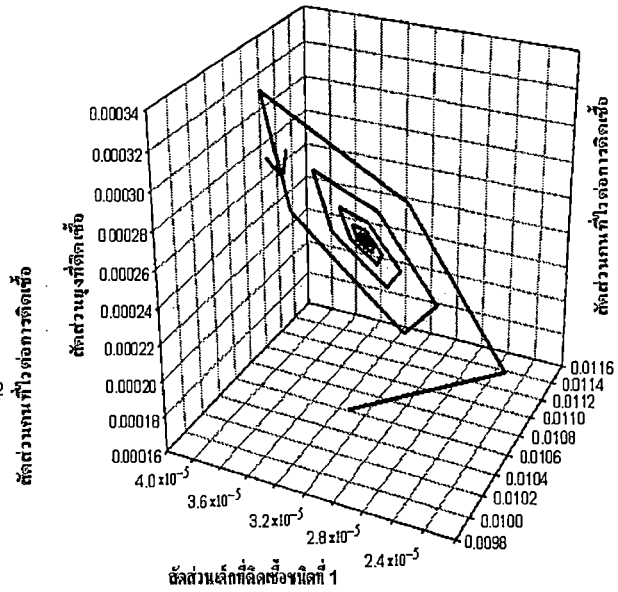
รูปที่ 3.96 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และคนไข้ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของคนที่ไม่ไวต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และคนไข้ ของกราฟทั้งสอง ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสภาวะโรคเรื้อรัง

3.96 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.96 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$



3.97 a)



3.97 b)

รูปที่ 3.97 กราฟเปรียบเทียบแสดงความสัมพันธ์ของสัดส่วนคนที่ไวต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และยุงที่ติดเชื้อ เมื่อค่าสืบพันธุ์พื้นฐานต่างกัน ( $R_0 > 1$ ) โดยที่  $\mu_h = 1/(365 \times 70)$  ต่อวัน,  $\mu_v = 1/14$  ต่อวัน,  $b = 1/3$  ต่อวัน,  $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4, \beta_v = 0.5, r = 1/3$  ต่อวัน,  $N_T = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15)$  ต่อวัน สัดส่วนของคนที่ไม่ไวต่อการติดเชื้อ เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 และยุงที่ติดเชื้อ ของกราฟทั้งสอง ลู่เข้าสู่จุดสมดุลสถานะโรคเรื้อรัง

3.97 a)  $A = 70,000, R_0 = 9.67827, R'_0 = 3.11099.$

3.97 b)  $A = 120,000, R_0 = 16.5913, R'_0 = 4.07324.$

ค่าสืบพันธุ์พื้นฐานสำหรับรูป a และรูป b มีค่าเท่ากับ 9.67827 และ 16.5913 ตามลำดับ คาบของการแกว่งสำหรับรูป a ทางด้านซ้ายมือเท่ากับ 593 วัน สำหรับรูป b ทางด้านขวามือมีคาบของการแกว่งเท่ากับ 444 วัน จากกราฟจะสามารถเห็นได้ว่าถ้าค่าสืบพันธุ์พื้นฐานมีค่าสูงขึ้นคาบของการแกว่งจะมีค่าน้อยลง จุดสมดุลในสถานะโรคเรื้อรังของสัดส่วนของเด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 1 เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 2 เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 3 เด็กที่ติดเชื้อชนิดที่ 4 คนไข้และสัดส่วนของยุงที่ติดเชื้อจะมีค่าเพิ่มขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากมีพฤติกรรมที่คนที่ไวต่อการติดเชื้อได้รับเชื้อจากยุงที่มีเชื่อนั่นเอง

## บทที่ 4

### สรุป วิจารณ์ และเสนอแนะงานวิจัยในอนาคต

จากแบบจำลองเราศึกษาพฤติกรรมของผลเฉลยในแบบจำลองโดยประยุกต์วิธีการของการจำลองเชิงพลวัตมาตรฐาน ทำให้ได้ เเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับตัวแปรที่ทำให้เกิดความเสถียรภายในของจุดสมดุลภายใต้สภาวะไร้โรคและสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง โดยการใชเเงื่อนไข Routh-Hurwitz ตรวจสอบความเสถียรของแต่ละจุดสมดุล ผลที่ได้จากทฤษฎี ทำให้ได้ชุดของค่าพารามิเตอร์ที่สามารถลดการระบาดของโรคได้ ซึ่งแสดงในรูปของเเงื่อนไข ซึ่งครอบคลุมถึงความเสถียรของสภาวะระบาดภายในและสภาวะระบาดอย่างเรื้อรัง ซึ่งชุดของพารามิเตอร์แต่ละชุดที่ได้นั้นจะมีผลทำให้ลดการระบาดของโรคนี้ ซึ่งในทางการแพทย์นั้น ชุดของพารามิเตอร์แต่ละชุดที่ทำให้เกิดความเสถียรนั้นสามารถควบคุมการระบาดของโรคนี้ได้นั่นเอง

อย่างไรก็ตาม ในงานวิจัยชิ้นนี้ยังไม่ได้คิดถึงอิทธิพลของฤดูกาลที่มีผลต่อจำนวนของงานวิจัยในอนาคตนั้นควรมีการคิดถึงอิทธิพลเหล่านี้

## บรรณานุกรม

- [1] World Health Organization. Dengue Haemorrhagic fever: Diagnosis treatment prevent and control 2<sup>nd</sup> ed, Geneva: WHO, 1977.
- [2] Hethcote HW. The Mathematics of Infectious Disease. Siam Review, vol. 42, pp. 599-653, 2000.
- [3] Bailey NTJ. The Mathematical Theory of Infectious Disease 2<sup>nd</sup> ed, New York: Hafner, 1975.
- [4] Mckenzie F.E.. Why model Malaria? Parasitology Today, vol. 16, pp 511-516, 2000.
- [5] Harvey W. The circulation of the blood and other writings, Dutton, 1963.
- [6] Hamer W.H. Epidemic disease in England. Lancet, vol. 1, pp. 733-739, 1906.
- [7] Zhilan F. and Jorge X. Velasco-Hernandez. Competitive exclusion in a vector-host model for the dengue fever. J. Math. Biol, vol. 35, pp. 523-544, 1997.
- [8] Lourdes Esteva and Cristobal Vargas. Analysis of a dengue disease transmission model. Mathematical Biosciences, vol. 150, pp. 131-151, 1998.
- [9] Lourdes Esteva and Cristobal Vargas. A model for dengue disease with variable human population. J. Math. Biol, vol. 38, pp. 220-240, 1999.
- [10] Lourdes Esteva and Cristobal Vargas. Influence of vertical and mechanical transmission on the dynamics of dengue disease. Mathematical Biosciences, vol. 167, pp. 51-64, 2000.
- [11] Lourdes Esteva and Cristobal Vargas. Coexistence of different serotypes of dengue virus, J. Math. Biol, vol. 46, pp. 31-47, 2003.
- [12] Division of epidemiology. Annual Epidemiological Surveillance Report 1997-2007.
- [13] Hoffman JD. Numerical Methods for Engineers and Scientists. Singapore:McGraw-Hill 1993.

ภาคผนวก ก

นียบามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

## A1. Theoretical Background

Many biological problems can be explained mathematically by a set of differential equation, which may be nonlinear. In many situations, it is possible to replace the nonlinear differential equation by a set of related linear differential equation that approximates the real nonlinear equation close enough to give useful effects. The method of “linearization” may not always be appropriated. Then the original nonlinear differential equation must be considered. The study of nonlinear differential equation is usually confined to a variety of special cases and we have to use various approximation methods. In this part, we shall give an introduction to the method which we use in this research.

**Definition A.1** A point  $X_e \in \mathfrak{R}^n$  is an equilibrium point (or stationary point, singular point, critical point or rest point) of

$$\frac{dX}{dt} = f(t, X) \quad (\text{A.1})$$

if  $f(t, X_e) = 0$  for all  $t \geq t^*$ .

If  $X_e$  is an equilibrium point of (A.1) at  $t^*$ , then it is an equilibrium point for all  $\tau \geq t^*$ .

**Definition A.2** The equilibrium point  $X = 0$  of (A.1) is stable if for every  $\delta > 0$  and any  $t_0 \in \mathfrak{R}^+$  there is a  $\omega(\delta, t_0) > 0$  such that

$$|u(t, t_0, \gamma)| < \delta \quad \text{for every } t \geq t_0$$

whenever  $|\gamma| < \omega(\delta, t_0)$  where  $u(t, \gamma)$  is the solution of (A.1).

**Definition A.3** The equilibrium point  $X = 0$  of (A.1) is asymptotically stable if

- 1) it is stable and
- 2) for every  $t_0 \geq 0$  there is an  $\varepsilon(t_0) > 0$  such that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, t_0, \gamma) = 0 \quad \text{whenever } |\gamma| < \varepsilon \quad [54] \quad (\text{A.2})$$

**Definition A.4** The equilibrium point  $X = 0$  of (A.1) is unstable if it is not stable.

In this case there is a  $t_0 \geq 0$  and a sequence  $\gamma_n \rightarrow 0$  of initial points and a sequence  $t_m$  such that  $|u(t_0 + t_m, t_0, \gamma_m)| \geq \gamma$  for every  $m, t_m \geq 0$ .

For more general setting, consider a system of two autonomous first-order differential equations :

$$\frac{dX}{dt} = g_1(X, Y) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{dY}{dt} = g_2(X, Y) \quad (\text{A.4})$$

where  $g_1$  and  $g_2$  are nonlinear functions. We let  $(\bar{X}, \bar{Y})$  is the equilibrium point, then

$$g_1(\bar{X}, \bar{Y}) = g_2(\bar{X}, \bar{Y}) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Setting the solution at any time in the form

$$X(t) = \bar{X} + x(t) \quad (\text{A.6})$$

and

$$Y(t) = \bar{Y} + y(t). \quad (\text{A.7})$$

This method is called perturbation of the equilibrium point. We substitute  $X(t)$  and  $Y(t)$  from (A.6) and (A.7) into (A.3) and (A.4),

$$\frac{d}{dt}(\bar{X} + x) = g_1(\bar{X} + x, \bar{Y} + y) \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{d}{dt}(\bar{Y} + y) = g_2(\bar{X} + x, \bar{Y} + y) \quad (\text{A.9})$$

On the left hand side, we expand the derivatives and on the right hand side, we expand  $g_1$  and  $g_2$  in a Taylor series about the equilibrium point  $(\bar{X}, \bar{Y})$ . Then we obtain

$$\frac{d\bar{X}}{dt} + \frac{dx}{dt} = g_1(\bar{X}, \bar{Y}) + g_{1_x}(\bar{X}, \bar{Y})x + g_{1_y}(\bar{X}, \bar{Y})y \quad (\text{A.10})$$

+ terms of order  $x^2, y^2, xy$  and higher,

$$\frac{d\bar{Y}}{dt} + \frac{dy}{dt} = g_2(\bar{X}, \bar{Y}) + g_{2_x}(\bar{X}, \bar{Y})x + g_{2_y}(\bar{X}, \bar{Y})y \tag{A.11}$$

+ terms of order  $x^2, y^2, xy$  and higher,

where  $g_{1_x}(\bar{X}, \bar{Y})$  is  $\frac{\partial g_1}{\partial x}$  calculated at  $(\bar{X}, \bar{Y})$  and similarly for  $g_{1_y}(\bar{X}, \bar{Y}), g_{2_x}(\bar{X}, \bar{Y}), g_{2_y}(\bar{X}, \bar{Y})$  and other terms.

By the definition of the equilibrium point, we have  $\frac{d\bar{X}}{dt} = 0, \frac{d\bar{Y}}{dt} = 0, g_1(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$  and  $g_2(\bar{X}, \bar{Y}) = 0$ . We consider only linear term. Thus from (A.10) and (A.11), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y. \end{aligned}$$

We denote  $J$  as the Jacobian matrix of equations (A.3) and (A.4) and is given by

$$J(\bar{X}, \bar{Y}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix}_{(\bar{X}, \bar{Y})}$$

Letting  $\alpha = a_{11} + a_{22}$

$$\beta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

and  $\gamma = \alpha^2 - 4\beta$  is called the discriminant.

Then the characteristic equation is  $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta = 0$

The eigenvalues are obtained from:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\gamma}}{2}$$

A linear system can have at most one equilibrium point,  $(0,0)$  if  $\beta = \det J \neq 0$ .

**Theorem A.1** The equilibrium point  $X = 0$  of (A.1) is stable if all eigenvalues of  $J$  have negative real parts and every eigenvalues of  $J$  which has a zero real part is a simple zero of the characteristic polynomial of  $J$ .

The behavior of the equilibrium points of the system of equations (A.3) and (A.4) can be determined by considering the different kinds of eigenvalues of the Jacobian matrix.

The different behavior of equilibrium points are determined from the characteristics of eigenvalues of  $J$ .

- i) The eigenvalues of  $J$  are real and distinct.
- ii) The eigenvalues of  $J$  are real and repeated.
- iii) The eigenvalues of  $J$  are complex.

The behaviors of the equilibrium points for all three cases are described as follows.

Case I The eigenvalues of  $J$  are real and distinct. There are three possible behaviors.

- a. If both eigenvalues of  $J$  are negative, the equilibrium point will be a stable-two tangent node (Figure A.1).

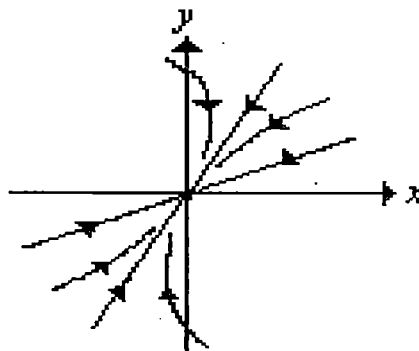


Figure A.1 A stable two-tangent node.

- b. If both eigenvalues of  $J$  are positive, the equilibrium point will be an unstable two - tangent node(Figure A.2).

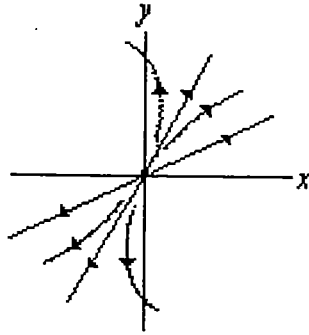


Figure A.2 An unstable two-tangent node.

c. If the eigenvalues of  $J$  have opposite signs, the critical point will be a saddle point (Figure A.3).

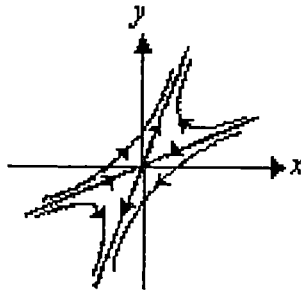


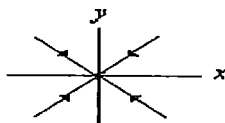
Figure A.3 A saddle point.

ii) The eigenvalues of  $J$  are real and repeated. There are two possible behaviors.

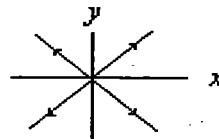
a. If  $J$  is diagonal and  $J$  is similar to the matrix as  $J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ , then the

critical point is called a stellar node which be stable if  $\lambda < 0$  and unstable if

$\lambda > 0$  (Figure A.4).



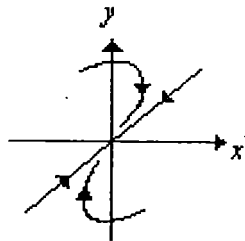
(a) Stable



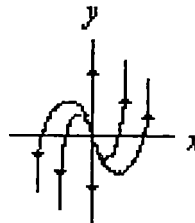
(b) Unstable

Figure A.4 A stellar node.

b. If  $J$  is not diagonal, then it is not similar to a diagonal matrix. The critical point is called a stable one-tangent node if  $\lambda < 0$ , and an unstable one-tangent node if  $\lambda > 0$  (Figure A.5).



(a) Stable



(b) Unstable

Figure A.5 The one-tangent node.

iii) The eigenvalues of  $J$  are complex.

It is necessary and sufficient that  $\gamma = \alpha^2 - 4\beta$  is negative and then

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm i\sqrt{-\gamma}}{2}$$

There are six possible behaviors as follows.

- a. If  $\alpha > 0$  and  $\beta > 0$ , then the equilibrium point will be unstable node.
- b. If  $\alpha < 0$  and  $\beta > 0$ , then the equilibrium point will be stable node.
- c. If  $\alpha < 0$  then the equilibrium point will be a saddle point.
- d. If  $\alpha^2 < 4\beta$  and  $\alpha > 0$ , then the equilibrium point will be an unstable spiral node (Figure A.6).

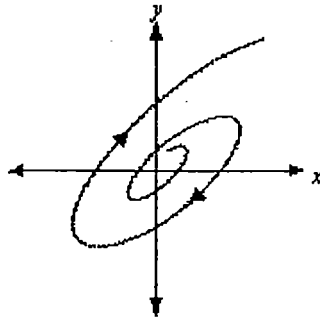


Figure A.6 An unstable spiral node.

e. If  $\alpha^2 < 4\beta$  and  $\alpha < 0$ , then the equilibrium point will be a stable spiral node

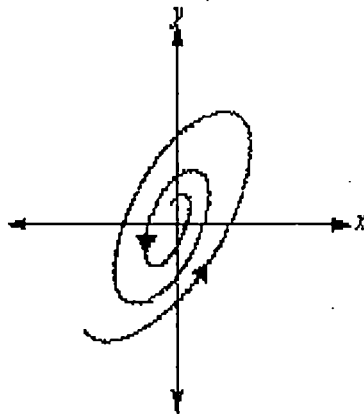


Figure A.7 A stable spiral node.

f. If  $\alpha^2 < 4\beta$  and  $\alpha = 0$  mean that the eigenvalues of  $J$  are purely imaginary, then the critical point will be a center (Figure A.8).

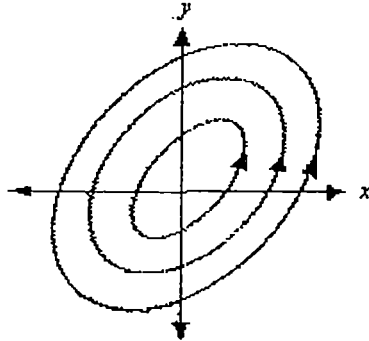


Figure A.8 A center.

In this section, we use the above ideas to apply for systems of  $n > 2$  equations.

Consider

$$\frac{dX}{dt} = f_j(X_1, X_2, \dots, X_k) \quad \text{where } j = 1, 2, \dots, k \quad (\text{A.12})$$

or in the form of vector notation

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (\text{A.13})$$

for  $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$  and  $F = (f_1, f_2, \dots, f_k)$  where each function  $f_j$  depend on all or some  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$ . The equilibrium point  $\bar{Y}$  is obtained by solving  $F(\bar{Y}) = 0$ . The next step is to determine stability properties of this equilibrium point.

When we linearize equation (A.13), the Jacobian is obtained by setting

$$J = \frac{\partial}{\partial X} F(\bar{Y}) \quad (\text{A.14})$$

where  $J$  is a  $k \times k$  matrix. The eigenvalues  $\lambda$  of the matrix satisfy  $\det(J - \lambda I) = 0$ . We obtain a characteristic equation in the form

$$\lambda^k + b_1 \lambda^{k-1} + \dots + b_k = 0 \quad (\text{A.15})$$

The stability of the equilibrium point can be determined without solving the actual values of eigenvalues by using the Routh-Hurwitz criteria.

**Definition A.5** (Routh-Hurwitz criteria for local asymptotical stability)

Take the characteristic equation (A.15), define k matrices as follows:

$$\begin{aligned}
 H_1 &= [b_1], \\
 H_2 &= \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{bmatrix}, \\
 H_3 &= \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{bmatrix}, \dots \\
 H_j &= \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & \dots & 0 \\ b_{2j-1} & b_{2j-2} & b_{2j-3} & b_{2j-4} & \dots & b_j \end{bmatrix}, \dots \\
 H_k &= \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & b_k \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

where the (l,m) term in the matrix  $H_j$  is

$$\begin{aligned}
 &b_{2l-m} \quad \text{for } 0 < 2l-m < k \\
 &1 \quad \text{for } 2l = m \\
 &0 \quad \text{for } 2l < m \text{ or } 2l > k+m.
 \end{aligned}$$

Then all eigenvalues have negative real part. This means that the equilibrium point  $\bar{X}$  is stable if and only if the determination of all Hurwitz matrices are positive which is

$$\text{Det } H_j > 0 \quad \text{for } j = 1, 2, 3, \dots, k.$$

Next, we show conditions of Routh-Hurwitz criteria for case  $k = 3$  and 5 which are appeared in the thesis.

For  $k = 3$ ;

We need to show that  $\text{Det } H_j > 0$  for  $j = 1, 2$  and 3.

$$\begin{aligned}
 H_1 &= [b_1]; & \text{Det } H_1 &= b_1, \\
 H_2 &= \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{bmatrix}; & \text{Det } H_2 &= b_1 b_2 - b_3,
 \end{aligned}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{bmatrix}; \quad \text{Det } H_3 = b_1 b_2 b_3 - b_3^2 - b_1^2 b_4 + b_1 b_5.$$

Since coefficients  $b_4$  and  $b_5$  in 3<sup>rd</sup> order characteristic polynomial equation equal to zero then we have

$$\text{Det } H_1 = b_1,$$

$$\text{Det } H_2 = b_1 b_2 - b_3 \quad \text{and}$$

$$\text{Det } H_3 = b_1 b_2 b_3 - b_3^2 = b_3 (b_1 b_2 - b_3).$$

So the three conditions which correspond to  $\text{Det } H_j > 0$  for  $j = 1, 2$  and  $3$  are  $b_1 > 0$ ,  $b_3 > 0$  and  $b_1 b_2 > b_3$ .

Therefore the three conditions of Routh-Hurwitz criteria for local asymptotical stability in 3<sup>rd</sup> order characteristic polynomial equation are

- i)  $b_1 > 0$ ,
- ii)  $b_3 > 0$  and
- iii)  $b_1 b_2 > b_3$ .

For  $k = 5$

We need to show that  $\text{Det } H_j > 0$  for  $j = 1, 2, 3, 4$  and  $5$ .

$$H_1 = [b_1]; \quad \text{Det } H_1 = b_1,$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{bmatrix}; \quad \text{Det } H_2 = b_1 b_2 - b_3,$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{bmatrix}; \quad \text{Det } H_3 = b_1 b_2 b_3 - b_3^2 - b_1^2 b_4 + b_1 b_5,$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 \\ b_7 & b_6 & b_5 & b_4 \end{bmatrix};$$

$$\text{Det } H_4 = b_1 b_2 b_3 b_4 - b_3^2 b_4 - b_1^2 b_4^2 - b_1 b_2^2 b_5 + b_2 b_3 b_5 + 2b_1 b_4 b_5 - b_5^2 + b_1^2 b_2 b_6 - b_1 b_3 b_6 - b_1 b_2 b_7 + b_3 b_7,$$

$$H_5 = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ b_7 & b_6 & b_5 & b_4 & b_3 \\ b_9 & b_8 & b_7 & b_6 & b_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det } H_5 = & b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 - b_3^2 b_4 b_5 - b_1^2 b_4^2 b_5 - b_1 b_2^2 b_5^2 + b_2 b_3 b_5^2 + 2b_1 b_4 b_5^2 - b_5^3 - b_1 b_2 b_3^2 b_6 \\ & + b_3^2 b_6 + b_1^2 b_3 b_4 b_6 + 2b_1^2 b_2 b_3 b_6 - 3b_1 b_3 b_5 b_6 - b_1^3 b_6^2 + b_1 b_2^2 b_3 b_7 - b_2 b_3^2 b_7 \\ & - b_1^2 b_2 b_4 b_7 - b_1 b_2 b_5 b_7 + 2b_3 b_5 b_7 + 2b_1^2 b_6 b_7 - b_1 b_7^2 - b_1^2 b_2 b_3 b_8 + b_1 b_3^2 b_8 \\ & + b_1^3 b_4 b_8 - b_1^2 b_5 b_8 + b_1 b_2 b_3 b_9 - b_3^2 b_9 - b_1^2 b_4 b_9 + b_1 b_5 b_9. \end{aligned}$$

Since the coefficients  $b_6, b_7, b_8$  and  $b_9$  in 5<sup>th</sup> order characteristic polynomial equation equal to zero then we have

$$\text{Det } H_1 = b_1,$$

$$\text{Det } H_2 = b_1 b_2 - b_3,$$

$$\begin{aligned} \text{Det } H_3 = & b_1 b_2 b_3 - b_3^2 - b_1^2 b_4 + b_1 b_5 \\ = & b_3 (b_1 b_2 - b_3) - b_1 (b_1 b_4 - b_5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Det } H_4 = & b_1 b_2 b_3 b_4 - b_3^2 b_4 - b_1^2 b_4^2 - b_1 b_2^2 b_5 + b_2 b_3 b_5 + 2b_1 b_4 b_5 - b_5^2 \\ = & b_4 (b_1 b_2 b_3 - b_3^2 - b_1^2 b_4) - b_5 (b_1 b_2^2 - b_2 b_3 - 2b_1 b_4 + b_5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Det } H_5 = & b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 - b_3^2 b_4 b_5 - b_1^2 b_4^2 b_5 - b_1 b_2^2 b_5^2 + b_2 b_3 b_5^2 + 2b_1 b_4 b_5^2 - b_5^3 \\ = & b_5 (b_4 (b_1 b_2 b_3 - b_3^2 - b_1^2 b_4) - b_5 (b_1 b_2^2 - b_2 b_3 - 2b_1 b_4 + b_5)) \end{aligned}$$

So the conditions which correspond to  $\text{Det } H_j > 0$  for  $j = 1, 2, 3, 4$  and 5.

$$\text{are } b_1 > 0,$$

$$b_1 b_2 - b_3 > 0,$$

$$b_3 (b_1 b_2 - b_3) - b_1 (b_1 b_4 - b_5) > 0,$$

$$b_4 (b_1 b_2 b_3 - b_3^2 - b_1^2 b_4) - b_5 (b_1 b_2^2 - b_2 b_3 - 2b_1 b_4 + b_5) > 0.$$

After we rearrange all above inequalities, we get the conditions of Routh-Hurwitz criteria for local asymptotical stability in 5<sup>th</sup> order characteristic polynomial equation

- i)  $b_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ )
- ii)  $b_1 b_2 b_3 > b_3^2 + b_1^2 b_4$  and
- iii)  $(b_1 b_4 - b_5)(b_1 b_2 b_3 - b_3^2 - b_1^2 b_4) > b_5(b_1 b_2 - b_3)^2 + b_1 b_5^2$ .

## A2. Numerical Solutions of Differential Equations

In this research, we use Runge-Kutta-Fehlberg's method [13] which is one of the most widely used methods, and is particularly suitable in cases when the computation of higher derivatives is complicated. It can be used for equations of arbitrary order by means of a transformation to a system of first-order equations. We shall discuss the solution of three first-order equations. Let this system be

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{dt} &= h(x, y, z, t)\end{aligned}$$

with initial point  $(x_0, y_0, z_0, t_0)$  and interval length  $h$ .

Runge-Kutta-Fehlberg's method for finding approximate values of  $x, y$  and  $z$  at each step is

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \frac{(2375k_1 + 11264k_3 + 10985k_4 - 4104k_5)}{20520}, \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{(2375r_1 + 11264r_3 + 10985r_4 - 4104k_5)}{20520} \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{(2375s_1 + 11264s_3 + 10985s_4 - 4104s_5)}{20520}\end{aligned}$$

where

$$k_1 = hf(x_n, y_n, z_n, t_n),$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{k_1}{4}, y_n + \frac{r_1}{4}, z_n + \frac{s_1}{4}, t_n + \frac{h}{4}),$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{(3k_1 + 9k_2)}{32}, y_n + \frac{(3r_1 + 9r_2)}{32}, z_n + \frac{(3s_1 + 9s_2)}{32}, t_n + \frac{3h}{8}),$$

$$k_4 = hf(x_n + \frac{(1932k_1 - 7200k_2 + 7296k_3)}{2197},$$

$$y_n + \frac{(1922r_1 - 7200r_2 + 7296r_3)}{2197},$$

$$z_n + \frac{(1932s_1 - 7200s_2 + 7296s_3)}{2197}, t_n + \frac{12h}{13}),$$

$$k_5 = hf(x_n + \frac{(8341k_1 - 32832k_2 + 29440k_3 - 845k_4)}{4104},$$

$$y_n + \frac{(8341r_1 - 32832r_2 + 29440r_3 - 854r_4)}{4104},$$

$$z_n + \frac{(8341s_1 - 32832s_2 + 29440s_3 - 854s_4)}{4104}, t_n + h),$$

$$k_6 = hf(x_n + \frac{(-6080k_1 + 41040k_2 - 28352k_3 + 9295k_4 - 5643k_5)}{20520},$$

$$y_n + \frac{(-6080r_1 + 41040r_2 - 28352r_3 + 9295r_4 - 5643r_5)}{20520},$$

$$z_n + \frac{(-6080s_1 + 41040s_2 - 28352s_3 + 9295s_4 - 5643s_5)}{20520}, t_n + \frac{h}{2}),$$

and the error for each step will be

$$\text{Error} = \frac{k_1}{360} - \frac{128k_3}{4275} - \frac{2197k_4}{75240} + \frac{k_5}{50}.$$

$r_1, r_2, \dots, r_6$  and the error of  $y$  value can be evaluated from the above equations.  $s_1, s_2, \dots, s_6$  and the error of  $z$  value can be evaluated from the above equations.  $k_1, k_2, \dots, k_6$  and error of  $x$  by replacing function  $f$  with function  $g$  and function  $h$ .

Runge-Kutta-Fehlberg's method can be applied directly to a system of  $n$  first-order differential equations

**ภาคผนวก ข**

**ผลงานการวิจัย**



# DENGUE MODEL WITH AGE STRUCTURE AND TWO DIFFERENT SEROTYPES

P. Pongsumpun

Department of Mathematics and Computer Science, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand

## ABSTRACT

*Dengue disease is the most important arboviral disease in the tropical countries; especially in Thailand. Aedes aegypti is the primary vector for this disease. Four types of virus have been identified and denoted as DEN-1, DEN-2, DEN-3 and DEN-4. The transmission of dengue disease is studied through mathematical model. It has been observed that age structure of the human and serotypes of dengue disease effect to the transmission of this disease. We formulate the mathematical model by separating the human population into two classes such as juvenile and adult humans. The transmission probabilities of dengue virus to the juvenile and adult humans with two serotypes are difference. The standard dynamical analysis method is used for analyzing this model. Two equilibrium states are found. Numerical results are used to show the results for each equilibrium state. The basic reproduction number is obtained. The alternative way for controlling this disease is discussed in the term of threshold condition.*

## 1. INTRODUCTION

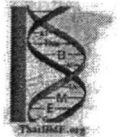
The most important arboviral disease, Dengue fever (DF), has been around for 200 years. The symptoms of DF patients are headaches, bone or joint and muscular pains, rash and leukopenia. A more virulent manifestation of this disease is Dengue hemorrhagic fever (DHF). DHF is characterized by four major clinical manifestations: high fever, hemorrhagic phenomena, often with hepatomegaly and, in severe cases, signs of circulatory failure. These patients may develop hypovolaemic shock resulting from the plasma leakage. This is called dengue shock syndrome (DSS) and can be fatal [1]. Dengue disease was reported throughout the nineteenth and early twentieth centuries in the America, southern Europe, North Africa, the eastern Mediterranean, Asia, Australia, and on various islands in the Indian Ocean, the south, central Pacific and the Caribbean. DF and DHF have increased in both incidence and distribution over the past 40 years. The first recorded outbreak of dengue disease compatible with DHF

occurred in Australia in 1897. A similar hemorrhagic disease was recorded in 1928 during an epidemic in Greece and again in Taiwan in 1931. The first confirmed epidemic of DHF was recorded in the Philippines in 1953-1954. Since then, major outbreaks of DHF with significant mortality have occurred in most countries of the South-East Asia Region, including India, Indonesia, Maldives, Myanmar, Sri Lanka, and Thailand, as well as in Singapore, Cambodia, China, Laos, Malaysia, New Caledonia, Palau, Philippines, Tahiti and Vietnam in the Western Pacific Region. Over the past 20 years, there was a dramatic increase in the incidence and geographical distribution of DHF, and epidemics now occur each year in some South-East Asian countries. In South-East Asia, 50-100 million people infected with dengue virus are reported each year.

Dengue disease is transmitted to human by the bite of infected female *Aedes aegypti* mosquitoes. There are four serotypes: DEN-1, DEN-2, DEN-3 and DEN-4. Infection by any single type of dengue virus apparently produces permanent immunity to it, but only temporary cross immunity to the others. Epidemiological evidence suggests that an important risk factor for DHF is the presence of preexisting antibodies at subneutralizing levels. This led to the formulation of the *secondary infection or immune enhancement hypothesis*. Briefly stated, this hypothesis says that DHF appears in person who has had a previous infection with a heterologous serotype.

This disease is endemic in many large cities of Thailand, eventually spreading to smaller towns and villages during the period of epidemic transmission [2]. Most dengue patients are children less than 15 years old and only juvenile human are infected with dengue virus [3]. Within a year of DEN-1 epidemic in Cuba in 1977 [4], 44.6 % of the population in Cuba had the antibodies to DEN-1 virus even though the reported number of confirmed DF illness in Cuba during the year was much less.

The original model used by Esteva and Vargas [5] did not include any age structure and serotypes of dengue disease in the human. In this study, the mathematical model of dengue disease is modified by incorporating age structure and two different serotypes of this disease.



## 2. TRANSMISSION MODEL

The transmission model of this disease is formulated by considering the human and vector populations. The human population is separated into juvenile and adult classes. Each class is divided into susceptible, infectious and recovered subclasses. Vector population is separated into susceptible and infectious classes. We assume that there are two different serotypes of dengue virus. The human population infect with dengue virus only one time and only juvenile human is infected with dengue virus. The following flow chart shows the dynamics of human and vector populations.

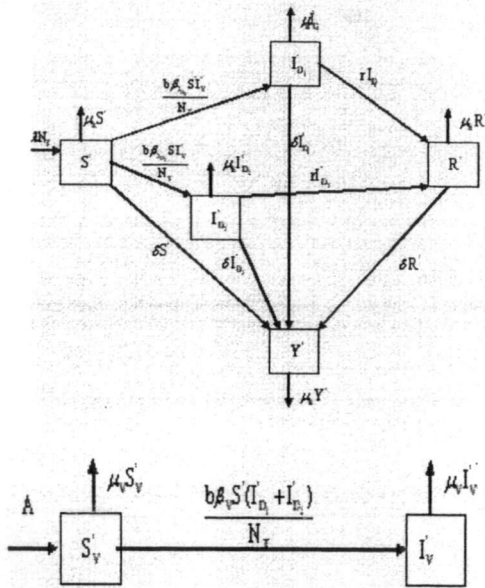


Figure 1. Flow chart of the model.

The total human and vector populations are assumed to be constant [5]. The variables and parameters of our model are defined as follows:

- $S'$  is the number of susceptible human,
- $I'_{D_1}$  is the number of infectious juvenile human who be infected with the first serotype,
- $I'_{D_2}$  is the number of infectious juvenile human who be infected with the second serotype,
- $R'$  is the number of recovered human ,
- $Y'$  is the number of adult human,
- $S'_v$  is the number of susceptible vector ,
- $I'_v$  is the number of infectious vector,
- $\mu_h$  is the death rate of the human population,
- $\delta$  is the rate at which the juvenile human passes to adult human,
- $\lambda$  is the birth rate of the human population,

- $b$  is the biting rate of the mosquitoes,
- $\beta_v$  is the transmission probability of dengue virus from the human to the mosquitoes,
- $\beta_{J_{D_1}}$  is the transmission probability of dengue virus from the mosquito to the juvenile human with the first serotype,
- $\beta_{J_{D_2}}$  is the transmission probability of dengue virus from the mosquito to the juvenile human with the second serotype,
- $N_T$  is the total human population,
- $r$  is the recovery rate of the human population,
- $A$  is the constant recruitment rate of the mosquitoes,
- $\mu_v$  is the death rate of the mosquitoes.

The dynamic of each population can be described by the following equations:

$$\frac{dS'}{dt} = \lambda N_T - [\mu_h + \delta + \frac{b\beta_{J_{D_1}}}{N_T} I'_V + \frac{b\beta_{J_{D_2}}}{N_T} I'_V] S' \quad (1.1)$$

$$\frac{dI'_{D_1}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D_1}}}{N_T} S' I'_V - (\mu_h + r + \delta) I'_{D_1} \quad (1.2)$$

$$\frac{dI'_{D_2}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D_2}}}{N_T} S' I'_V - (\mu_h + r + \delta) I'_{D_2} \quad (1.3)$$

$$\frac{dR'}{dt} = r(I'_{D_1} + I'_{D_2}) - (\mu_h + \delta) R' \quad (1.4)$$

$$\frac{dY'}{dt} = \delta(I'_{D_1} + I'_{D_2} + S' + R') - \mu_h Y' \quad (1.5)$$

$$\frac{dS'_v}{dt} = A - [\frac{b\beta_v}{N_T} (I'_{D_1} + I'_{D_2}) + \mu_v] S'_v \quad (1.6)$$

$$\frac{dI'_v}{dt} = \frac{b\beta_v S'_v}{N_T} (I'_{D_1} + I'_{D_2}) - \mu_v I'_v \quad (1.7)$$

with

$$N_T = S' + I'_{D_1} + I'_{D_2} + R' + Y', \quad N_v = S'_v + I'_v.$$

From our assumptions, the rates of change for human and vector populations equal to zero, i.e.  $\frac{dN_T}{dt} = \frac{dN_v}{dt} = 0$ .

Then we have  $\lambda = \mu_h$  and  $N_v = \frac{A}{\mu_v}$ .

We normalize equations (1.1-1.7) by letting

$$S = \frac{S'}{N_T}, I_{D_1} = \frac{I'_{D_1}}{N_T}, I_{D_2} = \frac{I'_{D_2}}{N_T}, R = \frac{R'}{N_T}, Y = \frac{Y'}{N_T}, S_v = \frac{S'_v}{N_v}, I_v = \frac{I'_v}{N_v}$$

then we obtain the following reduced equations:

$$\frac{dS}{dt} = \mu_h - [\mu_h + \delta + \frac{b\beta_{J_{D_1}} I_v (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{J_{D_2}} I_v (A/\mu_v)}{N_T}] S \quad (2.1)$$

$$\frac{dI_{D_1}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D_1}} S I_v (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D_1} \quad (2.2)$$

$$\frac{dI_{D_2}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D_2}} S I_v (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D_2} \quad (2.3)$$



$$\frac{dR}{dt} = r(I_{D_1} + I_{D_2}) - (\mu_h + \delta)R \quad (2.4)$$

$$\frac{dI_V}{dt} = b\beta_V S_V I_{D_1} + b\beta_V S_V I_{D_2} - \mu_V I_V \quad (2.5)$$

with the new conditions:

$$1 = S + I_{D_1} + I_{D_2} + R + Y, \quad 1 = S_V + I_V.$$

### 3. ANALYSIS OF OUR MODEL

#### 3.1. Analytical Results

We set the right hand sides of (2.1) – (2.5) equal to zero, then the equilibrium points are obtained as follows:

i) The disease free equilibrium point

$$E_1 = \left(\frac{1}{M_1}, 0, 0, 0, 0\right) \quad (3)$$

ii) The endemic disease equilibrium point

$$E_2 = (S^*, I_{D_1}^*, I_{D_2}^*, R^*, I_V^*) \quad (4)$$

where

$$S^* = \frac{\beta_1}{M_1[\beta_1 + (R_1 + R_2)I_V^*]} \quad (4.1)$$

$$I_{D_1}^* = \frac{R_1 I_V^*}{M_1 M_2 [\beta_1 + (R_1 + R_2)I_V^*]} \quad (4.2)$$

$$I_{D_2}^* = \frac{R_2 I_V^*}{M_1 M_2 [\beta_1 + (R_1 + R_2)I_V^*]} \quad (4.3)$$

$$R^* = \frac{M_3 (R_1 + R_2) I_V^*}{M_1 M_2 [\beta_1 + (R_1 + R_2)I_V^*]} \quad (4.4)$$

$$I_V^* = \frac{\beta_1 (B_0 - 1)}{(\beta_1 B_0 + R_1 + R_2)} \quad (4.5)$$

where

$$\beta_1 = \frac{b\beta_{J_{D_1}}}{\mu_V N_T}, \quad M_1 = \frac{\mu_h + \delta}{\mu_h}, \quad R_1 = \frac{b^2 \beta_{J_1}^2 (A/\mu_V)}{\mu_V N_T^2 (\mu_h + \delta)},$$

$$R_2 = \frac{b^2 \beta_{J_2} \beta_{D_2} (A/\mu_V)}{\mu_V N_T^2 (\mu_h + \delta)}, \quad M_2 = \frac{\mu_h + \delta + \tau}{\mu_h + \delta} \text{ and}$$

$$B_0 = \frac{b\beta_V (R_1 + R_2)}{M_1 M_2 \beta_1 \mu_V}.$$

The local stability of each equilibrium point are determined by the sign of eigenvalues for each equilibrium point. The eigenvalues are obtained by solving the following characteristic equation:

$$\det(J_{E_i} - \lambda I_5) = 0$$

where  $I_5$  is the identity matrix. If the real parts of all eigenvalues are negative then that equilibrium point is local stability.

For the disease free equilibrium point, the characteristic equation is defined by

$$(\mu_h M_1 + \lambda)^2 (\lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) = 0 \quad (5)$$

where

$$a_2 = 2M_1 M_2 \mu_h + \mu_V \quad (5.1)$$

$$a_1 = M_1^2 M_2^2 \mu_h^2 + 2M_1 M_2 \mu_h \mu_V - \frac{bR_1 \beta_V \mu_h}{\beta_1} - \frac{bR_2 \beta_V \mu_h}{\beta_1} \quad (5.2)$$

$$a_0 = M_1^2 M_2^2 \mu_h^2 \mu_V - \frac{bR_1 M_1 M_2 \beta_V \mu_h^2}{\beta_1} - \frac{bR_2 M_1 M_2 \beta_V \mu_h^2}{\beta_1} \quad (5.3)$$

The eigenvalues are

$$\lambda_1 = -\mu_h M_1, \quad \lambda_2 = -\mu_h M_1, \quad \lambda_3, \lambda_4 \text{ and } \lambda_5$$

are found by solving the equation

$$\lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

where  $a_0, a_1$  and  $a_2$  are defined in (5.1) to (5.3).

The first and second eigenvalues are always negative. The signs of the other eigenvalues are determined by using the Routh-Hurwitz criteria [6].

i)  $a_2 > 0$

ii)  $a_0 > 0$

iii)  $a_2 a_1 > a_0$ .

We consider

i)  $a_2 = 2M_1 M_2 \mu_h + \mu_V$  is always positive,

$$\text{ii) } a_0 = M_1^2 M_2^2 \mu_h^2 \mu_V - \frac{bR_1 M_1 M_2 \beta_V \mu_h^2}{\beta_1} - \frac{bR_2 M_1 M_2 \beta_V \mu_h^2}{\beta_1}$$

is positive for  $M_1^2 M_2^2 \mu_h^2 \mu_V > \frac{bM_1 M_2 \beta_V \mu_h^2}{\beta_1} (R_1 + R_2)$

$$M_1 M_2 \beta_1 \mu_V > b\beta_V (R_1 + R_2)$$

or

$$B_0 < 1$$

where  $B_0 = \frac{b\beta_V (R_1 + R_2)}{M_1 M_2 \beta_1 \mu_V}$

iii)

$$a_2 a_1 - a_0$$

$$= 2M_1^3 M_2^3 \mu_h^3 + 3M_1^2 M_2^2 \mu_h^2 \mu_V + M_1 M_2 \mu_h \mu_V^2$$

$$+ \left( M_1 M_2 \mu_h \mu_V^2 - \frac{bR_1 \beta_V \mu_h \mu_V}{\beta_1} - \frac{bR_2 \beta_V \mu_h \mu_V}{\beta_1} \right)$$

$$+ (M_1^2 M_2^2 \mu_h^2 \mu_V - \frac{bR_1 M_1 M_2 \beta_V \mu_h^2}{\beta_1} - \frac{bR_2 M_1 M_2 \beta_V \mu_h^2}{\beta_1})$$

$$= 2M_1^3 M_2^3 \mu_h^3 + 3M_1^2 M_2^2 \mu_h^2 \mu_V + M_1 M_2 \mu_h \mu_V^2 + \frac{a_0}{M_1 M_2 \mu_h \mu_V} + a_0$$

is positive.

We will see that all three conditions are satisfied for  $\frac{b\beta_V (R_1 + R_2)}{M_1 M_2 \beta_1 \mu_V} < 1$ .

$$M_1 M_2 \beta_1 \mu_V$$

Therefore, the free disease equilibrium  $E_1$  is local

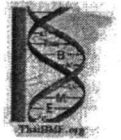
stability for  $B_0 < 1$ , where  $B_0 = \frac{b\beta_V (R_1 + R_2)}{M_1 M_2 \beta_1 \mu_V}$ .

For the endemic disease equilibrium point, The characteristic equation is defined by

$$(\mu_h M_1 + \lambda)(\lambda^4 + d_3 \lambda^3 + d_2 \lambda^2 + d_1 \lambda + d_0) = 0 \quad (6)$$

where

$$d_3 = bI_{D_1}^* \beta_V + bI_{D_2}^* \beta_V + M_1 \mu_h + 2M_1 M_2 \mu_h + \frac{I_V^* M_1 R_1 \mu_h}{\beta_1} + \frac{I_V^* M_1 R_2 \mu_h}{\beta_1} + \mu_V$$



(6.1)

$$d_2 = \frac{bI_{D_1}^* M_1 \beta_v \mu_h + bI_{D_2}^* M_2 \beta_v \mu_h + 2M bI_{D_1}^* M M_2 \beta_v \mu_h + 2M bI_{D_2}^* M M_2 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* I_{V_1}^* M_1 R_1 \beta_v \mu_h + bI_{D_2}^* I_{V_2}^* M_2 R_2 \beta_v \mu_h + bI_{V_1}^* S^* M_1 R_1 \beta_v \mu_h + bI_{V_2}^* I_{D_1}^* M_1 R_2 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* I_{V_1}^* M_1 R_2 \beta_v \mu_h + bI_{V_1}^* S^* M_1 R_2 \beta_v \mu_h + 2M_1^2 M_2 \mu_h^2 + M_1^2 M_2^2 \mu_h^2 + \frac{2I_{V_1}^* M_1^2 M_2 R_1 \mu_h^2}{\beta_1}}{\beta_1} + \frac{2I_{V_2}^* M_1^2 M_2 R_2 \mu_h^2}{\beta_1} + M_1 \mu_h \mu_v + M_1 M_2 \mu_h \mu_v + \frac{I_{V_1}^* M_1 R_1 \mu_h \mu_v + I_{V_2}^* M_1 R_2 \mu_h \mu_v}{\beta_1} + \frac{bY^* M_1 R_1 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{bR^* M_1 R_1 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* M_1 R_1 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{I_{D_2}^* M_1 R_1 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{bY^* M_1 R_2 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{bR^* M_1 R_2 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* M_1 R_2 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* M_1 R_2 \beta_v \mu_h}{\beta_1} + (M_1 M_2 \mu_h \mu_v - \frac{bM_1 R_1 \beta_v \mu_h}{\beta_1} - \frac{bM_1 R_2 \beta_v \mu_h}{\beta_1})$$

(6.2)

$$d_3 = \frac{2bI_{D_1}^* M_1^2 M_2 \beta_v \mu_h^2 + 2bI_{D_2}^* M_2 M_1^2 \beta_v \mu_h^2 + bI_{D_1}^* M_1^2 M_2^2 \beta_v \mu_h^2 + bI_{D_2}^* M_2^2 M_1^2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_{V_1}^* S^* M_1^2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{2bI_{V_2}^* I_{D_1}^* M_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{H_1^* S^* M_1 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{H_2^* S^* M_1 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{H_3^* I_{D_1}^* M_1 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{H_4^* I_{D_2}^* M_1 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{H_5^* S^* M_1 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{I_{V_1}^* M_1^2 M_2 R_1 \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{I_{V_2}^* M_1^2 M_2 R_2 \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{M_1^2 M_2 \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{2I_{V_1}^* M_1 M_2 R_1 \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{2I_{V_2}^* M_1 M_2 R_2 \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bY^* M_1^2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bR^* M_1^2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* M_1^2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* M_1^2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bY^* M_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bR^* M_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* M_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* M_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bY^* M_1^2 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bR^* M_1^2 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* M_1^2 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* M_1^2 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bY^* M_1^2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bR^* M_1^2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* M_1^2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* M_1^2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} + (M_1^2 M_2 \mu_h^2 - \frac{bM_1^2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} - \frac{bM_1^2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1}) + (M_1^2 M_2 \mu_h^2 - \frac{bM_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1} - \frac{bM_1^2 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^2}{\beta_1})$$

(6.3)

$$d_0 = \frac{bI_{D_1}^* M_1^2 M_2^2 \beta_v \mu_h^3 + bI_{D_2}^* M_2^2 M_1^2 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bI_{V_1}^* S^* M_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* I_{V_1}^* M_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* I_{V_2}^* M_2^2 M_1 R_2 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bI_{V_2}^* S^* M_2^2 M_1 R_2 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* I_{V_2}^* M_2^2 M_1 R_2 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{I_{V_1}^* M_1^2 M_2 R_1 \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{I_{V_2}^* M_2^2 M_1 R_2 \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bY^* M_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bR^* M_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* M_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* M_2^2 M_1 R_2 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bY^* M_1^2 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bR^* M_1^2 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bI_{D_1}^* M_1^2 M_2 R_2 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + \frac{bI_{D_2}^* M_2^2 M_1 R_1 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} + (M_1^2 M_2^2 \mu_h^3 - \frac{bM_1^2 M_2 R_1 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1} - \frac{bM_2^2 M_1 R_2 \beta_v \mu_h^3}{\beta_1})$$

(6.4)

From (6), the first eigenvalue is always positive. The sign of the other three eigenvalues are negative if they satisfy the following conditions [6]:

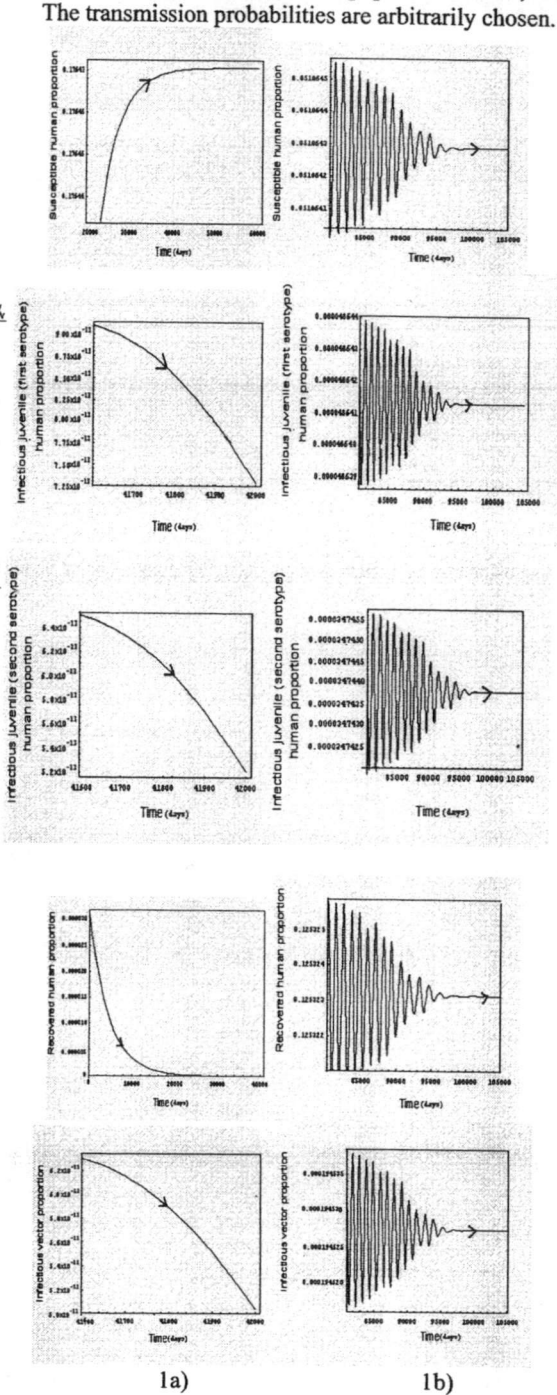
- i)  $d_3 > 0$
- ii)  $d_1 > 0$
- iii)  $d_0 > 0$
- iv)  $d_3 d_2 d_1 > d_1^2 + d_3^2 d_0$ .

It can be easily seen that  $d_3$  is always positive.

From our evaluations, condition ii) to condition iv) are true when  $B_0 > 1$ .

### 3.2. Numerical Results

The numerical simulations are shown in this section. The parameters are determined by the real life observations as follows: The life expectancy of human is 70 years. The duration of time for each juvenile human become to adult human is 15 years. The life time of the vector is 14 days. The vector can bite 3 times per day, thus the biting rate of the vector is 1/3 per day. The time for each person can recover is 3 days. The total human population is 100,000. The transmission probabilities are arbitrarily chosen.





**Figure 1.** Numerical solutions of (2.1)-(2.5) demonstrate the times series of  $S, I_{D_1}, I_{D_2}, R, I_v$ . The parameters in our model are  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  $\delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  $\beta_{I_{D_1}} = 0.7$ ,  $\beta_{I_{D_2}} = 0.5$ ,  $\beta_v = 0.5$ ,  $r = 1/3$ ,  $N_T = 100,000$ .

a) For  $A = 500$ ,  $B_0 = 0.0345652$ ,  $B'_0 = 0.185917$ . The fractions of populations  $S, I_{D_1}, I_{D_2}, R, I_v$  approach to the disease free equilibrium point  $(0.176471, 0, 0, 0, 0)$ .

b) For  $A = 50,000$ ,  $B_0 = 3.45652$ ,  $B'_0 = 1.85917$ . The fractions of populations  $S, I_{D_1}, I_{D_2}, R, I_v$  oscillate to the endemic disease equilibrium point  $(0.0510643, 0.0000486413, 0.0000347438, 0.125323, 0.000195427)$ .

From figure 1, we will see that the proportions of populations converge to the disease free equilibrium point for  $B_0$  greater than 1. For  $B_0$  less than 1, the proportions of populations oscillate to the endemic disease equilibrium point.

#### 4. CONCLUSION

The basic reproduction number for this model is given by

$$B_0 = \frac{b^2 \beta_v (\beta_{I_{D_1}} + \beta_{I_{D_2}}) (A / \mu_v) \mu_h}{N_T (\mu_h + \delta) (\mu_h + \delta + r) \mu_v} \quad (7)$$

The number of secondary infections results from primary infections, this number is obtained from the square root of the basic reproductive number [5]. If this number is more than one then this disease can be capable of invading and establishing itself. Every successive generation will reduce in size until its number approaches zero. We note that an infectious juvenile human introduced into the susceptible juvenile human is bitten, during his infective period, by

$\left( \frac{b(A/\mu_v)}{N_T} \right) \left( \frac{1}{\mu_h + \delta + r} \right) \left( \frac{\mu_h}{\mu_h + \delta} \right)$  mosquitoes; the

proportion  $\beta_v \left( \frac{b(A/\mu_v)}{N_T} \right) \left( \frac{1}{\mu_h + \delta + r} \right) \left( \frac{\mu_h}{\mu_h + \delta} \right)$  of these mosquitoes

becomes infectious. In this manner, an infectious

mosquito distributes  $\frac{b}{\mu_v}$  bites in the juvenile human population during the rest of its life and a ratio

$(\beta_{I_{D_1}} + \beta_{I_{D_2}}) \left( \frac{b}{\mu_v} \right)$  of these bites create new infectious in

the juvenile human population. Therefore, the geometric mean of these quantities ( $B_0$ ) gives the number of

secondary infectious juvenile human as we see in (7). The different basic reproductive numbers are produced for the different diseases. The different diseases are controlled by using the different basic reproductive numbers [7, 8, 9, 10]. As we see from (7), if we can reduce the infection rate of dengue virus then the

threshold number will be decreased. Consequently, the outbreak of this disease can be reduced.

#### REFERENCES

- [1] <http://w3.whosea.org/searono29/ch7.htm>.
- [2] WHO, *Dengue Haemorrhagic fever : Diagnosis treatment and Control*, World Health Organization, Geneva, 1997.
- [3] D. S. Burke, A. Nisalak, D. Johnson and R. M. Scott, "A Prospective Study of Dengue Infections in Bangkok", *Am J Trop Med Hyg*, vol. 38, pp. 172-180, 1988.
- [4] G. Kuri, P. Mas, M. Soler and A. Goyenechea, "Dengue Hemorrhagic Fever in Cuba, 1981: Rapid Diagnosis of the Etiologic Agent", *Bull Pan Am Health Org*, vol. 17, pp.126-132, 1983.
- [5] L. Esteva and C. Vargas, "Analysis of a dengue disease transmission model", *Math Biosci*, vol.150, pp.131-151, 1998.
- [6] M. Robert, *Stability and complexity in model Ecosystem*, Princeton university press, 1973.
- [7] J. S. Koopman, D. R. Prevots, M. A. V. Mann, H. G. Dantes, M. L. Z. Aquino, I. M. Longini, Jr. and Js. Amor, "Determinants and Predictors of dengue Infection in Mexico", *Am J Epi*, vol. 133, pp.1168-1178, 1991.
- [8] L. Molineaux and G. Gramiccia, *The Garki project : research on the epidemiology and control of malaria in the Sudan savanna of West Africa*, World Health Organization, Geneva, 1980.
- [9] P. Pongsumpun, K. Patanarapelert, M. Sripom, S. Varamit and I. M. Tang, "Infection risk to travelers going to dengue fever endemic regions", *Southeast Asian J Trop Med Public Health*, vol. 35, pp.155-159, 2004.
- [10] P. Pongsumpun, "Dengue disease model with the effect of extrinsic incubation period", *WSEAS transactions on biology and biomedicine*, vol. 3, pp.139-144, 2006.

**Subject:** BMEICON 2009 NOTIFICATION  
**From:** Bmeicon2009@Thaibme.org  
**Date:** Sun, June 21, 2009 12:49 am  
**To:** kppuntan@kmitl.ac.th  
**Priority:** Normal  
**Options:** [View Full Header](#) | [View Printable Version](#)

Dear Assist.Prof.Dr. Puntani Pongsumpun

We are pleased to inform you that your paper:

ID: 1015

Title: AGE STRUCTURAL MODEL WITH FOUR SEROTYPES OF DENGUE DISEASE

has been accepted for presentation at BMEICON2009 to be held in Phuket, August 13-14, 2009. We cordially invite you to attend BMEiCON to present your paper. The full conference schedule will be available shortly on BMEiCON web site at <http://www.thaibme.org/bmeicon2009/>. Please check the web site often for important information.

For electronic camera-ready submission, and for reviewers? comments (if any), please also connect to BMEiCON website.

Please remember that you must adhere to the following requirements:

1. At least one author must register by July 15, 2009 at the non-student rate to attend the conference. This is absolutely necessary for the paper to be included in the proceedings.
2. A final copy of your revised paper in PDF format must be resubmitted electronically for publication not later than July 15, 2009. You must resubmit the paper although your paper has been accepted with no comment. Be reminded that our paper must comply with the BMEiCON2009 paper format. Wrong format paper may result in withdrawal of your paper.
3. Together with the camera ready paper, authors are also requested to submit the completed COPYRIGHT form.
4. When submitting the final camera ready paper, you must include information of all authors of the paper in the system, not only in the PDF.

We thank you for submitting your paper to BMEiCON2009 and we look forward to seeing you at Phuket, August 13-14, 2009.

Sincerely,

Assoc.Prof.Dr.Somsak Choomchuay,  
For BMEiCON2009 Technical Program Chairs.

-----

## AGE STRUCTURAL MODEL WITH FOUR SEROTYPES OF DENGUE DISEASE

P. Pongsumpun

Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand

### ABSTRACT

*Nowadays, the most important tropical disease in Thailand is dengue disease. Aedes aegypti and Aedes albopictus are the primary vectors for this disease. DEN-1, DEN-2, DEN-3 and DEN-4 are four serotypes of dengue virus. The transmission of dengue disease is studied by using mathematical model. Age structure and serotypes effect to the transmission of this disease. We construct the mathematical model by separating the human population into two classes such as juvenile and adult humans. The transmission probabilities of dengue virus to the juvenile and adult humans are different for each serotype. The standard dynamical analysis method is used for analyzing this model. Two equilibrium states are found. Numerical results are used to show the results for each equilibrium state. The basic reproduction number is derived. The alternative way for controlling this disease is discussed.*

### 1. INTRODUCTION

The dengue virus is now the most frequently cause of arboviral diseases. It has become a major public health concern, particularly in the tropical and subtropical regions. The first epidemic of severe dengue disease was reported in the Philippines in 1953. This disease occurred in Thailand, Viet Nam, Indonesia and other Asian countries, becoming endemic in several of them. Before 1970, only 9 countries had experienced severe dengue epidemics, a number that had increased more than four-fold by 1995 [1]. The greatest burden of dengue disease is in Asia, where in many countries are leading cause of paediatric hospitalization. The global epidemiology and the dynamics of dengue transmission have changed dramatically in South-east Asia since World War II [2]. The disease is now highly endemic in more than 100 tropical countries and the number of cases has increased dramatically during the past three decades [2-4].

Dengue disease is the major international public health concern because of the expanding geographic

distribution of the virus and competent mosquito vectors, increased frequency of epidemics, co-circulation of multiple virus serotypes and emergence of dengue hemorrhagic fever in new areas. Dengue virus is transmitted through the bite of an infected *Aedes* mosquito. It is caused by infection with one of four dengue virus serotypes (DEN-1, DEN-2, DEN-3, DEN-4) [5]. This disease is presented with a wide range of symptoms, from essentially asymptomatic to a life-threatening hemorrhagic fever (DHF) or dengue shock syndrome (DSS) [6]. Generally, the severe forms of the disease are thought to occur more commonly after prior sensitization with a different serotype. They may occur, however, even with a primary infection, perhaps depending on the infecting serotype [7].

Dengue fever (DF) is an acute febrile viral exanthema, accompanied by headache, myalgia, anorexia, gastrointestinal disturbances and prostration. DHF is a severe febrile disease characterized by abnormalities of hemostasis and increased vascular permeability. DSS is the result of a hypovolemic shock observed in some DHF cases [8]. The viruses exist as four serotypes, with the proportion of dengue cases caused by each serotype changing dramatically between years. Epidemiological studies indicate that homologous immunity provides nearly permanent protection against re-infection with a previously experienced serotype. In contrast, heterologous immunity does not provide protection against reinfection in the long term [9]. After a brief period of heterologous cross-protection [9], previous infections are considered risk factors for DHF [10]. Because preexisting antibodies have long been held as the causative agent for this enhancement in secondary infections, this effect is commonly called antibody-dependent enhancement (ADE). Most DHF cases occur in children less than 15 years old [11].

Mathematical models have become important tools in analyzing the spread and control of infectious disease. Epidemiological modeling can contribute the design and analysis of epidemiological surveys, suggest crucial data that should be collected, identify trends, make general forecasts and estimate the uncertainty in forecasts [12-13]. In 1998, Esteva and Vargas [14] introduced a mathematical model to provide a qualitative assessment for the problem. The model they used is based on the

susceptible-infected-recovered (SIR) model often used to model the dynamics of transmission of some disease. They established the global stability of the endemic equilibrium. They discussed the vector population in term of the threshold condition which governs the existence and stability of the endemic equilibrium. They showed that the endemic equilibrium point was globally stable whenever a parameter  $R_0$  called the basic reproduction number is greater than one. The basic reproduction number ( $R_0$ ) is the average number of secondary infections produced when one infected individual is introduced into a host virgin population

The original model used by Esteva and Vargas [14] did not include any age structure and serotypes of dengue disease in the human. In 2008 [15], we formulated the mathematical model of this disease with only two serotypes. In this study, we construct the mathematical model by incorporating age structure and four different serotypes of this disease.

2. TRANSMISSION MODEL

The human and vector populations are considered in this transmission model. The human population is divided into juvenile and adult classes. Each class is divided into susceptible, infectious and recovered subclasses. Vector population is separated into susceptible and infectious classes. We assume that there are four different serotypes of dengue virus. The human populations infect with dengue virus only one time and only juvenile human is infected with dengue virus. The following flow chart shows the dynamics of human and vector populations.

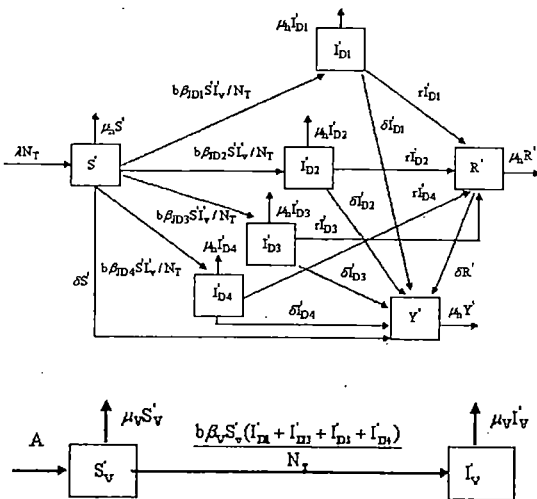


Figure 1. Flow chart of the model.

The total human and vector populations are assumed to be constant [14]. The variables and parameters of our model are defined as follows:

$S'$  is the number of susceptible human

- $I'_{D1}$  is the number of infectious juvenile human who be infected with the first serotype
- $I'_{D2}$  is the number of infectious juvenile human who be infected with the second serotype
- $I'_{D3}$  is the number of infectious juvenile human who be infected with the third serotype
- $I'_{D4}$  is the number of infectious juvenile human who be infected with the fourth serotype
- $R'$  is the number of recovered human
- $Y'$  is the number of susceptible adult human
- $S'_v$  is the number of susceptible vector
- $I'_v$  is the number of infectious vector
- $K$  is the ratio of the people who be infected with the first serotype of dengue virus
- $\mu_h$  is the death rate of the human population
- $\delta$  is the rate at which the juvenile human passes to the adult human
- $\lambda$  is the birth rate of the human population
- $b$  is the biting rate of the mosquitoes
- $\beta_{J_{D1}}$  is the transmission probability of dengue virus from the mosquito to the juvenile human with the first serotype
- $\beta_{J_{D2}}$  is the transmission probability of dengue virus from the mosquito to the juvenile human with the second serotype
- $\beta_{J_{D3}}$  is the transmission probability of dengue virus from the mosquito to the juvenile human with the third serotype
- $\beta_{J_{D4}}$  is the transmission probability of dengue virus from the mosquito to the juvenile human with the fourth serotype
- $N_T$  is the total human population
- $r$  is the recovery rate of the human population
- $A$  is the constant recruitment rate of the mosquitoes
- $\mu_v$  is the death rate of the mosquitoes

The dynamic of each population can be described by the following equations:

$$\frac{dS'}{dt} = \lambda N_T - (\mu_h + \delta + \frac{b\beta_{J_{D1}}}{N_T} I'_v + \frac{b\beta_{J_{D2}}}{N_T} I'_v + \frac{b\beta_{J_{D3}}}{N_T} I'_v + \frac{b\beta_{J_{D4}}}{N_T} I'_v) S' \tag{1.1}$$

$$\frac{dI'_{D1}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D1}}}{N_T} S' I'_v - (\mu_h + r + \delta) I'_{D1} \tag{1.2}$$

$$\frac{dI'_{D2}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D2}}}{N_T} S' I'_v - (\mu_h + r + \delta) I'_{D2} \tag{1.3}$$

$$\frac{dI'_{D3}}{dt} = \frac{b\beta_{J_{D3}}}{N_T} S' I'_v - (\mu_h + r + \delta) I'_{D3} \tag{1.4}$$

$$\frac{dI'_{D4}}{dt} = \frac{b\beta_{D4}}{N_T} S' I'_V - (\mu_h + r + \delta) I'_{D4} \quad (1.5)$$

$$\frac{dR'}{dt} = r(I'_{D1} + I'_{D2} + I'_{D3} + I'_{D4}) - (\mu_h + \delta) R' \quad (1.6)$$

$$\frac{dY'}{dt} = \delta(I'_{D1} + I'_{D2} + I'_{D3} + I'_{D4} + S' + R') - \mu_h Y' \quad (1.7)$$

$$\frac{dS'_v}{dt} = A - \left(\frac{b\beta_V}{N_T} (I'_{D1} + I'_{D2} + I'_{D3} + I'_{D4}) + \mu_v\right) S'_v \quad (1.8)$$

$$\frac{dI'_v}{dt} = \frac{b\beta_V S'_v}{N_T} (I'_{D1} + I'_{D2} + I'_{D3} + I'_{D4}) - \mu_v I'_v \quad (1.9)$$

with the two conditions

$$N_T = S' + I'_{D1} + I'_{D2} + I'_{D3} + I'_{D4} + R' + Y', \quad N_V = S'_v + I'_v. \quad (1.10)$$

From our assumptions, the rates of change for human and vector populations equal to zero, i.e.  $\frac{dN_T}{dt} = \frac{dN_V}{dt} = 0$ .

Then we have  $\lambda = \mu_h$  and  $N_v = \frac{A}{\mu_v}$ .

We normalize equations (1.1-1.9) by letting

$$s = \frac{S'}{N_T}, I_{D1} = \frac{I'_{D1}}{N_T}, I_{D2} = \frac{I'_{D2}}{N_T}, I_{D3} = \frac{I'_{D3}}{N_T}, I_{D4} = \frac{I'_{D4}}{N_T}, R = \frac{R'}{N_T}, Y = \frac{Y'}{N_T}, s_v = \frac{S'_v}{N_V}, I_v = \frac{I'_v}{N_V}$$

This yield

$$\frac{ds}{dt} = \mu_h - (\mu_h + \delta + \frac{b\beta_{D1} I_v (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{D2} I_v (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{D3} I_v (A/\mu_v)}{N_T} + \frac{b\beta_{D4} I_v (A/\mu_v)}{N_T}) s \quad (2.1)$$

$$\frac{dI_{D1}}{dt} = \frac{b\beta_{D1} S I_v (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D1} \quad (2.2)$$

$$\frac{dI_{D2}}{dt} = \frac{b\beta_{D2} S I_v (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D2} \quad (2.3)$$

$$\frac{dI_{D3}}{dt} = \frac{b\beta_{D3} S I_v (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D3} \quad (2.4)$$

$$\frac{dI_{D4}}{dt} = \frac{b\beta_{D4} S I_v (A/\mu_v)}{N_T} - (\mu_h + \delta + r) I_{D4} \quad (2.5)$$

$$\frac{dR}{dt} = r(I_{D1} + I_{D2} + I_{D3} + I_{D4}) - (\mu_h + \delta) R \quad (2.6)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = b\beta_V S_v (I_{D1} + I_{D2} + I_{D3} + I_{D4}) - \mu_v I_v \quad (2.7)$$

with new two conditions

$$S + I_{D1} + I_{D2} + I_{D3} + I_{D4} + R + Y = 1, \quad S_v + I_v = 1 \quad (2.8)$$

### 3. ANALYSIS OF THE MODEL

#### 3.1. Analytical Results

The equilibrium points of our model are obtained by setting the right hand side of We set the right hand sides of (2.1) – (2.7) equal to zero, then the equilibrium points are obtained as follows:

i) The disease free equilibrium point

$$E_1 = \left(\frac{1}{M_1}, 0, 0, 0, 0, 0, 0\right) \quad (3)$$

ii) The endemic disease equilibrium point

$$E_2 = (S^*, I_{D1}^*, I_{D2}^*, I_{D3}^*, I_{D4}^*, R^*, I_v^*) \quad (4)$$

where

$$S^* = \frac{\beta_1}{M_1(\beta_1 + P_1 I_v^*)} \quad (4.1)$$

$$I_{D1}^* = \frac{R_1 I_v^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_v^*)} \quad (4.2)$$

$$I_{D2}^* = \frac{R_2 I_v^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_v^*)} \quad (4.3)$$

$$I_{D3}^* = \frac{R_3 I_v^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_v^*)} \quad (4.4)$$

$$I_{D4}^* = \frac{R_4 I_v^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_v^*)} \quad (4.5)$$

$$R^* = \frac{J_2 I_v^*}{J_1(\beta_1 + P_1 I_v^*)} \quad (4.6)$$

$$I_v^* = \frac{b\beta_V P_1 - \mu_v J_1 \beta_1}{b\beta_V P_1 + \mu_v J_1 P_1} \quad (4.7)$$

where

$$\beta_1 = \frac{b\beta_{D1}}{\mu N_T}, M_1 = \frac{\mu_h + \delta}{\mu_h}, R_1 = \frac{b\beta_{D1}(A/\mu)}{\mu N_T^2(\mu_h + \delta)}, R_2 = \frac{b\beta_{D2}(A/\mu)}{\mu N_T^2(\mu_h + \delta)}, R_3 = \frac{b\beta_{D3}(A/\mu)}{\mu N_T^2(\mu_h + \delta)}, R_4 = \frac{b\beta_{D4}(A/\mu)}{\mu N_T^2(\mu_h + \delta)}$$

$$R_4 = \frac{b^2 \beta_{D1} \beta_{D4} (A/\mu_v)}{\mu_v N_T^2 (\mu_h + \delta)}, P_1 = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

$$M_2 = \frac{\mu_h + \delta + r}{\mu_h + \delta}, J_1 = M_1 M_2, M_3 = \frac{r}{(\mu_h + \delta)}, J_2 = M_3 P_1 \quad (4.8)$$

The local stability of each equilibrium point is determined by the sign of eigenvalues for each equilibrium point. The eigenvalues are obtained by solving the following characteristic equation:

$$\det(J_{E_i} - \lambda I_7) = 0 \quad (5.1)$$

where  $I_7$  is the identity matrix dimension  $7 \times 7$ . If the real parts of all eigenvalues are negative then that equilibrium point is local stability.

For the disease free equilibrium point, the characteristic equation is defined by

$$(\mu_h M_1 + \lambda)^2 (\mu_h J_1 + \lambda)^3 (\lambda^2 + A_1 \lambda + A_0) = 0 \quad (5.2)$$

with

$$A_1 = \mu_h J_1 + \mu_v \quad (5.3)$$

$$A_0 = \mu_h \mu_v J_1 - \frac{b\beta_V \mu_h P_1}{\beta_1} \quad (5.4)$$

There are seven eigenvalues satisfy (5.2). The first five corresponding eigenvalues are

$$\lambda_1 = -\mu_h M_1, \lambda_2 = -\mu_h M_1, \lambda_3 = -\mu_h J_1, \lambda_4 = -\mu_h J_1, \lambda_5 = -\mu_h J_1. \quad (5.5)$$

It can be easily seen that the real parts of the above eigenvalues are negative.

The remaining two eigenvalues are derived from the equation

$$\lambda^2 + A_1 \lambda + A_0 = 0 \quad (5.6)$$

where  $A_0$  and  $A_1$  are defined in (5.3) and (5.4).

$$\lambda_6 = \frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_0}}{2}, \lambda_7 = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_0}}{2}.$$

We can see that the eigenvalue  $\lambda_6$  has a negative real part. Next, we consider the sign for the real part of eigenvalue  $\lambda_7$ .  $\lambda_7$  has negative real part when

$$\sqrt{A_1^2 - 4A_0} < A_1 \text{ or } A_1^2 - 4A_0 < A_1^2 \text{ or } A_0 > 0.$$

So that 
$$\mu_h \mu_v J_1 - \frac{b\beta_v \mu_h P_1}{\beta_1} > 0$$

or 
$$\mu_h \mu_v \beta_1 J_1 - b\beta_v \mu_h P_1 > 0$$

or 
$$\frac{b\beta_v \mu_h P_1}{\mu_h \mu_v \beta_1 J_1} < 1.$$

Thus, the disease free state is locally stable state when

$$R_0 = \frac{b\beta_v P_1}{\mu_v \beta_1 J_1} < 1. \quad (5.7)$$

For the endemic disease equilibrium point, The characteristic equation is given by

$$(\mu_h M_1 + \lambda)(\mu_h J_1 + \lambda)^3 (\lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0) = 0 \quad (6)$$

where

$$c_2 = \frac{\beta_1((J_1 + M_1)\mu_h + I_{D5}^*) + P_1 M_1 \mu_h I_v^*}{\beta_1}, \quad (6.1)$$

$$c_1 = \frac{(\mu_h(M_1(-S_1^* + \beta_1 I_{D5}^*) + (S_1^* + P_1 I_{D5}^*) I_v^*) + J_1(\beta_1 I_{D5}^* + M_1 \mu_h I_{v1}^*))}{\beta_1} \quad (6.2)$$

$$c_0 = \frac{M_1 \mu_h^2 (M_1 S_1^* (1 - I_v^*) + J_1 I_{D5}^* I_{v1}^*)}{\beta_1} \quad (6.3)$$

where

$$I_{D1}^* = I_{D1}^* + I_{D2}^* + I_{D3}^* + I_{D4}^*, I_{D5}^* = \mu_v + b\beta_v I_{D1}^*, I_{v1}^* = \beta_1 + P_1 I_{D5}^*, S_1^* = bP_1 \beta_v I_{v1}^*.$$

The first four eigenvalues are  $\lambda_1 = -\mu_h M_1$ ,

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = -\mu_h J_1.$$

The remaining three eigenvalues are derived from the equation

$$\lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_1 \lambda + c_0 = 0$$

Next, we will check the signs of these remaining three eigenvalues by using the Routh-Hurwitz criteria:

i)  $c_2 > 0$  (7.1)

ii)  $c_0 > 0$  (7.2)

iii)  $c_2 c_1 > c_0$  (7.3)

i)  $c_2 = \frac{\beta_1((J_1 + M_1)\mu_h + I_{D5}^*) + P_1 M_1 \mu_h I_v^*}{\beta_1}$  is always positive.

ii)  $c_0 = \frac{M_1 \mu_h^2 (M_1 S_1^* (1 - I_v^*) + J_1 I_{D5}^* I_{v1}^*)}{\beta_1}$  is always

positive, Since all parameters in the above inequality are positive and  $0 < I_v^* < 1$ .

iii)  $c_1 c_2 - c_0 =$

$$\frac{1}{\beta_1^2} [J_1^2 \beta_1 \mu_h (\beta_1 I_{D5}^* + M_1 \mu_h I_v^*) + \mu_h (I_{D5}^* (M_1 \beta_1 + P_1 I_{D5}^*) (\beta_1 I_{D5}^* + M_1 \mu_h I_{v1}^*) - (M_1 \beta_1 I_{D5}^* + (M_1 (-\beta_1 + M_1 (P_1 + \beta_1)) \mu_h - \beta_1 I_{D5}^*) I_v^* - \mu_h M_1 P_1 I_{v1}^*) S_1^*) + J_1 (M_1^2 \mu_h^2 I_{v1}^{*2} + M_1 \beta_1 \mu_h (I_{D5}^* (\beta_1 (1 + \mu_h) + P_1 I_{D5}^*) - (-1 + \mu_h) I_{v1}^*) - \mu_h S_1^*) + \beta_1 (\beta_1 I_{D5}^* + \mu_h^2 I_v^* (P_1 I_{D5}^* + S_1^*))].$$

To show that  $c_1 c_2 > c_0$ , we need to show that  $c_2 > c_0 > 0$  and  $c_1 \geq 1$ .

Because  $c_2 - c_0 =$

$$\beta_1 \mu_h (1 - (\mu_h + \delta) \mu) + b\beta \beta_{D5}^* (1 - (\mu_h + \delta + r)(\mu_h + \delta)) + \mu_h P_1 M_1^* (1 - (\mu_h + \delta + r) I_{D5}^*) + M_1^2 \mu_h^2 b P_1 \beta_v I_v^* (1 - I_v^*) + \mu_h \beta_1 M_1 + \mu_v \beta_1 > 0$$

and  $c_2 > 0, c_0 > 0$  then we have  $c_2 > c_0 > 0$ .

Since

$$M_1 \mu_h P_1 I_v^* (\frac{\mu_h + \delta + r}{\mu} - \beta) + \mu_h M_1 \beta I_{D5}^* + \mu_h b P_1 \beta I_{D5}^* + \mu_h P_1 I_{D5}^* I_v^* + J_1 \beta I_{D5}^* + \beta (\delta + r) =$$

$$-\mu_h M b P_1 \beta I_v^* + \mu_h M \beta I_{D5}^* + \mu_h b P_1 \beta I_v^* + \mu_h P_1 I_{D5}^* I_v^* + J_1 \beta I_{D5}^* + J_1 M \mu_h \beta + J_1 M \mu_h P_1 I_v^* - \beta$$

$$-\mu_h M S_1^* + \mu_h M \beta I_{D5}^* + \mu_h S_1^* I_v^* + \mu_h P_1 I_{D5}^* I_v^* + J_1 \beta I_{D5}^* + J_1 M \mu_h I_{v1}^* \geq \beta$$

This means that

$$c_1 = \frac{(\mu_h (M_1 (-S_1^* + \beta_1 I_{D5}^*) + (S_1^* + P_1 I_{D5}^*) I_v^*) + J_1 (\beta_1 I_{D5}^* + M_1 \mu_h I_{v1}^*))}{\beta_1} \geq 1.$$

From the above inequalities, we have  $c_1 c_2 > c_0$ .

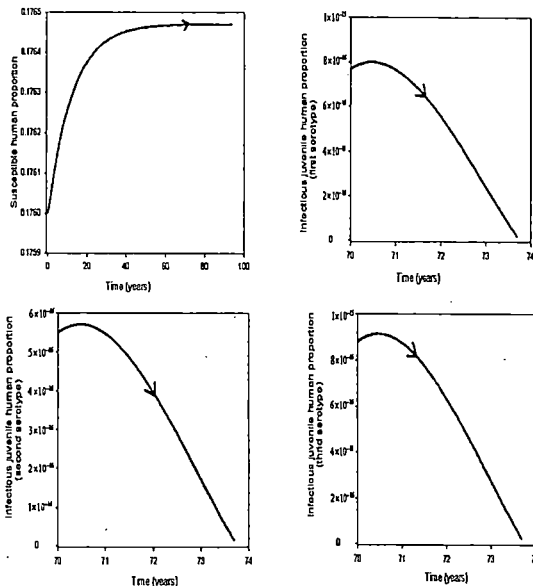
All three conditions of Routh-Hurwitz criteria are satisfied for  $R_0 > 1$ . Therefore, the endemic equilibrium point  $E_2$  is local asymptotically stable for  $R_0 > 1$  where

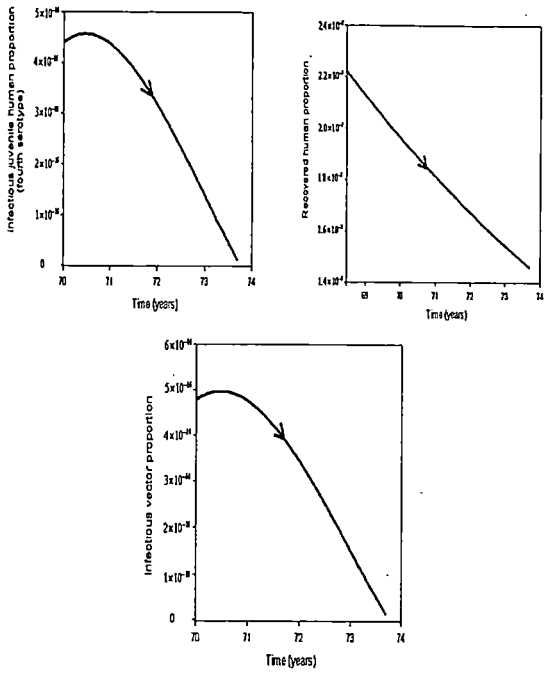
$$R_0 = \frac{b\beta_v P_1}{\mu_v J_1 \beta_1}.$$

### 3.2. Numerical Results

The numerical simulations are shown in this section. The parameters are determined by the real life observations as follows: The life expectancy of human is 70 years. The duration of time for each juvenile human become to adult human is 15 years. The life time of the vector is 14 days. The vector can bite 3 times per day, thus the biting rate of the vector is 1/3 per day. The time for each person can recover is 3 days. The total human population is 100,000.

The transmission probabilities are arbitrarily chosen.

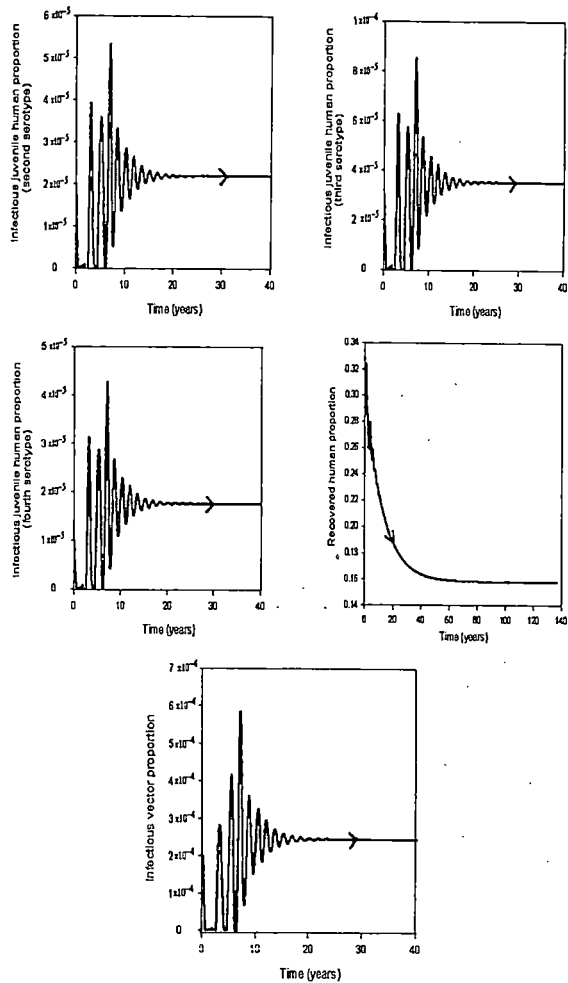
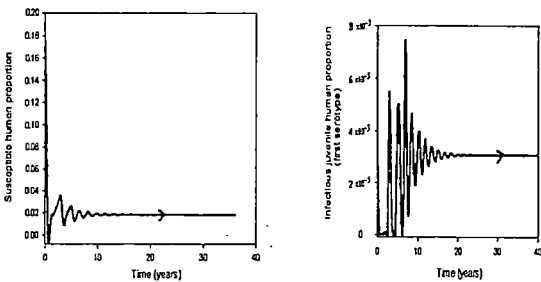




**Figure 2** Numerical solution of the (2.1)-(2.7) demonstrates the time series of  $S, I_{D1}, I_{D2}, I_{D3},$

$I_{D4}, R, I_V$  for  $R_0 < 1$  with  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  
 $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  
 $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4$ ,  
 $\beta_v = 0.5, r = 1/3 \text{ day}^{-1}, N_T = 100,000$ ,  
 $A = 700, \delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$   
 $M_1 = 5.66667, R_0 = 0.097$  and  $R'_0 = 0.31$ .

The individual proportion approaches to the disease free equilibrium point.



**Figure 3** Numerical solution of the (2.1)-(2.7) demonstrates the time series of  $S, I_{D1}, I_{D2}, I_{D3},$

$I_{D4}, R, I_V$  for  $R_0 > 1$  with  $\mu_h = 1/(365 \times 70) \text{ day}^{-1}$ ,  
 $\mu_v = 1/14 \text{ day}^{-1}$ ,  $b = 1/3 \text{ day}^{-1}$ ,  
 $\beta_{J_{D1}} = 0.7, \beta_{J_{D2}} = 0.5, \beta_{J_{D3}} = 0.8, \beta_{J_{D4}} = 0.4$ ,  
 $\beta_v = 0.5, r = 1/3 \text{ day}^{-1}, N_T = 100,000$ ,  
 $A = 100,000, \delta = 1/(365 \times 15) \text{ day}^{-1}$ ,  
 $M_1 = 5.66667, R_0 = 9.68$  and  $R'_0 = 3.11$ .

The individual proportion oscillates to the endemic disease equilibrium point.

In figure 2, for  $A = 700, R_0 = 0.097$ . The solution approaches to the disease free equilibrium point

$E_1 = (\frac{1}{M_1}, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . In figure 3,  $R_0 = 9.67827$ ,

$R'_0 = 3.11099$ . The solution oscillates to the endemic equilibrium point  $E_2 = (S^*, I_{D1}^*, I_{D2}^*, I_{D3}^*, I_{D4}^*, R^*, I_V^*)$  where  $S^* = 0.018238175, I_{D1}^* = 0.0000306868$ ,  
 $I_{D2}^* = 0.0000219191, I_{D3}^* = 0.0000350706$ ,

$I_{D_4}^* = 0.000017535$ ,  $R^* = 0.158127202$  and  $I_V^* = 0.000245434$ .

From figure 2, we will see that the proportions of populations converge to the disease free equilibrium point for  $R_0$  less than 1. For  $R_0$  greater than 1, the proportions of populations oscillate to the endemic disease equilibrium point.

#### 4. CONCLUSION

The threshold condition of this model is given by

$$R_0 = \frac{b\beta_V P_1}{\mu_V J_1 \beta_1} = \frac{b\beta_V (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)}{\mu_V M_1 M_2 \beta_1} = \frac{b^2 \beta_V (A/\mu_V) (\beta_{J_{D_1}} + \beta_{J_{D_2}} + \beta_{J_{D_3}} + \beta_{J_{D_4}}) \mu_h N_T}{\mu_V N_T^2 (\mu_h + \delta) (\mu_h + \delta + r)} \quad (8)$$

The quantity  $R_0 = \sqrt{R_0}$  is the basic reproductive number of the disease, it indicates the average number of secondary cases that one patient can produce if introduced into a susceptible human. This means that an infectious human introduced into the susceptible human is bitten, during their infective period, by  $\frac{b(A/\mu_V)}{N_T} \cdot \frac{1}{(\mu_h + \delta + r)} \cdot \frac{\mu_h}{(\mu_h + \delta)}$  vectors; the ratio  $\beta_V \cdot \frac{b(A/\mu_V)}{N_T} \cdot \frac{1}{(\mu_h + \delta + r)} \cdot \frac{\mu_h}{(\mu_h + \delta)}$  of these vectors becomes infectious. In this manner, an infectious vector distributes  $\frac{b}{\mu_V}$  bites in the human population during the rest of its life and a ratio  $(\beta_{D_1} + \beta_{D_2} + \beta_{D_3} + \beta_{D_4}) \cdot \frac{b}{\mu_V}$  of these bites become new infectious in the human population. So the geometric mean of these quantities,  $R_0$  gives the number of secondary infectious persons. The threshold conditions are derived for the different diseases. The different basic reproductive numbers are used for controlling the different diseases [11, 14, 15, 16, 17]. As we see from (8), if we can reduce the transmission rate of dengue virus for each serotype then this threshold number will be reduced. The outbreak of this disease will be reduced.

#### ACKNOWLEDGMENT

The author would like to thank prof. Dr. I-Ming Tang at Mahidol University, Thailand. This work is supported by Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand.

#### REFERENCES

[1] WHO, *Dengue Haemorrhagic fever : Diagnosis treatment and Control*, World Health Organization, Geneva, 1997.

[2] D. J. Gubler, "Epidemic dengue/dengue hemorrhagic fever as a public health, social and economic problem in the 21<sup>st</sup> century", *Trends Microbiol*, vol. 10, pp. 100-103, 2002.

[3] Division of vector-Born Infectious Disease, "National Center for Infectious Disease, Centers for Disease Control and Prevention, Dengue fever.

[4] M.G. Guzman, and G. Louri, "Dengue:an update", *Lancet Infect Dis*, vol. 2, pp. 33-42, 2002.

[5] World Health Organization, "Dengue, Dengue Haemorrhagic Fever and Dengue Shock Syndrome in the Context of the Integrated Management of Childhood Illness", 2005.

[6] R. U. Gibbons, and D. W. Vaughn, "Dengue: an escalating problem", *Br Med J*, vol. 324, pp. 1563-1566, 2002.

[7] A. Balmaseda, S. Hammond, L. Perez and et. Al, "Serotype-specific differences in clinical manifestations of dengue", *Am J Trop Med Hyg*, vol. 74, pp. 449-456, 2006.

[8] E. A. Henchal and J. R. Putnak, "The dengue viruses", *Clin Microbiol Rev*, vol. 3, pp. 376-396, 1990.

[9] T. P. Endy, A. Nisalak, S. Chunsuttitwat, D. W. Vaughn, S. Green, F. A. Ennis, A. L. Rothman and D. H. Libraty, "Relationship pf preexisting dengue virus (DV) neutralizing antibody levels to viremia and severity of disease in a prospective cohort study of DV infection in Thailand", *J Infect Dis*, vol. 189, pp. 990-1000, 2004.

[10] N. Sangkawibha, S. Rojanasuphot, S. Ahandrik, S. Viriyapongse, S. Jatanasen, V. Salitul, B. Phanthumachinda and S. B. Halstead, "Risk factors in dengue shock syndrome: A prospective epidemiologic study in rayong, Thailand", *Am J Epidemiol*, vol. 120, pp. 653-669, 1984.

[11] P. Pongsumpun and I. M Tang, "A realistic age structured transmission model for dengue hemorrhagic fever in Thailand", *Southeast Asian J Trop Med Public Health*, vol. 32, pp.336-340, 2001.

[12] H. W. Hethcote, *Three basic epidemiological models in Applied Mathematical Ecology*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 119-144, 1989.

[13] H. W. Hethcote and J. W. Van Ark, *Modeling HIV Transmission and AIDS in the United States*, Lecture Notes in Biomath, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[14] L. Esteva and C. Vargas, "Analysis of a dengue disease trasmission model", *Math Biosci*, vol.150, pp.131-151, 1998.

[15] P.Pongsumpun, Dengue model with age structure and two different serotypes, Proceeding of The 3rd International Symposium on Biomedical Engineering (ISBME 2008), 401-405.

[16] P. Pongsumpun, K. Patanarapelert, M. Sripom, S. Varamit and I. M. Tang, "Infection risk to travelers going to dengue fever endemic regions", *Southeast Asian J Trop Med Public Health*, vol. 35, pp.155-159, 2004.

[17] P. Pongsumpun, "Dengue disease model with the effect of extrinsic incubation period", *WSEAS transactions on biology and biomedicine*, vol. 3, pp.139-144, 2006.