



## รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

การใช้ความร้อน เพื่อขยายเส้นทางเดินของหลอดเลือด  
Using Thermal Energy for Expansion of Blood Vessels

ผศ.ดร. สุพันธ์ ตั้งจิตกุศลมัน

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินงบประมาณเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2555

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

RCH  
R  
857

เลขหมู่.....131150 M3  
เลขทะเบียน.....  
วัน,เดือน,ปี. 2.2 พ.ค. 2557 857

b.12602644  
i.....

## สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	V
สารบัญภาพ.....	VI
บทที่/1 บทนำ.....	1
1.1 หลักการและเหตุผล.....	1
1.2 วัตถุประสงค์.....	2
บทที่/2 หลักการและทฤษฎีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์.....	5
2.1 บทนำ.....	5
2.2 การวิเคราะห์ทางด้านคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า.....	5
2.3 โหมดสำหรับการเดินทางของคลื่น.....	16
2.4 สนามไฟฟ้าในช่องว่างวัสดุ.....	19
2.5 สายส่งไมโครเวฟและท่อนำคลื่น.....	30
2.6 สมการความร้อนในทางชีววิทยา.....	33
2.7 พื้นฐานการกระจายความร้อนภายในเนื้อเยื่อ.....	34
2.8 หลักการของเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้ในการจำลอง.....	35
บทที่/3 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	38
3.1 บทนำ.....	38
3.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	38
3.3 กระบวนการแก้ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์.....	40
3.4 พื้นฐานสมการทางด้านสนามแม่เหล็กไฟฟ้า.....	43
3.5 วิเคราะห์สนามแม่เหล็กที่ความถี่สูง.....	45
3.6 สมการความสัมพันธ์ระหว่างคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและอุณหภูมิ.....	45
3.7 การประยุกต์ใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์.....	47

	หน้า
บทที่/4 ผลการทดลอง.....	49
บทที่/5 สรุปผลการทดลอง .....	57
บรรณานุกรม/เอกสารอ้างอิง .....	58
ภาคผนวก.....	
ภาคผนวก ก.....	
ภาคผนวก ข.....	
ประวัตินักวิจัย.....	

#### หมายเหตุ

1. ชื่อหัวข้อและจำนวนบทสามารถปรับให้สอดคล้องกับงานวิจัยได้ตามความเหมาะสมของงานวิจัย ทางด้านวิทยาศาสตร์/ด้านสังคมศาสตร์
2. เครื่องหมาย / หมายถึง การเว้นวรรค 1 ระยะตัวอักษร

## สารบัญภาพ

ภาพที่	หน้า
1.1 Diagram .....	1
1.2 นายแพทย์สมบูรณ์ ผู้เชี่ยวชาญด้านการรักษาโดยใช้คลื่นความถี่ผู้ร่วมวิจัยจากโรงพยาบาลราชวิถี.....	2
1.3 ทางทีมวิจัยได้สาธิตการใช้งานเครื่องต้นแบบกับนายแพทย์ผู้ร่วมวิจัย ในการพัฒนางานวิจัยร่วมกัน.....	3
2.1(ก) การเคลื่อนที่ของคลื่นในโหมดสนามแม่เหล็กตัดขวาง(TM mode).....	17
2.1(ข) การเคลื่อนที่ของคลื่นในโหมดสนามไฟฟ้าตัดขวาง (TE mode).....	18
2.1(ค) การเคลื่อนที่ของคลื่นในโหมดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตัดขวาง(TEM mode).....	18
2.2 ภาคตัดขวางของตัวกลาง ไดอิเล็กทริกโพลาริไซซ์.....	20
2.3(ก) ขอบเขตระหว่างไดอิเล็กทริกกับไดอิเล็กทริก.....	23
2.3(ข) ขอบเขตระหว่างไดอิเล็กทริกกับไดอิเล็กทริก.....	23
2.4 ขอบร่วมระหว่างสองตัวกลาง.....	24
2.5 การหักเหของ $E$ หรือ $D$ ที่ขอบเขตระหว่างไดอิเล็กทริกกับไดอิเล็กทริก.....	27
2.6(ก) ขอบเขตระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับไดอิเล็กทริก.....	28
2.6(ข) ขอบเขตระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับไดอิเล็กทริก.....	28
2.7 การกลั่นกรองไฟฟ้าสถิต.....	29
2.8 ขอบเขตระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับอากาศว่าง.....	30
2.9(ก) สายส่งสัญญาณ โหมด TEM (TEM transmission lines).....	31
2.9(ข) สายส่งสัญญาณ โหมด (Multi-mode transmission lines).....	31
2.10 ท่อนำคลื่นแบบต่างๆ.....	33
2.11 กราฟแสดงผลกระทบของอุณหภูมิที่มีต่อเซลล์มะเร็ง.....	35
2.12 แสดงลักษณะของสายอากาศแบบโคแอกเชียลในเนื้อเยื่อทดสอบ.....	35
2.13 แสดง โครงสร้างของสายอากาศแบบสล็อตโคแอกเชียล.....	36
2.14 แสดงจุดจ่ายกำลังงานคลื่นไมโครเวฟให้กับสายอากาศ.....	36
2.15 แสดงบริเวณที่เป็นขอบเขตต่อเนื่อง.....	37
3.1 แสดงแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์และโหนด.....	39
3.2 ขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.....	41
3.3 รูปแบบจำลองชิ้นงานและรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์.....	41

3.4 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของกระดูก .....	47
4.1 สายอากาศปลายเปิด 5 mm ใช้พลังงาน 30 W .....	48
4.2 สายอากาศปลายเปิด 10 mm ใช้พลังงาน 40 W .....	48
4.3 สายอากาศปลายเปิด 20 mm ใช้พลังงาน 60 W .....	48
4.4 สายอากาศปลายเปิด 30 mm ใช้พลังงาน 60 W .....	48
4.5 สายอากาศปลายเปิด 40 mm ใช้พลังงาน 60 W .....	49
4.6 การกระจายความร้อนที่เหมาะสมในการบำบัด .....	49
4.7 การดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เหมาะสมในการบำบัด .....	49
4.8 กราฟการกระจายตัวของความร้อนที่อุณหภูมิมากกว่า 85 องศาเซลเซียส .....	50
4.9 การกระจายความร้อนที่เหมาะสมในการบำบัด .....	50
4.10 การดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เหมาะสมในการบำบัด .....	50
4.11 กราฟการกระจายตัวของความร้อนที่อุณหภูมิมากกว่า 85 องศาเซลเซียส .....	51
4.12 การกระจายความร้อนที่เหมาะสมในการบำบัด .....	51
4.13 การดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เหมาะสมในการบำบัด .....	51
4.14 กราฟการกระจายตัวของความร้อนที่อุณหภูมิมากกว่า 85 องศาเซลเซียส .....	52
4.15 การกระจายความร้อนที่เหมาะสมในการบำบัด .....	52
4.16 การดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เหมาะสมในการบำบัด .....	52
4.17 กราฟการกระจายตัวของความร้อนที่อุณหภูมิมากกว่า 85 องศาเซลเซียส .....	53
4.18 การกระจายความร้อนที่เหมาะสมในการบำบัด .....	53
4.19 การดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เหมาะสมในการบำบัด .....	53
4.20 กราฟการกระจายตัวของความร้อนที่อุณหภูมิมากกว่า 85 องศาเซลเซียส .....	54
4.21 รูปการทดลองกับเส้นเลือดจริงที่กระทำกับเส้นเลือดใหญ่ของขามู .....	55
4.22 รูปการทดลองกับเส้นเลือดจริงที่กระทำกับเส้นเลือดใหญ่ของขามู .....	55
4.23 รูปการทดลองกับเส้นเลือดจริงที่กระทำกับเส้นเลือดใหญ่ของขามู .....	56

ชื่อโครงการ (ภาษาไทย) การใช้ความร้อน เพื่อขยายเส้นทางเดินของหลอดเลือด

แหล่งเงิน ..เงินรายได้.....

ประจำปีงบประมาณ.....2555..... จำนวนเงินที่ได้รับการสนับสนุน 75,000.....บาท

ระยะเวลาทำการวิจัย.....1..... ปี ตั้งแต่ 1 ตุลาคม 2554 ถึง 30 กันยายน 2555

ชื่อ-สกุล หัวหน้าโครงการ และผู้ร่วมโครงการวิจัย พร้อมระบุ หน่วยงานต้นสังกัด

ผศ.ดร.สุพันธุ์ ตั้งจิตกุศลมั่น

สาขาวิชาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์ คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

### บทคัดย่อ

จากการจำลองการทำงานและผลการทดลองจริง ทางผู้วิจัยได้ ทำการออกแบบและจำลองการทำงานด้วย ไฟไนต์เอลิเมนต์ ในรูปแบบ 3 มิติ โดยใช้สายอากาศแบบ สายนำสัญญาณโคแอกเซียล มาประยุกต์ใช้เพื่อให้ เป็นตัวกลางนำคลื่นเข้าสู่เนื้อเยื่อ โดยทางผู้วิจัยได้ทำการเปิดปลายสายอากาศออกในรูปแบบของ OPEN TIP ผลที่ได้พบว่านำไปประยุกต์ใช้งานเพื่อทำการแก้ไขข้อบกพร่องของเส้นเลือดที่เกิดผิดปกติกับขา โดยมี การกระจายของความร้อนประมาณ 90 องศาเซลเซียสในระยะเวลาประมาณ 10 วินาที ก็จะสามารถแก้ไขความ ผิดปกติของเส้นเลือดได้ โดยเมื่อทำการเพิ่มความยาวของช่วงเปิดปลายของสายอากาศมากขึ้น ก็จะทำให้เกิด การกระจายของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในเนื้อเยื่อ โดยอุปสรรคของการทำงานวิจัยนี้ จำเป็นต้องสนใจ ปัจจัยด้าน การพาความร้อนอันเนื่องมาจากเลือดที่มีคุณสมบัติเป็นตัวนำพาความร้อนออกจากระบบได้เป็นอย่างดี ซึ่งมีความหมายว่า จะเกิดการกระจายความร้อนที่ช้ามาก เนื่องจากมีเลือดเป็นตัวระบายความร้อน ฉะนั้น ในการ เลือกขนาดของตัวนำคลื่นให้มีขนาดเล็ก จะเป็นผลดี เนื่องจากขนาดของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กของสาย นำสัญญาณที่มีขนาดเล็กจะมีขนาดที่สูงกว่า จึงมีความเหมาะสมอย่างมากในการประยุกต์ใช้ในระบบที่มีการ ด้านความร้อนในรูปแบบของ Heat Sink

คำสำคัญ : CT-SCAN , MRI , ภาพถ่ายทางการแพทย์ , ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ,Microwave Ablation.

**Research Title:** Using Thermal Energy for Expansion of Blood Vessels .....

**Researcher:**..... Assit. Prof. Dr. Supan Tungjikusolmun.....

**Faculty:** ..... Enginnering..... **Department:** Electronic Engineering.....

## ABSTRACT

In this research we design and analysis of microwave coaxial antenna for application to therapy of varicose vein tissues ,Open-tip antenna apply to this tissue and its can created temperature to 90 Celsius and operating time about 10 sec. can improve area zone of varicose vein . The effect of heat sink from blood flow very important for created temperature because this effect has affect with temperature distribution , antenna have dimension very small for proper for use in vein , small antenna has characteristic about electric and magnetic field is more than large antenna , this very best affect for solve about heat sink effect from blood flow .

**Keywords :** CT-SCAN , MRI , Medical Images , Finite Element Analysis ,Microwave Ablation

## กิตติกรรมประกาศ

การวิจัยครั้งนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง จากแหล่งทุนวิจัยเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2555 ทางทีมผู้วิจัย ขอขอบพระคุณ ผู้บริหารทุกท่าน ที่ให้การสนับสนุนในการพัฒนางานวิจัย และทางสาขาวิชาที่อำนวยความสะดวก ต่อผู้วิจัยในเรื่องของสถานที่ที่ ทำการวิจัย และนักศึกษา ระดับปริญญาโทที่ คอยสนับสนุนด้านการวิจัยในทุกๆ ด้าน

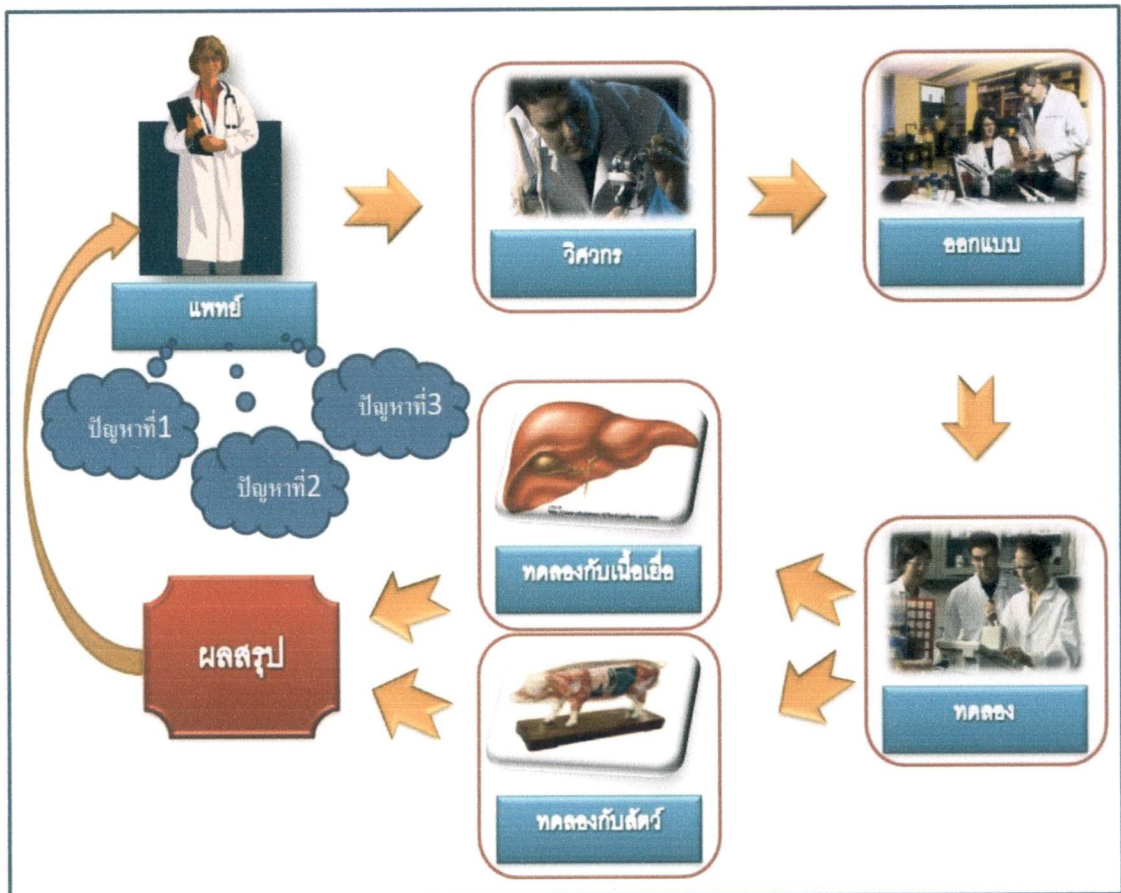
หัวหน้าโครงการวิจัย ผศ.ดร.สุพันธุ์ ตั้งจิตกุลมั่น  
สาขาวิชาวิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์  
คณะวิศวกรรมศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 หลักการและเหตุผล

ปัจจุบัน เครื่องมือทางการแพทย์มีราคาที่สูงมาก และความหลากหลายของการเกิดโรคในปัจจุบัน มีมาก การทำงานทางด้านวิศวกรรมในปัจจุบัน จำเป็นต้องทำงานให้สอดคล้องกับความต้องการของผู้ใช้ ซึ่งก็คือแพทย์ผู้ทำการรักษา เพื่อพัฒนาเครื่องมือทางการแพทย์ให้สามารถตอบโจทย์ความต้องการของแพทย์ผู้ทำการรักษา นอกจากนี้สามารถนำงานด้านวิศวกรรมมาพัฒนาอุปกรณ์เครื่องมือทางการแพทย์ ยังสามารถนำเสนองานวิจัยในวารสารระดับประเทศเช่น IEEE ซึ่งเป็นวารสารที่มีมาตรฐานที่เป็นที่ยอมรับ ดังนั้น ถ้าวางงานวิจัยเป็นงานวิจัยที่มีประโยชน์ ต่อการนำไปใช้งานจริงและด้านงานวิชาการ



รูปที่ 1.1 Diagram

ทางกลุ่มวิจัยได้ดำเนินการวิจัยโดยมีขั้นตอนขบวนการในการดำเนินการวิจัยที่ชัดเจน โดยมีการร่วมงานวิจัยกับแพทย์ (นายแพทย์สมบุรณ์ ทรัพย์วงศ์เจริญ) ผู้ที่มีประสบการณ์ในการใช้เครื่องมือแพทย์ โดย ได้พบกับปัญหาในเรื่องของราคาของ อุปกรณ์ ของเครื่องรักษาโดยใช้คลื่นความถี่สูง (เครื่องยี่ห้อ Entrazice ราคา 2.5 ล้านบาท/เครื่อง) และความเหมาะสมในการ นำมาใช้กับผู้ป่วยในประเทศไทย ซึ่งกลุ่มวิจัยได้สร้างอุปกรณ์เพื่อการรักษาทางการแพทย์โดยใช้หลักการคลื่นความถี่สูง และได้ มีการพัฒนาาระดับหนึ่ง และได้ตีพิมพ์ผลงานในวารสาร IEEE ในปี 2009 ซึ่ง ขณะนั้นได้มีการทดลองอุปกรณ์ กับเนื้อเยื่อ

แบบ *in Vivo* และได้มีการทดลองกับสัตว์มีชีวิต โดยมีการร่วมมือกับทางสัตวแพทย์ และได้มีการหารือเพื่อสร้างความร่วมมือกันด้านงานวิจัย เพื่อให้เกิดประโยชน์สูงสุด ในการพัฒนาอุปกรณ์เพื่อการรักษาโดยใช้คลื่นความถี่สูง เพื่อใช้ประโยชน์ด้านการรักษา โรคร้ายที่เกิดขึ้น เช่น มะเร็งตับ มะเร็งที่ปอด หรือ ประยุกต์ใช้ในด้านศัลยกรรมเช่น การแก้ปัญหาเส้นเลือดอุดตัน การรักษาระบบทางเดินหายใจป้องกันการเสียชีวิตเนื่องจากการขาดออกซิเจน ขณะนอนหลับ ซึ่งความหลากหลายในการรักษา ในการใช้งานมีความหลากหลายเป็นอย่างมาก ทั้งนี้ทางกลุ่มวิจัย ขอแสดงรายละเอียดของตัวอย่างของโรคมะเร็งตับ ที่ถือว่าเป็นมะเร็งที่มีระยะเวลาที่น้อยที่สุด ประมาณ 3-4 เดือน และเป็นมะเร็งที่การรักษาแบบเดิม เช่นการ ผ่าตัด การฉายรังสี และการให้เคมีบำบัดทำได้ยาก ผู้ป่วยส่วนใหญ่จะเสียชีวิต หลักการใช้คลื่นความถี่สูงนำมาใช้ในการรักษาได้เป็นอย่างดี โดยการรักษาเป็นลักษณะของการทำให้มะเร็งฝ่อ โดยใช้คลื่นความถี่สูง และนอกจากนั้นทางแพทย์ผู้ร่วมวิจัย ยังได้ดำเนินการศึกษาการแก้ปัญหาเส้นเลือดอุดตัน โดยในปัจจุบัน ทางโรงพยาบาลราชวิถี มีคิวผู้ป่วยรอรับการรักษานาน 2 ปี โดยแนวโน้มในการรักษามีปริมาณที่สูงขึ้นแน่นอน โดยทางนายแพทย์สมบูรณ์ ทรัพย์วงศ์เจริญ ได้มีความต้องการในการร่วมวิจัยกันระหว่างโรงพยาบาลราชวิถี และโรงพยาบาลในเครือ กับกลุ่มเครือข่ายวิจัย ของทางสถาบันฯ ที่ได้พัฒนาเครื่องต้นแบบ ซึ่งเป็นเหตุผลในการร่วมวิจัยให้เกิดกลุ่มวิจัย เพื่อพัฒนา การพัฒนาอุปกรณ์เพื่อการรักษาทางจักษุแพทย์โดยใช้คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่สูง โดยทางกลุ่มวิจัยได้มีการประชุมหาความร่วมมือกันในพื้นที่ได้ในระดับหนึ่ง



รูปที่ 1.2 นายแพทย์สมบูรณ์ ผู้เชี่ยวชาญด้านการรักษาโดยใช้คลื่นความถี่ ผู้ร่วมวิจัย จากโรงพยาบาลราชวิถี



รูปที่ 1.3 ทางทีมวิจัยได้สาธิตการใช้งานเครื่องต้นแบบกับนายแพทย์ผู้ร่วมวิจัย ในการพัฒนางานวิจัยร่วมกัน

ทางกลุ่มวิจัยได้มีแนวทางในการทำงานวิจัยที่ชัดเจน โดยมุ่งเน้นในการพัฒนางานวิจัยที่มีคุณค่า โดยได้รับความร่วมมือในการวิจัยจาก นายแพทย์สมบูรณ์ ทรัพย์วงศ์เจริญ และคณะ จากโรงพยาบาลราชวิถีโดยงานวิจัยที่เกิดขึ้นจะเป็นงานวิจัยที่มีคุณค่า โดยเป็นการนำหลักการทางวิศวกรรมมาพัฒนางานวิจัยทางการแพทย์ เป็นงานวิจัยที่สามารถตีพิมพ์ในวารสารที่มี impact factor ที่สูง.

## 1.2 วัตถุประสงค์

1. สร้างงานวิจัยตามทิศทางการวิจัยของสถาบันฯ  
 ทิศทางที่ 1. การวิจัยด้านเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร(ICT) และอิเล็กทรอนิกส์ ซึ่งหมายถึง.....การวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนาองค์ความรู้ด้านเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร....โดยอาศัยหลักของวิทยาการคอมพิวเตอร์....วิศวกรรมไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์ วิศวกรรมชีวการแพทย์.....หรือเทคโนโลยีใหม่ๆ.....โดยกลุ่มวิจัยประกอบด้วยนักวิจัยจาก อิเล็กทรอนิกส์ชีวการแพทย์ และทางด้านโทรคมนาคม ได้นำเอาหลักการทางด้านวิศวกรรม โดยผสมผสานเพื่อให้เกิดงานวิจัยเพื่อสร้างนวัตกรรมที่มีคุณค่าต่อประเทศ...ตามทิศทางการวิจัยของสถาบันฯ
2. เพื่อให้เกิดความร่วมมือในการทำงานของกลุ่มวิจัยภายในสถาบัน และ กับหน่วยงานภายนอก เพื่อพัฒนางานวิจัยให้มีประสิทธิภาพ มีความหลากหลาย
3. สร้างนักวิจัยที่มีประสิทธิภาพในการทำงานวิจัยที่มีคุณค่า ตอนแทนประเทศชาติ

4. เพื่อให้เกิดกลุ่มวิจัยที่มีการนำเสนอผลงานผลงานอย่างต่อเนื่องในวารสารนานาชาติ และ สอดคล้องกับการเป็นมหาวิทยาลัยด้านการวิจัย ของสถาบันฯ
5. เพื่อสร้างและผลิตงานวิจัยให้สอดคล้องกับเป้าหมายการวิจัยของสถาบันฯ
  - ผลิตงานวิจัยและนวัตกรรมเพื่อความเป็นเลิศทางวิชาการ
  - ผลิตงานวิจัยที่สามารถนำไปใช้หรือต่อยอดในเชิงพาณิชย์
  - ผลิตงานวิจัยที่สามารถนำไปแก้ไขปัญหาด้านเศรษฐกิจและสังคม
  - ผลิตงานวิจัยที่รับการจดอนุสิทธิบัตรหรือสิทธิบัตรระดับชาติหรือนานาชาติ

## บทที่ 2

### หลักการและทฤษฎีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์

#### 2.1 บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงพื้นฐานคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหา โดยกล่าวถึงสมการแมกซ์เวลล์ [13] การเดินทางของคลื่นในตัวกลางชนิดต่างๆ พื้นฐานการกระจายความร้อนในเนื้อเยื่อ การหาค่าดูดซับความร้อน และสมการความร้อนทางชีววิทยา (Bio-heat Equation)

#### 2.2 การวิเคราะห์ทางด้านคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในรูปทั่วไปแล้วจะเป็นคลื่นซึ่งเป็นสัญญาณที่มีฮาร์โมนิก (Time – Harmonic Field) หรืออีกนัยหนึ่งคือ เป็นสัญญาณที่มีคาบการแกว่งที่แน่นอน ซึ่งโดยทั่วไปแล้วมักจะแทนด้วยผลรวมของสัญญาณรูปไซน์ที่สามารถใช้ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ เขียนได้ทั้งฟังก์ชันโคซายน์ ฟังก์ชันซายน์ หรือฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียลเชิงซ้อน ถ้าพิจารณาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นสัญญาณโคซายน์ก็จะได้  $\frac{\partial E}{\partial t} = j\omega E$  ในกรณีที่สนามแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นสัญญาณรูปซายน์นั้น สามารถวิเคราะห์ผลของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีต่อตัวกลางได้ง่ายโดยพิจารณาการตอบสนองของช่วงเวลาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีต่อตัวกลางโดยพิจารณาการตอบสนองของช่วงเวลาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นสัญญาณซายน์คงตัว (Steady State) ซึ่งสามารถอนุมานอัตราการเปลี่ยนแปลงกับเวลา  $\frac{\partial}{\partial t}$  คือ การเฉลี่ยด้วยค่า  $j\omega$  ทำให้ได้สมการแมกซ์เวลล์ตามหัวข้อ

2.2.1 ซึ่งเป็นการเขียนในลักษณะเฟสเซอร์

##### 2.2.1 สมการแมกซ์เวลล์ (Maxwell's Equations)

$$\nabla \times H = -\omega \epsilon E + \sigma E \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.3)$$

$$D = \epsilon E \quad (2.4)$$

$$B = \mu H \quad (2.5)$$

เมื่อ  $E$  = สนามไฟฟ้า

$D$  = ฟลักซ์ของสนามไฟฟ้า

$H$  = ความเข้มสนามแม่เหล็ก

$\rho$  = ความหนาแน่นของประจุเชิงบวก

$B$  = สนามแม่เหล็ก

$\epsilon$  = ค่าความยินยอมทางไฟฟ้า

$\mu$  = ค่าความซึมซาบแม่เหล็ก

### 2.2.2. สมการคลื่นสำหรับตัวกลางที่เป็นตัวนำ

เมื่อพิจารณาตัวกลางที่เป็นตัวนำ ในตัวกลางนี้ค่าสภาพนำไฟฟ้าจะเป็นเป็นศูนย์ และมีกระแสการนำเกิดขึ้นซึ่งจากสมการของแมกซ์เวลล์

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad (2.6)$$

$$\nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} + j \quad (2.7)$$

ถ้า  $\sigma$  เป็นสภาพการนำของตัวกลาง จากกฎของโอห์มจะได้ความหนาแน่นกระแสการนำมีค่าดังสมการที่(2.8)

$$j = \sigma E \quad (2.8)$$

ดังนั้น จากสมการ (2.1) และ (2.2) จะได้

$$\nabla \times H = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E \quad (2.9)$$

หาเคิร์ลของสมการ (2.1) จะได้

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\mu \nabla \times \frac{\partial H}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times H$$

แทนค่า  $\nabla \times H$  จากสมการ (2.9) จะได้

$$\nabla \times \nabla \times E = \mu \epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t}$$

แต่

$$\nabla \times \nabla \times E = \nabla (\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$$

ดังนั้น

$$\nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla^2 E - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} = \nabla(\nabla \cdot E) \quad (2.10)$$

สำหรับตัวกลางที่มีค่า  $\epsilon$  มีค่าคงที่

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot D$$

แต่  $\nabla \cdot D = \rho$  เนื่องจากประจุสุทธิของตัวนำอยู่ที่ผิว ภายในตัวนำไม่มีประจุ  $\sigma$  จึงเท่ากับศูนย์

ดังนั้น

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon} \nabla \cdot D = \frac{1}{\epsilon} \rho = 0$$

จากสมการ (2.10) จะได้

$$\nabla^2 E - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} = 0 \quad (2.11)$$

สมการที่ (2.11) คือ สมการคลื่นสำหรับ  $E$  ในทำนองเดียวกัน สามารถหาสมการคลื่นสำหรับ  $H$  ได้โดยหาเคิร์ลของสมการ (2.9) จะได้

$$\nabla \times \nabla \times H = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

สมการ(2.12) คือ สมการคลื่นสำหรับ  $H$

### 2.2.3 สมการของแมกซ์เวลล์ที่แปรเปลี่ยนตามเวลา

ในการปฏิบัติแหล่งกำเนิดส่วนมากจะทำให้ความแตกต่างและกระแสไฟฟ้ารวมทั้งสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กแปรเปลี่ยนตามเวลาเป็นเส้นโค้งรูปไซน์ ตัวอย่างเช่น

$$E = E_0 \cos \omega t = E_0 \cos 2\pi f t$$

หรือ

$$E = E_0 \sin \omega t = E_0 \sin 2\pi f t \quad (2.13)$$

เมื่อเป็นความถี่ของการแปรเปลี่ยนจากสมการ (2.13) แสดงว่าแฟกเตอร์ (Factor) เวลาที่เป็นเส้นโค้งรูปไซน์ปรากฏในทุกพจน์ในสมการใดๆ

เมื่อกำหนดให้  $E(r, t)$  เป็นสนามไฟฟ้าที่แปรเปลี่ยนตามเวลา

$E(r)$  เป็นสนามไฟฟ้าที่จุดๆ หนึ่งในปริภูมิ (space)

จะได้สนามไฟฟ้าที่แปรเปลี่ยนตามเวลามีรูปแบบดังนี้

$$E(r, t) = \text{Re}[E(r)e^{j\omega t}] \quad (2.14)$$

เมื่อ  $E(r)$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน (complex number) ในทำนองเดียวกัน จะได้การขจัดไฟฟ้าความเข้มของสนามแม่เหล็กและสนามแม่เหล็กที่แปรเปลี่ยนตามเวลาดังนี้

$$D(r, t) = \text{Re}[D(r)e^{j\omega t}] \quad (2.15)$$

$$H(r, t) = \text{Re}[H(r)e^{j\omega t}] \quad (2.16)$$

$$B(r, t) = \text{Re}[E(r)e^{j\omega t}] \quad (2.17)$$

เมื่อ  $D(r), H(r), B(r)$  และเป็นจำนวนเชิงซ้อน

พิจารณาจากสมการแมกซ์เวลล์ เคิร์ลของสนามแม่เหล็ก เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} + j \quad (2.18)$$

แทนค่า  $D(r, t)$  และ  $H(r, t)$  จากสมการ (2.15) และ (2.16) ในสมการ (2.18) จะได้

$$\nabla \times [\text{Re} H(r)e^{j\omega t}] = \frac{\partial}{\partial t} [\text{Re} D(r)e^{j\omega t}] + \text{Re}[J(r)e^{j\omega t}]$$

$$\text{Re}[\nabla \times H(r)] = \text{Re}[j\omega D(r) + J(r)]$$

ถ้าความสัมพันธ์นี้เป็นจริงทุกค่าของ  $t$  จะได้

$$\nabla \times H = j\omega D + J \quad (2.19)$$

ในทำนองเดียวกัน จากสมการของแมกซ์เวลล์ เคิร์ลของสนามไฟฟ้าที่แปรเปลี่ยนตามเวลาจะได้

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.20)$$

แทนค่า  $E(r, t)$  และ  $B(r, t)$  จากสมการ (2.15) และ (2.16) ในสมการ (2.20) จะได้

$$\nabla \times [\text{Re} E(r)e^{j\omega t}] = \frac{\partial}{\partial t} [\text{Re} B(r)e^{j\omega t}]$$

$$\operatorname{Re}[\nabla_x E(r)] = -\operatorname{Re}[j\omega B(r)]$$

$$\nabla_x E = -j\omega B \quad (2.21)$$

ดังนั้น สมการของแมกซ์เวลล์ที่แปรเปลี่ยนตามเวลาเป็นเส้นโค้งรูปซายน์ จึงมีรูปแบบดังสมการทั้งสี่ (2.22) ข้างล่าง โดยจัดในรูปแบบอนุพันธ์

$$\nabla \cdot D = \sigma$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla_x E = -j\omega B$$

$$\nabla_x H = j\omega D + J \quad (2.22)$$

#### 2.2.4 การเดินทางของคลื่นในตัวกลางที่ไม่มีการสูญเสีย

สำหรับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่แปรเปลี่ยนตามเวลาเป็นเส้นโค้งรูปซายน์ สมการคลื่นสำหรับสนามไฟฟ้าในตัวกลางที่ไม่มีการสูญเสียพลังงานมีรูปดังนี้

$$\nabla^2 E = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

แทนค่า  $E(r, t) = \operatorname{Re}[E(r)e^{j\omega t}]$  จะได้

$$\nabla_x [\operatorname{Re} E(r)e^{j\omega t}] = \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\operatorname{Re} B(r)e^{j\omega t}]$$

$$\operatorname{Re} \nabla^2 E(r) = \mu\epsilon \operatorname{Re}(j\omega)^2 E(r)$$

$$\nabla^2 E = -\omega^2 \mu\epsilon E \quad (2.23)$$

เรียกสมการ (2.23) ว่าสมการของเฮล์มโฮลทซ์ ดังนั้นในตัวกลางที่เป็นตัวนำ ถ้าสนามไฟฟ้าแปรเปลี่ยนตามเวลา สมการคลื่น (2.11) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\nabla^2 E + \omega^2 \mu\epsilon E - j\mu\sigma E = 0$$

$$\nabla^2 E + (\omega^2 \mu\epsilon E - j\mu\sigma)E = 0 \quad (2.24)$$

เมื่อ

$$\frac{\partial E}{\partial t} = j\omega E \quad \text{และ} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 E$$

ในทำนองเดียวกัน สมการคลื่นสำหรับสนามแม่เหล็ก  $H$  (2.12) สามารถเขียนได้ในรูปแบบเดียวกัน ดังนี้

$$\nabla^2 E + (\omega^2 \mu \epsilon - j\omega \mu \sigma)H = 0 \quad (2.25)$$

เมื่อ  $\frac{\partial E}{\partial t} = j\omega E$  และ  $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 H$

สำหรับคลื่นระนาบสม่ำเสมอที่ไม่แปรเปลี่ยนตาม  $x$  และ  $y$  สมการคลื่นมีรูปแบบดังนี้

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 \mu \epsilon E$$

หรือ 
$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\beta^2 E \quad (2.26)$$

เมื่อ 
$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

พิจารณาองค์ประกอบ  $E_x(z)$  ผลเฉลยของสมการ (2.26) อาจเขียนอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$E_x(z) = C_1 e^{-j\beta z} + C_2 e^{j\beta z} \quad (2.27)$$

เมื่อ  $C_1$  และ  $C_2$  เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อน (Complex constant) สนามที่แปรเปลี่ยนตามเวลาคือ

$$E_x(z, t) = \text{Re}[E_x(z) e^{j\omega t}]$$

แทนค่า  $E_x(z)$  จากสมการ (2.27) จะได้

$$E_x(z, t) = \text{Re}[C_1 e^{j(\omega t - \beta z)} + C_2 e^{j(\omega t + \beta z)}] \quad (2.28)$$

ถ้าใช้ส่วนจริง (real part) ในสมการ (2.28) ผลเฉลยจะอยู่ในรูปแบบเส้นโค้งไซน์ ตัวอย่างเช่น เมื่อ  $C_1$  และ  $C_2$  เป็นค่าจริง สมการ (2.28) จะกลายเป็น

$$E_x(z, t) = C_1 \cos(\omega t - \beta z) + C_2 \cos(\omega t + \beta z) \quad (2.29)$$

จะเห็นได้ว่าตัวกลางที่เป็นเนื้อเยื่อเดียวกันและไม่สูญเสียพลังงาน ถ้าสมมติว่าการแปรเปลี่ยนตามเวลาเป็นเส้นโค้งรูปไซน์ จะทำให้การแปรเปลี่ยนของปริภูมิ หรือพิทัดเป็นเส้นโค้งรูปไซน์ด้วย

สมการ (2.28) และ (2.29) แทนสนามไฟฟ้าที่เป็นผลบวกของคลื่น 2 ขบวนที่เคลื่อนที่ในทิศตรงข้าม ถ้า  $C_1 = C_2$  คลื่นเดินทาง (traveling wave) ทั้ง 2 ขบวนจะรวมกันเป็นคลื่นนิ่ง (standing wave) โดยความเร็วคลื่นหรือความเร็วเฟส (phase velocity) มีค่าดังนี้

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{\omega}{\beta}$$

ถ้า  $f$  เป็นความถี่ของคลื่น

$\lambda$  เป็นความยาวของคลื่น

จะได้

$$V = f\lambda = \frac{\omega}{\beta}$$

แต่

$$\omega = 2\pi f$$

ดังนั้น

$$V = f\lambda = \frac{2\pi f}{\beta}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.30)$$

เรียก  $\beta$  ว่า ค่าคงที่ทางเฟส (phase constant) ของคลื่น

### 2.2.5 การเดินทางของคลื่นในตัวกลางที่เป็นตัวนำ

สำหรับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่แปรเปลี่ยนตามเวลาเป็นเส้นโค้งรูปไซน์ สามารถหาผลเฉลยของสมการคลื่นในตัวกลางที่เป็นตัวนำได้ สมการคลื่น (2.24) สามารถเขียนในรูปแบบสมการของเฮล์มโฮลทซ์ ได้ดังนี้

$$\nabla^2 E - \gamma^2 E = 0 \quad (2.31)$$

เมื่อ

$$\gamma^2 = j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon = j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon) \quad (2.32)$$

เรียก  $\gamma$  ว่าค่าคงตัวการแผ่ (Propagation constant) โดย  $\gamma$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งมีส่วนจริง (real) คือ  $\alpha$  โดยมีหน่วยเป็น Neper/m เป็นส่วนจินตภาพ (imaginary part) มีหน่วยเป็น radian/m คือ  $\beta$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

เมื่อ

$$\alpha = \text{Re}\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

และ

$$\beta = \text{Im}\sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

เรียก  $\alpha$  ว่า ค่าคงที่ของการลดทอน (Attenuation constant) ตามความเป็นจริงแล้ว รากที่สองของ  $\gamma^2$  มี 2 ค่า คือ ค่าที่เป็น บวกค่าที่เป็นลบ แต่เพื่อความสะดวกจะต้องใช้ค่าที่เป็นบวก เมื่อพิจารณาคลื่นระนาบสม่ำเสมอที่เคลื่อนที่ในทิศ  $z$  สนามไฟฟ้าต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

$$\frac{\partial E}{\partial z^2} = \gamma^2 E \quad (2.33)$$

ผลเฉลยที่เป็นไปได้คือ

$$E(z) = E_0 e^{-\gamma z} \quad (2.34)$$

ในรูปแบบการแปรเปลี่ยนตามเวลา จะได้

$$E(z, t) = \text{Re}[E_0 e^{j(\omega t - \beta z)}] \quad (2.35)$$

สมการ (2.35) คือ ผลเฉลยของสมการของคลื่นที่ในทิศ  $z$  และมีสนามไฟฟ้าลดลง โดยแฟกเตอร์  $e^{-\alpha z}$  ตามระยะทางที่เพิ่มขึ้น เช่นเดียวกันกรณีของตัวกลางที่ไม่มีการสูญเสียพลังงานค่าคงตัวของ การเลื่อนเฟส และความเร็วเฟสของคลื่นมีค่าดังนี้

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{และ} \quad V = f\lambda = \frac{\omega}{\beta}$$

นอกจากนี้ยังสามารถเขียน  $\alpha$  และ  $\beta$  เป็นพจน์ของ  $\alpha, \mu$  และ  $\epsilon$  ดังนี้

$$\alpha = \text{Re} \sqrt{(j\omega\mu)(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}\right)} - 1 \right] \quad (2.36)$$

$$\beta = \text{Im} \sqrt{(j\omega\mu)(\sigma + j\omega\epsilon)}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[ \sqrt{\left(1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}\right)} + 1 \right] \quad (2.37)$$

## 2.2.6 ตัวนำและไดอิเล็กตริก

ในทางแม่เหล็กไฟฟ้า วัสดุถูกแบ่งออกเป็น 2 พวก คือ ตัวนำ และ ไดอิเล็กตริกหรือฉนวน (Insulator) เส้นแบ่งระหว่าง 2 พวกนี้ไม่ชัดเจน ตัวอย่างเช่น โลหะ ในช่วงของความถี่วิทยุจัดเป็นตัวนำแต่ช่วยอื่นจัดเป็นไดอิเล็กตริก พิจารณาสมการของแมกซ์เวลล์ที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา

$$\nabla \times H = J + j\omega D$$

แทนค่า  $J = \sigma E$  และ  $D = \epsilon E$  จะได้

$$\nabla \times H = \sigma E + j\omega \epsilon E$$

พจน์แรกทางขวาของสมการ คือ ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า (Conduction current density) และพจน์ที่สอง คือ ความหนาแน่นกระแสการขจัด (Displacement current density) อัตราส่วน  $\frac{j}{\omega D} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon}$  คือ อัตราส่วนระหว่างความหนาแน่นกระแสการนำ และความหนาแน่นกระแสการขจัดใน

ตัวกลางเรียกอัตราส่วนนี้ว่า แฟกเตอร์การกระจาย (dissipation factor) ดังนั้น  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} = 1$  คือ เส้นที่แบ่ง

ระหว่างตัวนำและไดอิเล็กตริก สำหรับตัวนำ  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} > 1$  ส่วนไดอิเล็กตริก  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} < 1$

สำหรับตัวนำที่ดี เช่น โลหะ ในช่วงสเปกตรัมความถี่วิทยุ  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \gg 1$  จากสมการ (2.36) และ (2.37) จะได้

$$\alpha = \beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \sigma}{2\omega}} = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}$$

ตัวอย่างเช่น ถ้าพิจารณาทองแดง ที่มีค่าความถี่สูงถึง 30,000 เมกกะเฮิร์ตซ์  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$  มีค่าประมาณ  $3.5 \times 10^8$

สำหรับไดอิเล็กตริกหรือฉนวนที่ดี ในช่วงความถี่  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \ll 1$  ตัวอย่างเช่น ไมกาในช่วงความถี่วิทยุ ที่คนได้ยิน  $\frac{\sigma}{\omega \epsilon}$  อยู่ในระดับ 0.0002

สำหรับตัวนำที่ดี  $\sigma$  และ  $\epsilon$  เกือบจะไม่ขึ้นกับความถี่ แต่สำหรับไดอิเล็กตริก  $\sigma$  และ  $\epsilon$  เป็นฟังก์ชันของความถี่ แต่อัตราส่วน  $\sigma/\omega \epsilon$  เป็นค่าคงที่ในช่วงความถี่ที่พิจารณา ด้วยเหตุผลนี้สมบัติของไดอิเล็กตริกถูกกำหนดด้วยพจน์ของค่าคงตัวไดอิเล็กตริก  $\sigma$  และอัตราส่วน  $\sigma/\omega \epsilon$

### 2.2.7 การเดินทางของคลื่นในไดอิเล็กตริกที่ดี

กรณีของไดอิเล็กตริกที่ดี  $\sigma/\omega \epsilon \ll 1$  ดังนั้นจากการใช้ทฤษฎีบทไบนอมิเยล (binomial theorem)

$$\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}} = 1 + \frac{\sigma^2}{2\omega^2 \epsilon^2}$$

ซึ่งมีเพียงสองพจน์แรกของการขยายไบนอมิเยลเท่านั้น จากสมการ (2.36) จะได้  $\alpha$  มีค่าดังนี้

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{2\omega^2\epsilon^2} \right) - 1 \right]$$

$$\alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (2.38)$$

ในทำนองเดียวกัน จากการใช้ทฤษฎีบทไบนอมิเยล พจน์สำหรับ  $\beta$  จากสมการ (2.37) มีค่าดังนี้

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{2\omega^2\epsilon^2} \right) + 1 \right]$$

$$\beta = \omega \sqrt{\omega\epsilon} \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{4\omega^2\epsilon^2}}$$

จากการใช้ทฤษฎีบทไบนอมิเยลอีกครั้งจะได้

$$\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon \left[ 1 + \frac{\sigma^2}{8\omega^2\epsilon^2} \right]} \quad (2.39)$$

$\omega \sqrt{\mu\epsilon}$  คือ แฟกเตอร์การเลื่อนเฟส (phase factor) สำหรับไดอิเล็กทริกสมบูรณ์ (perfect dielectric) ถ้า  $v$  เป็นความเร็วคลื่นในไดอิเล็กทริก  $v$  มีค่าดังนี้

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon \left[ 1 + \frac{\sigma^2}{8\omega^2\epsilon^2} \right]}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left[ 1 + \frac{\sigma^2}{8\omega^2\epsilon^2} \right]^{-1/2}$$

$$v = v_0 \left[ 1 - \frac{\sigma^2}{8\omega^2\epsilon^2} \right] \quad (2.40)$$

เมื่อ  $V_0 = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$  เป็นความเร็วของคลื่นในไดอิเล็กทริกเมื่อสภาพนำไฟฟ้าเป็นศูนย์ ผลของการสูญเสียพลังงานเพียงเล็กน้อย ทำให้ความเร็วของการแผ่คลื่นลดลง

สำหรับความต้านทานเชิงซ้อนในตัว หรือความต้านทานเชิงซ้อนเฉพาะ  $z$  ของตัวกลางที่เป็นตัวนำบางส่วน ซึ่งมีค่าสภาพนำคงที่ และสนามแปรเปลี่ยนตามเวลา นิพจน์ทั่วไปของ  $z$  มีค่าดังนี้

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[ \frac{1}{1 + \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}} \right] \quad (2.41)$$

จะเห็นได้ว่าในตัวนำที่ดี (Good conductor)  $\sigma$  มีค่ามากกว่า  $\omega\epsilon$  มากๆ ซึ่งหมายความว่า  $\alpha$ ,  $\beta$  และ  $\gamma$  มีค่ามากด้วย แสดงว่าคลื่นจะลดลงมากเมื่อเคลื่อนที่ผ่านตัวนำ และการเลื่อนเฟสต่อหนึ่งหน่วยความยาวมีค่ามาก ความเร็วของคลื่นซึ่งเป็นปฏิภาคผกผันกับ  $\beta$  จะมีค่าน้อยในตัวนำที่ดี ส่วนความต้านทานเชิงซ้อนเฉพาะมีค่าน้อย มุมของความต้านทานเชิงซ้อนมีค่า  $45^\circ$  เสมอสำหรับตัวนำที่ดี

$$z = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \angle 45^\circ = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} e^{j\pi/4} \quad (2.42)$$

สำหรับฉนวนสมบูรณ์  $\sigma = 0$  จากสมการ (2.41) จะได้

$$z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (2.43)$$

สำหรับสุญญากาศ  $Z = Z_0$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \quad (2.44)$$

### 2.2.8 การเดินทางของคลื่นในตัวกลางกึ่งไดอิเล็กตริกกึ่งตัวนำ

สารกึ่งไดอิเล็กตริกกึ่งตัวนำ คือสารไดอิเล็กตริกที่มีสภาพการนำไฟฟ้าสูงพอประมาณ โดยมีค่า  $\alpha$  อยู่ระหว่าง  $0.01 \approx 100$  เท่าของ  $\epsilon$  ค่าคงที่ของการเคลื่อนที่  $\gamma$  ( $\alpha$  กับ  $\beta$ ) และค่าอิมพีแดนซ์ของสาร  $z$  จะได้ค่าสุดท้ายเป็นจำนวนเชิงซ้อนค่าหนึ่ง ซึ่งสามารถจะนำมาหาค่าสัมประสิทธิ์การลดทอน  $\alpha$  ค่าคงที่ทางเฟส  $\beta$  ตามลำดับดังนี้

$$\alpha = \text{Re} \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \quad (2.45)$$

$$\beta = \text{IM} \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} \quad (2.46)$$

และอิมพีแดนซ์ของเนื้อสาร  $Z$

$$Z = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \quad (2.47)$$

### 2.2.9 การเดินทางของคลื่นในตัวกลางที่เป็นเนื้อเยื่อ

เนื้อเยื่อปอดจัดเป็นตัวกลางที่มีค่าคงที่ประจำตัวกลาง เป็นตัวกลางชนิดกึ่งไดอิเล็กทริกกึ่งตัวนำ จากสมการของเฮล์โฮลตซ์ (Helmholtz) ในฟรีสเปซความสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้าจะได้สมการที่ (2.48)

$$\nabla^2 E + \omega^2 \mu \epsilon E = 0 \quad (2.48)$$

ในกรณีที่ตัวกลางมีสภาพนำไฟฟ้าจำกัดที่ค่าๆ หนึ่ง เช่น คลื่นเดินทางผ่านตัวกลางที่เป็นเนื้อเยื่อจะได้รับความสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้าดังสมการที่ (2.49)

$$\nabla^2 E + \omega^2 \mu \epsilon \left(1 + j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right) E = 0 \quad (2.49)$$

และสมการหาสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นเมื่อให้คลื่นเดินทางในทิศทาง+z

$$E = E_0 e^{-j\gamma z} \quad (2.50)$$

เมื่อกำหนดให้  $\gamma$  มีค่าดังสมการที่ (2.51)

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)} = \omega\sqrt{\mu\epsilon} \left(j\frac{\sigma}{\omega\epsilon} - 1\right) \quad (2.51)$$

โดยที่  $\gamma$  เป็นค่าคงที่ในการเดินทางของคลื่น

$\alpha = \text{Re}(\gamma)$  สัมประสิทธิ์ในการลดทอนของคลื่น

$\beta = \text{IM}(\gamma)$  ค่าคงที่ทางเฟส

สามารถหาสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นได้ดังสมการที่ (2.52)

$$H = \frac{\gamma}{j\omega\mu} (E_0 e^{-j\gamma z}) \quad (2.52)$$

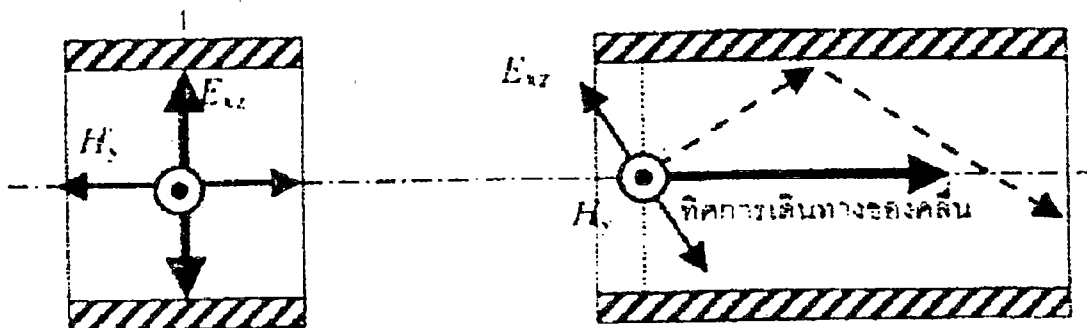
### 2.3 โหมดสำหรับการเดินทางของคลื่น (Wave Propagation Mode)

คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในสายส่งใดๆ นั้นจะมีลักษณะโหมดการเคลื่อนที่หรือลักษณะการเคลื่อนที่ภายในสายส่งนั้นจะขึ้นอยู่กับลักษณะการพุ่งเข้าของคลื่นและรูปทรงภาคตัดขวางของสายส่งสัญญาณไฟฟ้านั้น โดยแต่ละโหมดจะมีรูปแบบของสนามไฟฟ้าที่มีรูปร่างลักษณะที่สอดคล้องกับภาคตัดขวางภายในของสายนั้นๆ ซึ่งในทางคณิตศาสตร์แล้วจะเปรียบเหมือนรูปทรงภาคตัดขวางว่าเป็นเงื่อนไขขอบเขต (Boundary Conditions) ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่อยู่ภายในสายส่งสัญญาณไฟฟ้านั้นๆ สนามแม่เหล็กภาคตัดขวาง (Transverse fields) ที่เกิดขึ้นมานี้จะมีรูปแบบของสนามเฉพาะตัวที่เรียกว่า โหมดภาคตัดขวาง (transverse mode) โดยทั่วไปแล้วสายส่งสัญญาณได้จำแนกตามประเภทของโหมดการเคลื่อนที่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าโดยจำแนกออกเป็นโหมดพื้นฐานได้สามแบบ คือ

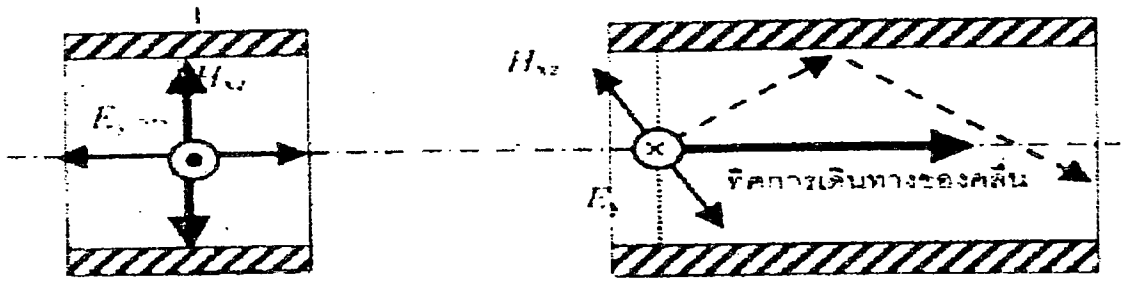
ก) โหมดสนามแม่เหล็กตัดขวาง (Transverse Magnetic Mode :TM Mode) เป็นโหมดที่คลื่นเคลื่อนที่ไปตามตัวกลางโดยมีส่วนประกอบของสนามแม่เหล็กเท่านั้นที่มีการตั้งฉากกับทิศทางการเดินทางของคลื่นในสายส่งนั้นหรืออีกนัยหนึ่ง คือคลื่นจะเคลื่อนที่ไปตามตัวกลางโดยไม่มีสนามแม่เหล็กในทิศทางของคลื่นในสายส่ง รูปประกอบอธิบายได้ในรูปที่ 2.1(ก)

ข) โหมดสนามไฟฟ้าตัดขวาง (Transverse Electric Mode :TE mode) เป็นโหมดที่คลื่นเคลื่อนที่ไปตามตัวกลางโดยมีส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าเท่านั้นที่ตั้งฉากกับทิศทางการเดินทางของคลื่นในสายส่งนั้นหรืออีกนัยหนึ่งคือคลื่นจะเคลื่อนที่ไปตามตัวกลางโดยไม่มีสนามแม่เหล็กในทิศทางการเดินทางของคลื่นในสายส่ง รูปประกอบอธิบายได้ในรูปที่ 2.1(ข)

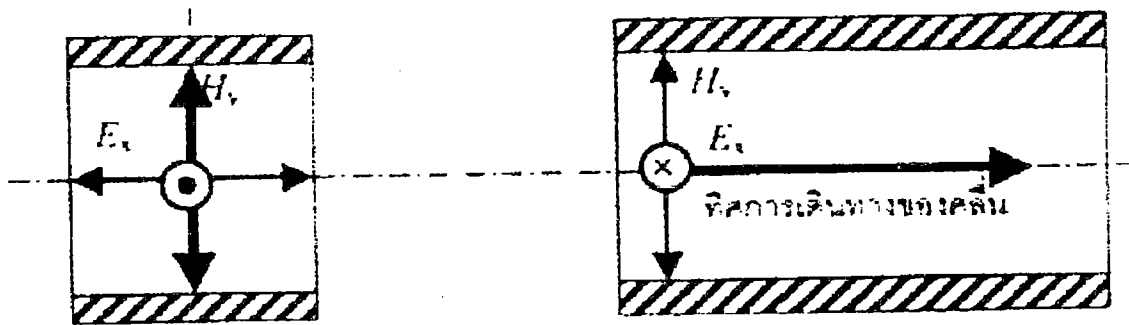
ค) โหมดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตัดขวาง (Transverse Electromagnetic Mode :TEM mode) เป็นโหมดที่คลื่นเคลื่อนที่ไปตามตัวกลาง โดยมีส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในทิศทางตั้งฉากกับทิศทางการเดินทางของคลื่นในสายส่งนั้น หรืออีกนัยหนึ่งคือคลื่นจะเคลื่อนที่ออกไปตามตัวกลางโดยไม่มีสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในทิศทางการเดินทางของคลื่นในสายส่งเลย รูปประกอบอธิบายได้ในรูปที่ 2.1(ค) โดยทั่วไปแล้วการเคลื่อนที่ในโหมดนี้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจะต้องมีความสมมาตรกันหมด ดังเช่น คลื่นเคลื่อนที่ในอวกาศ ในสายโคแอกเซียล (Coaxial) และสายส่งอื่นๆในรูปที่ 2.1(ก) แต่อาจมีโอกาที่สนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นมีความสมมาตรไม่สมบูรณ์หมดดังเช่นคลื่นที่เคลื่อนที่ในสายส่งแบบไมโครสตริป (Microstrip) ในรูปที่ 2.1(ก) จึงเรียกโหมดย่อยนี้ว่า โหมดกึ่งสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตัดขวาง (Quasi-TEM)



(ก) การเคลื่อนที่ของคลื่นในโหมดสนามแม่เหล็กตัดขวาง(TM mode)



(ข) การเคลื่อนที่ของคลื่นในโหมดสนามไฟฟ้าตัดขวาง (TE mode)



(ค) การเคลื่อนที่ของคลื่นในโหมดสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตัดขวาง (TEM mode)

รูปที่ 2.1 สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กกับทิศการเดินของคลื่นในโหมดการเคลื่อนที่แบบต่างๆ

ตัวอย่างของโหมดการเคลื่อนที่ทั้งสามแบบของคลื่นที่เคลื่อนที่ในแผ่นตัวนำคลื่นรูปเหลี่ยมนี้ (Slab Waveguide) ได้แสดงดังในรูปที่ 2.1

ในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในสายส่งนั้น โดยทั่วไปแล้วจะต้องหาสมการคำตอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กบนแกนต่างๆ ในที่ว่างอิสระทั้งหมดทหสนามด้วยกัน คือ  $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y$  และ  $H_z$  แต่เมื่อมาทำการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของคลื่นในสายส่งสัญญาณแล้วสามารถที่จะกำหนดรูปแบบโหมดการเคลื่อนที่เพื่อที่จะลดจำนวนองค์ประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่จะคำนวณลงไปได้ เช่น ในกรณีที่คลื่นเคลื่อนที่ไปในทิศ  $z$  ในโหมด TM สามารถไม่นำ  $H_z$  (โดยมี  $H_z = 0$ ) มาพิจารณาจึงเหลือส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและแม่เหล็กทั้งหมดห้าสนามด้วยกัน คือ  $E_x, E_y, H_x, H_y$  และ  $H_z$  ในทำนองเดียวกันในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของคลื่นในโหมด TE จะเหลือส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กทั้งหมดห้าสนามด้วยกันคือ  $E_x, E_y, H_x, H_y$  และ  $H_z$  (โดยมี  $E_z = 0$ ) สำหรับการเคลื่อนที่ของคลื่นในโหมดสุดท้ายหรือโหมด TEM จะไม่มีสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กในทิศทาง

เคลื่อนที่หรือมีสนาม  $E_z$  กับ  $H_z = 0$  จึงเหลือสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเพียงแค่สี่สนามคือ  $E_x, E_y, H_x$  และ  $H_y$  เท่านั้น

นอกจากนี้แล้วการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของโหมดต่างๆ สามารถทำให้ง่ายมากยิ่งขึ้น ถ้าสมมติการวิเคราะห์คลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้านั้นมีสนามแม่เหล็กหรือสนามไฟฟ้าสนามใดสนามหนึ่งอยู่บนหลักต่างๆ นั่นคือ แกน  $x$  หรือ แกน  $y$  แล้วจะทำให้สามารถลดจำนวนสนามลงบนระนาบ  $xy$  สี่สนาม  $E_x, E_y, H_x$  และ  $H_y$  ลงมาเหลือเป็น  $E_x$  กับ  $H_y$  หรือ  $E_y$  กับ  $H_x$  เพียงแค่สองสนามเท่านั้น ดังนั้นสำหรับในกรณีที่คลื่นเคลื่อนที่ไปในทิศ  $z$  ในโหมด TM จะมีส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กทั้งหมดที่ต้องพิจารณาเหลือเพียงสามสนามด้วยกัน คือ  $E_x$  กับ  $E_z, E_y$  เพียง  $H_x$  กับ  $E_z$  เช่นเดียวกันสำหรับในกรณีที่คลื่นเคลื่อนที่ไปในทิศ  $z$  ในโหมด TE จะมีส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กทั้งหมดที่ต้องพิจารณาเหลือเพียงสามสนามด้วยกัน คือ  $E_x, H_y$  กับ  $E_z, E_y$  เพียง  $H_x$  กับ  $E_z$  เช่นเดียวกันสำหรับในกรณีที่คลื่นเคลื่อนที่ไปในทิศ  $z$  ในโหมด TE จะมีส่วนประกอบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กทั้งหมดที่ต้องพิจารณาเหลือเพียงสามสนามด้วยกัน คือ  $E_x, H_y$  กับ  $H_z$  หรือ  $E_y, H_x$  กับ  $E_z$  ในทำนองเดียวกันการวิเคราะห์ของคลื่นในสายส่งเป็นคลื่นที่อยู่ในรูปของโหมด TEM สามารถทำการวิเคราะห์ได้ง่ายที่สุดโดยมีสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเพียงแค่  $E_x$  กับ  $H_y$  หรือ  $E_y$  กับ  $H_x$  เพียงแค่คู่สนามเดียวเท่านั้น เราจึงมักเริ่มทำการวิเคราะห์หาสมการของคลื่นที่โหมด TEM ก่อนเสมอเนื่องจากเป็นโหมดที่ง่ายที่สุด

## 2.4 สนามไฟฟ้าในช่องว่างวัสดุ (Electric Fields in Material Space)

การพิจารณาถึงสนามไฟฟ้าสถิตในช่องว่างอวกาศว่าง (free space) หรือสุญญากาศ (Vacuum) หรือบริเวณที่ไม่มีวัสดุอยู่ (no material) ได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 4 ในบทนี้เราจะพัฒนาขึ้นไปอีก สนามไฟฟ้าสามารถเกิดขึ้นได้ในอวกาศว่าง มันอาจจะเกิดขึ้นได้ในตัวกลางวัสดุ (material media) เช่น ตัวกลางที่เป็นกระดาษ ฯลฯ ที่คั่นอยู่ระหว่างขั้วทั้งสองตัวเก็บประจุ เราจะเรียกว่าเป็นตัวกลางวัสดุ วัสดุอาจถูกจำแนกอย่างคร่าวๆ ตามคุณสมบัติของไฟฟ้าของมันได้ ดังเช่น ตัวนำไฟฟ้า (Conductor) และตัวไม่นำไฟฟ้า (nonconductor) ซึ่งไม่นำไฟฟ้าหรือวัสดุไม่นำไฟฟ้า (nonconducting material) โดยปกติจะเรียกว่า ตัวฉนวน (insulator) หรือไดอิเล็กตริก (Dielectric) และโดยทั่วไป การพิจารณาอย่างคร่าวๆ ถึงคุณสมบัติทางไฟฟ้าของวัสดุจะขึ้นอยู่กับพื้นฐานความเข้าใจถึงแนวความคิดเกี่ยวกับการนำ (conduction), กระแสไฟฟ้า (Electric current) และการโพลาไรซ์ (polarization) และนอกจากนั้นก็ต้องพิจารณาถึงคุณสมบัติของวัสดุไดอิเล็กตริก (dielectric materi)

### 2.4.1 วัสดุตัวกลาง (Material Media) ในสนามไฟฟ้าสถิต (Static Electric Field)

เราได้พิจารณาถึงสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจากการกระจายของประจุอยู่กับที่ในอากาศหรืออวกาศว่างมาแล้ว และจากนี้ไปเราจะได้ศึกษาถึงพฤติกรรมของสนามในวัสดุตัวกลาง (material media) โดยทั่วไป

เราสามารถจำแนกวัสดุตามคุณสมบัติทางไฟฟ้าได้เป็นสามชนิด คือ ตัวนำ (conductor) สารกึ่งตัวนำ (semiconductor) และตัวฉนวน (insulator หรือ dielectric) ตามการพิจารณาข้างต้นเราได้ทราบแล้วว่า การที่วัสดุจะเป็นตัวนำสารกึ่งตัวนำ หรือตัวนำฉนวนนั้น จะขึ้นอยู่กับอิเล็กตรอนอิสระที่เคลื่อนที่จากอะตอมหนึ่งไปยังอีกอะตอมหนึ่ง

#### 2.4.2 ตัวนำ (Conductors) ในสนามไฟฟ้าสถิต

โดยทั่วไปแล้วปัญหาแม่เหล็กไฟฟ้าจะเกี่ยวข้องกับตัวกลางที่มีคุณสมบัติทางฟิสิกส์หลายอย่างและยังต้องทราบถึงความสัมพันธ์ของปริมาณสนามที่ขอบร่วม (interface) ระหว่างสองตัวกลาง ดังเช่น เราอาจจะต้องการหาวิธีการที่  $E$  และ  $D$  เปลี่ยนไปตรงขอบร่วม ซึ่งเราทราบมาแล้วว่าเงื่อนไขขอบจะต้องสอดคล้องที่ขอบร่วมระหว่างตัวนำกับอากาศว่าง และเงื่อนไขเหล่านี้ได้กำหนดไว้ในสมการที่ (2.53) และ (2.54)

$$\vec{E}_t = 0 \quad (2.53)$$

$$\vec{E}_n = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \quad (2.54)$$

#### 2.4.3 ไดอิเล็กทริก (Dielectrics) ในสนามไฟฟ้าสถิต

ตัวกลางวัสดุทุกชนิดจะประกอบไปด้วยอะตอมที่มีนิวเคลียสประจุบวกถูกล้อมรอบด้วยอิเล็กตรอนประจุลบ ถึงแม้ว่าโมเลกุลของไดอิเล็กทริกจะเป็นกลางแบบมาโครสโคปิก (macroscopically neutral) แต่การมีสนามไฟฟ้าอยู่ภายนอกจะเป็นเหตุทำให้เกิดแรงกระทำบนแต่ละอนุภาคประจุ และเป็นเหตุทำให้เกิดการเข้าแทนที่กันของประจุบวกและประจุลบในระยะสั้นๆ ในทิศทางตรงข้ามกัน ซึ่งประจุเหล่านี้คือประจุผูกพัน (bound charge) การเข้าแทนที่กันถึงแม้ว่าจะเป็นระยะสั้นๆ เมื่อเปรียบเทียบกับขนาดของอะตอม การเป็นขั้วหรือโพลาไรซ์ (polarize) ของวัสดุไดอิเล็กทริกจะเข้ามาเกี่ยวข้อง และได้โพลไฟฟ้า (electric dipole) จะเกิดขึ้นเสมอ ตำแหน่งในการเคลื่อนที่ดังกล่าวนี้ได้แสดงไว้ดังรูปที่ 2.2 ซึ่งในขณะที่ได้โพลไฟฟ้าเกิดขึ้นนั้นศักย์ไฟฟ้า และความเข้มสนามไฟฟ้าจะต้องปรากฏขึ้นด้วย



รูปที่ 2.2 ภาคตัดขวางของตัวกลางไดอิเล็กทริกโพลาไรซ์

#### 2.4.4 เงื่อนไขขอบ (Boundary Condition) ของสนามไฟฟ้าสถิต (Electrostatic Field)

จากนี้ไปเราจะพิจารณาถึงสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในตัวกลางไม่เอกพันธ์ (nonhomogeneous medium) ดังเช่นสนามที่เกิดขึ้นในบริเวณที่ประกอบด้วยสองตัวกลางที่ต่างกัน ทั้งนี้เงื่อนไขต่างๆ ที่สนามจะต้องสอดคล้องที่ขอบรวมซึ่งแยกระหว่างตัวกลางทั้งสอง เรียกเงื่อนไขว่า เงื่อนไขขอบ (boundary condition) เงื่อนไขต่างๆ เหล่านี้จะเป็นประโยชน์ในการหาสนามบนด้านหนึ่งถ้ารู้สนามบนอีกด้านหนึ่งของขอบ เงื่อนไขจะช่วยให้เราจำแนกชนิดของวัสดุได้อย่างชัดเจนว่าเป็นตัวกลางอะไร เราจะพิจารณาเงื่อนไขขอบที่การแยกขอบรวมระหว่าง

1. ไดอิเล็กตริก  $E_{r_1}$  และไดอิเล็กตริก  $E_{r_2}$
2. ตัวนำไฟฟ้า และไดอิเล็กตริก
3. ตัวนำไฟฟ้า และอากาศว่าง

ซึ่งก่อนที่จะพิจารณาขอบรวมทั้งสามข้างต้น ในการกำหนดเงื่อนไขขอบ เราต้องใช้สมการของแมกซ์เวลล์สำหรับสนามไฟฟ้าสถิตคือ

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (2.55)$$

สมการที่ (2.54) เป็นสมการสนามไฟฟ้าสถิต  $E$  ของแมกซ์เวลล์ ซึ่ง  $\oint_L$  เป็นการอินทิเกรตวิถีปิด (close path) และ

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{enc} \quad (2.56)$$

สมการที่ (2.55) เป็นสมการสนามไฟฟ้าสถิต  $\vec{D}$  ของแมกซ์เวลล์ซึ่ง  $\oint_L$  เป็นการอินทิเกรตพื้นผิวปิด (close surface) และในเวลาเดียวกันเราจะต้องแยกความเข้มสนามไฟฟ้า ออกเป็นสองส่วนประกอบตั้งฉาก (orthogonal component) คือ

$$\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_n \quad (2.57)$$

เมื่อ  $E_t$  คือส่วนประกอบแนวสัมผัส (tangential component) กับขอบรวมและ  $E_n$  คือส่วนประกอบแนวตั้งฉาก (normal component) กับขอบรวม และในลักษณะเดียวกันนี้เราสามารถแยกความหนาแน่น ฟลักซ์ไฟฟ้า  $D$  ออกเป็นสองส่วนประกอบด้วย

#### 2.4.5 เงื่อนไขขอบระหว่างไดอิเล็กตริกกับไดอิเล็กตริก (Dielectric-Dielectric Boundary Condition)

พิจารณาสนาม  $E$  ที่เกิดขึ้นในบริเวณที่ประกอบด้วยไดอิเล็กตริกสองชนิด ซึ่งกำหนดคุณลักษณะของไดอิเล็กตริกที่ 1 ด้วย  $\epsilon_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1}$  และคุณลักษณะของไดอิเล็กตริกที่ 2 กำหนดด้วย  $\epsilon_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2}$  ดังแสดงในรูปที่ 2.3(ก)  $\vec{E}_1$  และ  $\vec{E}_2$  เป็นสนามไฟฟ้าในตัวกลางที่ 1 และตัวกลางที่ 2 เราสามารถแยกสนามไฟฟ้าได้คือ

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1t} + \vec{E}_{1n} \quad (2.58)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2t} + \vec{E}_{2n} \quad (2.59)$$

ประยุกต์ใช้สมการที่ (2.57) กับวิถีปิด abcda ของรูปที่ 2.3(ก) โดยสมมติให้วิถีมีขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับการเปลี่ยนแปลงของ  $E$  จะได้

$$0 = \vec{E}_{1t} \Delta w - \vec{E}_{1n} \left(\frac{\Delta h}{2}\right) - \vec{E}_{2n} \left(\frac{\Delta h}{2}\right) - \vec{E}_{2t} \Delta w + \vec{E}_{2n} \left(\frac{\Delta h}{2}\right) + \vec{E}_{1n} \left(\frac{\Delta h}{2}\right) \quad (2.60)$$

เมื่อ  $\vec{E}_t = |E_t|$  และ  $\vec{E}_n = |E_n|$  ในขณะที่  $\Delta h$  เข้าสู่อันต์ (วิถีขนาดเล็กมาก) สมการที่ (2.60) จะเปลี่ยนเป็น

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$$

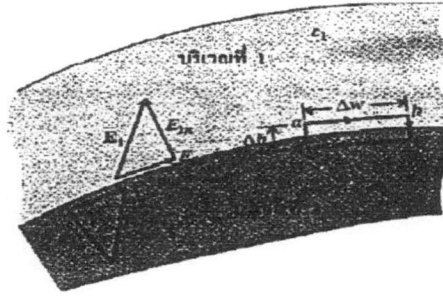
ส่วนประกอบแนวสัมผัสในตัวกลางที่ 1 ( $\vec{E}_{1t}$ ) เหมือนกับ

ส่วนประกอบแนวสัมผัสในตัวกลางที่ 2 ( $\vec{E}_{2t}$ )

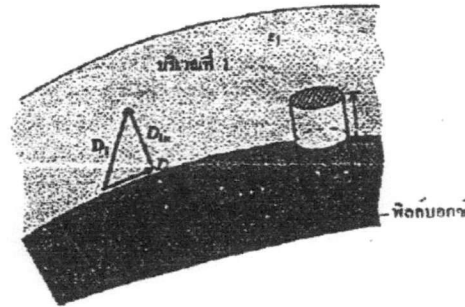
(2.61)

ดังนั้นส่วนประกอบแนวสัมผัสของ  $E$  บนด้านทั้งสองของขอบจะเหมือนกัน ( $\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}$ ) หรืออาจหมายถึงว่า  $E_t$  จะไม่เปลี่ยนแปลงบนขอบและจะกล่าวได้ว่า  $\vec{E}_t$  ต่อเนื่อง (continuous) ตรงบริเวณขอบเนื่องจาก  $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon \vec{E}_1 + \epsilon \vec{E}_2 = \vec{D}_1 + \vec{D}_2$  ดังนั้นจากสมการที่ (2.62) จะกำหนดได้ว่า

$$\frac{\vec{D}_{1t}}{\epsilon_1} = \vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} = \frac{\vec{D}_{2t}}{\epsilon_2} \quad (2.62)$$



(ก)



(ข)

รูปที่ 2.3 ขอบเขตระหว่างไดอิเล็กตริกกับไดอิเล็กตริก

หรือ

$$\frac{\vec{D}_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{\vec{D}_{2t}}{\epsilon_2} \tag{2.63}$$

นั่นคือ  $\vec{D}_t$  จะเปลี่ยนแปลงตรงขอบรวม  $\vec{D}_t$  ดังนั้น กล่าวได้ว่า ไม่ต่อเนื่อง (Discontinuous) ตรงขอบรวม

ในทำนองเดียวกันนี้ เมื่อประยุกต์ใช้สมการที่ (2.57) กับฟิล์มบาง (pillbox) หรือ พื้นผิวแบบเกาส์ (Gaussian surface) ในรูปที่ 2.3 (ข) โดยให้  $\Delta h$  เข้าสู่ศูนย์จะได้ว่า

$$\Delta q = \rho_s \Delta s = \vec{D}_s \Delta S - \vec{D}_s \Delta S \tag{2.64}$$

หรือ

$$\vec{D}_{1n} - \vec{D}_{2n} = \rho_s \tag{2.65}$$

ความแตกต่างระหว่างส่วนประกอบแนวตั้งฉากของ  
ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าในบริเวณที่ 1 และบริเวณที่  
2 เท่ากับความหนาแน่นประจุพื้นผิว  $\rho_s$

เมื่อ  $\rho_s$  เป็นความหนาแน่นประจุอิสระที่อยู่อย่างมั่นคงที่ขอบ สมการที่ (2.65) จะขึ้นอยู่กับพื้นฐานของการสมมติว่า  $\vec{D}$  มีทิศทางจากบริเวณที่ 2 ไปยังบริเวณที่ 1 และสมการที่ (2.65) จะต้องถูกนำมาประยุกต์ใช้ตามนี้ด้วยถ้าไม่มีประจุอิสระเกิดขึ้นที่ขอบร่วม  $\rho_s$  และสมการที่ 2.65 จะกลายเป็น

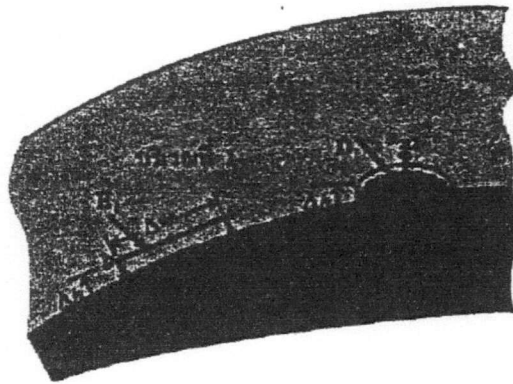
$$\vec{D}_{1t} = \vec{D}_{2t} \quad (2.66)$$

ตรงบริเวณขอบร่วมไม่มีประจุพื้นผิว  $\rho_s$

ดังนั้นส่วนประกอบแนวตั้งฉากของ  $\vec{D}_n$  จึงต่อเนื่องตรงขอบร่วมนั้นคือ  $\vec{D}_n$  จะไม่เปลี่ยนแปลงที่ขอบ เนื่องจาก  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  สมการที่ (2.66) จึงสามารถกำหนดได้ว่า

$$\epsilon_1 \vec{E}_{1n} = \epsilon_2 \vec{E}_{2n} \quad (2.67)$$

สมการที่ (2.67) แสดงให้เห็นว่า ส่วนประกอบแนวตั้งฉากของ  $\vec{E}$  ไม่ต่อเนื่องที่ขอบ สมการที่ (2.63) และ (2.65) หรือ (2.66) จะกล่าวได้อย่างถูกต้องว่าเป็นเงื่อนไขขอบ (boundary conditions) ซึ่งสมการเหล่านี้ต้องสอดคล้องตามสนามไฟฟ้าที่ขอบที่ถูกแยกด้วยไดอิเล็กตริกที่ต่างกันทั้งสอง



รูปที่ 2.4 ขอบร่วมระหว่างสองตัวกลาง

การพิจารณาความเข้มสนามไฟฟ้า  $\vec{E}$  และความหนาแน่นสนามไฟฟ้า  $\vec{D}$  ข้างต้นอาจจะพิจารณาได้จากการอินทิเกรตวิถีปิด (close path) เราลองมาพิจารณาขอบร่วมระหว่างสองตัวกลางทั่วไปในรูปที่ 2.4 ซึ่งถ้าเรามากำหนดวิถีขนาดเล็ก (small path)  $abcda$  ซึ่งประกอบด้วยด้าน  $ab$  ในบริเวณที่ 1 และด้าน  $cd$  ในบริเวณที่ 2 โดยทั้งนี้ด้านทั้งสองจะขนานกับขอบร่วมและยาวเท่ากับ  $\Delta w$  เราจะประยุกต์ใช้สมการที่ (2.56) กับเส้นทางเดิน (วิถี) ขนาดเล็กนี้ ถ้ากำหนดให้  $bc = da = \Delta h$  มีค่าเข้าสู่ศูนย์ ดังนั้นอินทิกรัลตามเส้นทางทั้งสองนี้สามารถตัดทิ้งได้ เพราะฉะนั้นอินทิกรัลตามเส้นบนทางเดิน (วิถี)  $abcda$  คือ

$$\begin{aligned}\oint_{abcd} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{w} + \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{w} \\ &= \vec{E}_{1t} \cdot \Delta\vec{w} + \vec{E}_{2t} \cdot \Delta\vec{w} \\ &= 0\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} V/m$$

เงื่อนไขขอบของส่วนประกอบแนวสัมผัสของ E

(Boundary condition for tangential component of E)

(2.68)

ในสมการที่ (2.68) แสดงให้ทราบว่า ส่วนประกอบแนวสัมผัสของสนาม  $\vec{E}$  ต่อเนื่องตรงบริเวณขอบร่วม (tangential component of an E field is continuous across an interface) เมื่อบริเวณที่ 1 มีสภาพยอมเป็น  $\epsilon_1$  และบริเวณที่ 2 มีสภาพยอมได้ทางไฟฟ้าเป็น  $\epsilon_2$  ดังนั้นสามารถกำหนดได้ว่า

$$\frac{\vec{D}_{1t}}{\epsilon_1} = \frac{\vec{D}_{2t}}{\epsilon_2} \quad (2.69)$$

เพื่อที่จะหาความสัมพันธ์ระหว่างส่วนประกอบแนวฉากของสนามที่ขอบ เราจะต้องสร้างฟิล์มบ็อกซ์ขนาดเล็ก (pillbox) ที่มีผิวด้านบนอยู่ในบริเวณที่ 1 และมีผิวด้านล่างอยู่ในบริเวณที่ 2 ดังแสดงในรูปที่ 2.4 ถ้าผิวมีพื้นที่  $\Delta S$  และความสูงของฟิล์มบ็อกซ์ขนาดเล็กคือ  $\Delta h$  เมื่อประยุกต์ใช้กฎของเกาส์ ในสมการที่ (2.55) กับฟิล์มบ็อกซ์ขนาดเล็กนี้จะได้

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{D} \cdot d\vec{s} &= (\vec{D}_1 \cdot \vec{a}_{n1} + \vec{D}_2 \cdot \vec{a}_{n2}) \Delta S \\ &= a_{n2} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) \Delta S \\ &= \rho_s \Delta S\end{aligned} \quad (2.70)$$

ในสมการข้างต้นเราได้ใช้ความสัมพันธ์  $a_{n2} = -a_{n1}$  โดยที่เวกเตอร์  $a_{n1}$  และ  $a_{n2}$  เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากชี้ออกจากบริเวณที่ 1 และบริเวณที่ 2 ตามลำดับ ซึ่งจากสมการที่ (2.70) เราจะได้ว่า

$$a_{n2} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \quad (2.71)$$

หรือ

$$\vec{D}_1 - \vec{D}_2 = \rho_s \quad C/m^2 \quad (2.72)$$

สมการที่ (2.71) แสดงให้เห็นว่า ส่วนประกอบแนวฉาก (ตั้งฉาก) ของสนามจะไม่ต่อเนื่องตรงบริเวณขอบร่วมที่ซึ่งมีประจุตามพื้นผิวเกิดขึ้น ซึ่งจำนวนที่ไม่ต่อเนื่องจะเท่ากับความหนาแน่นประจุตามพื้นผิว ถ้าบริเวณที่ 2 เป็นตัวนำ  $\vec{D}_2 = 0$  สมการที่ (2.71) จะกลายเป็น

$$\vec{D}_{1n} = \epsilon_2 \vec{E}_{2n} = \rho_s \quad (2.73)$$

ซึ่งเพื่อให้เข้า สมการที่ (2.72) จะกลายเป็น  $\vec{E}_n = \rho_s / \epsilon_0$  เมื่อบริเวณที่ 1 เป็นอากาศว่าง

เมื่อเรานำเอาไดอิเล็กตริกสองอันมาประกบกันโดยไม่มีประจุอิสระที่ขอบร่วมระหว่างไดอิเล็กตริกทั้งสอง  $\rho_s$  ดังนั้น

$$\vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n} \quad (2.74)$$

หรือ

$$\epsilon_1 \vec{E}_{1n} = \epsilon_2 \vec{E}_{2n} \quad (2.75)$$

ตามที่ได้อธิบายข้างต้นเราพอจะสรุปเงื่อนไขขอบที่จะต้องสอดคล้องในกรณีของสนามไฟฟ้าสถิตได้ ดังนี้คือ

<p>ส่วนประกอบแนวสัมผัส <math>\vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t}</math></p> <p>ส่วนประกอบแนวตั้งฉาก <math>a_{n2} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s</math></p>	(2.76)
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------

$$\text{เงื่อนไขขอบของสนามไฟฟ้าสถิต} \quad (2.77)$$

**(Boundary conditions for electrostatic fields)**

ดังที่ได้กล่าวไปแล้วว่า โดยปกติเงื่อนไขขอบจะประยุกต์ใช้หาสนามไฟฟ้าบนด้านหนึ่งเมื่อทราบสนามไฟฟ้าบนอีกด้านหนึ่งของขอบ และนอกจากนี้เรายังสามารถใช้เงื่อนไขขอบเพื่อกำหนดการหักเห (refraction) ของสนามไฟฟ้าตรงของรวม ซึ่งตามการพิจารณา  $\vec{D}_1$  หรือ  $\vec{E}_1$  และ  $\vec{D}_2$  หรือ  $\vec{E}_2$  จะเห็นว่ามันทำมุมกับเส้นปกติ เส้นแนวฉาก เป็นมุม  $\theta_1$  และ  $\theta_2$  ดังแสดงในรูปที่ 2.5 และโดยอาศัยสมการที่ (2.60) จะได้ว่า

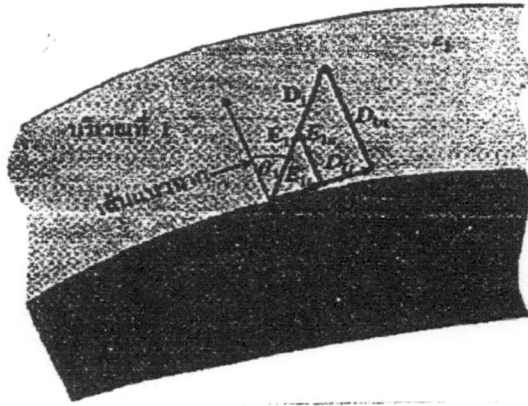
$$\vec{E}_1 \sin \theta_1 = \vec{E}_{1t} = \vec{E}_{2t} = \vec{E}_2 \sin \theta_2 \quad (2.78)$$

หรือ

$$\vec{E}_1 \sin \theta_1 = \vec{E}_2 \sin \theta_2 \quad (2.79)$$

ในลักษณะเดียวกันนี้ เมื่อประยุกต์ใช้สมการที่ (2.66) หรือ (2.67) จะได้รับ

$$\epsilon_1 \vec{E}_1 \cos \theta_1 = \vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n} = \epsilon_2 \vec{E}_2 \cos \theta_2 \quad (2.80)$$



รูปที่ 2.5 การหักเหของ  $\vec{E}$  หรือ  $\vec{D}$  ที่ขอบเขตระหว่างไดอิเล็กตริกกับไดอิเล็กตริก

หรือ 
$$\epsilon_1 \vec{E}_1 \cos \theta_1 = \epsilon_2 \vec{E}_2 \cos \theta_2 \quad (2.81)$$

หารสมการที่ (2.80) ด้วยสมการที่ (2.81) จะได้

$$\frac{\tan \theta_1}{\epsilon_1} = \frac{\tan \theta_2}{\epsilon_2} \quad (2.82)$$

เนื่องจาก  $\epsilon_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r1}$  และ  $\epsilon_2 = \epsilon_0 \epsilon_{r2}$  ด้วยสมการที่ (2.82) จะได้

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \quad (2.83)$$

กฎการหักเหของสนามไฟฟ้าที่ขอบซึ่งปราศจากประจุ

สมการที่ (2.83) เป็นกฎการหักเหของสนามไฟฟ้าที่ขอบซึ่งปราศจากประจุ (เนื่องจากสมมติให้  $\rho_s = 0$  ที่ขอบร่วม) ดังนั้นโดยทั่วไปที่ขอบร่วมระหว่างสองไดอิเล็กตริกที่แตกต่างกันจะทำให้เกิดการโค้งตัวของเส้นฟลักซ์ ตามผลลัพธ์ของประการโพลาไรซ์ที่ไม่เท่ากัน ซึ่งจะสะสมเพิ่มพูนขึ้นบนด้านทั้งสองของขอบร่วม

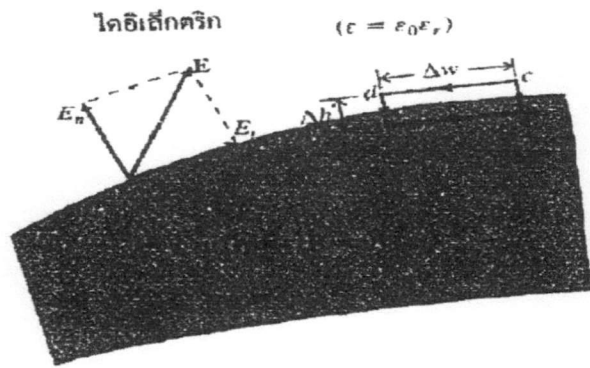
#### 2.4.6 เงื่อนไขขอบระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับไดอิเล็กตริก (Conductor-Dielectric Condition)

เงื่อนไขขอบระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับไดอิเล็กตริกจะพิจารณาได้จากรูปที่ 2.6 ซึ่งสมมติให้ตัวนำไฟฟ้าเป็นตัวนำที่สมบูรณ์ (คือมี  $\sigma \rightarrow \infty$  หรือ  $\rho \rightarrow 0$ ) ทั้งนี้ถึงแม้ว่าในทางปฏิบัติจะไม่มีตัวนำชนิดนี้ก็ตาม แต่เราอาจจะพิจารณาให้ตัวนำไฟฟ้า อย่างเช่น ทองแดง และเงิน เป็นตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ จากกฎของโอห์ม

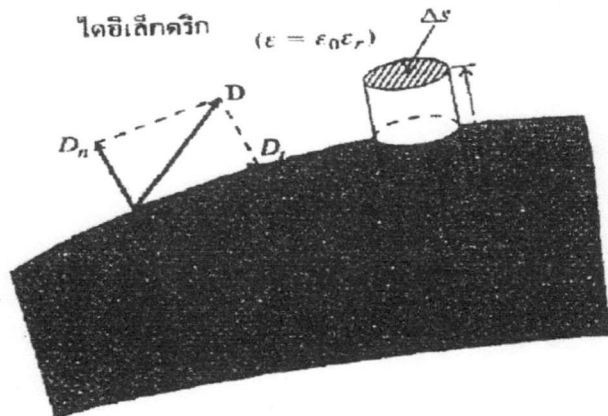
$\vec{j} = \sigma \vec{E}$  จะยังคงรักษาความหนาแน่นกระแสจำนวนไว้ในตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ ในขณะที่สนามไฟฟ้าภายในตัวนำจะไม่เกิดขึ้น หรือในอีกความหมายหนึ่งนั้น  $E \rightarrow 0$  เนื่องจากว่า  $\sigma \rightarrow \infty (E = j/\sigma)$  ในตัวนำไฟฟ้าซึ่งถ้ามีประจุอยู่ภายในตัวนำไฟฟ้าข้างต้น ประจุจะเคลื่อนย้ายไปยังพื้นผิวตัวนำไฟฟ้า และจะกระจายอีกครั้งหนึ่งในลักษณะที่สนามภายในตัวนำไฟฟ้าไม่ปรากฏขึ้น (ไม่มีสนาม) ตามกฎของเกาส์ถ้า  $E = 0$  ความหนาแน่นประจุ  $\rho_v$  จะต้องเป็นศูนย์ ดังนั้นเราสามารถสรุปได้ว่าตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ไม่สามารถรวบรวมสนามไฟฟ้าสถิตไว้ภายในตัวมันได้

เพื่อที่จะกำหนดเงื่อนไขขอบของขอบร่วมระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับไดอิเล็กตริก เราจะดำเนินการตามขั้นตอนที่ใช้พิจารณาขอบร่วมระหว่างไดอิเล็กตริกกับไดอิเล็กตริก ซึ่งเรากำหนดตามความจริงได้ว่าภายในตัวนำไฟฟ้า และเมื่อประยุกต์ใช้สมการ กับวิถีปิด (วิถี abcda) ของรูปที่ 2.6(ก) จะได้ว่า

$$0 = 0 \cdot \Delta w + 0 \left( \frac{\Delta h}{2} \right) + \bar{E}_n \left( \frac{\Delta h}{2} \right) - \bar{E}_t \left( \frac{\Delta h}{2} \right) - 0 \left( \frac{\Delta h}{2} \right) \quad (2.84)$$



(ก)



(ข)

รูปที่ 2.6 ขอบเขตระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับไดอิเล็กตริก

ในทำนองเดียวกัน เมื่อประยุกต์ใช้สมการที่ (2.56) กับฟิลล์บ็อกซ์ของรูปที่ 2.6(ข) และกำหนดให้  $\Delta h \rightarrow 0$  จะได้

$$\Delta Q = D_n S - 0 \cdot \Delta S \quad (2.85)$$

เพราะว่า  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  ภายในตัวนำไฟฟ้า สมการที่ (2.85) จะเขียนได้ว่า

$$\vec{D}_n = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \rho_s \quad (2.86)$$

หรือ 
$$\vec{D}_n = \rho_s \quad (2.87)$$

ดังนั้นภายใต้เงื่อนไขสถิตที่เกี่ยวข้องกับตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ พอดีสรุปได้ดังต่อไปนี้

1. ไม่มีสนามไฟฟ้าเกิดขึ้นภายในตัวนำไฟฟ้า นั่นคือ

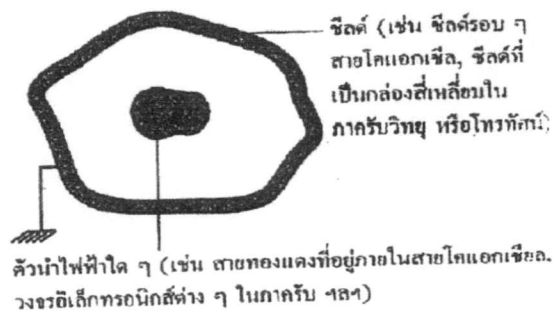
$$\rho_v = 0 \text{ และ } \vec{E} = 0 \quad (2.88)$$

2. เนื่องจาก  $E = -V = 0$  ดังนั้นจึงไม่มีความต่างศักย์ ระหว่างจุดสองจุดใดๆ ในตัวนำไฟฟ้า นั่นคือ ตัวนำไฟฟ้าเป็นวัตถุศักย์เท่า (equipotential body)

3. สนามไฟฟ้า  $E$  จะอยู่นอกตัวนำไฟฟ้าเท่านั้น และจะตั้งฉากกับพื้นผิวของตัวนำไฟฟ้า คือ

$$\vec{D}_t = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}_t = 0, \vec{D}_n = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}_n \quad (2.89)$$

การประยุกต์ใช้ที่สำคัญจริงๆ ที่ว่า  $E=0$  ภายในตัวนำไฟฟ้าอยู่ในการกั้นกรงไฟฟ้าสถิต (electrostatic screening หรือ electrostatic shielding: การชิลด์ไฟฟ้าสถิต) ดังตัวอย่าง ชิลด์ที่อยู่รอบๆ สายโคแอกเซียล (coaxial cable : สายเคเบิลร่วม) ดังรูปที่ 2.7 ซึ่งภาคตัดขวางของสาย (หรืออุปกรณ์)ใดๆ ที่ต้องการชิลด์ประกอบด้วย A ซึ่งทำหน้าที่กั้นกรง (screen หรือ shield) ทางไฟฟ้าเพื่อทำให้ศักย์รอบๆ ตัวนำไฟฟ้า B ซึ่งเกิดขึ้นจากระบบไฟฟ้าอื่นๆ เป็นศูนย์



รูปที่ 2.7 การกั้นกรงไฟฟ้าสถิต

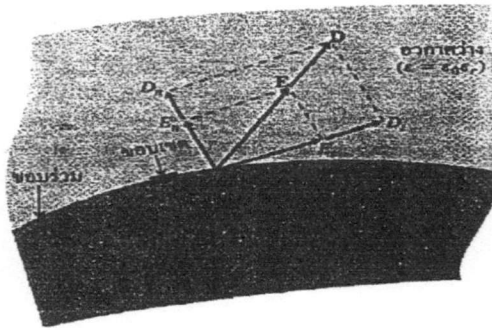
## 2.4.7 เงื่อนไขขอบระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับอากาศว่าง (Conductor-Free-Space Boundary Conditions)

เงื่อนไขนี้เป็นกรณีพิเศษของเงื่อนไขขอบระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับไดอิเล็กตริก ในรูปที่ 2.7 จะแสดงถึงเงื่อนไขขอบระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับอากาศว่าง (ไดอิเล็กตริก) ซึ่งเงื่อนไขขอบในกรณีพิเศษนี้จะได้รับจากสมการที่ (2.89) โดยแทน  $\epsilon_r$  ด้วย 1 (เพราะว่าอากาศว่างจะค้ำนึ่งว่าเป็นไดอิเล็กตริกพิเศษ ซึ่งมี  $\epsilon_r = 1$ ) เนื่องจากสนามไฟฟ้า  $\vec{E}$  อยู่ภายนอกตัวนำและตั้งฉากกับพื้นผิวของมัน ดังนั้นเงื่อนไขขอบคือ

$$\vec{D}_t = \epsilon_0 \vec{E}_t = 0, \vec{D}_n = \epsilon_0 \vec{E}_n = \rho_s \quad (2.90)$$

ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าแนวสัมผัส กับขอบเป็นศูนย์ ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้าแนวตั้งฉาก กับขอบจะเกิดความหนาแน่นประจุพื้นผิว

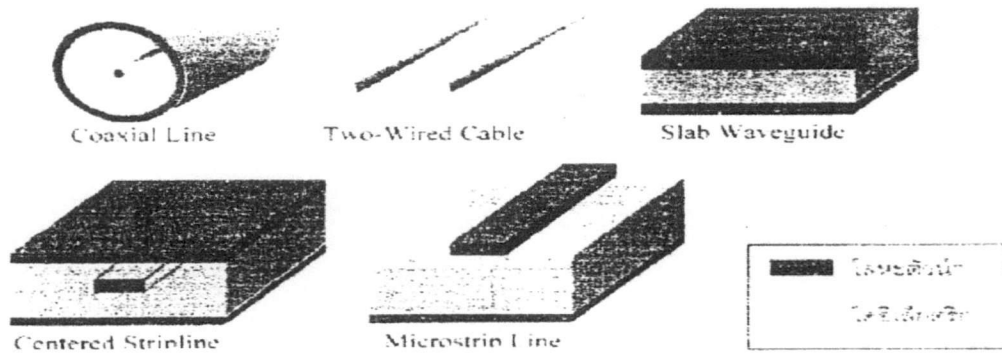
สมการที่ (2.90) แสดงให้เห็นว่า สนามไฟฟ้า  $\vec{E}$  จะต้องเข้าสู่พื้นผิวในแนวตั้งฉาก



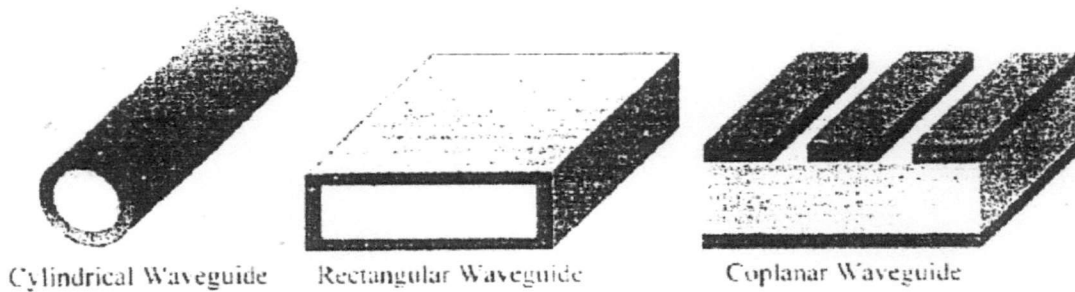
รูปที่ 2.8 ขอบเขตระหว่างตัวนำไฟฟ้ากับอากาศว่าง

## 2.5 สายส่งไมโครเวฟและท่อนำคลื่น (Microwave Transmission Line and Wave Guides)

ในการส่งสัญญาณไฟฟ้าจากแหล่งกำเนิดไปยังโหลดหรือแหล่งที่ใช้พลังงานทางไฟฟ้านั้นจำเป็นต้องมีสายส่งที่ส่งผ่านสัญญาณหรือพลังงานทางไฟฟ้านั้น ซึ่งส่วนใหญ่แล้วสำหรับในทางไฟฟ้านั้นมักจะใช้สายตัวนำไฟฟ้าสองเส้นเป็นตัวกลางนำส่งสัญญาณหรือกระแสไฟฟ้านั้นๆ โดยทั่วไปคู่สายตัวนำที่ใช้ในการนำกระแสไฟฟ้านั้นเรียกว่า สายส่งสัญญาณไฟฟ้า (Transmission Lines)



ก) สายส่งสัญญาณโหมด TEM (TEM transmission lines)



ข) สายส่งสัญญาณโหมด (Multi-mode transmission lines)

### รูปที่ 2.9 ตัวอย่างสายส่งสัญญาณแบบต่างๆ

สายส่งสัญญาณไฟฟ้านั้นมีอยู่ด้วยกันหลายประเภทขึ้นอยู่กับความถี่และลักษณะการเคลื่อนที่ของสัญญาณในสายส่งนั้นๆ โดยที่ความถี่ต่ำมักจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของสัญญาณคล้ายกับการไหลของกระแสน้ำตามท่อน้ำทั่วไป แต่สำหรับที่ความถี่สูงแล้วมักจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของสัญญาณคล้ายกับการเคลื่อนที่ของคลื่นสัญญาณที่ประกอบด้วยสนามไฟฟ้ากับสนามแม่เหล็กหรือคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้านั่นเอง

เนื่องจากว่าสายสัญญาณความถี่สูงนั้นจะมีรูปแบบต่างๆ ที่ได้รับการวิเคราะห์มาแล้วมากมายตามลักษณะโครงสร้างของภาคตัดขวางต่างๆ ที่แน่นอน โดยทั่วไปแล้วในการวิเคราะห์สัญญาณไฟฟ้าในสายส่งต่างๆ นั้นมักจะสมมติให้สายส่งเหล่านี้มีคุณสมบัติทางไฟฟ้าตามแนวความยาวที่แน่นอนโดยกำหนดให้มีการกระจายค่าทางไฟฟ้าเหล่านั้นอย่างสม่ำเสมอจนตลอดทั้งเส้น

ดังนั้นจึงมักเรียกสายส่งเหล่านี้ว่าสายส่งสัญญาณไฟฟ้าแบบราบเรียบสม่ำเสมอ (Uniform transmission lines) โดยมีตัวอย่างของสายส่งประเภทนี้ดังรูปที่ 2.8

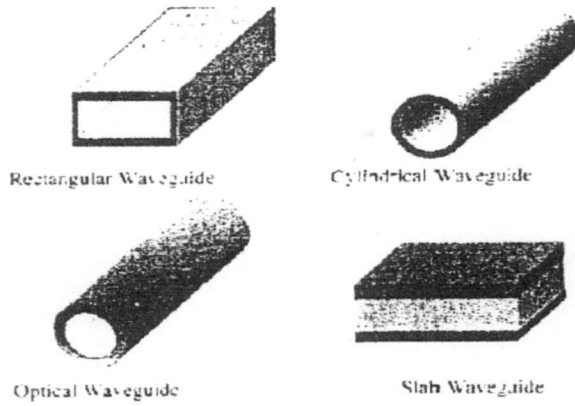
### 2.5.1 สายส่งเป็นอุปกรณ์ที่ใช้นำคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากที่หนึ่งไปยังอีกที่หนึ่ง โดยสายส่งมีโครงสร้างที่ใช้กันทั่วไปสี่แบบคือ

- 1) สายตัวนำคู่ขนาน
- 2) สายโคแอกเซียล
- 3) ท่อนำคลื่นหรือเวฟไกด์ (wave guide)
- 4) ไมโครสตริป หรือสายสตริป

สายตัวนำคู่ขนานมักใช้ในย่านความถี่ไมโครเวฟช่วงความถี่ต่ำเท่านั้น ข้อจำกัดหลักนี้ได้มาจากการสูญเสียในการกระจายคลื่น ซึ่งเป็นการสูญเสียเนื่องมาจากสารไดอิเล็กตริกและปรากฏการณ์ความลึกผิว (skin depth) ที่ย่านความถี่เหนือ 200 MHz สายโคแอกเซียลจะมีประสิทธิภาพดีกว่าที่ความถี่สูงกว่านี้

สายโคแอกเซียลมีการพัฒนาในเรื่องการลดการสูญเสียพลังงานในการเคลื่อนที่ของคลื่นจากโครงสร้างการฉลิด์ของสายที่เป็นตัวนำทรงกระบอกหุ้มรอบแกนตัวนำด้านใน แต่ยังคงมีข้อจำกัดในเรื่องการสูญเสียพลังงานอันเนื่องมาจากฉนวนไดอิเล็กตริกภายในและปรากฏการณ์ความลึกผิวอยู่ดี

ท่อนำคลื่นหรือเวฟไกด์จัดเป็นสายส่งย่านความถี่ไมโครเวฟหรือเป็นท่อนำคลื่นในย่านความถี่สูงที่สุดสำหรับโครงสร้างทั้งหมดที่ได้กล่าวมาแล้ว ท่อนำคลื่นที่ใช้งานได้มีการออกแบบโครงสร้างและส่วนประกอบที่แตกต่างกันไปตามความเหมาะสมกับย่านความถี่ที่ใช้งานโครงสร้างตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 2.3 แต่เนื่องจากคลื่นเดินทางท่อนำคลื่นทั่วไปนั้นไม่อาจจะเป็นเพียงแค่อิมพีแดนซ์พื้นฐาน TEM บริสุทธิ์เท่านั้น แต่มีโหมดการเคลื่อนที่แบบอื่นๆ อีกที่สามารถเคลื่อนที่อยู่ในท่อนำคลื่นนั้นๆ ได้ ดังนั้นการวิเคราะห์คลื่นบนท่อนำคลื่นจะต้องคำนึงถึงโหมดการเดินทางของคลื่นโหมดอื่นๆ ที่สามารถจะเป็นไปได้ คือโหมด TM กับ TE



รูปที่ 2.10 ท่อนำคลื่นแบบต่างๆ

## 2.6 สมการความร้อนในทางชีววิทยา (The Bio-heat Equation)

ในการวิเคราะห์ด้วยความถี่ไมโครเวฟได้พิจารณาถึงสนามไฟฟ้า สนามแม่เหล็ก และความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในเนื้อเยื่อปอด การดูดซับความร้อนที่เกิดขึ้นในเนื้อเยื่อปอด ซึ่งรูปแบบของสมการ หรือตัวแปรต่างๆ ที่ส่งผลต่อการกระจายความร้อนในปอดแสดงดังสมการที่ (2.91)

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k \cdot \nabla T) - h_b C_b \omega_b (T_b - T) + Q_m + Q_{ext} \quad (2.91)$$

เมื่อ  $h_{bl} = \rho_{bl} c_{bl} \omega_{bl}$

$\rho$  = ความหนาแน่นจำเพาะของเนื้อเยื่อ ( $\text{kg/m}^3$ )

$c$  = ค่าความจุความร้อนจำเพาะของเนื้อเยื่อ ( $\text{J/kg.K}$ )

$k$  = ค่าความนำความร้อนของเนื้อเยื่อ ( $\text{W/m.K}$ )

$h_b$  = สัมประสิทธิ์การพาความร้อนจากเลือดที่ไหลซึมอยู่ในเนื้อเยื่อ

$\rho$  = ความหนาแน่นเลือด ( $\text{kg/m}^3$ )

$C_b$  = ค่าความร้อนจำเพาะของเลือด ( $\text{J/kg.K}$ )

$\omega_b$  = อัตราฉีดเลือด ( $1/\text{s}$ )

$T_b$  = ค่าอุณหภูมิเลือด ( $37^\circ\text{C}$ )

$Q_m$  = ค่าความร้อนจากกระบวนการเมตาโบลิซึมของเม็ดเลือด ( $\text{W/m}^3$ )

$$Q_{ext} = \text{ค่าความร้อนจากภายนอก (W/m}^3\text{)}$$

จากสมการ Bioheat (2.91) ที่นำมาใช้ในงานวิจัยฉบับนี้ ได้ละทิ้งค่าตัวแปรจำนวน 2 ตัว คือ สัมประสิทธิ์การพาความร้อนจากเลือดที่ไหลซึมอยู่ในเนื้อเยื่อ ( $h_b$ ) และพลังงานที่สร้างขึ้นโดยกระบวนการเมตาโบลิซึมของเม็ดเลือด ( $Q_m$ ) ซึ่งค่าตัวแปรทั้ง 2 นี้ จะถือว่ามิต้าน้อยมาก เมื่อเทียบกับ ปริมาณ  $Q_{ext}$

### 2.6.1 สมการการดูดซับความร้อน

พิจารณาจาก สนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็ก ที่มีการแพร่กระจายลงเนื้อเยื่อปอด จะเกิดการสูญเสียพลังงานในเนื้อเยื่อปอด ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ของสมการ ดังสมการที่ (2.92)

$$SAR = \frac{1}{\rho} Q_{ext} = \frac{\sigma}{\rho} |E|^2 \quad (2.92)$$

เมื่อ

SAR = Specific absorption rate (W/kg)

$Q_{ext}$  = ค่าความร้อนที่เกิดขึ้นจากภายนอกเนื้อเยื่อ (W/m<sup>3</sup>)

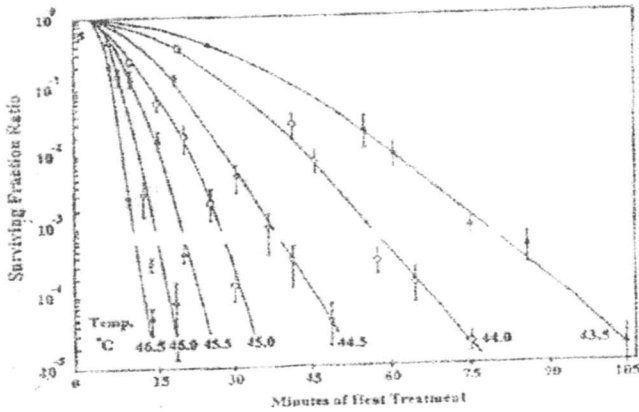
$\sigma$  = สภาพความนำไฟฟ้าของเนื้อเยื่อ (S/m)

$\rho$  = ความหนาแน่นจำเพาะ (kg/m<sup>3</sup>)

### 2.7 พื้นฐานการกระจายความร้อนภายในเนื้อเยื่อ

การใช้ความร้อนในการรักษาโรค เป็นการรักษาที่ทำให้อุณหภูมิ ณ บริเวณนั้น สูงขึ้นอยู่ในช่วง 41-46 องศาเซลเซียส เซลล์ที่อยู่บริเวณนั้นๆ จะได้รับผลกระทบ และมีการเปลี่ยนแปลงขึ้นกับอุณหภูมิ การใช้ความร้อนในการรักษาโรคมะเร็ง ได้มีการพัฒนาเทคนิค ที่เรียกว่า Hyperthermal cancer therapy ซึ่งมีการเริ่มใช้มาตั้งแต่ปี ค.ศ.1960 โดยการรักษาโรคมะเร็งโดยใช้ความร้อนเป็นรูปแบบการรักษาโรคมะเร็งแบบใหม่ ซึ่งมีพื้นฐาน และหลักการทางชีววิทยาที่สามารถพิสูจน์ ทดลอง และสามารถอธิบายได้ ซึ่งในปัจจุบันการรักษาโรคมะเร็งโดยใช้ความร้อนนี้สามารถรักษาโรคมะเร็งชนิดต่างๆ ได้ทั่วร่างกาย และได้ผลการรักษาที่น่าสนใจ การรักษาโรคมะเร็งด้วยความร้อน อาศัยหลักการให้ความร้อนกับเซลล์มะเร็งอยู่ในช่วง 41-46 องศาเซลเซียส และรักษาระดับของอุณหภูมิไว้ให้คงที่ พื้นฐานของปรากฏการณ์ทางชีววิทยาสำหรับการรักษาโรคมะเร็งด้วยความร้อน จะมีอยู่สองปริมาณที่มีความสำคัญในการรักษา คือ อุณหภูมิ และเวลาในการให้ความร้อน ซึ่งตามรูปที่ 2.1 จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิและเวลา ที่ส่งผลต่อปริมาณเซลล์มะเร็งที่รอดตายจากการให้ความร้อน รูปที่ 2.1 เมื่อให้อุณหภูมิสูงแก่เซลล์มะเร็งในช่วงเวลาเริ่มต้นเซลล์มะเร็งจะสูญเสียเป็นจำนวนมาก แต่เมื่อมีการลดอุณหภูมิที่ให้แก่เซลล์มะเร็งผลกระทบที่เกิดขึ้น

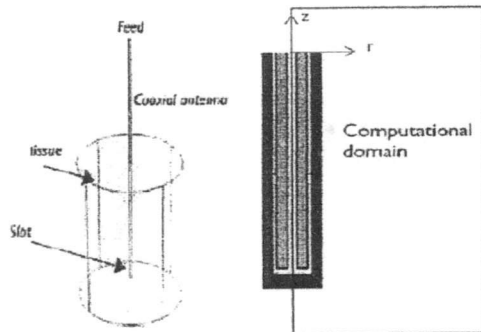
คือ ต้องใช้เวลามากขึ้นเพื่อให้เซลล์มะเร็งตาย ในการเพิ่มอุณหภูมิให้สูงขึ้น แก่เซลล์ จำนวนเซลล์จะเกิดการสูญเสียมาก และจะทำให้เซลล์ปกติที่อยู่รอบๆ เซลล์มะเร็งได้รับความเสียหายได้เช่นกัน ดังนั้นในการเพิ่มอุณหภูมิให้เหมาะสมนั้นสามารถทำลายเซลล์มะเร็งได้จำนวนมาก และไม่เป็นอันตรายแก่เซลล์ปกติ



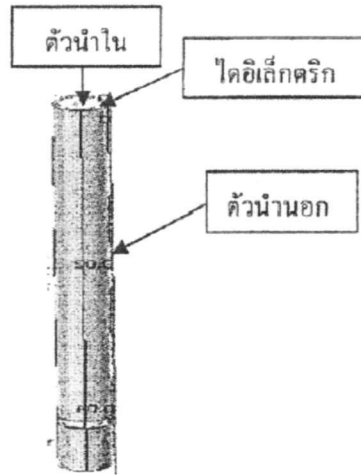
รูปที่ 2.11 กราฟแสดงผลกระทบของอุณหภูมิที่มีต่อเซลล์มะเร็ง

2.8 หลักการของเงื่อนไขขอบเขตที่ใช้ในการจำลอง

จากรูปที่ 2.11 เป็นการแสดงให้เห็นถึงแบบจำลองของการรักษาด้วยคลื่นไมโครเวฟโดยใช้สายอากาศแบบโคแอกเซียลแบบสลิต โดยทรงกระบอกกลมแทนเนื้อเยื่อทดสอบโดยสายอากาศโคแอกเซียลถูกแทงเข้าไปในเนื้อเยื่อทดสอบ และสายอากาศจะถูกจ่ายกำลังงานคลื่นไมโครเวฟที่จุดบนตรงส่วนของชั้นฉนวน (Feed) และคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจะถูกปล่อยออกมาบริเวณสลิต จากนั้นเนื้อเยื่อจะถูกทำให้เกิดความร้อนซึ่งเป็นไปตามสมการของซาร์ โดยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งเดินทางในสายโคแอกเซียลอยู่ในโหมดของ TEM โดยสมมุติว่าคลื่นเป็นคลื่นฮาโมนิกส์แบบเชิงซ้อน



รูปที่ 2.12 แสดงลักษณะของสายอากาศแบบโคแอกเซียลในเนื้อเยื่อทดสอบ

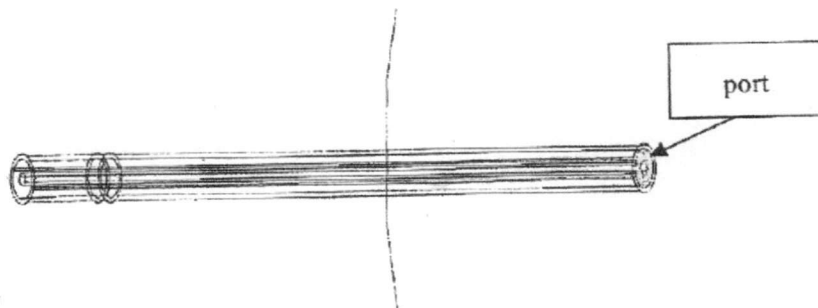


รูปที่ 2.13 แสดงโครงสร้างของสายอากาศแบบสล็อตโคแอกเซียล

สายอากาศโคแอกเซียลจะประกอบไปด้วยชั้นสามชั้นด้วยกันชั้นแรกเป็นชั้นของตัวนำใน ชั้นถัดมาเป็นชั้นของไดอิเล็กตริก และชั้นสุดท้ายเป็นชั้นของตัวนำนอกโดยเมื่อคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเดินทางผ่านสายโคแอกเซียลจะมีกระบวนการจะต้องมีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้กับแบบจำลองโดยตัวอย่างต่อไปนี้จะเป็นการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของสายอากาศแบบหนึ่งสล็อต

### 2.8.1 เงื่อนไขขอบเขตของพอร์ต (Port)

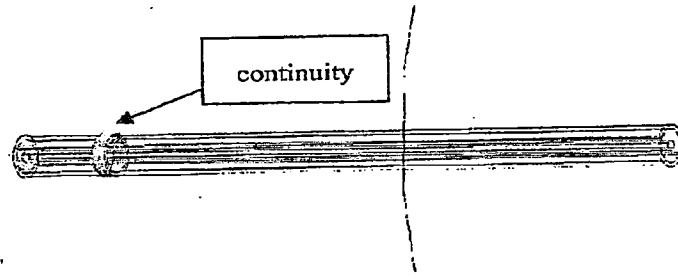
ใช้เงื่อนไขนี้สำหรับใส่ค่ากำลังของคลื่นไมโครเวฟที่จ่ายให้กับสายอากาศโดยกำหนดเป็นค่ากำลัง เช่น 5 W. โดยจะจ่ายให้กับชั้นไดอิเล็กตริกตามรูปเนื่องจากคลื่นจะเดินทางในชั้นนี้



รูปที่ 2.14 แสดงจุดจ่ายกำลังงานคลื่นไมโครเวฟให้กับสายอากาศ

### 2.8.2 เงื่อนไขขอบเขตของความต่อเนื่อง (Continuity)

เงื่อนไขนี้เป็นเงื่อนไขที่เกิดขึ้น โดยธรรมชาติที่แสดงให้เห็นถึงความต่อเนื่องขององค์ประกอบในแนวเส้นสัมผัสของสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็ก



รูปที่ 2.15 แสดงบริเวณที่เป็นขอบเขตต่อเนื่อง

จากรูปบริเวณที่เป็นความต่อเนื่อง (continuity) จะเป็นบริเวณที่คลื่นเคลื่อนที่ผ่านจากตัวกลางหนึ่งไปสู่อีกตัวกลางหนึ่ง

### 2.8.3 เงื่อนไขขอบเขตของตัวนำ (Perfect Electric Conductor)

เป็นกรณีของเงื่อนไขซึ่งกำหนดให้องค์ประกอบของสนามไฟฟ้าในแนวขนานกับผิวตัวนำมีค่าเป็นศูนย์

$$n \cdot E = 0 \quad (2.93)$$

## บทที่ 3

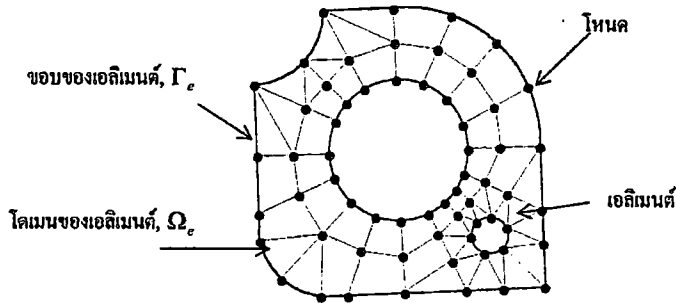
### ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

#### 3.1 บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ไฟต์เอลิเมนต์ในรูปแบบตรีโกศสมการพื้นฐานทางด้านแม่เหล็กไฟฟ้า การวิเคราะห์สนามไฟฟ้าที่ความถี่สูง และสมการความสัมพันธ์ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและอุณหภูมิจำนวนการแก้ปัญหาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์ และการประยุกต์ใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

#### 3.2 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method)

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) หรือ FEM เป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขชนิดหนึ่งสำหรับแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ในการแก้ปัญหาหนึ่งๆ ด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ จะทำการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเนื้อที่หลายๆ ชิ้นที่เรียกว่าเอลิเมนต์ (Element) รูปแบบที่เที่ยงตรงดังรูปที่ 3.1 ในการแก้ปัญหาใดปัญหาหนึ่ง ปัญหานั้นจะต้องประกอบด้วย สมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมา การหาค่าผลเฉลยแม่นยำ (Exact solution) จะประกอบด้วยค่าต่างๆ เป็นจำนวนอนันต์ ซึ่งเราไม่สามารถหาค่าผลเฉลยได้ จึงต้องเปลี่ยนค่าทั้งหมดที่เป็นอนันต์ให้เป็นจำนวนที่นับได้ (Finite) ทำการแทนรูปร่างลักษณะของปัญหาด้วยเอลิเมนต์ที่มีขนาดต่างๆกัน หลักการทางไฟไนต์เอลิเมนต์จะเริ่มจากการพิจารณา เอลิเมนต์ทีละเอลิเมนต์ ทำการสร้างสมการให้แต่ละเอลิเมนต์ที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้นๆ จากนั้นจึงนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นมาประกอบเข้าด้วยกัน รวมเป็นระบบสมการชุดใหญ่ จากนั้น ทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต ที่ให้มาลงในสมการชุดใหญ่ แล้วจึงทำการแก้สมการ และจะเกิดผลเฉลยโดยประมาณที่ตำแหน่งต่างๆ ของปัญหานั้น



รูปที่ 3.1 แสดงแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์และโหนด

กระบวนการวิเคราะห์ปัญหาใดๆโดยทั่วไปด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะประกอบไปด้วย 5 ขั้นตอนหลักๆ ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การแบ่งโดเมนของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ กระบวนการขั้นตอนแรกนี้ โดยปกติจะใช้เวลามากในทางปฏิบัติ เพราะจำเป็นต้องสร้างรูปร่างของปัญหา Geometry (อย่างถูกต้องขึ้นมาก่อน) รูปร่างของปัญหาอาจประกอบด้วยส่วนเว้าส่วนโค้งที่มีความซับซ้อนในขั้นตอนนี้จึงจำเป็น ต้องอาศัยความรู้ อันประกอบไปด้วยประสบการณ์เป็นอย่างมาก

ขั้นตอนที่ 2 การเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์ เอลิเมนต์ย่อยที่แบ่งบนโดเมนของปัญหานั้นอาจเป็น เอลิเมนต์ในรูปแบบของสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าก็ได้ หากแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมตัว ไม้รู้ค่า (Unknowns) จะอยู่ที่มุมทั้งสามของสามเหลี่ยมนั้น ซึ่งเรียกกันว่าจุดต่อ (Node) การเลือกใช้ชนิด ของเอลิเมนต์จะสอดคล้องกับลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าที่สมมติขึ้นบนเอลิเมนต์นั้นๆ เช่นหากเลือก ใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบสามจุดต่อที่มุมทั้งสามแล้ว ลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์นั้น จะถูกสมมติให้อยู่ใน รูปแบบของแผ่นเรียบ เป็นต้น แต่หากเลือกใช้เอลิเมนต์แบบสี่เหลี่ยมแบบสี่จุดต่อที่มุม ทั้งสี่ ลักษณะการกระจาย ของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมนี้อาจไม่เรียบแต่โค้งไปโค้งมาได้ ดังนั้นการ เลือกใช้เอลิเมนต์ชนิดต่างๆกันจึงมีผลโดยตรงกับผลลัพธ์ที่จะคำนวณได้

ขั้นตอนที่ 3 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่วิเคราะห์อยู่นั้นจะถูกเปลี่ยนไปเป็นสมการทางพีชคณิตที่เรียกกันว่า สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่จะถูกสร้างขึ้นสำหรับแต่ละเอลิเมนต์เนื่องจากเอลิเมนต์ต่างมีขนาดไม่เท่ากัน กระบวนการ ประดิษฐ์สมการไฟไนต์ เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์นี้เป็นหัวใจหลักของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพราะหากมีความเข้าใจในขั้นตอนนี้แล้วก็สามารถประยุกต์ใช้วิธีการ ทำนองเดียวกันนี้ในการแก้ปัญหาชนิดอื่นๆได้

ขั้นตอนที่ 4 การรวมสมการไฟไนต์เอลิเมนต์เข้าด้วยกันแล้วแก้ระบบสมการใหญ่ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์อยู่ในรูปแบบของสมการทางพีชคณิตซึ่งได้ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ใน ขั้นตอนที่แล้วจำเป็น

**3. Post-Processor** เป็นขั้นตอนการแสดงผลการวิเคราะห์ปัญหาที่ผ่านกระบวนการวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ผลด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ส่วนมากจะแสดงค่าที่เราสนใจด้วยแถบสีหลายระดับสี เช่น ถ้าเป็นปัญหาที่วิเคราะห์เกี่ยวกับโครงสร้าง สิ่งที่เราสนใจก็คือบริเวณที่เกิดความเค้นสูง ซึ่งบริเวณนั้นก็จะมีสีแดง และค่าความเค้นที่ต่ำลงมาด้วยการเรียงสีจากส้ม สีเหลือง ไปจนถึงสีชมพูที่แสดงค่าความเค้นที่น้อยที่สุด เป็นต้น

เราก็จะได้คำตอบของผลการวิเคราะห์ปัญหาในงานวิศวกรรมด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้คอมพิวเตอร์โปรแกรมเข้ามาช่วยในการคำนวณ เริ่มจากการสร้างรูปแบบจำลองของชิ้นงานที่จะวิเคราะห์ แล้วนำรูปแบบจำลองนั้นมาเป็นต้นแบบในการสร้างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งการสร้างแบบจำลองมีผลต่อการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างเห็นได้ชัด ดังนั้นการสร้างรูปแบบจำลองให้ได้คุณภาพ เพื่อสามารถนำไปสร้างรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ดีต่อไป เนื่องจากรูปร่างของแต่ละเอลิเมนต์มีผลต่อการคำนวณวิเคราะห์ปัญหาที่เราสนใจ ก็เหมือนกับการตีแผ่กระจกกลางบนตัวอักษรดังได้กล่าวไว้ข้างต้น หรือคล้ายกับการปูกระเบื้องบนพื้นในบริเวณต่างๆ ลักษณะการสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ดีจึงไม่ใช่เพียงการกำหนดเอลิเมนต์ที่มีรูปร่างสี่เหลี่ยมด้านเท่าหรือสามเหลี่ยมด้านเท่าเท่านั้น แต่ยังคำนึงถึงการเรียงตัวของแต่ละเอลิเมนต์ที่เป็นระเบียบอีกด้วย

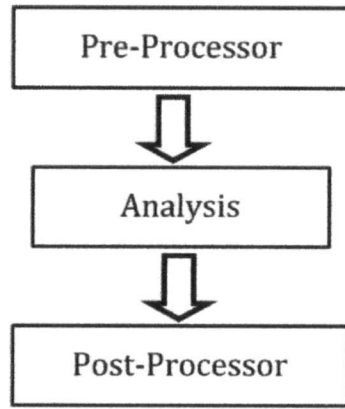
### 3.3.1 องค์ความรู้ที่จะนำไปสู่ความเข้าใจ

ดังได้กล่าวมาแล้วนั้น องค์ประกอบความรู้ที่จำเป็นในการทำงานด้านการนำคอมพิวเตอร์มาช่วยในการคำนวณทางวิศวกรรม คือ

1. ความเข้าใจในคณิตศาสตร์ขั้นสูงทางวิศวกรรม
2. ความเข้าใจในระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์
3. ความเข้าใจในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข
4. ความเข้าใจในขั้นตอนของการคำนวณของคอมพิวเตอร์โปรแกรม
5. ประสบการณ์การใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ และคอมพิวเตอร์โปรแกรม

องค์ความรู้เหล่านี้จะนำเราไปสู่คำตอบของคำถามที่มีมากมายในการเริ่มต้นการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณทางวิศวกรรม นอกจากจะทำให้สามารถนำองค์ความรู้ต่างๆ มาใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมได้แล้ว ยังช่วยเราทำนายพฤติกรรมของชิ้นงานที่เราสนใจได้จากหน้าจอคอมพิวเตอร์โดยตรง โดยลดความเสี่ยงและการเสียเวลาสร้างชิ้นงานจริงเพื่อทดสอบดังเช่นในอดีตที่ผ่านมา นอกจากนี้ยังส่งผลไปถึงการดัดแปลงรูปร่างของชิ้นงาน เพื่อให้ได้ซึ่งรูปทรงที่ประหยัดเนื้อวัสดุแต่ยังคงความแข็งแรงในการใช้งานได้เท่าเดิม ซึ่งจะประหยัดทั้งเวลาและค่าใช้จ่าย เมื่อเราได้เรียนรู้และเข้าใจองค์ความรู้ดังกล่าวแล้วสามารถใช้คอมพิวเตอร์โปรแกรมช่วยในการวิเคราะห์ทางวิศวกรรมได้อย่างมีประสิทธิภาพ

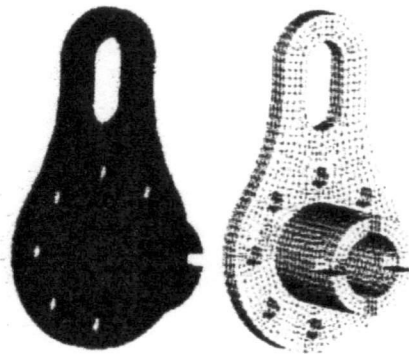
จะเห็นได้ว่า วิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถแสดงรายละเอียดต่างๆ ที่เราไม่สามารถมองเห็นด้วยตา หรือต้องใช้เครื่องวัดราคาแพง ซึ่งทำให้สามารถลดต้นทุนและค่าใช้จ่ายในการออกแบบ โครงสร้างที่



รูปที่ 3.2 ขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบในลักษณะเดียวกันนี้เอง การวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ก็จะแทนรูปแบบจำลองชิ้นงานที่เราสร้างขึ้นด้วยเอลิเมนต์ขนาดต่างๆ ตามที่เรากำหนด โดยจุดมุมของแต่ละเอลิเมนต์เรียกว่า จุดต่อ (Node) จะเป็นจุดเชื่อมต่อแต่ละเอลิเมนต์เข้าด้วยกัน กลายเป็นรูปร่างตามแบบจำลองที่ต้องการวิเคราะห์ นอกจากการเตรียมรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์แล้วขั้นตอน Pre-Processor ยังรวมถึงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา (Boundary Conditions) เช่น การกำหนดขอบเขตของรูปแบบจำลองที่ไม่มีการเคลื่อนที่ แต่สามารถหมุนรอบตัวเองได้ในแกนใดๆ รวมถึงการกำหนดขนาดและทิศทางของแรงกระทำต่อชิ้นงานที่เราจะทำการวิเคราะห์ เป็นต้น สิ่งที่ต้องจำคือ กำหนดลักษณะปัญหา และเขียนสิ่งที่ต้องทำอย่างคร่าวๆ ให้เรียบร้อยอยู่บนกระดาษเสมอก่อนจะทำในคอมพิวเตอร์ ซึ่งวิธีนี้ใช้ได้ผลดี เพราะทำให้รู้ว่าสิ่งที่เราต้องการคืออะไร เราต้องการทำอะไร และสามารถตรวจสอบได้ทุกขณะว่าตอนนี้เราทำงานถึงขั้นตอนไหน เป็นการป้องกันข้อผิดพลาดของคน (Human Error)

2. **Analysis** คือ การสั่งให้คอมพิวเตอร์โปรแกรมวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งในช่วงแรกผู้เขียนก็เพียงทำความเข้าใจว่าเป็นกระบวนการที่สั่งให้โปรแกรมคอมพิวเตอร์คำนวณเพื่อหาคำตอบที่เราต้องการ แต่สิ่งที่ผู้เขียนไม่ค่อยจะให้ความสนใจ คือรายละเอียดขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหา (ซึ่งเป็นสาเหตุที่ทำให้เกิดคำถามอีกมากมายในเวลาต่อมา)



รูปที่ 3.3 รูปแบบจำลองชิ้นงานและรูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์

ต้องนำมารวมกันอย่างถูกต้องและมีหลักการ การประกอบสมการไฟไนต์เอลิเมนต์แต่ละสมการเข้าด้วยกัน จะก่อให้เกิดระบบสมการขนาดใหญ่ จากนั้นจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของปัญหานั้นๆ ก่อนแก้ระบบสมการขนาดใหญ่ชุดนั้นเพื่อหาผลลัพธ์ที่จุดต่อ ซึ่งผลลัพธ์ที่จุดต่อเหล่านี้อาจแทนค่าอุณหภูมิหากเป็นการวิเคราะห์ ปัญหาด้านการถ่ายเทความร้อน เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 5 การคำนวณหาค่าอื่นๆที่เหลือจากนั้นจึงเป็นการหาค่าอื่นๆที่ต้องการทราบเพื่อที่จะทำให้ปัญหานั้นได้รับการวิเคราะห์โดยสมบูรณ์ เช่น ในการแก้

ปัญหาด้านความร้อนเมื่อทราบอุณหภูมิตามตำแหน่งต่างๆแล้วก็จะสามารถคำนวณหาปริมาณฟลักซ์ความร้อนที่ไหลผ่านได้

### 3.3 กระบวนการแก้ปัญหาด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์ซอฟต์แวร์

การประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สิ่งแรกที่เริ่มเรียนรู้การใช้คอมพิวเตอร์โปรแกรม คือ ขั้นตอนหลัก 3 ขั้นตอนในการใช้คอมพิวเตอร์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ ได้แก่ ขั้นตอน Pre-Processor, Analysis, Post-Processor

1. Pre-Processor คือการจัดเตรียมข้อมูลเพื่อนำไปวิเคราะห์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยเริ่มจากการสร้างรูปแบบจำลองของชิ้นงาน เพื่อจำลองรูปร่างของชิ้นงานที่ต้องการวิเคราะห์ลงในคอมพิวเตอร์โปรแกรม จากนั้นจึงสร้างรูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Model) โดยแบ่งย่อยรูปร่างของแบบจำลองขนาดใหญ่ให้เป็นเอลิเมนต์ (Element) เล็กๆ คล้ายกับการนำเอาแผ่นกระดาษชิ้นเล็กๆ มาติดลงบนโครงสร้างขนาดใหญ่ เช่น รูปปั้นยักษ์ตามวัดสำคัญๆ ในประเทศไทย ซึ่งทำให้มองเห็นโดยภาพรวมได้ว่าเป็นยักษ์ แต่เมื่อเข้าไปมองใกล้ๆ จะเห็นว่าเป็นกระดาษแผ่นเล็กๆ ที่เรียงต่อกันอย่างเป็นระเบียบ

เหมาะสมกับปัญหาต่างๆ ที่ต้องการแก้ปัญหา แล้วแสดงผลด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ แต่ในการคำนวณ จำเป็นต้องใช้ประสิทธิภาพของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่สูงมาก

### 3.4 พื้นฐานสมการทางด้านสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

$$\nabla \times \{H\} = \{J\} + \left\{ \frac{\partial D}{\partial t} \right\} = \{J_s\} + \{J_e\} + \{J_v\} + \left\{ \frac{\partial D}{\partial t} \right\} \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \{E\} = - \left\{ \frac{\partial B}{\partial t} \right\} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \{B\} = 0 \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \{D\} = \rho \quad (3.4)$$

เมื่อ

$\nabla \times$  = ตัวปฏิบัติการเคิร์ล

$\nabla \cdot$  = ตัวปฏิบัติการไดเวอร์เจนซ์

$\{H\}$  = เวกเตอร์ความเข้มข้นของสนามแม่เหล็ก

$\{J\}$  = เวกเตอร์ความหนาแน่นของกระแสรวม

$\{J_s\}$  = เวกเตอร์ความหนาแน่นของแหล่งกำเนิดกระแส

$\{J_e\}$  = เวกเตอร์ความหนาแน่นของกระแสที่เกิดจากการเหนี่ยวนำ

$\{J_v\}$  = เวกเตอร์ความหนาแน่นของความหนาแน่นของกระแส

$\{D\}$  = เวกเตอร์ความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้า

$\{E\}$  = เวกเตอร์ความเข้มของสนามไฟฟ้า

$\{B\}$  = เวกเตอร์ความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็ก

$\rho$  = ความหนาแน่นของประจุไฟฟ้า

$t$  = เวลา

สมการที่ (3.5) เป็นสมการแสดงหาค่าเวกเตอร์ความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก

$$\{B\} = [\mu]\{H\} \quad (3.5)$$

เมื่อ  $[\mu]$  = ค่าความซึมซับแม่เหล็กในรูปแบบเมตริกซ์ (Magnetic Permeability)

เมื่อสมการที่ (3.5) แสดงค่าความซึมซับแม่เหล็กในรูปแบบของเมตริกซ์

$$\{\mu\} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{rz} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

เมื่อ  $\mu_0$  = ค่าความซึมซับแม่เหล็กในสุญญากาศ

$\mu_{rx}$  = ค่าความซึมซับแม่เหล็กสัมพัทธ์ในแนวแกน x

สมการที่ (3.7) แสดงการหาเวกเตอร์ความหนาแน่นของกระแสรวม

$$\{D\} = [\sigma][E] + \{V\} \times \{B\} \quad (3.7)$$

สมการที่ (3.8) แสดงการหาเวกเตอร์ความหนาแน่นของกระแส

$$\{D\} = [\sigma][E] \quad (3.8)$$

เมื่อ

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix}$$

$\sigma_{xx}$  = สภาพการนำไฟฟ้าในแนวแกน x มีหน่วยเป็น S/m

$\varepsilon_{xx}$  = สภาพยินยอมทางไฟฟ้าในแนวแกน x มีหน่วยเป็น F/m

### 3.5 วิเคราะห์สนามแม่เหล็กที่ความถี่สูง

จากสมการ (3.1) และสมการ (3.2) เป็นสมการแมกเวลล์ถ้าพิจารณาในกรณีที่มีสัญญาณฮาร์โมนิก โดยเขียนในรูปของ  $e^{j\omega t}$  จะได้เวกเตอร์ของสนามไฟฟ้าในรูปสมการเฮล์มโฮลทซ์ ดังสมการที่ (3.9)

$$\nabla \times [\bar{\mu}_r^{-1} \cdot (\nabla \times \bar{E})] - k_0^2 \bar{\epsilon}_r \cdot \bar{E} = -j\omega\mu_0 \bar{J}_s \quad (3.9)$$

เมื่อ  $\bar{E}$  = เวกเตอร์สนามไฟฟ้า

$\bar{\epsilon}_r$  = ความยินยอมไฟฟ้าสัมพัทธ์

$\mu_0$  = ความซึมซับแม่เหล็กในฟรีสเปซ

$\bar{\mu}_r$  = ความซึมซับแม่เหล็กในวัตถุ

$k_0$  = จำนวนคลื่น (Vacuum Wave Number)

$\omega$  = ค่าความถี่เชิงมุม

$\bar{J}_s$  = เวกเตอร์ความหนาแน่นของกระแสแหล่งกำเนิด

จากสมการ (3.9) สามารถหาค่าของสนามไฟฟ้าได้จากสมการที่ (3.10) และหาค่าของสนามแม่เหล็กได้จากสมการที่ (3.11)

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^N \bar{W}_i E_i \quad (3.10)$$

$$\bar{H} = \frac{j}{\omega\mu_0} \bar{\mu}_r^{-1} \cdot \sum_{i=1}^N \bar{W}_i E_i \quad (3.11)$$

เมื่อ  $\bar{E}$  = เวกเตอร์ความเข้มของสนามไฟฟ้า

$\bar{H}$  = เวกเตอร์ความเข้มของสนามแม่เหล็ก

$E_i$  = สนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในแต่ละเอลิเมนต์

$\bar{W}_i$  = รูปแบบฟังก์ชันเวกเตอร์ของเอลิเมนต์แต่ละแบบ

### 3.6 สมการความสัมพันธ์ระหว่างคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าและอุณหภูมิ

ความสัมพันธ์ระหว่างคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ากับความร้อนที่ใช้ในวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ มีรูปแบบของสมการทางคณิตศาสตร์แบบเมตริกซ์ ซึ่งแสดงได้ดังสมการ (3.12)

$$\begin{bmatrix} [C] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{T\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_c] & [0] \\ [0] & [K_v] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{T\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{Q\} \\ \{I\} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

เมื่อ  $\{Q\} = \{Q^{nd}\} + \{Q^s\} + \{Q^j\} + \{Q^c\}$

และ  $[C]$  = เมตริกซ์ความร้อนจำเพาะ

$\{I\}$  = เอลิเมนต์ของการนำความร้อน

$[K_c]$  = เวกเตอร์อัตราการใช้ความร้อนที่โนดนั้นๆ

$[K_v]$  = เวกเตอร์อัตราการใช้ความร้อนภายใน

$\{Q\}$  = ความร้อนรวม

$\{Q^{nd}\}$  = เวกเตอร์อัตราการใช้ความร้อนที่โนดนั้นๆ

$\{Q^s\}$  = เวกเตอร์อัตราการใช้ความร้อนภายใน

$\{Q^j\}$  = เวกเตอร์อัตราการใช้ความร้อนจากสมการต้านทานไฟฟ้า

$\{Q^c\}$  = เวกเตอร์การพาความร้อนที่ผิว

$\{I\}$  = โหลดเวกเตอร์อันเนื่องมาจากการไหลของกระแสที่โหลด

จากสมการที่ (3.12) เป็นสมการที่มีการใช้ลักษณะการคำนวณของเมตริกซ์ที่มีความสัมพันธ์รูปแบบของอุณหภูมิและกระแสไฟฟ้า ฟลักซ์แม่เหล็ก ในสมการค่าของพารามิเตอร์  $Q^j$  เวกเตอร์อัตราการใช้ความร้อนจากสมการต้านทานไฟฟ้า ดังสมการที่ (3.13)

$$Q_i = \text{Re} \left( \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n [\sigma] \{J_{ii}\} \cdot \{J_{ii}\}^* \right) \quad (3.13)$$

เมื่อ  $Q^j$  = ต้านทานไฟฟ้าต่อหน่วยปริมาตร

$n$  = จำนวนเอลิเมนต์ที่อินทิเกรต

$[\sigma]$  = เมตริกซ์ของสภาพความต้านทาน

Re = จำนวนขององค์ประกอบ

$\{J_{ii}\}$  = ความหนาแน่นของกระแสรวมในแต่ละเอลิเมนต์

$\{J_{ii}\}^*$  = คอนจูเกตของความหนาแน่นของกระแสรวมในแต่ละเอลิเมนต์

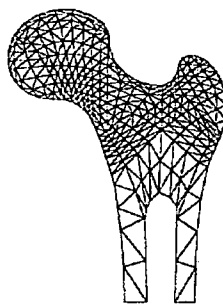
### 3.7 การประยุกต์ใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

ในงานต่างๆ ทางด้านวิศวกรรมโดยปกติแล้วพบว่ามี ความซับซ้อนมาก วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จึงมีบทบาทเป็นอย่างมากในการช่วยแก้ปัญหาต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นปัญหาด้านการยึดหยุ่นของ ของแข็ง ปัญหาด้านการถ่ายเทความร้อน หรือจะเป็นปัญหาด้านการไหลของของไหล เป็นต้น และเมื่อศึกษาถึงภาพรวมและประสิทธิภาพของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จะพบว่าวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถนำไปใช้ประยุกต์กับงานชนิดต่างๆ ได้ หากปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นกับงานชนิดนั้นๆ สามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์จากประสิทธิภาพของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ควบคู่กันกับวิวัฒนาการทางด้านคอมพิวเตอร์จะทำให้เราสามารถคำนวณหาปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นได้โดยสะดวกและยังทำให้ลดค่าใช้จ่ายที่จำเป็นต้องใช้สำหรับการทดลองอีกด้วย

การแก้ปัญหาด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ในสมัยแรกๆ เริ่มปรากฏให้เห็นในงานทางด้านกลศาสตร์ของแข็งและโครงสร้างเป็นส่วนใหญ่ เนื่องจากวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ ทำให้การประยุกต์ใช้วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้ขยายวงกว้างออกไปในงานที่นอกเหนือไปจากงานทางด้านวิศวกรรม เช่น ในงานทางการแพทย์ เป็นต้น จากรูปที่ 3.4 แสดงรูปแบบจำลองของไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้หาการกระจายของความเค้นในกระดูกนอกเหนือจากนั้นวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ยังถูกนำไป

ประยุกต์ใช้กับงานทางการแพทย์ในรูปแบบอื่นๆ อาทิเช่น การคำนวณหาลักษณะการไหลของเลือดในเส้นเลือดและหัวใจ รวมทั้งความกดดันที่เกิดขึ้นตามตำแหน่งต่างๆ ในเส้นเลือด เป็นต้น

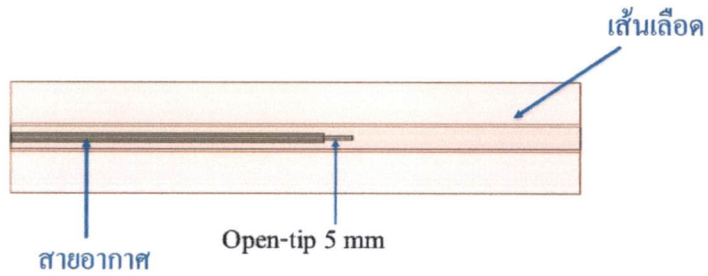
ดังนั้นจะเห็นได้ว่าวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์มีส่วนช่วยเป็นอย่างมากในการศึกษาและออกแบบงานด้านต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นงานทางด้านวิศวกรรมต่างๆ หรือแม้แต่งานทางด้านทางการแพทย์ดังที่กล่าวในข้างต้น ซึ่งวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จะช่วยให้เราสามารถออกแบบงานได้อย่างมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้นและยังรวมถึงช่วยลดค่าใช้จ่ายที่จะต้องใช้ในการทดลองอีกด้วย



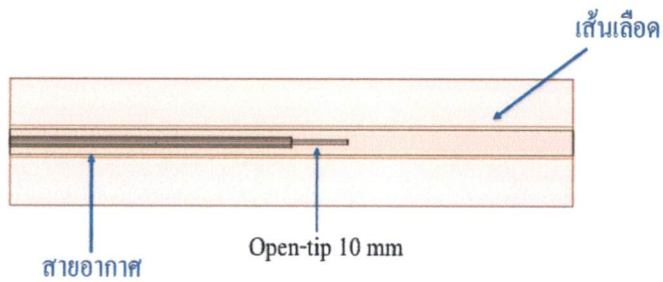
รูปที่ 3.4 รูปแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ของกระดูก

## บทที่ 4

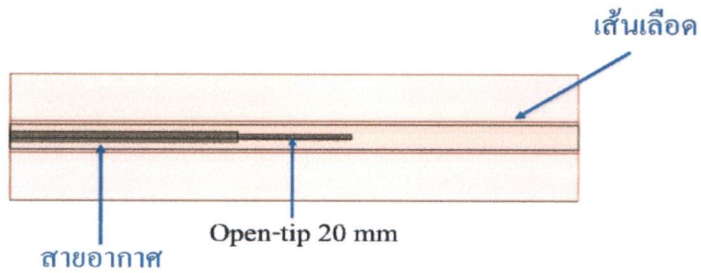
### ผลการทดลอง



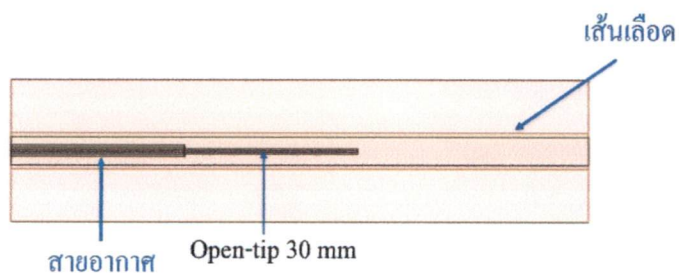
รูปที่ 4.1 สายอากาศปลายเปิด 5 mm ใช้พลังงาน 30 W



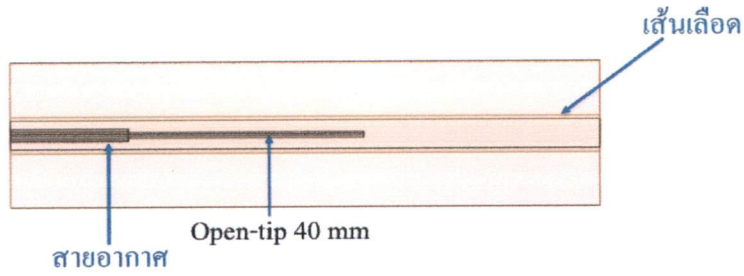
รูปที่ 4.2 สายอากาศปลายเปิด 10 mm ใช้พลังงาน 40 W



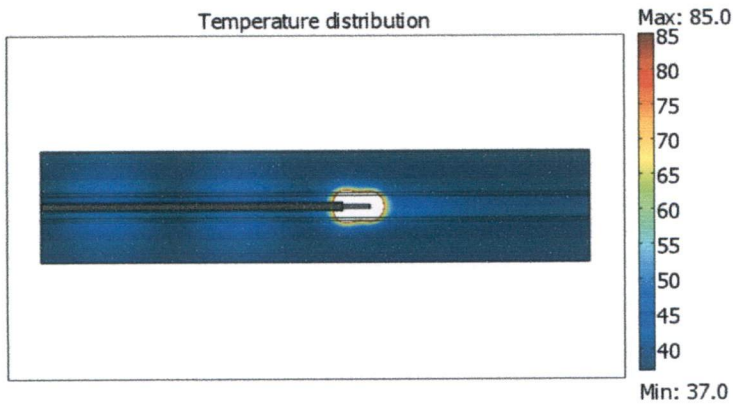
รูปที่ 4.3 สายอากาศปลายเปิด 20 mm ใช้พลังงาน 60 W



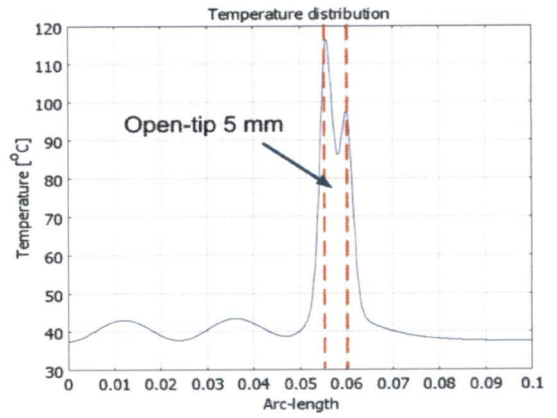
รูปที่ 4.4 สายอากาศปลายเปิด 30 mm ใช้พลังงาน 60 W



รูปที่ 4.5 สายอากาศปลายเปิด 40 mm ใช้พลังงาน 60 W

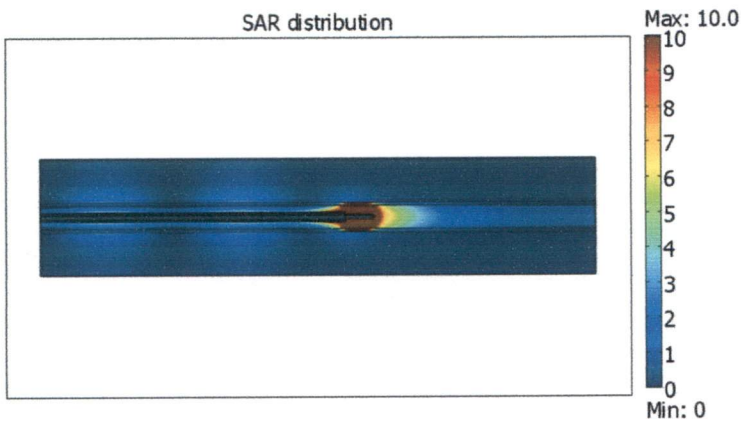


ก. การจำลองการกระจายความร้อน

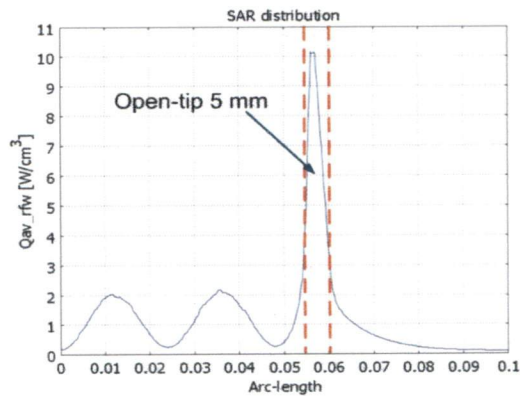


ข. กราฟการกระจายความร้อน

รูปที่ 4.6 การกระจายความร้อนที่เหมาะสมในการบำบัด

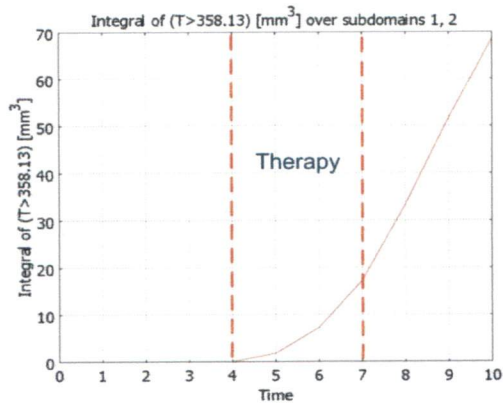


ก. การจำลองการดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

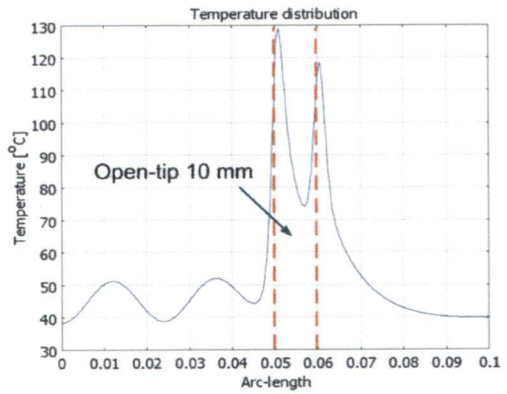
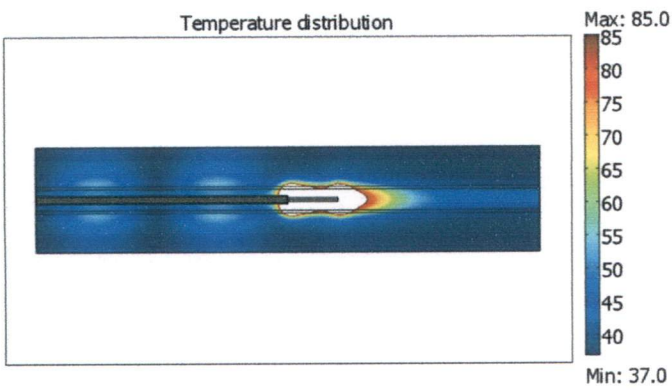


ข. กราฟการดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

รูปที่ 4.7 การดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เหมาะสมในการบำบัด



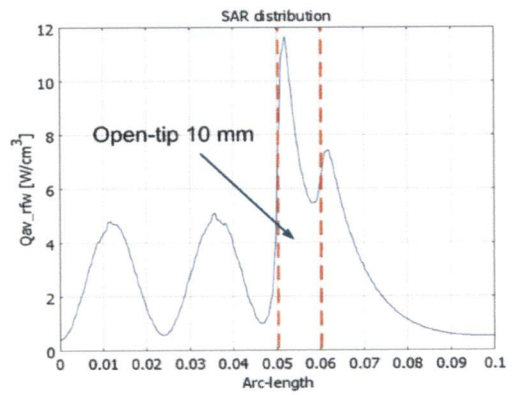
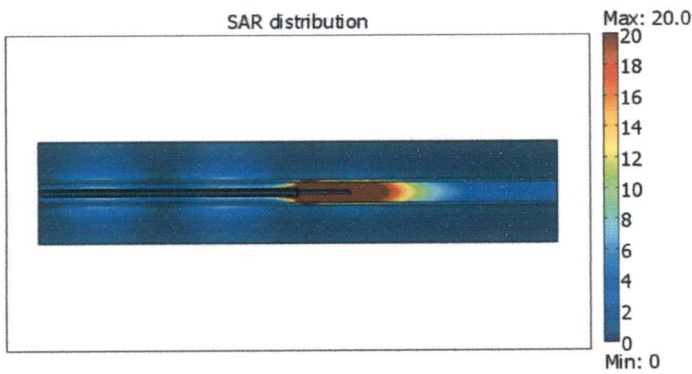
รูปที่ 4.8 กราฟการกระจายตัวของความร้อนที่อุณหภูมิมากกว่า 85 องศาเซลเซียส



ก. การจำลองการกระจายความร้อน

ข. กราฟการกระจายความร้อน

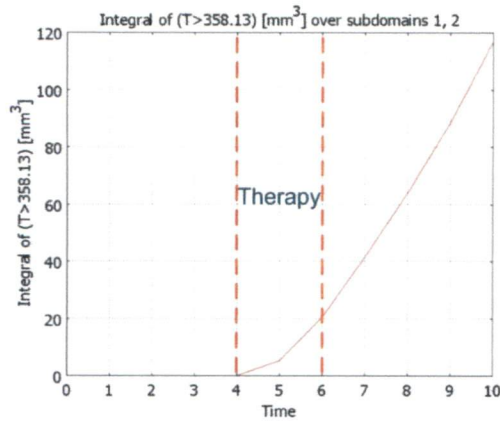
รูปที่ 4.9 การกระจายความร้อนที่เหมาะสมในการบำบัด



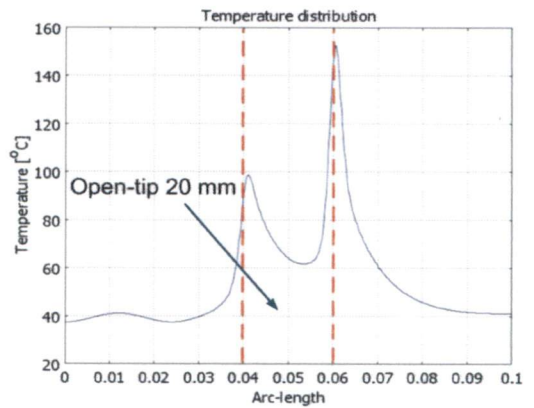
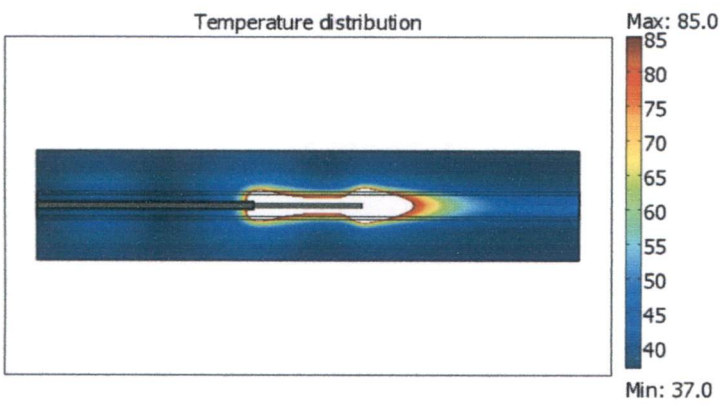
ก. การจำลองการดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

ข. กราฟการดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

รูปที่ 4.10 การดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เหมาะสมในการบำบัด



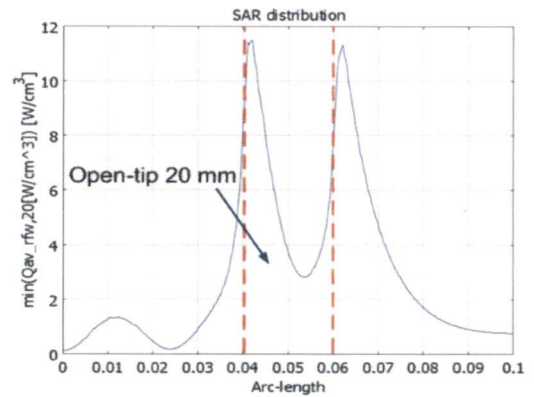
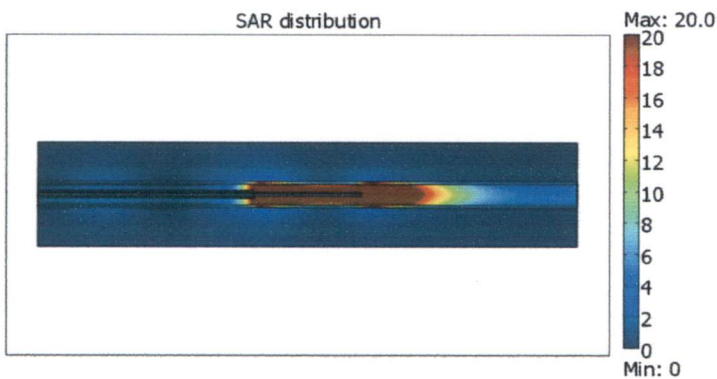
รูปที่ 4.11 กราฟการกระจายตัวของความร้อนที่อุณหภูมิมากกว่า 85 องศาเซลเซียส



ก. การจำลองการกระจายความร้อน

ข. กราฟการกระจายความร้อน

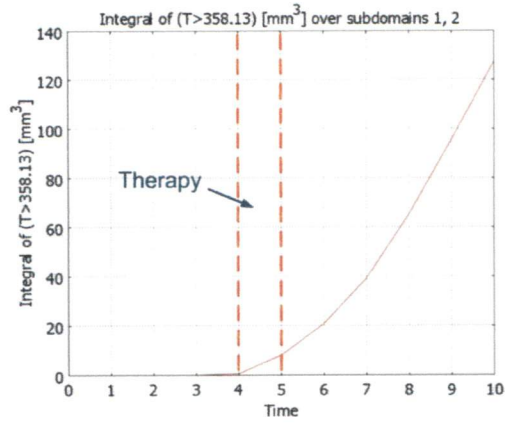
รูปที่ 4.12 การกระจายความร้อนที่เหมาะสมในการบำบัด



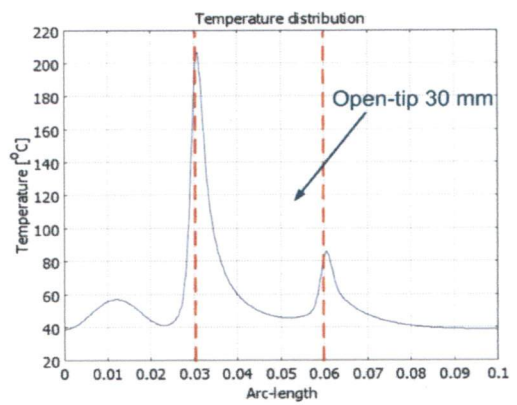
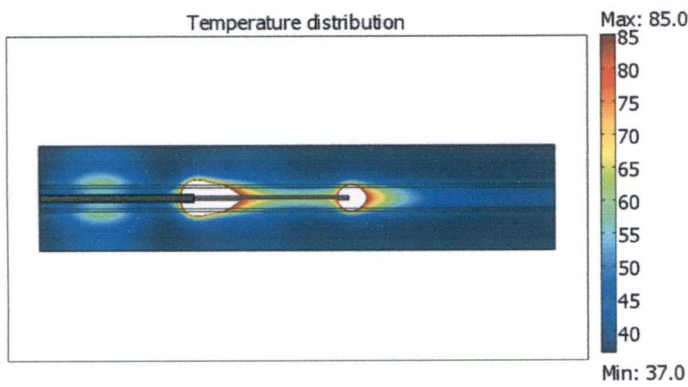
ก. การจำลองการดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

ข. กราฟการดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

รูปที่ 4.13 การดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เหมาะสมในการบำบัด



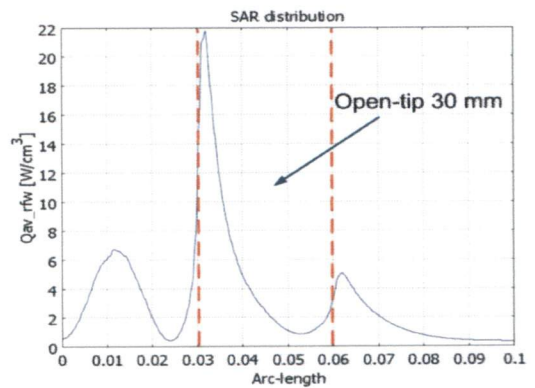
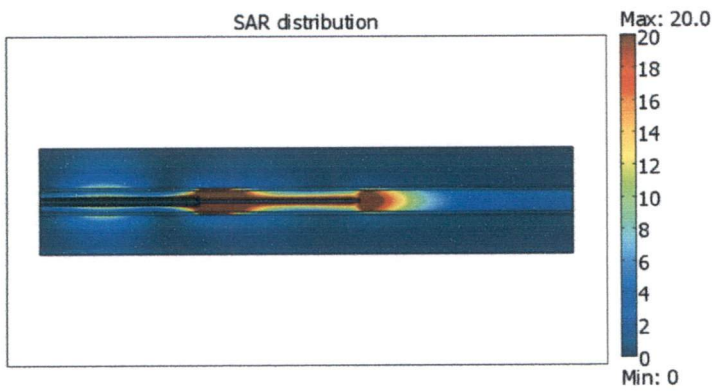
รูปที่ 4.14 กราฟการกระจายตัวของความร้อนที่อุณหภูมิมากกว่า 85 องศาเซลเซียส



ก. การจำลองการกระจายความร้อน

ข. กราฟการกระจายความร้อน

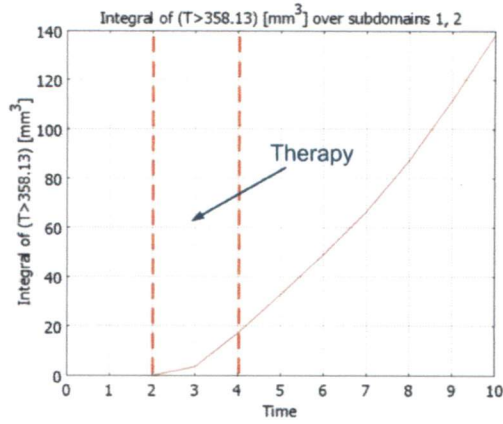
รูปที่ 4.15 การกระจายความร้อนที่เหมาะสมในการบำบัด



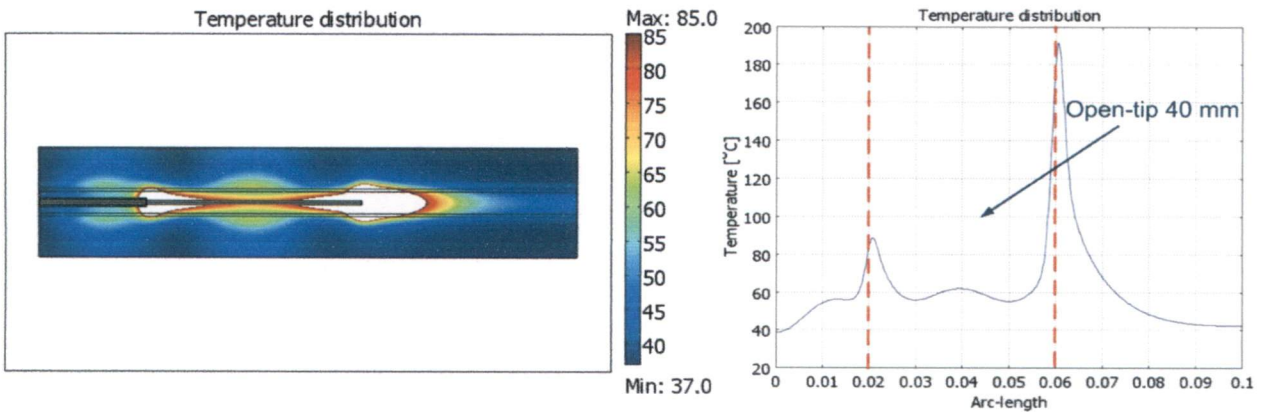
ก. การจำลองการดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

ข. กราฟการดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

รูปที่ 4.16 การดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เหมาะสมในการบำบัด



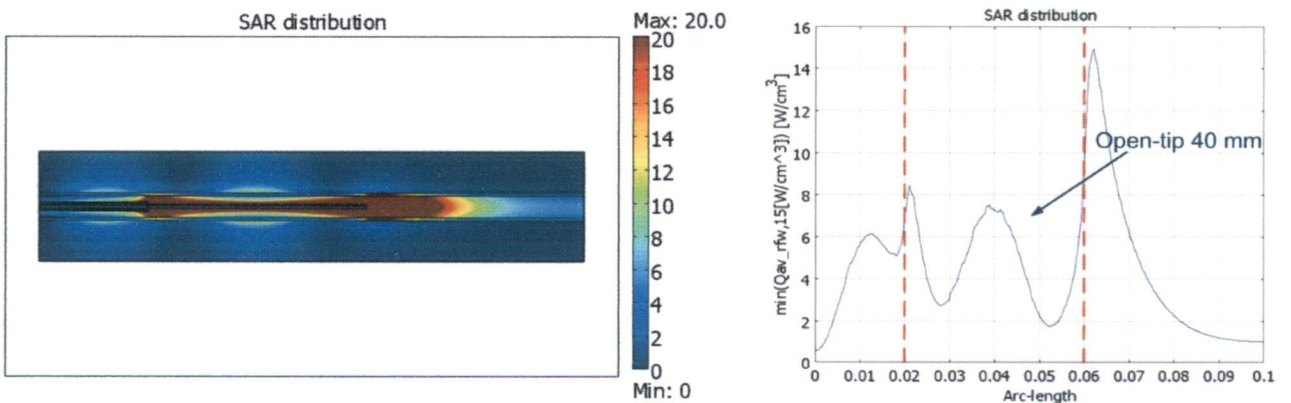
รูปที่ 4.17 กราฟการกระจายตัวของความร้อนที่อุณหภูมิมากกว่า 85 องศาเซลเซียส



ก. การจำลองการกระจายความร้อน

ข. กราฟการกระจายความร้อน

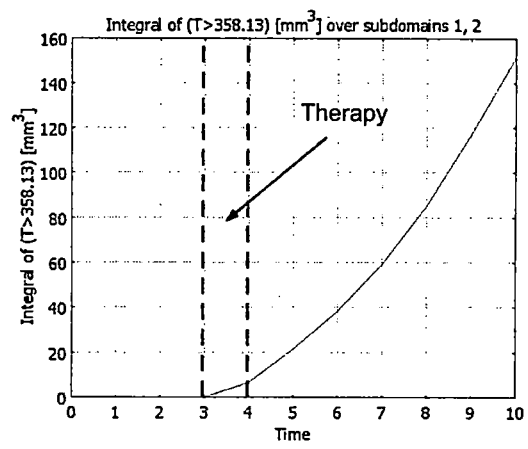
รูปที่ 4.18 การกระจายความร้อนที่เหมาะสมในการบำบัด



ก. การจำลองการดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

ข. กราฟการดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

รูปที่ 4.19 การดูดซับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เหมาะสมในการบำบัด

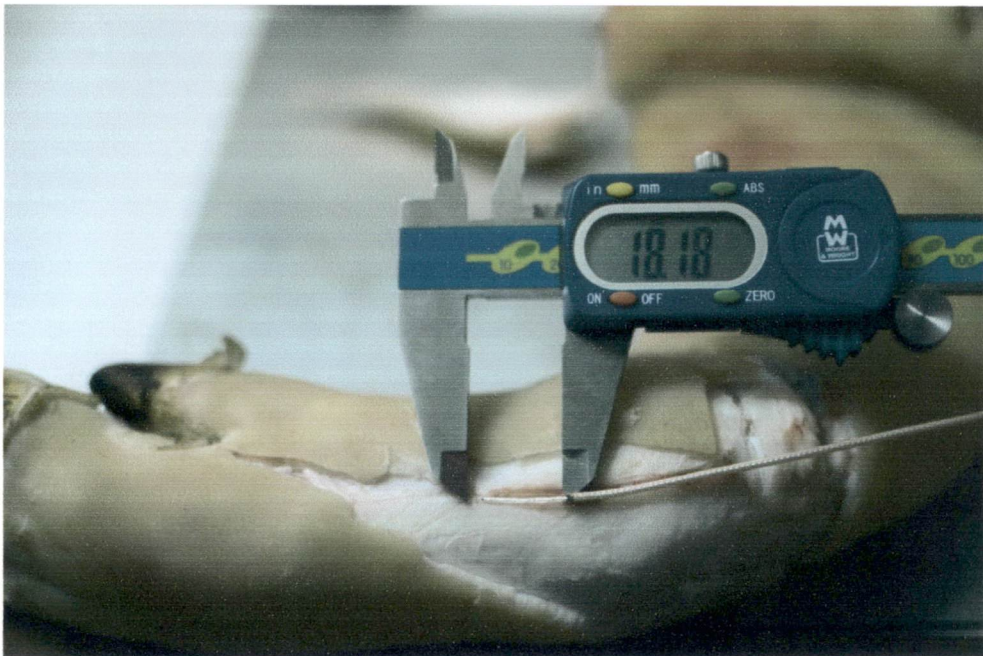


รูปที่ 4.20 กราฟการกระจายตัวของความร้อนที่อุณหภูมิมากกว่า 85 องศาเซลเซียส

การทดลองกับเนื้อเยื่อจริง



รูปที่ 4.21 รูปการทดลองกับเส้นเลือดจริงที่กระทำกับเส้นเลือดใหญ่ของหมู



รูปที่ 4.22 รูปการทดลองกับเส้นเลือดจริงที่กระทำกับเส้นเลือดใหญ่ของหมู



รูปที่ 4.23 รูปการทดลองกับเส้นเลือดจริงที่กระทำกับเส้นเลือดใหญ่ของขามู

## บทที่ 5

### สรุปผลการทดลอง

จากการจำลองการทำงานและผลการทดลองจริง ทางผู้วิจัยได้ ทำการออกแบบและจำลองการทำงานด้วย ไฟไนต์เอลิเมนต์ ในรูปแบบ 3 มิติ โดยใช้สายอากาศแบบ สายนำสัญญาณโคแอกเชียล มาประยุกต์ใช้ เพื่อให้เป็นตัวกลางนำคลื่นเข้าสู่เนื้อเยื่อ โดยทางผู้วิจัยได้ทำการเปิดปลายสายอากาศออกในรูปแบบของ OPEN TIP ผลที่ได้พบว่านำไปประยุกต์ใช้งานเพื่อทำการแก้ไขข้อบกพร่องของเส้นเลือดที่เกิดผิดปกติกับขา โดยมีการกระจายของความร้อนประมาณ 90 องศาเซลเซียสในระยะเวลาประมาณ 10 วินาที ก็จะสามารถ แก้ไขความผิดปกติของเส้นเลือดได้ โดยเมื่อทำการเพิ่มความยาวของช่วงเปิดปลายของสายอากาศมากขึ้น ก็จะทำให้เกิดการกระจายของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในเนื้อเยื่อ โดยอุปสรรคของการทำงานวิจัยนี้ จำเป็นต้อง สนใจ ปัจจัยด้านการพาความร้อนอันเนื่องมาจากเลือดที่มีคุณสมบัติเป็นตัวนำพาความร้อนออกจากระบบ ได้เป็นอย่างดี ซึ่งมีความหมายว่า จะเกิดการกระจายความร้อนที่ซ้ามาก เนื่องจากมีเลือดเป็นตัวระบาย ความร้อน ฉะนั้น ในการเลือกขนาดของตัวนำคลื่นให้มีขนาดเล็ก จะเป็นผลดี เนื่องจากขนาดของ สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กของสายนำสัญญาณที่มีขนาดเล็กจะมีขนาดที่สูงกว่า จึงมีความเหมาะสม อย่างมากในการประยุกต์ใช้ในระบบที่มีการต้านความร้อนในรูปแบบของ Heat Sink

ภาคผนวก

# 3D Finite Element Analysis for Varicose Vein Therapy by Using Microwave Ablation

S. Prasantamrongsiri<sup>1</sup>, P. Phasukit<sup>1\*</sup>, C. Pintavirooj<sup>1</sup>, S. Tungjitkusolmun<sup>1</sup> and A. Sanpanich<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Faculty of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand.

<sup>2</sup>Institute of Molecular Biosciences, Mahidol University, Nakhon Pathom, Thailand.

\* kppattar@kmitl.ac.th

**Abstract**—This paper presents three-dimensional finite element method for analyze a varicose vein microwave ablation. Varicose vein can contract by using heat from microwave ablation. Because of varicose vein patients have leg pain from long time standing, and do a lot of activities. Symptoms have influenced the daily life of patients. We study method for varicose vein therapy by using microwave ablation. Because of this method is easy to use for varicose vein therapy. In this research work, we propose simulation varicose vein that varicose vein is inserted with antenna into blood vessel. Simulation method delivers microwave to antenna inserted in varicose vein. For this reason, varicose vein is contract. Finite element analysis can apply in treatment planning and show temperature distribution and specific absorption rate (SAR) distribution for contract of varicose vein characteristic by using microwave therapy. And the doctor can be use the data for treat in future.

**Keywords**—Varicose Vein, Finite Element, Microwave Ablation, Antenna

## I. INTRODUCTION

Varicose vein disease is abnormality of superficial vein [1]. Varicose vein patients are present in 15% of men and 25% of woman [2], [3]. Common causes of disease consist of family history, female hormones, arteriovenous communications, physiology, and biochemical stress [1]. Generally, varicose vein treatment is surgery method. Surgery spends long time and large lesion size. We study solution to treat varicose vein disease by using microwave ablation method because this method spends short time and small lesion size [4].

We study varicose vein paper in 2010. Kim et al, [5] studied in “A New Method for Remedy of Varicose Vein Using Horn Antenna.” This method uses microwave ablation for treatment. This method illustrates varicose vein in the leg that incidents electromagnetic wave from outside of the body by using antenna and removes the blood vessel by heating.

In this research work, we use microwave (MW) ablation for varicose vein therapy. Therapy is treated to varicose vein in leg. Microwave frequency operating at 2.45 GHz. Temperature is controlled to 85°C for 10 second. After delivery of microwave energy into tissue, Joule heat is generated which then conducts into surrounding blood vessel for therapy.

This paper is presented as following an introduction in section I, Methods included varicose vein model, antenna model, bio-heat equation, SAR distribution, and finite element

analysis in section II, results in section III, discussion and conclusion in section IV.

## II. METHOD

### A. Varicose Vein Model

The model is designed to simulate the heat transfer to blood vessel. The varicose vein model consists of fat, blood, and blood vessel. Varicose vein model included front view, and side view are shown in Fig. 1.

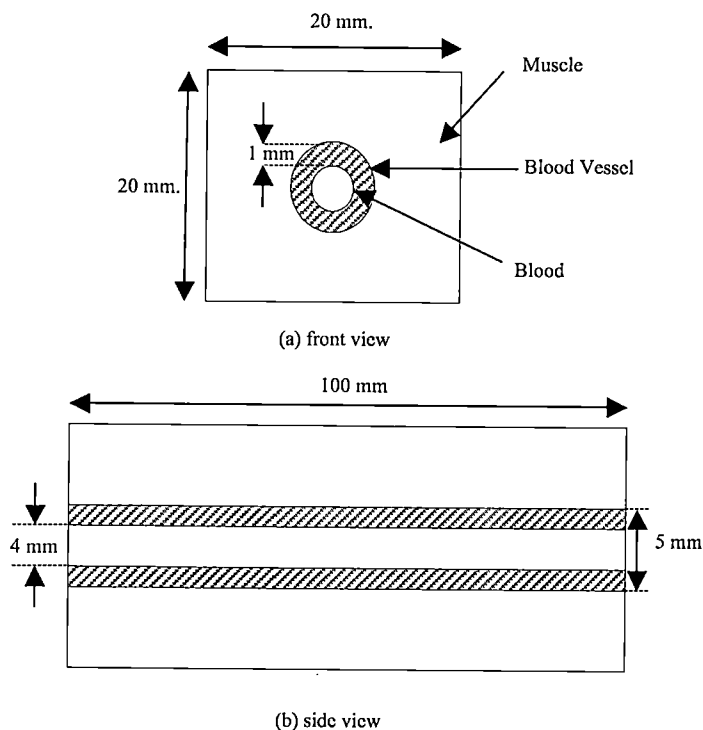


Figure 1. Varicose Vein Model.

### B. Coaxial Open-Tip Antenna Model

Coaxial open-tip antenna (COA) model consists of inner conductor, dielectric, insulator, and outer conductor. A destructive area at the end of antenna tip in tissue volume is quite predictable. Fig. 2 shows our designed coaxial open-tip antenna model. Dimensions of components of coaxial open-tip antenna are shown in Table I.

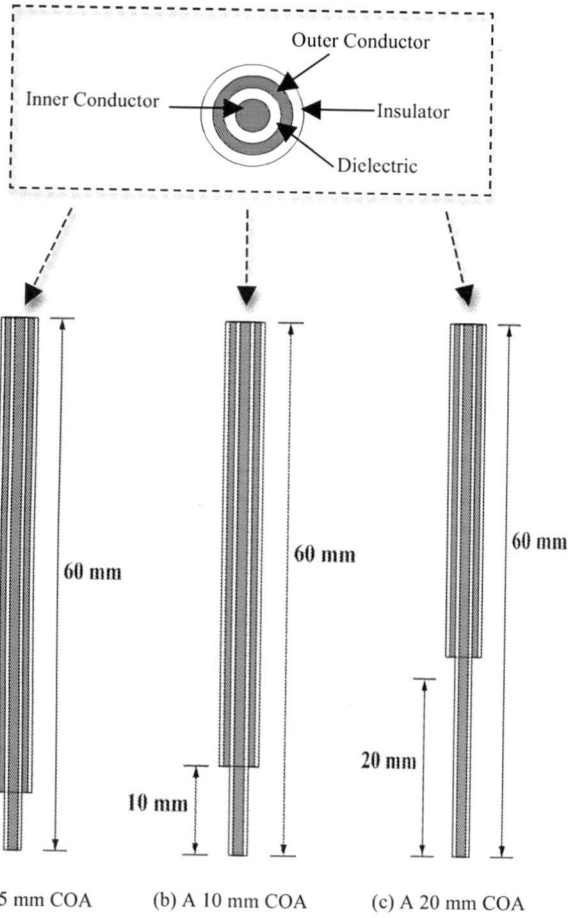


Figure 2. Coaxial Open-Tip Antenna Model.

TABLE I. DIMENSION OF COAXIAL OPEN-TIP ANTENNA

Component	Dimension (mm)
Diameter of inner conductor	0.32
Diameter of dielectric	0.85
Diameter of outer conductor	1.34
Diameter of insulator	1.78
Length of open tip end	5, 10, 20
Overall length of antenna	60

### C. Bio-heat Equation

The source of heat transfer in MW ablation is from electromagnetic wave at 2.45 GHz transmitted into tissues. Joule heating arises when energy dissipated by an electric current flowing through a conductor is converted into thermal energy. Tissue temperature changes over time can be predicted by the bio-heat equation:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (-k \nabla T) = h_{bl}(T_{bl} - T) + Q_{met} + Q_{ext} \quad (1)$$

$$h_{bl} = \rho_{bl} c_{bl} \omega_{bl} \quad (2)$$

where

- $\rho$  = Density of tissue [ $kg/m^3$ ];
- $c$  = Specific heat [ $J/kg \cdot K$ ];
- $k$  = Thermal conductivity [ $W/m \cdot K$ ];
- $T_{bl}$  = Temperature of blood;
- $\rho_{bl}$  = Density of blood [ $kg/m^3$ ];
- $\omega_{bl}$  = Perfusion of blood [ $s^{-1}$ ];
- $h_{bl}$  = Convective heat transfer coefficient accounting for the blood perfusion;
- $Q_m$  ( $W/m^3$ ) = Energy generated by metabolic processes and was neglected since it is small compared with the other terms.
- $Q_{ext}$  = External heat source generated by microwave energy from antennas. After delivery of microwave energy into tissue, Joule heat is generated which then conducts into surrounding tissues [6].

### D. Specific Absorption Rate (SAR) Distribution

In general, an energy which absorbs by living tissue when body is exposed by electromagnetic field at radiofrequency range can be measured in term of a specific absorption rate (SAR). This value indicates an absorption power per mass of living tissue or in Watts per kilogram ( $W/kg$ ). SAR distribution is widely used in order to indicate a heating ability of microwave antenna [7].

$$Q_{ext} = \rho \cdot SAR \quad (3)$$

$$SAR = \frac{\sigma \cdot E^2}{\rho} \quad (4)$$

where

- $\rho$  = density of tissue [ $kg/m^3$ ];
- $\sigma$  = conductivity of tissue [ $S/m$ ];
- $E$  = electric field [ $V/m$ ]

### E. Finite Element Analysis

The model is constructed using COMSOL Multiphysics, finite element based analysis software. We utilized numerical modeling to solve 3D bio-heat equation in order to obtain temperature distributions during MW ablation. The simulations performed in COMSOL consisted of RF Module and Heat Transfer (Bio-heat Equation) Module. We developed

the electrodes structure and other geometrical components with SolidWorks before exporting them in IGES format into COMSOL Multiphysics. We assigned boundary conditions and material properties and then solved the coupled thermal-electromagnetic problem. The total time for MW energy application was set to 10 second while the power delivered was set to 30, 40 and 60 watts for a 5 mm COA, 10 mm COA and 20 mm COA, respectively. Microwave is preset at 2.45 GHz. A number of mesh element are compromisingly refined at 172,599 elements, 170,028 elements and 162,839 elements for a 5 mm COA, 10 mm COA and 20 mm COA, respectively. Mesh element is shown in Fig. 3-5. The simulation was implement on Intel Core-i7 2.67 GHz and 12 GB RAM on Window platform.

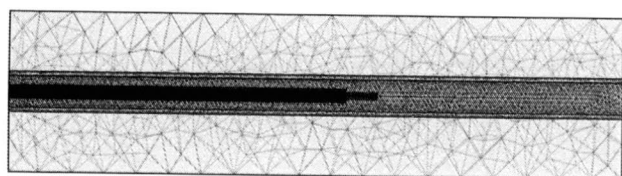


Figure 3. Mesh element of A 5 mm COA.

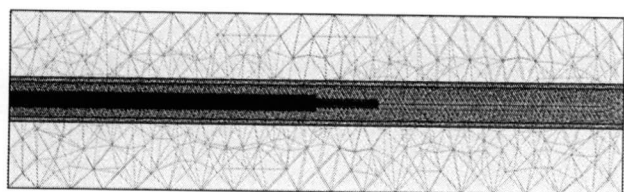


Figure 4. Mesh element of A 10 mm COA.

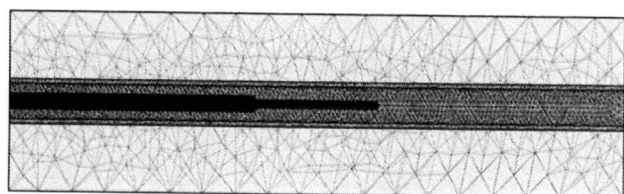


Figure 5. Mesh element of A 20 mm COA.

### III. SIMULATION RESULT

Simulation result of three-dimensional finite element analysis for varicose vein therapy by using microwave ablation, microwave frequency is controlled to 2.45 GHz 85°C for 10 seconds. Simulation results of this study are shown in Fig. 6-8. Simulation results consist of temperature distribution and SAR distribution. After antenna operate for 10 seconds, varicose vein is destroyed. We also show temperature distribution and temperature distribution graph are shown in Fig. 6-8 (a-b). SAR distribution and SAR distribution graph are shown in Fig. 6-8 (c-d). The maximum temperature dis-

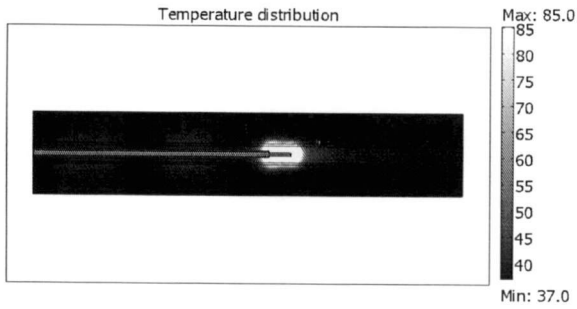
tribution and maximum SAR distribution in blood vessel shown in table II. At 60 watt of a 20 mm COA, this power is suitable for varicose vein therapy because this powers are non-effect to other healthy cell surrounding the tissue.

TABLE II. THE MAXIMUM TEMPERATURE DISTRIBUTION AND MAXIMUM SAR DISTRIBUTION IN BLOOD VESSEL

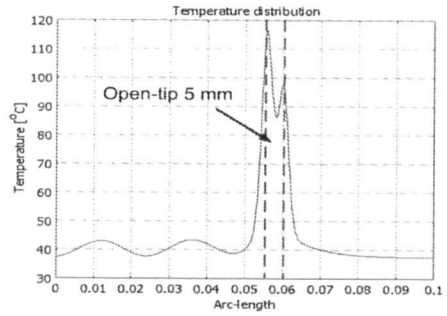
COA	Temperature (°C)	SAR (cm <sup>3</sup> )
5mm (30W)	115	10
10mm (40W)	129	11.5
20mm(60W)	150	11.5

### IV. DISCUSSION AND CONCLUSION

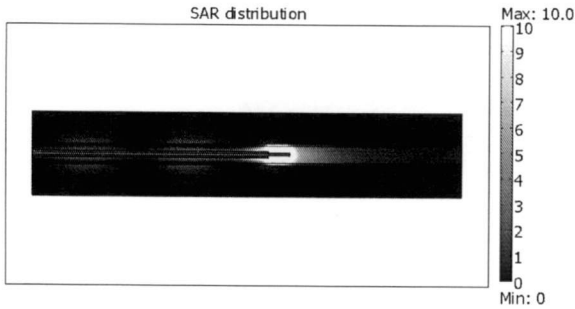
In this varicose vein therapy by using finite element analysis, antenna is intently designed as an open tip type. Antenna controls heat that radiate to tissue. Tissue is heated then varicose vein is disintegrated. Results of simulation and analysis by using COMSOL Multiphysics program, microwave frequency is controlled to 2.45 GHz at 85°C for 10 seconds, that results are show temperature distribution and SAR distribution for blood vessel disintegrate. A 5 mm COA has minimum value for temperature distribution and thermal distribution. A 20 mm COA has maximum value for temperature distribution and thermal distribution. At 60 watt of a 20 mm COA, these powers are suitable for varicose vein therapy. Varicose vein therapy by using microwave ablation is a new alternative maneuver to the patient and hopefully may reduce using of medicines in varicose vein treatment, save money on medical care in long run, and also guide us to develop a varicose vein treatment in the future. Next step, we plan to apply our treatment system to use with deep vein thrombosis (DVT).



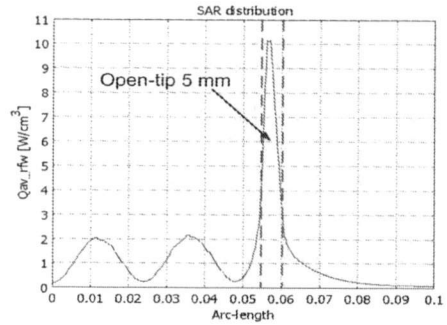
(a) Temperature distribution



(b) Temperature distribution graph.

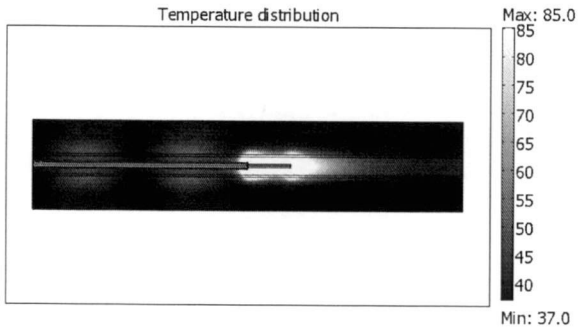


(c) SAR distribution.

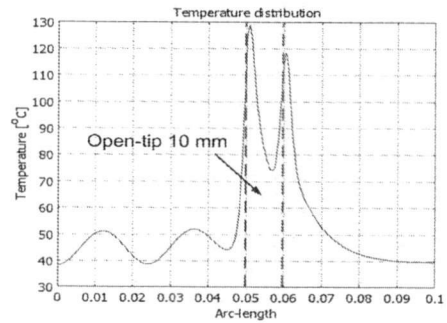


(d) SAR distribution graph.

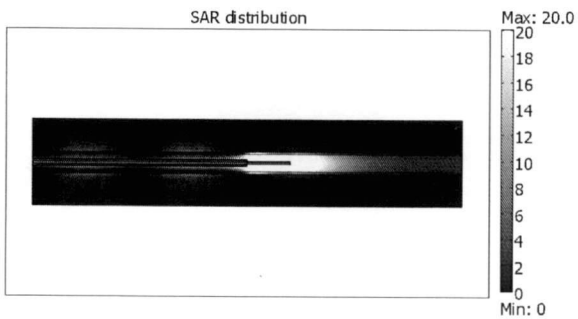
Figure 6. 30 watt of a 5 mm COA.



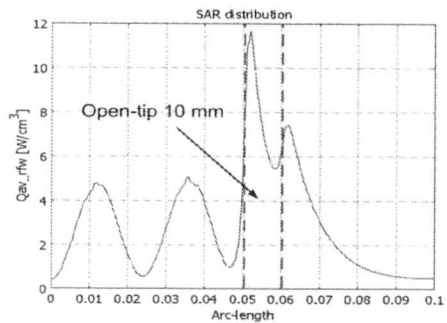
(a) Temperature distribution



(b) Temperature distribution graph.

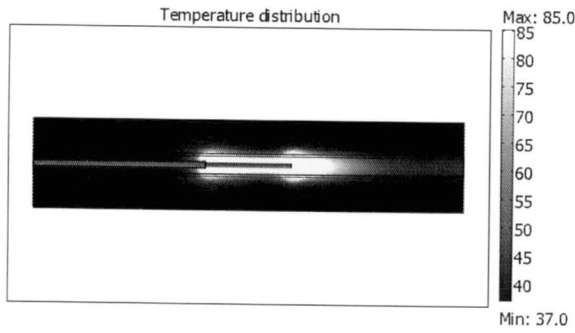


(c) SAR distribution.

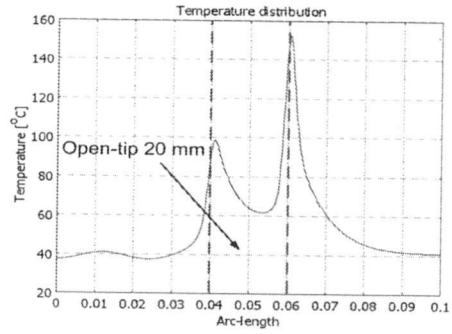


(d) SAR distribution graph.

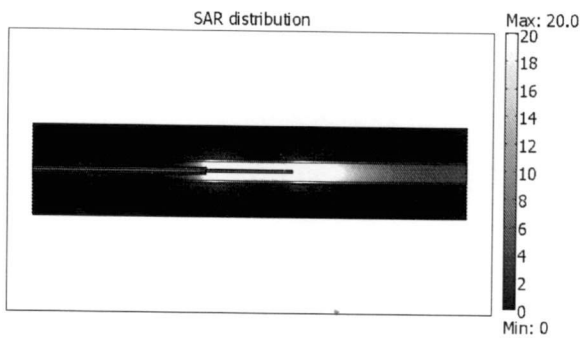
Figure 7. 40 watt of a 10 mm COA.



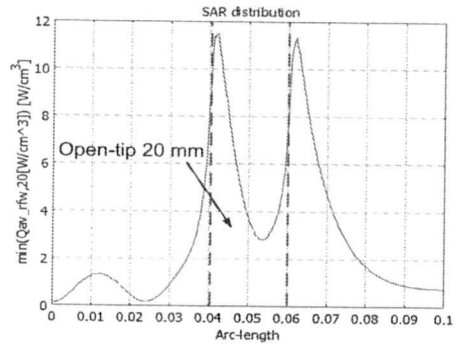
(a) Temperature distribution



(b) Temperature distribution graph.



(c) SAR distribution.



(d) SAR distribution graph.

Figure 8. 60 watt of a 20 mm COA.

#### REFERENCES

- [1] W. Weerayutthasilp, and A. Chulakadabba, "Current management of varicose veins," *Chula. Med. J.*, vol. 49, no.8, pp. 96-477, Aug 2005.
- [2] M. Stirling, and C. K. Shortell, "Endovascular Treatment of Varicose Veins," *Semin. Vasc. Surg.*, vol. 19, pp. 109-115, 2006.
- [3] R. Boon, G.J.M. Akkersdijk, and D. Nio, "Percutaneous treatment of varicose veins with bipolar radiofrequency ablation," *Eur. J. Radio.*, vol.75, pp. 43-47, 2010.
- [4] P. Khantiworapong, S. Subwongchareon, P. Sukheepot, and N. Praditphol, "The Power Setting of Endovenous Microwave Ablation for the Treatment of Varicose Vein: In Vitro Study," *Thai J. Surg.*, vol. 29, pp. 64-68, 2008.
- [5] Wanghyun Kim, Tae-Hee Woo, Minkyun Yoo, Jeiwon Cho, Dosung Kwon, Young-seek Chung, and Changyul Cheon, "A New Method for Remedy of Varicose Vein Using Horn Antenna," *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 2010.
- [6] P. Phasukkit, S. Tungjikusolmun, and M. Sangworasil, "Finite Element Analysis and in vitro Experiments of Placement Configurations Using Triple Antennas in Microwave Hepatic Ablation", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, TBME-00164, pp. 1-9, 2009.
- [7] W. Jakawanchaisri, A. Sanpanich, P. Phasukkit, C. Pintavirooj, and S. Tungjikusolmun, "FEM Analysis of Microwave Ablation for Snoring Therapy by Using Real Imag," *ICBET2012*, June 2012.