



รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

ผลเฉลยเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งไม่เชิงเส้น
Numerical Solution of Nonlinear Suspended String Vibration



ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2556

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

ชื่อโครงการ ผลเฉลยเชิงตัวเลขของการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้ง ไม่เชิงเส้น

แหล่งเงิน ทุนประเภทส่งเสริมนักวิจัย

ประจำปีงบประมาณ 2555 จำนวนเงินที่ได้รับการสนับสนุน 50,000 บาท

ระยะเวลาทำการวิจัย 1 ปี ตั้งแต่ 1 ตุลาคม 2555 ถึง 30 กันยายน 2556

ชื่อ-สกุล หัวหน้าโครงการ ผศ. ดร. ใจปอง เกษมสุวรรณณ์

หน่วยงานต้นสังกัด สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาระเบียบวิธีผลต่างอันดับและแบบจำลองเชิงตัวเลขของเส้นลวดในแนวตั้ง ลักษณะการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีแรงภายนอกถูกนำมาเปรียบเทียบกับกรณีแบบไม่มีแรงภายนอก โดยพิจารณาว่าเมื่อกำหนดให้กำลังและสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอกมีค่าแตกต่างกันจะว่ามีผลต่อลักษณะการสั้นอย่างไรบ้าง ซึ่งสามารถแบ่งการพิจารณาได้เป็น 3 กรณีคือ กรณีแรกเป็นการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างกำลังและสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอกกับการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของแอมพลิจูดการสั้น กรณีที่สองเป็นการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างกำลังและสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอกกับความคล้ายกันของแอมพลิจูดการสั้น และกรณีสุดท้ายเป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างกำลังและสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอกกับการเกิดการกำทอนของเส้นลวด นอกจากนี้ งานวิจัยนี้ยังได้ทำการศึกษาดูว่ากรณีที่การสั้นเกิดการกำทอนขึ้น ความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสองจะมีช่วยลดหรือป้องกันการเกิดการกำทอนได้หรือไม่ อย่างไร

คำสำคัญ : แรงภายนอกไม่เชิงเส้น การจำลองเชิงตัวเลข สมการการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้ง การสั้นแบบมีความหน่วง

RCH

QA

297

จ 931 น

เลขหมู่.....

เลขทะเบียน 130041

วัน เดือน ปี 7 ส.ค. 2557

b. 125934SX

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ในประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมีเหตุดเบี่ยงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Research Title: Numerical Solution of Nonlinear Suspended String Vibration

Researcher: Asst. Dr. Jaipong Kasemsuwan

Faculty: Faculty of Science

Department: Department of Mathematics, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang.

ABSTRACT

This research concerns with the finite difference scheme and the numerical simulation of the suspended string equation. The vibration solutions when various external forces are taken into account are obtained and compared with the solutions without external force. In addition, the effects as a result of external forces, their powers and coefficients on the amplitude of vibration are investigated. They are basically three cases: 1) the amplitude of the suspended string vibration as a function of the powers and the coefficients of the external force; 2) the comparison of the amplitude of the suspended vibration with various powers and coefficients of the external force; and 3) the resonance of the suspended string vibration as a function of the powers and the coefficients of the external force. Furthermore, the study of how the linear and nonlinear damping terms affect the resonance behavior is demonstrated.

Keywords : Nonlinear external forces, Numerical simulation, Suspended string vibrating equation, Damped vibration.

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยเรื่อง ผลเฉลยเชิงตัวเลขของการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งไม่เชิงเส้นนี้ เป็นงานวิจัยต่อเนื่อง จากงานวิจัยเรื่อง การจำลองการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งที่มีความหน่วงไม่เชิงเส้นซึ่งได้ทำการศึกษาไว้ ก่อนหน้านี้ ทั้งสองงานวิจัยเป็นการศึกษาเกี่ยวกับสมการการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้ง โดยปัญหาดังกล่าว ผู้วิจัยได้รับการถ่ายทอดความรู้จาก Prof. Masaru Yamaguchi ผู้วิจัยจึงขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

และขอขอบคุณเจ้าของเอกสาร บทความ ตำรา หนังสือทุกท่านที่ผู้วิจัยใช้ในการประกอบการทำวิจัยที่ ไม่ได้กล่าวนามไว้ ณ ที่นี้

และขอขอบคุณนายสิทธิเชษฐ์ รุ่งรัศมีพัฒน์ ผู้ช่วยวิจัยในการเขียน โปรแกรมที่ทำให้งานวิจัยนี้สำเร็จ ตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้

โดยในการวิจัยครั้งนี้ ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง จากทุนประเภทส่งเสริมนักวิจัย ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2556

ท้ายที่สุดนี้ ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา และครอบครัว ที่คอยเป็นกำลังใจในการทำงานต่างๆ ให้ สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ตลอดจนครูอาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่าน ที่ได้ประสาทวิชาความรู้ต่างๆ รวมทั้งให้การ ช่วยเหลือ สนับสนุน ให้คำแนะนำด้วยดีตลอดมา

ผศ. ดร. ใจปอง เกษมสุวรรณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญภาพ.....	VI
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	2
1.3 ขอบเขตของการวิจัย.....	3
1.4 วิธีดำเนินการวิจัย.....	3
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	3
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	4
2.1 แนวคิด ทฤษฎีหลักตามประเด็นให้ครอบคลุมเรื่องที่วิจัย.....	5
2.1.1 การแบ่งลักษณะการสั้น.....	5
2.1.1.1 การสั้นแบบอิสระหรือการสั้นแบบบังคับ.....	5
2.1.1.2 การสั้นแบบมีความหน่วงและไม่มีความหน่วง.....	5
2.1.1.3 การสั้นแบบเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น.....	6
2.1.1.4 การสั้นแบบกำหนดได้และการสั้นแบบสุ่ม.....	6
2.2 วิธีการผลต่างจำกัดสำหรับสมการความวุ่น.....	6
2.2.1 ระเบียบวิธีชัดเจน.....	6
2.2.2 ปัญหาไม่เชิงเส้น.....	9
2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	11
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย	14
3.1 สมการการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงและมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น.....	14
3.2 การหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีผลต่างอันดับ.....	16

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.2.1 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ ครรณิมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น และไม่มีความหน่วง.....	18
3.2.2 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ ครรณิมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น และมีความหน่วงแบบเชิงเส้น	23
3.2.3 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ ครรณิมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น และมีความหน่วงแบบไม่เชิงเส้น กำลังสอง.....	28
3.3 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อแสดงกราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลข.....	33
3.3.1 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมแสดงผลกราฟการสั่นแบบไม่มีการเปรียบเทียบ.....	34
3.3.2 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมแสดงผลกราฟการสั่นแบบมีการเปรียบเทียบ.....	36
บทที่ 4 ผลการวิจัย	41
4.1 ลักษณะการสั่นครรณิมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น และไม่มีแรงหน่วง ($\alpha = 0$) เมื่อกำหนดให้ สัมประสิทธิ์ β และกำลัง d มีค่าต่างๆ กัน.....	41
4.2 ลักษณะการสั่นครรณิมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น และมีความหน่วงแบบเชิงเส้น ($c = 1$) และ สัมประสิทธิ์ α มีค่าแตกต่างกัน.....	52
4.3 ลักษณะการสั่นครรณิมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น และมีความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสอง ($c = 2$) และสัมประสิทธิ์ α มีค่าแตกต่างกัน.....	57
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ	60
5.1 สรุปผลการวิจัย.....	60
5.2 ข้อเสนอแนะ.....	61
บรรณานุกรม	62
ภาคผนวก	
ภาคผนวก ก.....	63
ประวัตินักวิจัย	70

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญญภาพ

รูปที่	หน้า
2.2.1 การกำหนดจุดของระเบียบวิธีซัดเจ็ง	7
2.2.2 ผลเฉลยของสมการความร้อน โดยกราฟเส้นประเป็นผลเฉลยของผลต่างอันตะ และกราฟเส้นทึบเป็นผลเฉลยของฟูรีเยร์ โดยกำหนดระยะห่างค่อนข้างหยาบคือ $\Delta x = 1/6$ และ $\Delta t = 1/80$	8
2.2.3 ผลเฉลยของสมการความร้อน โดยกราฟเส้นประเป็นผลเฉลยของผลต่างอันตะ และกราฟเส้นทึบเป็นผลเฉลยของฟูรีเยร์ให้พารามิเตอร์ คือ $\Delta x = 1/20$ และ $\Delta t = 1/800$	9
2.2.4 กราฟผลเฉลยเชิงอันตะของสมการความร้อนแบบไม่เชิงเส้น กำหนดให้ $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0.00005$	11
3.2.1.1 การระบุตำแหน่งของผลเฉลย u ในสมการ (3.2.5)	18
3.2.1.2 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.2.8)	19
3.2.1.3 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.2.9)	19
3.2.1.4 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.2.12)	20
3.2.1.5 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.2.15)	21
3.2.2.1 การระบุตำแหน่งของผลเฉลย u ในสมการ (3.2.17)	23
3.2.2.2 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.2.20)	24
3.2.2.3 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.2.21)	25
3.2.2.4 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.2.24)	26
3.2.2.5 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.2.27)	27
3.2.3.1 การระบุตำแหน่งของผลเฉลย u ในสมการ (3.2.29)	28
3.2.3.2 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.2.32)	29
3.2.3.3 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.2.33)	30
3.2.3.4 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.2.36)	31
3.2.3.5 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.2.39)	31
3.3.1 หน้าต่าง GUI เพื่อรับข้อมูลและแสดงผลกราฟ	33
3.3.1.1 หน้าต่าง Animation แสดงการจำลองการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้นกำลังสอง เมื่อกำหนดให้ กำลังของแรงภายนอกคือ $d = 0$	36
3.3.1.2 หน้าต่าง New Figure แสดงการจำลองการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้นกำลังสอง เมื่อกำหนดให้ กำลังของแรงภายนอกคือ $d = 0$	36
3.3.2.1 หน้าต่าง GUI ที่รับข้อมูลและแสดงผลกราฟเปรียบเทียบ	37

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3.2.2 หน้าต่าง Animation แสดงการจำลองการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีการเปรียบเทียบระหว่างการสั้นแบบไม่มีแรงภายนอก กับแรงภายนอกมีกำลังสอง ($d = 2$).....39

3.3.2.3 หน้าต่าง New Figure แสดงการจำลองการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีการเปรียบเทียบระหว่างการสั้นแบบไม่มีแรงภายนอก กับแรงภายนอกมีกำลังสอง ($d = 2$)..... 39



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญญภาพ (ต่อ)

รูปที่

หน้า

4.2.7 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังเก๋า (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังเก๋าพร้อมกับความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\beta=70$ และ α ต่างๆ กัน และความเร็วเริ่มต้นคือ x	55
4.2.8 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสอง (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสองพร้อมกับความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\alpha=100$ และ $\beta > 0$ ต่างๆ กัน และความเร็วเริ่มต้นคือ x^2	56
4.3.1 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังเก๋า (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังเก๋าพร้อมกับความหน่วงไม่เชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\alpha=1$	57
4.3.2 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสอง (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสองพร้อมกับความหน่วงไม่เชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\alpha=1$ และ $\beta > 5$	57
4.3.3 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสอง (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสองพร้อมกับความหน่วงไม่เชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\alpha=1$ และ $\beta < -5$	58
4.3.4 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังเก๋า (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังเก๋าพร้อมกับความหน่วงไม่เชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\alpha=1$ และความเร็วเริ่มต้นคือ x	58
4.3.5 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสอง (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสองพร้อมกับความหน่วงไม่เชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\alpha=1$ และ $\beta > 5$ และความเร็วเริ่มต้นคือ x	59
4.3.6 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสอง (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสองพร้อมกับความหน่วงไม่เชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\alpha=1$ และ $\beta < -5$ และความเร็วเริ่มต้นคือ x	59

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
4.1.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกำลังและสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอกกับการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของแอมพลิจูดการสั่น.....	50
4.1.2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกำลังและสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอกกับความคล้อยกันของแอมพลิจูดการสั่น.....	50
4.1.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกำลังและสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอกกับการเกิดการกำทอนของเส้นลวด.....	51



บทที่ 1

บทนำ

ในบทนี้ จะขอกล่าวถึงความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา วัตถุประสงค์ของการวิจัย ขอบเขตของการวิจัย วิธีการดำเนินการวิจัย และประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

สมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง(The Suspended String Oscillation Equation) [1] เป็นสมการคลื่นอีกรูปแบบหนึ่งซึ่งมีความสำคัญอย่างมาก เนื่องจากสมการดังกล่าวถูกนำมาใช้อธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ ที่สำคัญ เช่น คลื่นไหวสะเทือน (Seismic Wave) ซึ่งเป็นคลื่นที่ถ่ายทอดพลังงานผ่านจากพื้นผิวโลก อาจเกิดจากแผ่นดินไหว, การระเบิด, การชุกเจาะน้ำมัน หรือกิจกรรมอื่นๆ ที่ก่อให้เกิดคลื่นความถี่ต่ำ เป็นต้น

งานวิจัยที่ผ่านมาส่วนใหญ่ [4]-[13] ที่ได้ศึกษาลักษณะการสั่นในแนวดิ่งนั้น เป็นงานวิจัยเชิงทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ โดยพิสูจน์การมีอยู่จริงของผลเฉลยประเภทต่างๆ ของปัญหาการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่งทั้งที่มีความหน่วงและไม่มีความหน่วง งานวิจัย [15], [16] ได้ศึกษาผลเฉลยเชิงตัวเลขของการสั่นแนวดิ่งแบบไม่มีความหน่วง โดย [16] ใช้วิธีเกรงค์นิโคลสัน(Crank-Nicolson Method) เปรียบเทียบกับระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องจำกัด(Finite Difference Method) ที่ได้ศึกษาไว้ใน [15] และได้ข้อสรุปว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขจากทั้งสองวิธีมีค่าใกล้เคียงกัน ภายใต้ตำแหน่งเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวดแบบเดียวกัน นอกจากนี้โดยทั่วไปแล้วการสั่นตามสภาพความเป็นจริงนั้นจะเป็นการสั่นแบบมีความหน่วงแบบทั้งสิ้น(Damped Vibration) การสั่นจะเกิดการสูญเสียพลังงานในระหว่างเกิดการเคลื่อนที่ของระบบไม่ว่าจะมาจากสาเหตุใดก็ตาม เป็นผลทำให้พลังงานรวมของระบบมีค่าลดลงตามที่ได้ศึกษาไว้ใน [8] งานวิจัย [17] จึงได้ทำการศึกษาค่าการจำลองของการสั่นแนวดิ่งแบบที่มีความหน่วงแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสอง และนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับกรณีการสั่นแบบไม่มีความหน่วงในงานวิจัย [15] ภายใต้รูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นเดียวกัน ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าการสั่นที่มีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองมีผลทำให้เส้นลวดสั้นลงลง และมีลักษณะการสั่นที่แตกต่างจากรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดอย่างมาก ในขณะที่การสั่นที่มีความหน่วงแบบเชิงเส้น เส้นลวดสั้นลงลงเช่นกันแต่ยังคงรักษารูปร่างการสั่นเริ่มต้นไว้ และจากผลการวิจัยยังพบว่าค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงมีผลต่อการหาแอมพลิจูดของการสั่น

เนื่องจาก การสั่นตามสภาพความเป็นจริงนั้น นอกจากจะเป็นการสั่นแบบมีความหน่วงแล้ว ยังอาจมีแรงภายนอก(External Force) มาเกี่ยวข้องด้วยเสมอ ซึ่งมีผลต่อการเกิดการกำทอน(Resonance) ของการสั่นได้ งานวิจัยนี้จะศึกษาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขต่อเนื่องจากงานวิจัย [17] และ [18] โดยหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การสั้นแนวโค้งที่ประกอบด้วยแรงภายนอก(ไม่เชิงเส้น) และความหน่วง(เชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสอง) พร้อมทั้งสร้างการจำลองของการสั้นดังกล่าว โดยนอกจากจะศึกษาลักษณะการสั้นของเส้นลวดที่มีแรงภายนอกไม่เชิงเส้นซึ่งถูกกำหนดด้วยฟังก์ชันพื้นฐานที่มีกำลังและสัมประสิทธิ์กำหนดได้ ทั้งที่มีผลต่อการเกิดการกำทอนและไม่เกิดการกำทอนแล้ว จะทำการศึกษาลักษณะของความหน่วงแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสองว่ามีผลต่อการลดการกำทอนที่เกิดขึ้นจากแรงภายนอกไม่เชิงเส้นอย่างไรอีกด้วย โดยจะกำหนดให้สัมประสิทธิ์ของความหน่วงมีค่าต่างๆ กัน

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1.2.1 สร้างการจำลองการสั้นของเส้นลวดแนวโค้งที่มีแรงภายนอกไม่เชิงเส้นและมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสอง

1.2.2 พัฒนาและปรับปรุงระเบียบวิธีเชิงตัวเลขให้เหมาะสมกับปัญหาการสั้นในแนวโค้งที่มีแรงภายนอกไม่เชิงเส้นและมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสอง

1.2.3 หาเงื่อนไขที่ทำให้ผลเฉลยประมาณค่าของการสั้นลู่เข้าเพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาโปรแกรมต่อไป

1.2.4 พัฒนาและปรับปรุงโปรแกรมที่ช่วยในการสร้างกราฟการสั้นของเส้นลวดในแนวโค้งที่มีแรงภายนอกและมีความหน่วง โดยสามารถกำหนดฟังก์ชันพื้นฐานที่ใช้แทนแรงภายนอกไม่เชิงเส้นได้

1.2.5 วิเคราะห์และเปรียบเทียบ ความแตกต่างของการสั้นของเส้นลวดในแนวโค้งที่มีแรงภายนอกไม่เชิงเส้นที่กำหนดด้วยฟังก์ชันพื้นฐานที่มีกำลังและสัมประสิทธิ์กำหนดได้ กับการสั้นแบบไม่มีแรงภายนอกภายใต้รูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นเดียวกัน

1.2.6 วิเคราะห์และเปรียบเทียบ แอมพลิจูดของเส้นลวดแนวโค้งที่มีแรงภายนอก และเกิดการกำทอน ว่าความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสอง มีผลต่อการช่วยป้องกันหรือลดการกำทอนที่เกิดจากแรงภายนอกได้หรือไม่ อย่างไร โดยกำหนดให้สัมประสิทธิ์ของความหน่วงมีค่าต่างๆ กัน

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1.3.1 งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาลักษณะการสั้นของเส้นลวดในแนวโค้งที่มีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น และวิเคราะห์ว่าความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสอง มีผลต่อการป้องกันการเกิดการกำทอนที่เกิดจากการสั้นแบบมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้นอย่างไร

1.3.2 แรงภายนอกไม่เชิงเส้นจะถูกกำหนดด้วยฟังก์ชันพื้นฐานของรูปแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.3.3 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของการสั้นของเส้นลวดที่มีแรงภายนอกไม่เชิงเส้นและมีความหน่วงในรูปของกราฟ พร้อมทั้งวิเคราะห์ผลกระทบของแรงภายนอกไม่เชิงเส้น และความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสอง ว่ามีผลต่อการสั้นอย่างไร

1.4 วิธีการดำเนินการวิจัย

1.4.1 ศึกษา ค้นคว้า งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และทำความเข้าใจในรายละเอียดของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขว่ามีส่วนใดในงานวิจัยที่สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับงานวิจัยนี้ได้

1.4.2 พัฒนาและปรับปรุงสูตรของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขให้เหมาะสมในการหาผลเฉลยประมาณค่าเชิงตัวเลขของปัญหาที่ทำการศึกษา

1.4.3 พัฒนาและปรับปรุง โปรแกรมแสดงกราฟของผลเฉลยแบบต่างๆ และลักษณะการเกิดกำทอนของการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้นที่กำหนดด้วยฟังก์ชันพื้นฐานของรูปแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น

1.4.4 ศึกษาลักษณะของความหน่วงที่ช่วยป้องกันและลดการกำทอนของการสั้น

1.4.5 เขียนรายงานเสนอความก้าวหน้า

1.4.6 แก้ไข เพิ่มเติมรายละเอียดของผลการวิจัย

1.4.7 รวบรวม เรียบเรียงเนื้อหา เพื่อเขียนรายงานฉบับสมบูรณ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ได้การจำลองการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งที่มีแรงภายนอกไม่เชิงเส้นและมีความหน่วงทั้งเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสอง

1.5.2 ได้สูตรและเงื่อนไขการลู่เข้าของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่สามารถนำมาใช้หาผลเฉลยประมาณค่าเชิงตัวเลขของปัญหาการสั้นในแนวตั้งแบบมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้นและมีความหน่วง

1.5.3 ได้โปรแกรมที่ช่วยในการสร้างกราฟการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งที่มีแรงภายนอกไม่เชิงเส้นและมีความหน่วง โดยสามารถกำหนดฟังก์ชันพื้นฐานที่ใช้แทนรูปร่างเริ่มต้น, ความเร็วเริ่มต้น, สัมประสิทธิ์และกำลังของแรงภายนอกไม่เชิงเส้น, ความหน่วงแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสองได้

1.5.4 ทำให้สามารถวิเคราะห์ความแตกต่างของกราฟและเงื่อนไขการเพิ่มขึ้นและลดลงของแอมพลิจูดการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งที่มีแรงภายนอกไม่เชิงเส้นและมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสอง พร้อมทั้งช่วยป้องกันและลดการกำทอนของการสั้นของเส้นลวดได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

สำหรับการศึกษาปัญหาการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงนั้น มีทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

2.1 แนวคิด ทฤษฎีหลักตามประเด็นให้ครอบคลุมเรื่องที่วิจัย

2.1.1 การแบ่งลักษณะการสั่น [1]

การแบ่งประเภทของการสั่นสามารถที่จะแบ่งออกได้หลายประเภท สำหรับในหัวข้อนี้จะเป็นการอธิบายถึงการแบ่งการสั่นประเภทต่างๆ ที่สำคัญและพบเห็นในการศึกษาขั้นพื้นฐานนี้ [1]

2.1.1.1 การสั่นแบบอิสระหรือการสั่นแบบบังคับ

การสั่นแบบอิสระ (Free Vibration) คือ การสั่นของระบบในลักษณะที่หลังจากมีการรบกวนระบบที่หยุดนิ่งอยู่ที่จุดสมดุลครั้งแรกเพื่อให้เกิดการสั่นขึ้นแล้ว การสั่นนั้นดำเนินต่อไปโดยไม่มีแรงจากภายนอกไม่เชิงเส้นมากกระทำกับระบบอีกเลย การรบกวนระบบอาจจะเป็นการทำให้เกิดการกจัดเบื้องต้นหรือทำให้เกิดความเร็วเริ่มต้นหรือทั้งสองแบบรวมกันก็ได้

การสั่นแบบบังคับ (Force Vibration) คือ การสั่นของระบบภายใต้แรงกระทำจากภายนอกไม่เชิงเส้น ซึ่งแรงกระทำจากภายนอกไม่เชิงเส้นนี้ อาจจะเป็นแรงในลักษณะซ้ำตัวเองหรือไม่ซ้ำตัวเองก็ได้ การสั่นในลักษณะนี้ก็เช่นการสั่นเนื่องจากความไม่สมดุลของเครื่องจักรที่เกิดการหมุน สิ่งหนึ่งที่เราจะพบกับการสั่นแบบบังคับก็คือหากว่าความถี่ของแรงที่กระทำกับระบบนั้นไปพ้องกับความถี่ธรรมชาติของระบบพอดี การสั่นที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะที่มีช่วงกว้างการสั่นที่สูงมาก เราเรียกการสั่นในลักษณะนี้ว่า *การสั่นพ้อง* (Resonance) ซึ่งผลของการสั่นพ้องนี้มักจะทำให้เกิดความเสียหายกับโครงสร้างที่กำลังเกิดการสั่นอยู่ ดังนั้นในการออกแบบวิศวกรรมมักจะหลีกเลี่ยงการเกิดการสั่นพ้องของระบบ ยกเว้นในระบบที่ต้องการให้เกิดการสั่นมากๆ เช่น ในลำโพงขนาดใหญ่ เป็นต้น

2.1.1.2 การสั่นแบบมีความหน่วงและไม่มีความหน่วง

การสั่นแบบไม่มีความหน่วง (Undamped Vibration) หมายถึง การสั่นที่ไม่มีการสูญเสียพลังงานให้กับสิ่งแวดล้อมของระบบ ไม่ว่าจะอยู่ในรูปแรงเสียดทานหรือแรงต้านอื่นใด ซึ่งเมื่อระบบเคลื่อนที่แบบไม่มีความหน่วงจะทำให้พลังงานรวมของระบบในระหว่างการเคลื่อนที่นี้มีค่าคงที่ การสั่นที่ไม่มีความหน่วงของระบบในความเป็นจริงจะเกิดขึ้นได้ในโอกาสเท่านั้น เพราะวัตถุที่เกิดการเคลื่อนที่โดยทั่วไปแล้วจะเกิดการสูญเสียพลังงานบ้างอย่างน้อยที่สุดก็จะสูญเสียพลังงานเนื่องจากแรงเสียดทานกับอากาศรอบข้าง สำหรับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ระบบที่เกิดการสั่นแบบไม่มีความหน่วงและเป็นการสั่นแบบอิสระความถี่ของการสั่นของระบบจะเรียกว่า *ความถี่ธรรมชาติ* (Natural Frequency) ซึ่งความถี่ธรรมชาตินี้ถือว่าเป็นปริมาณที่มีความสำคัญมากในการออกแบบเพื่อป้องกันการสั่นของอุปกรณ์หรือโครงสร้าง

การสั่นแบบมีความหน่วง (Damped Vibration) คือการสั่นที่เกิดการสูญเสียพลังงานในระหว่างเกิดการเคลื่อนที่ของระบบไม่ว่าจะมาจากสาเหตุใดก็ตาม ซึ่งเป็นผลทำให้พลังงานรวมของระบบมีค่าลดลงโดยทั่วไปแล้วการสั่นตามสภาพความเป็นจริงนั้นจะเป็นการสั่นแบบมีความหน่วงแทบทั้งสิ้น

2.1.1.3 การสั่นแบบเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น

ถ้าระบบของการสั่นซึ่งจะประกอบด้วย มวล สปริง และตัวหน่วง มีพฤติกรรมเปลี่ยนแปลงค่าของแรงกระทำไปอย่างเชิงเส้นกับระยะทางหรือความเร็วของพิกัดที่ใช้ เราจะเรียกการสั่นนั้นว่า *การสั่นเชิงเส้น* (Linear Vibration) แต่ถ้าหากไม่เป็นเช่นนั้น คือ มีปริมาณใดปริมาณหนึ่งเปลี่ยนแปลงไม่เป็นเชิงเส้นกับระยะทางหรือความเร็ว เราจะเรียกการสั่นนั้นว่า *การสั่นไม่เชิงเส้น* (Nonlinear Vibration) ซึ่งความแตกต่างของการสั่นทั้งสองแบบนี้ก็คือ สมการการเคลื่อนที่จะได้เป็น *สมการอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น* (Linear และ Nonlinear Differential Equation) ตามลำดับ ซึ่งผลที่ตามมาคือการแก้สมการอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้นจะมีความยุ่งยากมากกว่าแบบที่เป็นเชิงเส้นมาก

นอกเหนือจากนั้นแล้ว หากการสั่นเป็นการสั่นเชิงเส้นจะทำให้เราสามารถนำหลักการของการรวมตำแหน่ง (Principle of Superposition) ซึ่งเป็นการแยกพิจารณาการสั่นเนื่องจากภาระกรรมแต่ละภาระกรรมแล้วนำผลที่ได้ทั้งหมดมารวมกันเป็นคำตอบสุดท้าย ซึ่งในหลายๆ กรณีจะช่วยลดความยุ่งยากในการคำนวณลงไปได้มาก แต่สำหรับการสั่นไม่เชิงเส้นนั้นเราจะใช้หลักการดังกล่าวนี้ไม่ได้

2.1.1.4 การสั่นแบบกำหนดได้และการสั่นแบบสุ่ม

เมื่อระบบเกิดการสั่นอยู่ภายใต้แรงกระทำจากภายนอกไม่เชิงเส้นลักษณะใดก็ตาม ถ้าหากว่าตลอดเวลาที่แรงกระทำอยู่นั้นเราสามารถกำหนดขนาดของแรงได้หรือทราบค่าความสัมพันธ์ของแรงซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลาที่แรงนั้นกระทำ เราจะเรียกแรงกระทำนั้นว่า *แรงที่กำหนดค่าได้* (Deterministic Force) ซึ่งผลของแรงนี้จะทำให้เกิด *การสั่นแบบกำหนดได้* (Deterministic Vibration)

สำหรับกรณีที่แรงที่กระทำต่อระบบไม่สามารถกำหนดขนาดที่เวลาใดๆ ได้อย่างแน่นอน เราจะเรียกแรงแบบนั้นว่า *แรงแบบสุ่ม* (Undeterministic หรือ Random Force) และการสั่นที่เกิดจากแรงดังกล่าวจะเรียกว่า *การสั่นแบบสุ่ม* (Random Vibration) ซึ่งการแก้ปัญหาของการสั่นแบบสุ่มนั้นจะต้องใช้วิธีการทางสถิติเข้ามาช่วยแก้ปัญหา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 วิธีการผลต่างจำกัดสำหรับสมการความร้อน (Finite Difference Schemes for the Heat Equation) [2]

ในหัวข้อนี้ จะเป็นการนำวิธีเชิงตัวเลขมาใช้ในการแก้ปัญหสมการความร้อน (Heat Equation) ซึ่งเป็นตัวอย่างหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองเช่นเดียวกับสมการคลื่น (Wave Equation) โดยพื้นฐาน การหาผลเฉลยของสมการความร้อนและสมการคลื่นนั้น เราจะใช้วิธีเชิงวิเคราะห์หรือวิธีฟูเรียร์ แต่มีข้อจำกัดบางประการที่ทำให้ไม่สามารถใช้วิธีฟูเรียร์ได้ และจำเป็นต้องใช้วิธีเชิงตัวเลข ข้อจำกัดดังกล่าวมีดังนี้

ปัญหาไม่เชิงเส้น : วิธีของฟูเรียร์นั้นไม่สามารถใช้กับสมการไม่เชิงเส้นได้ โดยทั่วไปทั้งวิธีการฟูเรียร์และหลักการซ้อนทับไม่สามารถใช้กับสมการดังกล่าวได้ แต่เนื่องจากหลายๆ ปัญหาที่น่าสนใจจะอยู่ในรูปสมการไม่เชิงเส้น ดังนั้นจึงมีความสำคัญที่เราจะต้องหาวิธีการเพื่อแก้ปัญหที่อยู่ในรูปสมการไม่เชิงเส้น ซึ่งในหัวข้อนี้เราจะใช้วิธีผลต่างอัตตะเพื่อแก้สมการที่อยู่ในรูปไม่เชิงเส้นดังกล่าว ซึ่งแนวคิดพื้นฐานยังคงเหมือนกับปัญหาเชิงเส้นแต่ความยากจะอยู่ตรงที่การแก้สมการพีชคณิตไม่เชิงเส้น

สัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร : ปัญหาเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรอาจจะเกิดความยุ่งยากหากใช้วิธีของฟูเรียร์ โดยเฉพาะค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ต่อเนื่อง การแก้ปัญหาดังกล่าวจะทำได้ง่ายขึ้นหากใช้วิธีของผลต่างอัตตะ

อินทิกรัล : การคำนวณสัมประสิทธิ์ของฟูเรียร์ซึ่งต้องทำการอินทิเกรตอาจจะยากหรือคำนวณไม่ได้ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ ในกรณีดังกล่าวเราต้องใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข

อนุกรมอนันต์ : เพื่อที่จะสร้างกราฟของผลเฉลยที่อยู่ในรูปของอนุกรมฟูเรียร์ จำเป็นต้องคำนวณผลบวกของอนุกรมอนันต์โดยการประมาณค่าและมีการปิดเศษของอนุกรม

จะเห็นได้ว่ามีปัญหามากมายที่ไม่สามารถแก้ได้ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ หรือปัญหาส่วนใหญ่ซึ่งเราสามารถหาผลเฉลยได้ จะต้องใช้วิธีเชิงตัวเลขเพื่อที่จะสร้างกราฟของผลเฉลย

แม้จะมีวิธีมากมายที่จะใช้แก้ปัญหสมการความร้อน แต่เราจะเน้นใช้วิธีผลต่างอัตตะ เนื่องจากวิธีนี้เป็นวิธีที่เข้าใจได้ง่ายและสามารถใช้กับปัญหาที่ค่อนข้างซับซ้อนได้ดี

2.2.1 ระเบียบวิธีชัดแจ้ง (An Explicit Scheme)

ในหัวข้อนี้จะหาสูตรการประมาณค่าผลต่างอัตตะของปัญหาค่าเริ่มต้น ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad \text{สำหรับ } x \in (0,1), t > 0, \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \\ u(x,0) &= f(x,t). \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

วิธีการที่เราจะหาสูตรผลต่างอันดับของสมการที่ (2.2.1) จะทำเหมือนกับการหาสูตรของปัญหาค่าขอบเขต 2 จุด เริ่มจากการแทนที่อนุพันธ์ย่อยเทียบตำแหน่งและเวลาด้วยผลต่างอันดับในสมการที่ (2.2.1)

ให้ $n \geq 1$ เป็นจำนวนเต็มและกำหนดระยะห่างของตารางในแกน x เป็น $\Delta x = 1/(n+1)$ จุดบนแกน x คือ $x_j = j\Delta x$ สำหรับ $j=0,1,\dots,n+1$ ในทำนองเดียวกัน กำหนดให้ $t_m = m\Delta t$ สำหรับจำนวนเต็ม $m \geq 0$ โดยที่ Δt คือเวลาถัดไปและ u_j^m คือการประมาณค่าของ $u(x_j, t_m)$

กำหนดให้การประมาณค่ากำลังสอง ดังต่อไปนี้

$$u_t(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + o(\Delta t)$$

และ

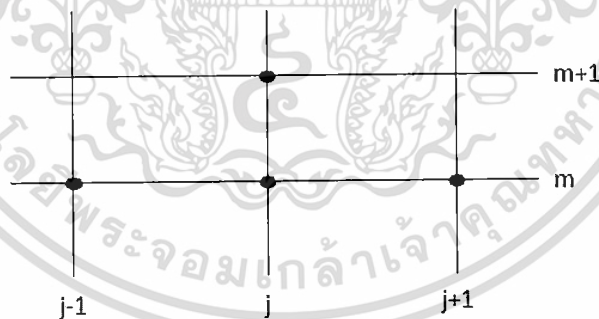
$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x + \Delta x, t)}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2)$$

นำไปแทนค่าลงในสมการจะได้ว่า

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} = \frac{u_{j-1}^m - 2u_j^m + u_{j+1}^m}{\Delta x^2} \quad \text{สำหรับ } j=1, \dots, n, m \geq 0$$

เงื่อนไขขอบเขตของสมการที่ (2.2.1) คือ

$$u_0^m = 0 \quad \text{และ} \quad u_{n+1}^m = 0$$



รูปที่ 2.2.1 การกำหนดจุดของของระเบียบวิธีชัดแจ้ง (The Explicit Scheme)

สำหรับทุกๆ $m \geq 0$ จะเริ่มทำโครงสร้างได้โดย

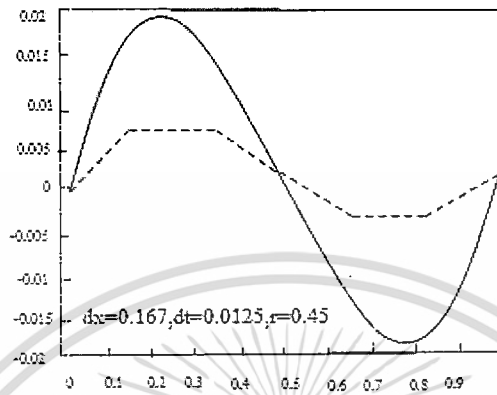
$$u_j^0 = f(x_j) \quad \text{สำหรับ } j=1, \dots, n$$

ให้ $r = \Delta t / \Delta x^2$ แล้วจัดรูปใหม่จะได้ว่า

$$u_j^{m+1} = ru_{j-1}^m + (1-2r)u_j^m + ru_{j+1}^m, \quad j=1, \dots, n, m \geq 0 \quad (2.2.2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โครงสร้างที่เขียนในสมการที่(2.2.2) จะสังเกตว่าค่าของระดับเวลา t_{m+1} ถูกคำนวณคำนวณจากค่าของระดับเวลาอันก่อน t_m ดังนั้นวิธีการชัดแจ้งจะแตกต่างกับวิธีการปริยาย



รูปที่ 2.2.2 ผลเฉลยของสมการความร้อน โดยกราฟเส้นประเป็นผลเฉลยของผลต่างจำกัด (The Finite Difference Solution) และกราฟเส้นทึบเป็นผลเฉลยของฟูรีเยร์ (The Fourier-based Solution)

โดยกำหนดระยะห่างก่อนข้างหยาบคือ $\Delta x = 1/6$ และ $\Delta t = 1/80$

เราเลือก $\Delta x = 1/6$ และ $\Delta t = 1/80$ และคำนวณผลเฉลยเชิงตัวเลข(The Numerical Solution) ที่ $0 \leq t_m \leq 1/10$ ผลเฉลยเชิงตัวเลขและผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ ที่ $t = 1/10$ ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 2.2.2 ซึ่งเส้นประได้จากการประมาณค่าในช่วงระหว่างจุดบนตาราง

ในรูปที่ 2.2.3 กำหนดให้ $\Delta x = 1/20$ และ $\Delta t = 1/800$ ซึ่งเป็นการตีตารางที่ละเอียดมากขึ้นจะทำให้การประมาณค่าดีขึ้น

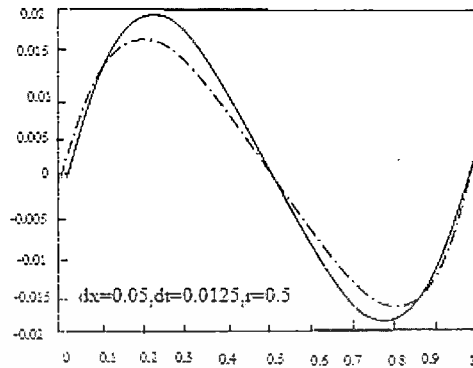
เราจะพิจารณาค่าเริ่มต้นของสมการที่ (2.2.1) ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 1/2, \\ 2(1-x) & x \geq 1/2 \end{cases}$$

รูปแบบผลเฉลยรูปนัยของปัญหานี้ สามารถใช้วิธีการของฟูรีเยร์ได้ ดังนี้

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(k\pi/2)}{k^2} \right) e^{-(k\pi)^2 t} \sin(k\pi x) \quad (2.2.3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.2.3 ผลเฉลยของสมการความร้อนโดยกราฟเส้นประเป็นผลเฉลยของผลต่างจำกัด (The Finite Difference Solution) และกราฟเส้นทึบเป็นผลเฉลยของฟูเรียร์ (The Fourier-based Solution)

ให้พารามิเตอร์ คือ $\Delta x = 1/20$ และ $\Delta t = 1/800$

2.2.2 ปัญหาไม่เชิงเส้น

ในหัวข้อนี้ จะกล่าวถึงการนำวิธีของฟอนนอยมันน์ (Von Neumann) มาใช้กับปัญหาไม่เชิงเส้น ปกติแล้วเมื่อพิจารณาวิธีนี้ในเชิงวิเคราะห์จะพบว่าเป็นวิธีที่ใช้กับปัญหาเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่เท่านั้น แต่สำหรับปัญหาไม่เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร การพิจารณาเชิงวิเคราะห์ของวิธีฟอนนอยมันน์ ไม่สามารถนำมาใช้ได้โดยตรง อย่างไรก็ตาม ถ้าพิจารณาวิธีฟอนนอยมันน์ด้วยวิธีเชิงตัวเลขแล้ว เราสามารถใช้วิธีนี้ได้ทั้งปัญหาเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรและปัญหาไม่เชิงเส้น โดยมีขั้นตอนคร่าวๆ ดังนี้ : ทำปัญหาไม่เชิงเส้นซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นฟังก์ชันของตัวแปรตามให้อยู่ในรูปปัญหาเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ โดยทำให้สัมประสิทธิ์ที่เป็นตัวแปรให้กลายเป็นสัมประสิทธิ์ที่เป็นค่าคงที่ จากการพิจารณาเฉพาะที่ และยังสามารถใช้วิธีฟอนนอยมันน์ เพื่อหาเงื่อนไขความเสถียรของวิธีเชิงตัวเลขได้อีกด้วย ซึ่งเงื่อนไขจะขึ้นอยู่กับค่าของสัมประสิทธิ์จากการพิจารณาเฉพาะที่ ดังแสดงไว้ในตัวอย่างต่อไปนี้

พิจารณาสมการความร้อนไม่เชิงเส้น ต่อไปนี้

$$u_t = (\alpha(u)u_x)_x \quad \text{สำหรับ } x \in (0,1), t > 0$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$

$$u(x,0) = f(x),$$

$$\text{โดยที่ } \alpha(u) = \frac{1+3u^2}{1+u^2}$$

ระเบียบวิธีผลต่างอันดับสองแบบชัดแจ้งของปัญหานี้ ถูกกำหนดโดย

$$\frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} = \frac{\alpha_{j+1/2}^m (v_{j-1}^m - v_j^m) - \alpha_{j-1/2}^m (v_j^m - v_{j-1}^m)}{\Delta x^2} \quad (2.2.4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ $\alpha_{j+1/2}^m = (\alpha(v_{j+1}^m) + \alpha(v_j^m))/2$

พิจารณาปัญหาเฉพาะที่ นั่นคือพิจารณาที่จุด (x_0, t_0) ถ้า u เป็นฟังก์ชันเรียบ เราสามารถประมาณค่าของฟังก์ชัน $\alpha(u)$ เป็นค่าคงที่ในสมการ $\alpha_0 = \alpha(u(x_0, t_0))$ ที่จุด (x_0, t_0) ซึ่งทำให้ได้สมการ

$$u_t = \alpha_0 u_{xx}$$

ซึ่งแสดงในรูปของผลต่างอันดับ ได้ดังนี้

$$\frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} = \alpha_0 \frac{v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m}{\Delta x^2} \quad \text{สำหรับ } j=1, \dots, n \quad m \geq 0$$

ผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงเส้น ถูกกำหนดโดย

$$T_k(t) e^{ik\pi x}$$

โดยที่

$$T_k(t) = e^{-(k\pi)^2 \alpha_0 t}$$

จะสอดคล้องกับ

$$|T_k(t)| \leq 1, \quad t > 0,$$

สำหรับ k ทั้งหมด เนื่องจาก $\alpha_0 \geq 1$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยเฉพาะจะสามารถเขียนอยู่ในรูปของระเบียบวิธีผลต่างจำกัด ได้ดังนี้

$$(a_k)^m e^{(ik\pi x_j)},$$

โดย $|a_k| \leq 1$

สำหรับ k ทั้งหมด

แทนค่าผลเฉลยเฉพาะด้วยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดลงในสมการ จะได้

$$a_k = 1 - \frac{4\alpha_0 \Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(k\pi \Delta x / 2)$$

โดยกำหนดให้ขนาดของพารามิเตอร์ เป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\alpha_0 \Delta t / (\Delta x)^2 \leq 1/2$$

การแก้ปัญหาที่ แสดงให้เห็นว่าการกำหนดขนาดของค่าพารามิเตอร์นั้น มีผลต่อความเสถียรของวิธีระเบียบผลต่างอันดับ และจะให้เงื่อนไขทั่วไป คือ

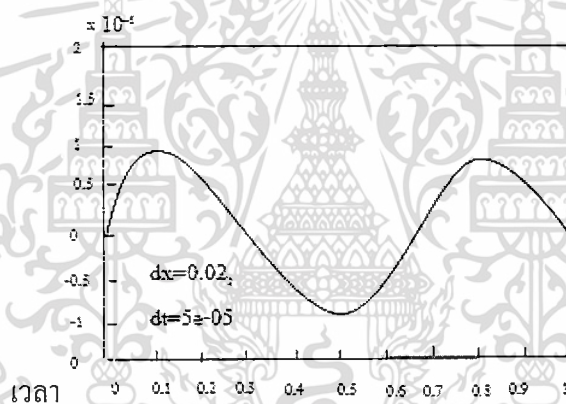
$$\alpha(u) = \frac{1+3u^2}{1+u^2} \leq 3$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับ n ทั้งหมด ดังนี้เมื่อกำหนดให้สัมประสิทธิ์ α_0 เป็นค่าคงที่ที่น้อยกว่า 3 จะต้องกำหนดเงื่อนไขของส่วนต่างของเวลา ดังนี้

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{6}$$

ในรูปที่ 2.2.4 แสดงกราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขเมื่อข้อมูลเริ่มต้น คือ $f(x) = \sin(3\pi x)$ กำหนดขนาดของพารามิเตอร์ $\Delta t = 0.00005$ และ $\Delta x = 0.02$ เราจะพบว่า ผลเฉลยที่ได้มีความถูกต้องจากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่าวิธีพอนนอนยมนั้นสามารถใช้กับปัญหาไม่เชิงเส้นได้ โดยการกำหนดพารามิเตอร์ของพจน์ที่ทำให้ปัญหาไม่เชิงเส้นให้เป็นค่าคงที่ และจะได้เงื่อนไขขนาดของเวลาที่เหมาะสมสำหรับการพิจารณาเฉพาะที่ทุกๆ จุด นอกจากนี้ เรายังพบว่าค่าสัมประสิทธิ์เฉพาะที่ยังใช้กำหนดขนาดของเวลาอีกด้วย



รูปที่ 2.2.4 กราฟผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการความร้อนแบบไม่เชิงเส้น
กำหนดให้ $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0.00005$

2.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งที่ปราศจากความหน่วงและแรงภายนอกไม่เชิงเส้น (The Suspended String Oscillation Equation) ถูกศึกษาโดยนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซีย [3] ตามที่ได้อธิบายรายละเอียดที่มาของสมการไว้ใน [4] การสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งจะถูกเขียนในรูปของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเอกพันธ์ ดังนี้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - Lu(x,t) = 0 \quad (2.2.1)$$

เงื่อนไขขอบเขต คือ $u(0,t) = 0$ เมื่อ $t \in (0, T)$

เงื่อนไขเริ่มต้น คือ $u(x,0) = f_1(x)$ และ $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f_2(x)$ เมื่อ $x \in (0, a)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สวอนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ L เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สอง กำหนดโดย

$$L = \left(\frac{x}{\mu + 1} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}$$

ซึ่งผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytical Solution) อยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ของฟังก์ชันเบสเชลชนิดที่ 1 ตามที่ได้อธิบายรายละเอียดไว้ใน [5] ดังนี้

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(p_j \cos \sqrt{\lambda_j} t + \frac{q_j}{\sqrt{\lambda_j}} \sin \sqrt{\lambda_j} t \right) \frac{1}{\sqrt{a} J_{\mu+1}(\gamma_k)} \cdot \frac{1}{x^{\frac{\mu}{2}}} J_{\mu}(\gamma_k \sqrt{\frac{x}{a}})$$

งานวิจัย [8] ได้ศึกษาการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งเมื่อเพิ่มความหน่วงและแรงภายนอกไม่เชิงเส้นให้กับระบบของการสั่น ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เอกพันธ์ ดังนี้

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) - x \partial_x^2 u(x,t) - \partial_x u(x,t) + \alpha |u_t|^{p-1} u_t &= \beta |u|^{q-1} u, & \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}, (x,t) \in \Omega, \\ u(a,t) &= 0, & t \in (0,T), \\ u(x,0) = \phi(x), \quad \partial_t u(x,0) &= \psi(x), & x \in (0,a) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

เมื่อพิจารณาการสั่นแบบมีความหน่วงและไม่มีแรงภายนอก ($\beta = 0$) แล้วพบว่าพลังงานรวมของการสั่นมีค่าลดลง งานวิจัย [6] ได้ศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยอย่างอ่อนทั่วไปของปัญหา (2.2.2) ที่ไม่มีความหน่วง ($\alpha = 0$) และแรงภายนอกเพิ่มขึ้น (Blow Up Term) เมื่อ $\beta > 0$ ในขณะที่ [7] ได้ศึกษาการมีอยู่จริงของผลเฉลยเชิงแบบฉบับของปัญหา (2.2.2) ที่ไม่มีความหน่วง ($\alpha = 0$) และแรงภายนอกลดลง (Absorbing Term) เมื่อ $\beta = -1$ และ $q = 3$

เพื่อให้เกิดความเข้าใจลักษณะการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งตามทฤษฎีทางคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้น งานวิจัย [15] และ [16] ได้ศึกษาถึงผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาการสั่นในแนวตั้งที่ปราศจากความหน่วงและแรงภายนอกตามสมการ (2.2.1) โดยงานวิจัย [16] ใช้วิธีแครงคินิโคลสัน (Crank-Nicolson Method) ผลเฉลยที่ได้ถูกนำมาใช้เปรียบเทียบกับผลที่ได้จากงานวิจัย [15] ซึ่งใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method) และได้ข้อสรุปว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขจากทั้งสองวิธีมีค่าใกล้เคียงกัน ภายใต้ตำแหน่งเริ่มต้นและความเร็วต้นของเส้นลวดแบบเดียวกัน โดยวิธีแครงคินิโคลสันดีกว่าระเบียบวิธีผลต่างอันตะ เนื่องจากค่าแอมพลิจูดที่ได้มีค่าน้อยกว่า โดยสังเกตจากกราฟจะเห็นลักษณะการสั่นที่ราบเรียบและต่อเนื่องกว่า อีกทั้งวิธีแครงคินิโคลสันยังสามารถแบ่งความละเอียดของโดเมนเท่าใดก็ได้

งานวิจัย [17] และ [18] ตามสมการ (2.2.1) เมื่อกำหนดให้ $\beta = 0$ โดยศึกษาเกี่ยวกับผลเฉลยเชิงตัวเลขและสร้างการจำลองของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบที่มีความหน่วงแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สอง ซึ่งผลที่ได้สอดคล้องกับงานวิจัยที่ [8] กล่าวคือการสั้นที่มีความหน่วงทั้งเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสองมีผลทำให้เส้นลวดสั้นลงลงทั้ง 2 กรณี โดยกรณีของความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองมีลักษณะการสั้นที่แตกต่างจากรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดอย่างมาก ในขณะที่กรณีของความหน่วงเชิงเส้น เส้นลวดสั้นลงเช่นกันแต่ยังคงรักษารูปร่างการสั้นเริ่มต้นไว้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในบทนี้ จะกล่าวถึงที่มาสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้นและมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสองที่กำหนดกำลังและสัมประสิทธิ์มีค่าต่างๆ กัน และการหาสูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับเพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาดังกล่าว รวมถึงขั้นตอนของการใช้โปรแกรมเพื่อแสดงผลการคำนวณในรูปของกราฟและตารางข้อมูลของผลเฉลยเชิงตัวเลข

3.1 สมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงและมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น

งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาการจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งต่อเนื่องจากงานวิจัย [17] และ [18] ซึ่งได้ศึกษาการจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นที่ไม่มีความหน่วงเปรียบเทียบกับกรณีที่มีความหน่วงเชิงเส้นและความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง ตามลำดับ โดยกำหนดให้เส้นลวดยาว a หน่วย มีความยืดหยุ่น (Flexible) มีน้ำหนัก (Heavy) และมีความหนาแน่นแบบเอกรูป (Uniform Density) เส้นลวดถูกแขวนในแนวตั้งโดยปลายด้านบน ($x=0$) ถูกตรึงให้อยู่กับที่ ส่วนปลายด้านล่าง ($x=a$) มีความชันเป็นศูนย์ รูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวดขึ้นอยู่กับตำแหน่ง x กล่าวคือ $\phi(x)$ และ $\psi(x)$ ตามลำดับ และกำหนดให้ $u(x,t)$ แทนตำแหน่งการสั่น (Displacement) ของเส้นลวดที่จุด x ณ เวลา t

ในงานวิจัยนี้จะเพิ่มพจน์ของแรงภายนอกไม่เชิงเส้น กล่าวคือ $\beta|u|^{d-1}u$ นอกเหนือจากพจน์ของความหน่วง $\alpha|u_t|^{c-1}u_t$ ซึ่งทำให้ได้สมการของปัญหา ดังนี้

$$u_{tt} - (xu_{xx} + u_x) + \alpha|u_t|^{c-1}u_t = \beta|u|^{d-1}u, \quad \alpha > 0, c \geq 1, \beta \in \mathbb{R}, d \geq 1, \quad (3.1.1)$$

$$\text{เงื่อนไขขอบเขต} \quad u(0,t) = 0, \quad u_x(a,t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น} \quad u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0, a].$$

เมื่อ α เป็นสัมประสิทธิ์ของความหน่วงมีค่าเป็นบวก β เป็นสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอกไม่เชิงเส้นมีค่าเป็นจำนวนจริงใดๆ ส่วน c และ d มีค่ามากกว่าหนึ่ง เป็นกำลังของความหน่วงและแรงภายนอกไม่เชิงเส้นตามลำดับ

จากสมการ (3.1.1) จะเห็นว่า มีทั้งพจน์ของความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นและมีพจน์ของแรงภายนอกไม่เชิงเส้น ในงานวิจัยนี้จึงแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี คือกรณีแรก เราจะพิจารณาการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งที่มีเพียงแรงภายนอกไม่เชิงเส้น โดยจะพิจารณาว่าสัมประสิทธิ์ β และกำลัง d จะมีผลต่อการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของแอมพลิจูดการสั่นและการเกิดการกำทอนอย่างไร (แสดงผลไว้ในหัวข้อ 4.1) ส่วน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่สอง เราจะพิจารณาการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งที่มีแรงภายนอกไม่เชิงเส้นร่วมกับความหน่วง โดยจะพิจารณาว่าความหน่วงแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสองจะมีผลต่อการลดการกำทอนที่เกิดจากแรงภายนอกไม่เชิงเส้นอย่างไร ภายใต้สัมประสิทธิ์ความหน่วง α ที่แตกต่างกัน (แสดงผลไว้ในหัวข้อ 4.2 และ 4.3 ตามลำดับ)

เนื่องจากสมการ (3.1.1) เป็นสมการแบบไม่เชิงเส้น ทำให้ยากต่อการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytic Solution) ในงานวิจัยนี้จึงทำการศึกษาผลเฉลยประมาณค่าเชิงตัวเลขโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันดับเพื่อนำมาหาผลเฉลยเชิงตัวเลขและสร้างการจำลองเชิงตัวเลขของการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้นและมีความหน่วง



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 การหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method)

เพื่อประมาณค่าเชิงอนุพันธ์ด้วยผลต่างอันตะ สมการที่ (3.1) จะถูกเขียนอยู่ในรูปของ

$$\begin{aligned} u_{tt} - ((m\Delta x)u_{xx} + u_x) + \alpha|u_t|^{c-1}u_t &= \beta|u|^{d-1}u, & \alpha > 0, c \geq 1, \beta < 0, d \geq 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(a,t) = 0, & & t \in [0, T], \\ u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & & x \in [0, a]. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

โดยที่ $m = 1, \dots, M$ เมื่อ $M = \frac{a-0}{\Delta x}$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} \right) - \left[mh \left(\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) + \left(\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right) \right] + \alpha \left| \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right|^{c-1} \left(\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right) \\ &= \beta |u_m^n|^{d-1} u_m^n \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$u_m^{n+1} = u(x, t+k)$, $u_m^n = u(x, t)$, $u_m^{n-1} = u(x, t-k)$, $u_{m+1}^n = u(x+h, t)$, $u_{m-1}^n = u(x-h, t)$, โดยที่ $m = 1, \dots, M$ และ $n = 1, \dots, N$ เมื่อ $M = \frac{a-0}{\Delta x}$ และ $N = \frac{T-0}{\Delta t}$, $h = \Delta x$ และ $k = \Delta t$ เป็นขนาดของช่วงที่ถูกแบ่งของตำแหน่ง x และเวลา t ตามลำดับ

จากพจน์สุดท้ายทางซ้ายมือของสมการ (3.2.2) เราสามารถพิจารณาได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 $u_m^{n+1} - u_m^{n-1} > 0$ จะได้ว่า

$$\alpha \left| \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right|^{c-1} \left(\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right) = \alpha \frac{(u_m^{n+1} - u_m^{n-1})^c}{(2k)^c}$$

กรณีที่ 2 $u_m^{n+1} - u_m^{n-1} < 0$ จะได้ว่า

$$\alpha \left| \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right|^{c-1} \left(\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right) = -\alpha \frac{(u_m^{n+1} - u_m^{n-1})^c}{(2k)^c}$$

ก่อนอื่น จะพิจารณาสูตรระเบียบวิธีผลต่างอันตะที่ใช้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับกรณีที่หนึ่งก่อน ส่วนกรณีที่สองจะคำนวณในลักษณะเดียวกัน(ต่างกันแค่เพียงเครื่องหมาย) ดังนี้

เมื่อแทนค่าสมการที่ได้จากกรณีที่หนึ่งลงในสมการที่ (3.2.2) จะได้ว่า

$$\left(\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} \right) - \left[mh \left(\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) + \left(\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right) \right] + \alpha \frac{(u_m^{n+1} - u_m^{n-1})^c}{(2k)^c} = \beta |u_m^n|^{d-1} u_m^n \quad (3.2.3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำ $2k^2$ คูณตลอดในสมการ (3.2.3) จะได้ว่า

$$(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1}) - [2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] + \alpha 2^{1-c} k^{2-c} (u_m^{n+1} - u_m^{n-1})^c = 2k^2 \beta |u_m^n|^{d-1} u_m^n$$

ซึ่ง $p = \frac{k^2}{h}, c \geq 1$ (3.2.4)

พิจารณาพจน์ $(u_m^{n+1} - u_m^{n-1})^c$ ในสมการ (3.2.4) โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem) ดังสมการต่อไปนี้

ถ้า c และ r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $0 \leq r \leq n$ แล้ว

$$(a+b)^c = \sum_{r=0}^c \binom{c}{r} a^{c-r} b^r$$

หรือ $(a+b)^c = \binom{c}{0} a^c b^{c-0} + \binom{c}{1} a^{c-1} b^1 + \binom{c}{2} a^{c-2} b^2 + \dots + \binom{c}{c} a^{c-c} b^c$

หรือ $(a+b)^c = a^c + \binom{c}{1} a^{c-1} b^1 + \binom{c}{2} a^{c-2} b^2 + \dots + b^c$

$$(u_m^{n+1} - u_m^{n-1})^c = u_m^{n+1c} + \binom{c}{1} u_m^{n+1c-1} (-u_m^{n-1}) + \binom{c}{2} u_m^{n+1c-2} (-u_m^{n-1})^2 + \dots + (-u_m^{n-1})^c$$

ในงานวิจัยนี้ เราจะแบ่งการพิจารณาเป็น 3 แบบ คือ

3.2.1 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ ครดมีมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น ซึ่งจากสมการที่ (3.2.1) แทนด้วย $\beta |u|^{d-1} u$ เมื่อกำหนดให้ สัมประสิทธิ์ β และกำลัง d มีค่าต่างๆ กัน และไม่มีแรงหน่วง ($\alpha=0$)

3.2.2 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ ครดมีมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น และมีความหน่วงแบบเชิงเส้น ซึ่งจากสมการที่ (3.2.1) แทนด้วย $\alpha |u|^{c-1} u$ เมื่อกำหนดให้ $c=1$ และสัมประสิทธิ์ α มีค่าแตกต่างกัน

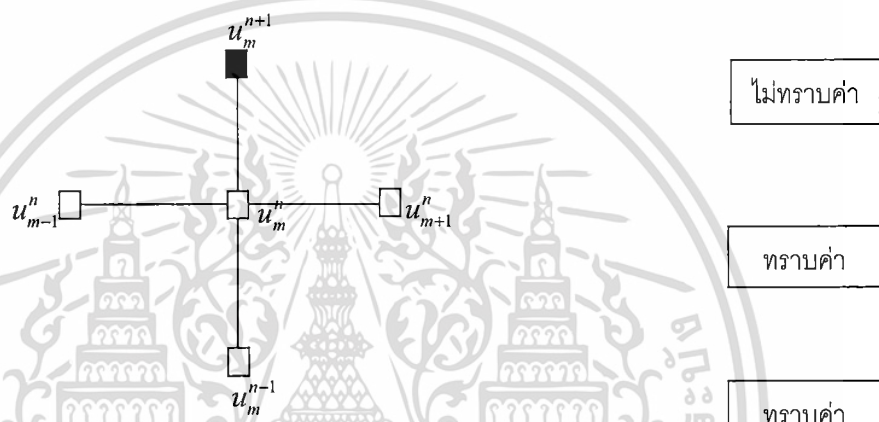
3.2.3 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ ครดมีมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น และมีความหน่วงแบบไม่เชิงเส้น กำลังสอง ซึ่งจากสมการที่ (3.2.1) แทนด้วย $\alpha |u|^{c-1} u$ เมื่อกำหนดให้ $c=2$ และสัมประสิทธิ์ α มีค่าแตกต่างกัน

3.2.1 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันตะ กรณีมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น ซึ่งจากสมการที่ (3.2.1) แทนด้วย $\beta|u|^{d-1}u$ เมื่อกำหนดให้ สัมประสิทธิ์ β และกำลัง d มีค่าต่างๆ กัน และไม่มีแรงหน่วง ($\alpha = 0$)

จากสมการที่ (3.2.4) แทน $\alpha = 0$ และจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปชัดแจ้ง (Explicit Form) ได้ดังนี้

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2} \left[(4 - 4mp)u_m^n + (2mp + p)u_{m+1}^n + (2mp - p)u_{m-1}^n - 2u_m^{n-1} + 2k^2 \beta |u_m^n|^{d-1} u_m^n \right] \quad (3.2.5)$$

ซึ่ง $p = \frac{k^2}{h}$



รูปที่ 3.2.1.1 การระบุตำแหน่งของผลเฉลย u ในสมการ (3.2.5)

จากสมการ (3.2.5) เราจะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันตะทั้งหมด 4 สูตรจาก 4 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ $n = 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$

กรณีที่ 2 เมื่อ $n > 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$

กรณีที่ 3 เมื่อ $n = 0$ และ $m = M$

กรณีที่ 4 เมื่อ $n > 0$ และ $m = M$

กรณีที่ 1 แทน $n = 0$ ในสมการที่ (3.2.5) เมื่อ $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$ จะได้ว่า

$$u_m^1 = \frac{1}{2} \left[(4 - 4mp)u_m^0 + (2mp + p)u_{m+1}^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 - 2u_m^{-1} + 2k^2 \beta |u_m^0|^{d-1} u_m^0 \right] \quad (3.2.6)$$

เนื่องจาก u_m^{-1} ในสมการ (3.2.6) อยู่นอกโดเมน $[0, a] \times [0, T]$ ดังนั้น u_m^{-1} จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันตะตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขเริ่มต้น จะได้ว่า

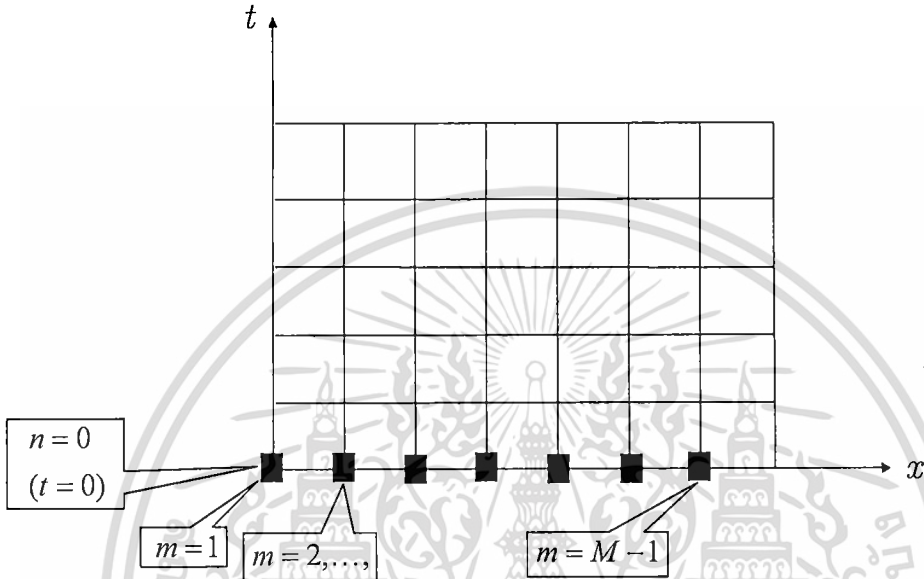
$$\frac{u_m^0 - u_m^{-1}}{k} \approx \psi(x) \quad \text{หรือ} \quad u_m^{-1} \approx u_m^0 - k\psi(x) \quad (3.2.7)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนสมการที่ (3.2.7) ในสมการที่ (3.2.6) จะได้ว่า

$$u_m^1 = \frac{1}{2} \left[(2 - 4mp)u_m^0 + (2mp + p)u_{m+1}^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 + 2k\psi(x) + 2k^2\beta |u_m^0|^d \right] \quad (3.2.8)$$

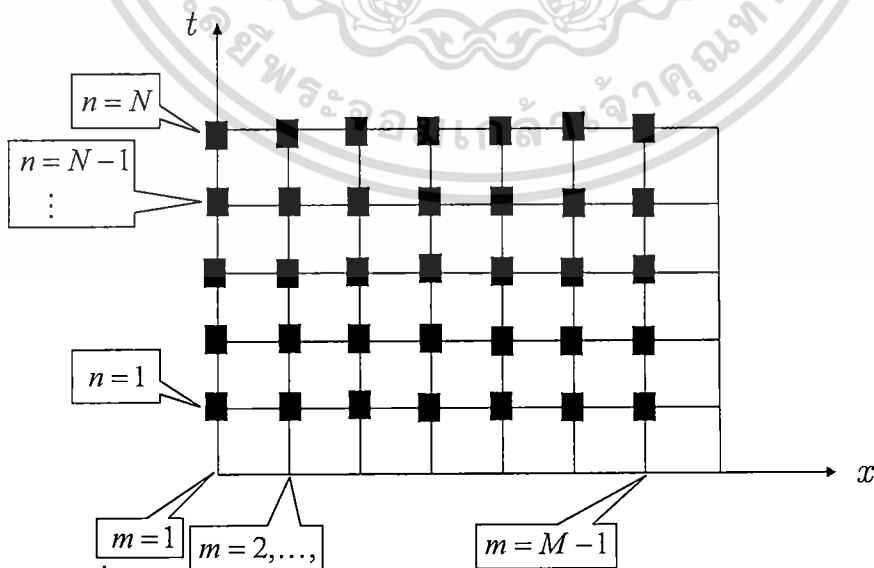
โดยที่ $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$



รูปที่ 3.2.1.2 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.2.8)

กรณีที่ 2 แทน $n > 0$ ในสมการที่ (3.2.5) เมื่อ $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$ จะได้ว่า

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2} \left[(4 - 4mp)u_m^n + (2mp + p)u_{m+1}^n + (2mp - p)u_{m-1}^n - 2u_m^{n-1} + 2k^2\beta |u_m^n|^d \right] \quad (3.2.9)$$



รูปที่ 3.2.1.3 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.2.9)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่ 3 แทน $n=0$ และ $m=M$ ในสมการที่ (3.2.8) จะได้ว่า

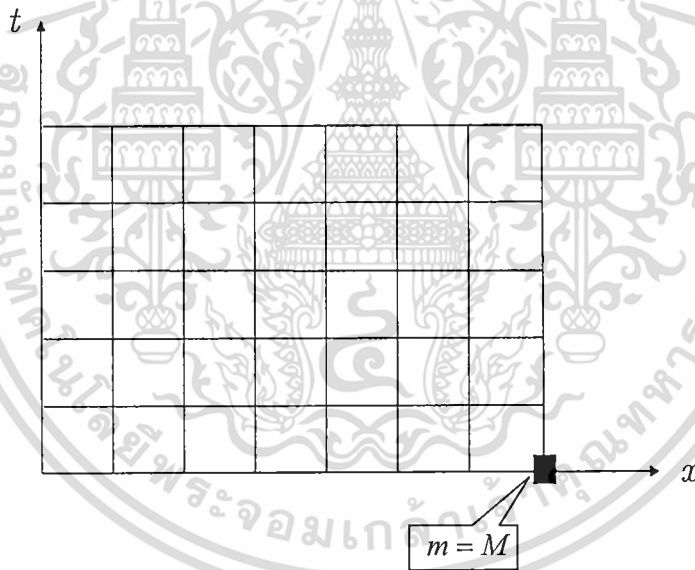
$$u_M^1 = \frac{1}{2} \left[(4-4Mp)u_m^0 + (2Mp+p)u_{M+1}^0 + (2Mp-p)u_{M-1}^0 + 2k\psi(x) + 2k^2\beta |u_M^0|^d \right] \quad (3.2.10)$$

เนื่องจาก u_{M+1}^0 ในสมการ (3.12) อยู่นอกโดเมน $[0,a] \times [0,T]$ ดังนั้น u_{M+1}^0 จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^0 - u_{M-1}^0}{2h} \approx 0 \quad \text{หรือ} \quad u_{M+1}^0 \approx u_{M-1}^0 \quad (3.2.11)$$

แทนสมการที่ (3.2.11) ในสมการที่ (3.2.10) จะได้ว่า

$$u_M^1 = \frac{1}{2} \left[(2-4Mp)u_M^0 + 4Mp u_{M-1}^0 - 2k\psi(x) + 2k^2\beta |u_M^0|^d \right] \quad (3.2.12)$$



รูปที่ 3.2.1.4 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.2.12)

กรณีที่ 4 แทน $n>0$ และ $m=M$ ในสมการที่ (3.2.9) จะได้ว่า

$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2} \left[(4-4Mp)u_M^n + (2Mp+p)u_{M+1}^n + (2Mp-p)u_{M-1}^n - 2u_M^{n-1} + 2k^2\beta |u_M^n|^d \right] \quad (3.2.13)$$

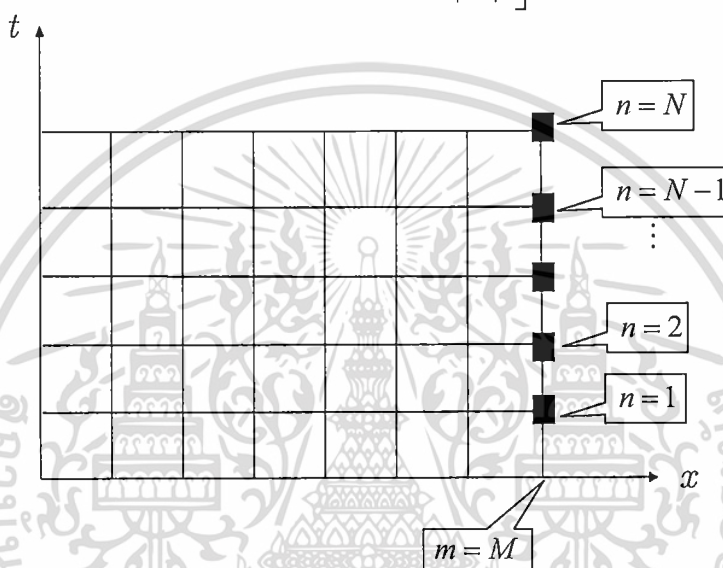
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก u_{M+1}^n ในสมการ (3.2.13) อยู่นอกโดเมน $[0, a] \times [0, T]$ ดังนั้น u_{M+1}^n จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^n - u_{M-1}^n}{2h} \approx 0 \quad \text{หรือ} \quad u_{M+1}^n \approx u_{M-1}^n \quad (3.2.14)$$

แทนสมการที่ (3.2.14) ในสมการที่ (3.2.13) จะได้ว่า

$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2} \left[(4 - 4Mp)u_M^n + 4Mpu_{M-1}^n - 2u_M^{n-1} + 2k^2\beta |u_m^n|^d \right] \quad (3.2.15)$$



รูปที่ 3.2.1.5 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.2.15)

จากสมการ (3.2.8) (3.2.9) (3.2.12) และ (3.2.15) จะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับสำหรับหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น และไม่มีแรงหน่วง ($\alpha = 0$) ดังนี้

สูตรที่ 1 กรณี $n = 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$

$$u_m^1 = \frac{1}{2} \left[(2 - 4mp)u_m^0 + (2mp + p)u_{m+1}^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 + 2k\psi(x) + 2k^2\beta |u_m^0|^d \right]$$

สูตรที่ 2 กรณี $n > 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2} \left[(4 - 4mp)u_m^n + (2mp + p)u_{m+1}^n + (2mp - p)u_{m-1}^n - 2u_m^{n-1} + 2k^2\beta |u_m^n|^d \right]$$

สูตรที่ 3 กรณี $n = 0$ และ $m = M$

$$u_M^1 = \frac{1}{2} \left[(2 - 4Mp)u_M^0 + 4Mpu_{M-1}^0 - 2k\psi(x) + 2k^2\beta |u_M^0|^d \right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สูตรที่ 4 กรณี $n > 0$ และ $m = M$

$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2} \left[(4 - 4Mp)u_M^n + 4Mpu_{M-1}^n - 2u_M^{n-1} + 2k^2 \beta |u_m^n|^u \right]$$

โดยที่ $p = \frac{k^2}{h}$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.2 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันตะ กรณีมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น และมีความหน่วงแบบเชิงเส้น ซึ่งจากสมการที่ (3.2.1) แทนด้วย $\alpha |u_r|^{c-1} u_r$ เมื่อกำหนดให้ $c=1$ และสัมประสิทธิ์ α มีค่าแตกต่างกัน

เมื่อแทน $c=1$ ลงในสมการ (3.2.4) จะได้ว่า

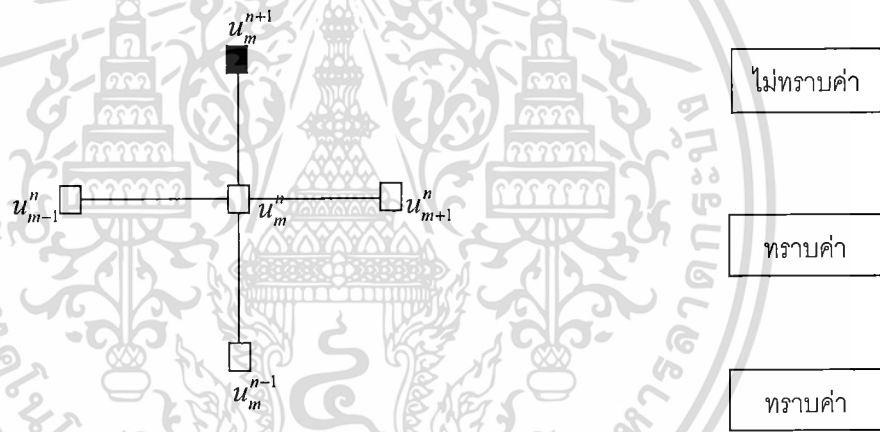
$$(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1}) - [2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] + \alpha k(u_m^{n+1} - u_m^{n-1}) = 2k^2 \beta |u_m^n|^{d-1} u_m^n$$

ซึ่ง $p = \frac{k^2}{h}$ (3.2.16)

จากสมการที่ (3.2.16) จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปชัดแจ้ง (Explicit Form) ได้ดังนี้

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[(2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n + (\alpha k - 2)u_m^{n-1} + 2k^2 \beta |u_m^n|^d \right]$$

ซึ่ง $p = \frac{k^2}{h}$ (3.2.17)



รูปที่ 3.2.2.1 การระบุตำแหน่งของผลเฉลย u ในสมการ (3.2.17)

จากสมการ (3.2.17) เราจะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันตะทั้งหมด 4 สูตรจาก 4 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ $n=0$ และ $m=1, 2, 3, \dots, M-1$

กรณีที่ 2 เมื่อ $n>0$ และ $m=1, 2, 3, \dots, M-1$

กรณีที่ 3 เมื่อ $n=0$ และ $m=M$

กรณีที่ 4 เมื่อ $n>0$ และ $m=M$

กรณีที่ 1 แทน $n=0$ ในสมการที่ (3.2.17) เมื่อ $m=1, 2, 3, \dots, M-1$ จะได้ว่า

$$u_m^1 = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[(2mp + p)u_{m+1}^0 + (4 - 4mp)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 + (\alpha k - 2)u_m^{-1} + 2k^2 \beta |u_m^0|^d \right]$$

(3.2.18)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

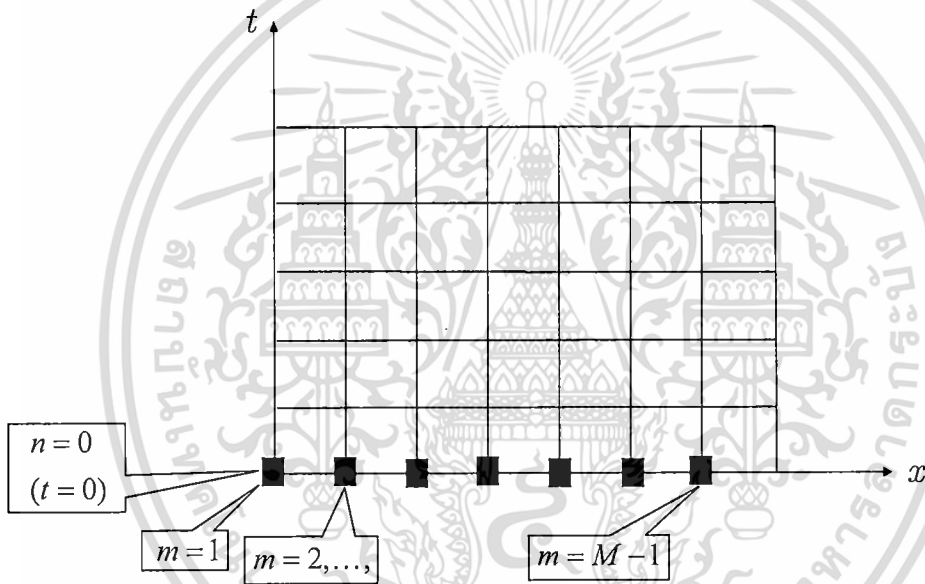
เนื่องจาก u_m^{-1} ในสมการ (3.2.18)อยู่นอกโดเมน $[0, \alpha] \times [0, T]$ ดังนั้น u_m^{-1} จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขเริ่มต้น จะได้ว่า

$$\frac{u_m^0 - u_m^{-1}}{k} \approx \psi(x) \quad \text{หรือ} \quad u_m^{-1} \approx u_m^0 - k\psi(x) \quad (3.2.19)$$

แทนสมการที่ (3.2.19) ในสมการที่ (3.2.18) จะได้ว่า

$$u_m^1 = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[(2mp + p)u_{m+1}^0 + (4 - 4mp)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 + (-\alpha k^2 + 2k)\psi(x) + 2k^2\beta |u_m^0|^d \right]$$

โดยที่ $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$ (3.2.20)



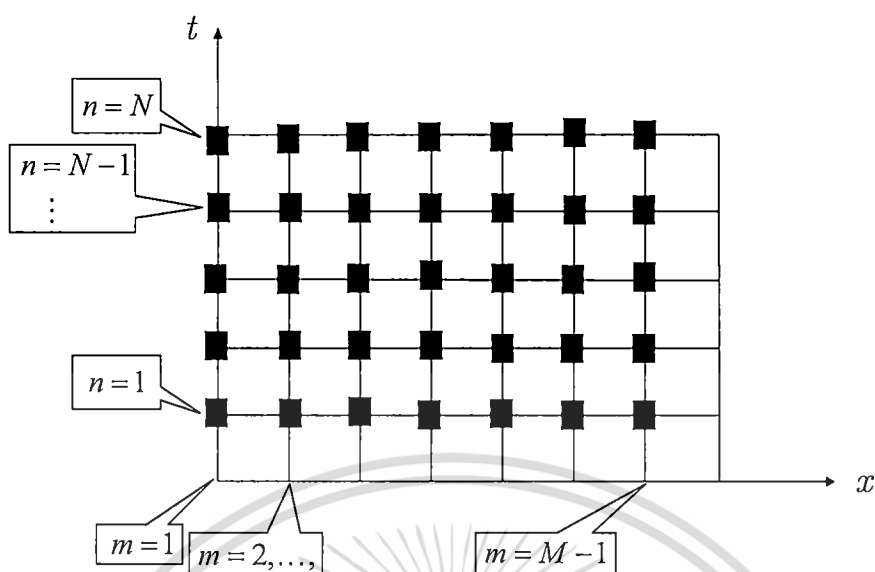
รูปที่ 3.2.2.2 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.2.20)

กรณีที่ 2 แทน $n > 0$ ในสมการที่ (3.2.17) เมื่อ $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$ จะได้ว่า

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[(2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n + (\alpha k - 2)u_m^{n-1} + 2k^2\beta |u_m^n|^d \right]$$

(3.2.21)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.2.2.3 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.2.21)

กรณีที่ 3 แทน $n=0$ และ $m=M$ ในสมการที่ (3.2.20) จะได้ว่า

$$u_M^1 = \frac{1}{2+\alpha k} \left[(2Mp+p)u_{M+1}^0 + (2-4Mp+\alpha k)u_M^0 + (2Mp-p)u_{M-1}^0 + (-\alpha k^2 + 2k)\psi(x) + 2k^2\beta |u_M^0|^d \right] \quad (3.2.22)$$

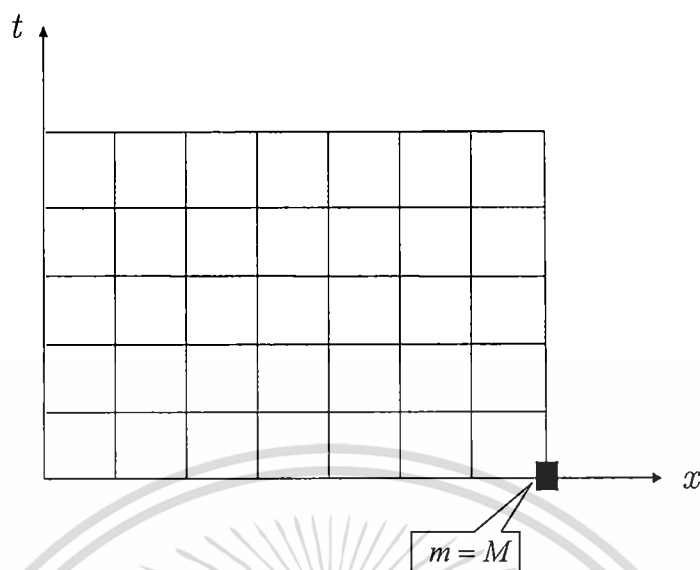
เนื่องจาก u_{M+1}^0 ในสมการ (3.2.22)อยู่นอกโดเมน $[0, a] \times [0, T]$ ดังนั้น u_{M+1}^0 จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^0 - u_{M-1}^0}{2h} \approx 0 \quad \text{หรือ} \quad u_{M+1}^0 \approx u_{M-1}^0 \quad (3.2.23)$$

แทนสมการที่ (3.2.23) ในสมการที่ (3.2.22) จะได้ว่า

$$u_M^1 = \frac{1}{2+\alpha k} \left[(2-4Mp+\alpha k)u_M^0 + 4Mpu_{M+1}^0 + (-\alpha k^2 + 2k)\psi(x) + 2k^2\beta |u_M^0|^d \right] \quad (3.2.24)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.2.2.4 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.2.24)

กรณีที่ 4 แทน $n > 0$ และ $m = M$ ในสมการที่ (3.2.21) จะได้ว่า

$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[(2Mp + p)u_{M+1}^n + (4 - 4Mp)u_M^n + (2Mp - p)u_{M-1}^n + (\alpha k - 2)u_M^{n-1} + 2k^2 \beta |u_M^n|^d \right] \quad (3.2.25)$$

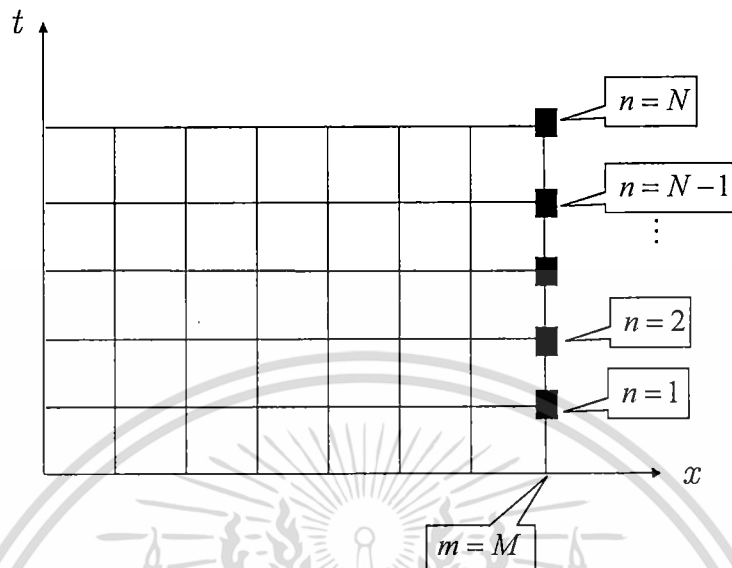
เนื่องจาก u_{M+1}^n ในสมการ (3.2.25) อยู่นอกโดเมน $[0, a] \times [0, T]$ ดังนั้น u_{M+1}^n จะถูกประมาณค่า โดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^n - u_{M-1}^n}{2h} \approx 0 \quad \text{หรือ} \quad u_{M+1}^n \approx u_{M-1}^n \quad (3.2.26)$$

แทนสมการที่ (3.2.26) ในสมการที่ (3.2.25) จะได้ว่า

$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[(4 - 4Mp)u_M^n + 4Mp u_{M-1}^n + (\alpha k - 2)u_M^{n-1} + 2k^2 \beta |u_M^n|^d \right] \quad (3.2.27)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.2.2.5 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.2.27)

จากสมการ (3.2.20) (3.2.21) (3.2.24) และ (3.2.27) จะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น และมีความหน่วงแบบเชิงเส้น ดังนี้

สูตรที่ 1 กรณี $n = 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$

$$u_m^1 = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[(2mp + p)u_{m+1}^0 + (4 - 4mp)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 + (-\alpha k^2 + 2k)\psi(x) + 2k^2\beta |u_m^0|^d \right]$$

สูตรที่ 2 กรณี $n > 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[(2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n + (\alpha k - 2)u_m^{n-1} + 2k^2\beta |u_m^n|^d \right]$$

สูตรที่ 3 กรณี $n = 0$ และ $m = M$

$$u_M^1 = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[(2 - 4Mp + \alpha k)u_M^0 + 4Mpu_{M+1}^0 + (-\alpha k^2 + 2k)\psi(x) + 2k^2\beta |u_M^0|^d \right]$$

สูตรที่ 4 กรณี $n > 0$ และ $m = M$

$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[(4 - 4Mp)u_M^n + 4Mpu_{M-1}^n + (\alpha k - 2)u_M^{n-1} + 2k^2\beta |u_M^n|^d \right]$$

โดยที่ $p = \frac{k^2}{h}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.3 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ ครรณีมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น กัน และมีความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสอง ซึ่งจากสมการที่ (3.2.1) แทนด้วย $\alpha|u_i|^{c-1} u_i$ เมื่อกำหนดให้ $c=2$ และสัมประสิทธิ์ α มีค่าแตกต่าง

เมื่อแทน $c=2$ ลงในสมการ (3.2.4) จะได้ว่า

$$(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1}) - [2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] + \alpha 2^{-1} |u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^2 = 2k^2 \beta |u_m^n|^d \tag{3.2.28}$$

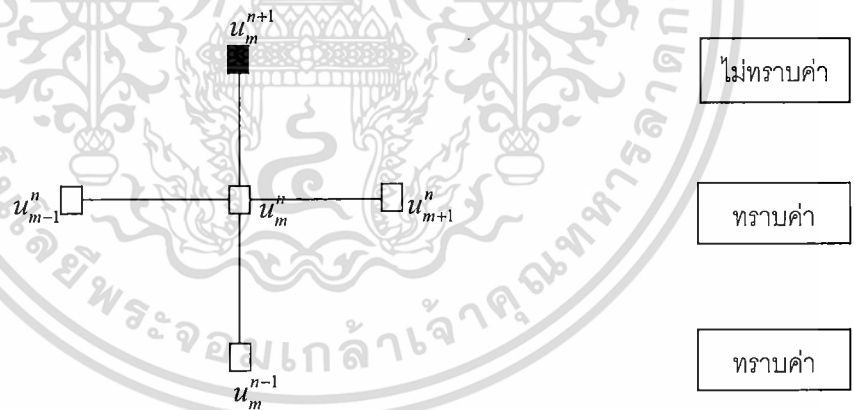
แทน $|u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^2 = (u_m^{n+1})^2 - 2u_m^{n+1}u_m^{n-1} + (u_m^{n-1})^2$ ลงในสมการ (3.2.28) จะได้

$$(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1}) - [2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] + \alpha 2^{-1} [(u_m^{n+1})^2 - 2u_m^{n+1}u_m^{n-1} + (u_m^{n-1})^2] = 2k^2 \beta |u_m^n|^d$$

จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปชัดแจ้ง (Explicit Form) ได้ดังนี้

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha u_m^{n-1})} (u_m^{n+1})^2 + u_m^{n+1} = \frac{1}{(2 - \alpha u_m^{n-1})} \left[(2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n - (\alpha u_m^{n-1} + 2)u_m^{n-1} + 2k^2 \beta |u_m^n|^d \right] \tag{3.2.29}$$

โดย $p = \frac{k^2}{h}$



รูปที่ 3.2.3.1 การระบุตำแหน่งของผลเฉลย u ในสมการ (3.2.29)

จากสมการ (3.2.29) เราจะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับทั้งหมด 4 สูตรจาก 4 ครรณี เช่นเดียวกับหัวข้อ 3.2.1 ดังนี้

กรณีที่ 1 แทน $n=0$ ในสมการที่ (3.2.29) เมื่อ $m=1, 2, 3, \dots, M-1$ จะได้ว่า

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha u_m^{-1})} (u_m^1)^2 + u_m^1 = \frac{1}{(2 - \alpha u_m^{-1})} \left[(2mp + p)u_{m+1}^0 + (4 - 4mp)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 - (\alpha u_m^{-1} + 2)u_m^{-1} + 2k^2 \beta |u_m^0|^d \right] \tag{3.2.30}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

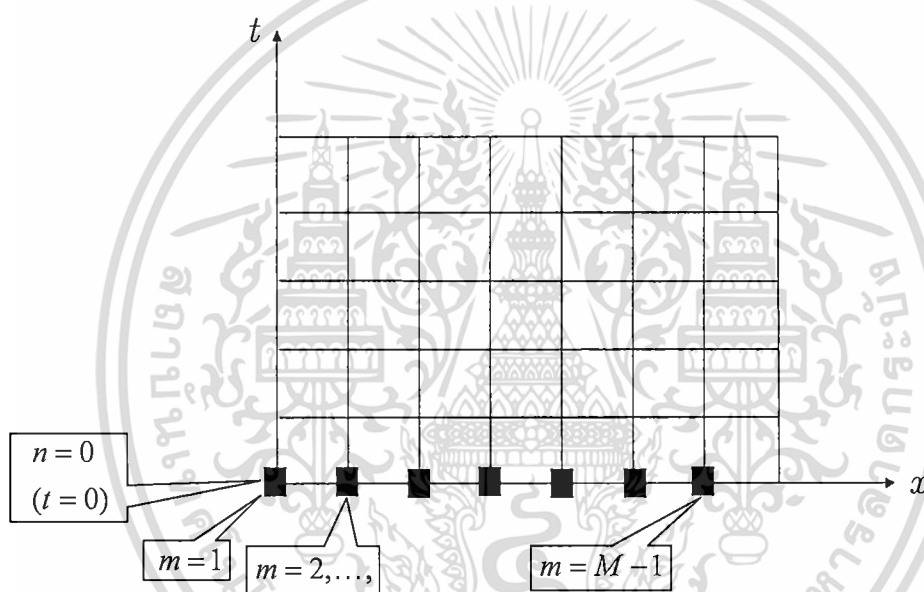
เนื่องจาก u_m^{-1} ในสมการ (3.2.30) อยู่นอกโดเมน $[0, a] \times [0, T]$ ดังนั้น u_m^{-1} จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันตะตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขเริ่มต้น จะได้ว่า

$$\frac{u_m^0 - u_m^{-1}}{k} \approx \psi(x) \quad \text{หรือ} \quad u_m^{-1} \approx u_m^0 - k\psi(x) \quad (3.2.31)$$

แทนสมการที่ (3.2.31) ในสมการที่ (3.2.30) จะได้ว่า

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha(u_m^0 - k\psi(x)))} (u_m^1)^2 + u_m^1 = \frac{1}{(2 - \alpha(u_m^0 - k\psi(x)))} \left[\begin{array}{l} (2mp + p)u_{m+1}^0 + (4 - 4mp)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 \\ -(\alpha(u_m^0 - k\psi(x)) + 2)(u_m^0 - k\psi(x)) + 2k^2\beta|u_m^0|^d \end{array} \right]$$

โดยที่ $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$ (3.2.32)

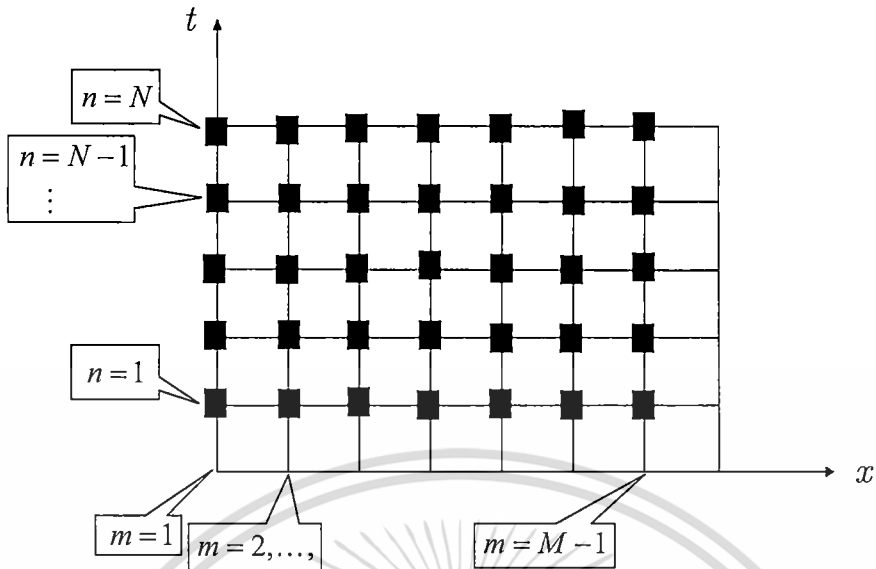


รูปที่ 3.2.3.2 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.2.32)

กรณีที่ 2 แทน $n > 0$ ในสมการที่ (3.2.29) เมื่อ $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$ จะได้ว่า

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha u_m^{n-1})} (u_m^{n+1})^2 + u_m^{n+1} = \frac{1}{(2 - \alpha u_m^{n-1})} \left[\begin{array}{l} (2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n \\ -(\alpha u_m^{n-1} + 2)u_m^{n-1} + 2k^2\beta|u_m^0|^d \end{array} \right] \quad (3.2.33)$$

โดยที่ $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$



รูปที่ 3.2.3.3 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.2.33)

กรณีที่ 3 แทน $n=0$ และ $m=M$ ในสมการที่ (3.2.29) จะได้ว่า

$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha(u_M^0 - k\psi(x)))} (u_M^1)^2 + u_M^1 = \frac{1}{(2-\alpha(u_M^0 - k\psi(x)))} \left[(2Mp+p)u_{M+1}^0 + (4-4Mp)u_M^0 + (2Mp-p)u_{M-1}^0 \right. \\ \left. - (\alpha(u_M^0 - k\psi(x)) + 2)(u_M^0 - k\psi(x)) + 2k^2\beta|u_m^0|^d \right] \quad (3.2.34)$$

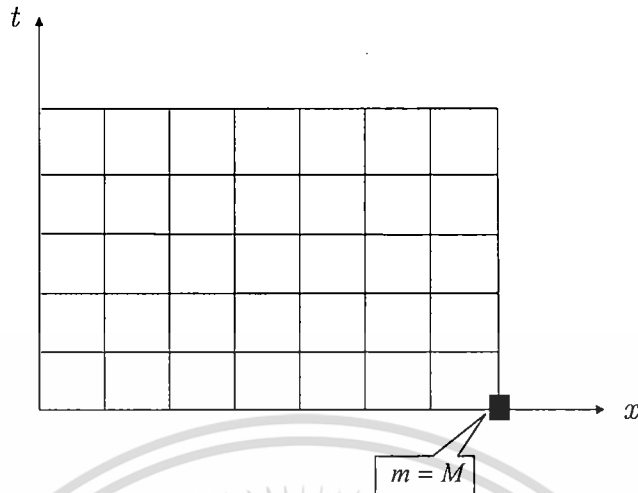
เนื่องจาก u_{M+1}^0 ในสมการ (3.2.24) อยู่นอกโดเมน $[0, \alpha] \times [0, T]$ ดังนั้น u_m^{-1} จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^0 - u_{M-1}^0}{2h} \approx 0 \quad \text{หรือ} \quad u_{M+1}^0 \approx u_{M-1}^0 \quad (3.2.35)$$

แทนสมการที่ (3.2.35) ในสมการที่ (3.2.34) จะได้ว่า

$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha(u_M^0 - k\psi(x)))} (u_M^1)^2 + u_M^1 = \frac{1}{(2-\alpha(u_M^0 - k\psi(x)))} \left[4Mpu_{M-1}^0 + (4-4Mp)u_M^0 \right. \\ \left. - (\alpha(u_M^0 - k\psi(x)) + 2)(u_M^0 - k\psi(x)) + 2k^2\beta|u_m^0|^d \right] \quad (3.2.36)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.2.3.4 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.2.36)

กรณีที่ 4 แทน $n > 0$ และ $m = M$ ในสมการที่ (3.2.23) จะได้ว่า

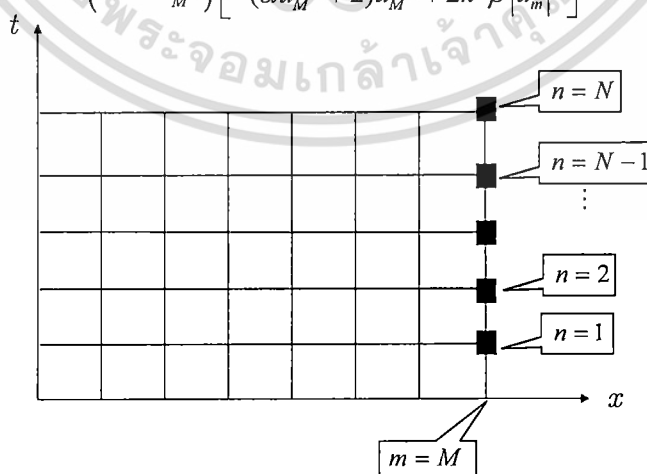
$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha u_M^{n-1})} (u_M^{n+1})^2 + u_M^{n+1} = \frac{1}{(2-\alpha u_M^{n-1})} \left[(2Mp+p)u_{M+1}^n + (4-4Mp)u_M^n + (2Mp-p)u_{M-1}^n \right. \\ \left. -(\alpha u_M^{n-1} + 2)u_M^{n-1} + 2k^2\beta |u_m^0|^d \right] \quad (3.2.37)$$

เนื่องจาก u_{M+1}^n ในสมการ (3.2.37) อยู่นอกโดเมน $[0, \alpha] \times [0, T]$ ดังนั้น u_{M+1}^n จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^n - u_{M-1}^n}{2h} \approx 0 \quad \text{หรือ} \quad u_{M+1}^n \approx u_{M-1}^n \quad (3.2.38)$$

แทนสมการที่ (3.2.38) ในสมการที่ (3.2.37) จะได้ว่า

$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha u_M^{n-1})} (u_M^{n+1})^2 + u_M^{n+1} = \frac{1}{(2-\alpha u_M^{n-1})} \left[4Mpu_{M-1}^n + (4-4Mp)u_M^n \right. \\ \left. -(\alpha u_M^{n-1} + 2)u_M^{n-1} + 2k^2\beta |u_m^0|^d \right] \quad (3.2.39)$$



รูปที่ 3.2.3.5 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.2.39)

จากสมการ (3.2.32) (3.2.33) (3.2.36) และ (3.2.39) จะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีแรงภายนอกที่ไม่เชิงเส้น และมีความหน่วงแบบเชิงเส้นกำลังสอง ดังนี้

สูตรที่ 1 กรณี $n = 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$

$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha(u_m^0 - k\psi(x)))} (u_m^1)^2 + u_m^1 = \frac{1}{(2-\alpha(u_m^0 - k\psi(x)))} \left[(2mp+p)u_{m+1}^0 + (4-4mp)u_m^0 + (2mp-p)u_{m-1}^0 \right. \\ \left. - (\alpha(u_m^0 - k\psi(x)) + 2)(u_m^0 - k\psi(x)) + 2k^2\beta|u_m^0|^d \right]$$

สูตรที่ 2 กรณี $n > 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$

$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha u_m^{n-1})} (u_m^{n+1})^2 + u_m^{n+1} = \frac{1}{(2-\alpha u_m^{n-1})} \left[(2mp+p)u_{m+1}^n + (4-4mp)u_m^n + (2mp-p)u_{m-1}^n \right. \\ \left. - (\alpha u_m^{n-1} + 2)u_m^{n-1} + 2k^2\beta|u_m^0|^d \right]$$

สูตรที่ 3 กรณี $n = 0$ และ $m = M$

$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha(u_M^0 - k\psi(x)))} (u_M^1)^2 + u_M^1 = \frac{1}{(2-\alpha(u_M^0 - k\psi(x)))} \left[4Mpu_{M-1}^0 + (4-4Mp)u_M^0 \right. \\ \left. - (\alpha(u_M^0 - k\psi(x)) + 2)(u_M^0 - k\psi(x)) + 2k^2\beta|u_M^0|^d \right]$$

สูตรที่ 4 กรณี $n > 0$ และ $m = M$

$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha u_M^{n-1})} (u_M^{n+1})^2 + u_M^{n+1} = \frac{1}{(2-\alpha u_M^{n-1})} \left[4Mpu_{M-1}^n + (4-4Mp)u_M^n \right. \\ \left. - (\alpha u_M^{n-1} + 2)u_M^{n-1} + 2k^2\beta|u_M^0|^d \right]$$

โดยที่ $p = \frac{k^2}{h}$

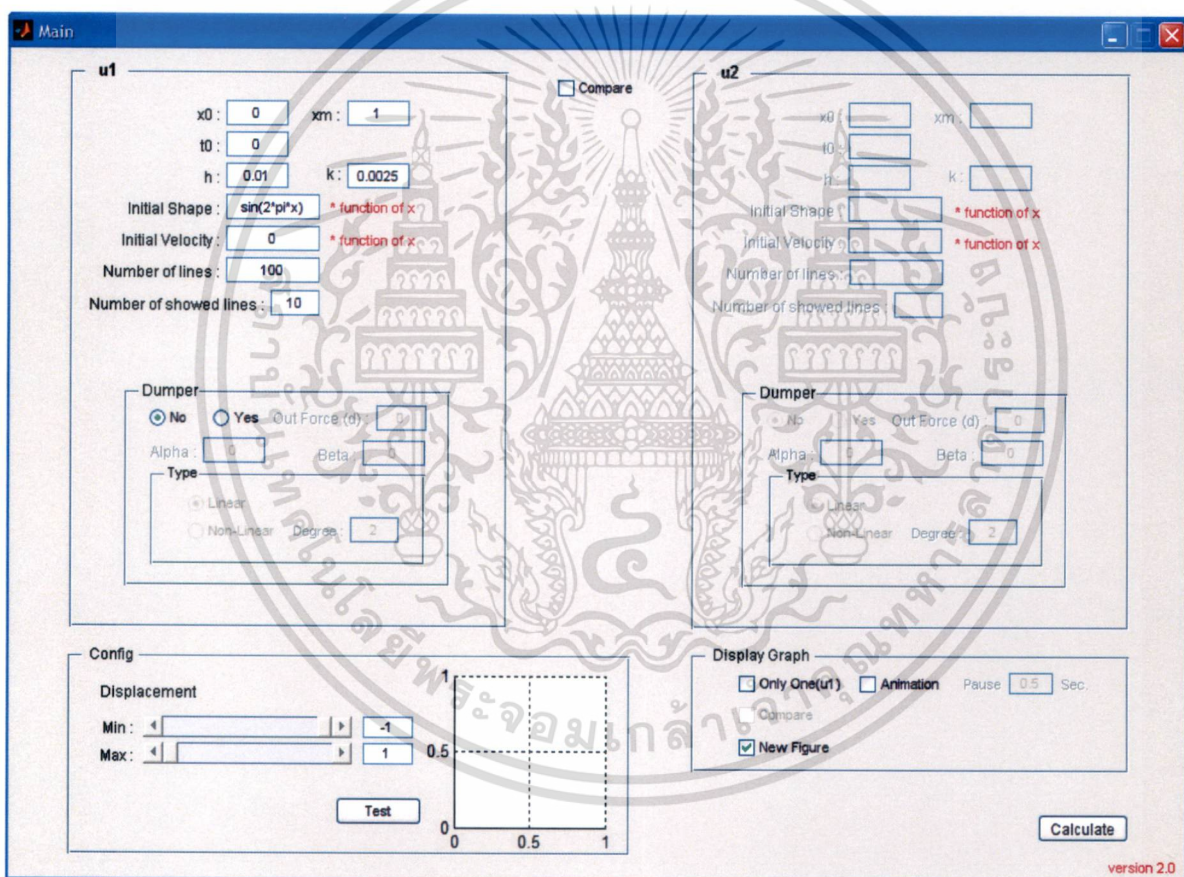
จากสูตรที่ 1-4 กำหนดให้ u_M^0 เป็นรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวด ส่วน $\psi(x)$ เป็นความเร็วต้นของเส้นลวด หลังจากแทนค่าพจน์ที่ทราบค่าลงไปในสูตรทางด้านขวามือแล้ว จะติดเทอมที่ไม่ทราบค่าคือ $(u_m^{n+1})^2$ และ u_m^{n+1} ซึ่งจะอยู่ในรูปของสมการกำลังสอง กล่าวคือ $a(u_m^{n+1})^2 + bu_m^{n+1} + c = 0$ ดังนั้น เราจะสามารถหา

ผลเฉลยได้จาก $u_m^{n+1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ เมื่อ $x = u_m^{n+1}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อแสดงกราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลข

ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงขั้นตอนการใช้โปรแกรมเพื่อสร้างการจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น และนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับการสั่นแบบมีความหน่วงเชิงเส้น และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง ตามลำดับ โปรแกรมนี้ถูกพัฒนาจากงานวิจัยที่ [17] และ [18] โดยสร้างจากสูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับแสดงไว้ในหัวข้อ 3.2.1, 3.2.2 และ 3.2.3 ซึ่งส่วนที่เพิ่มจากงานวิจัยก่อนหน้านี้ที่ได้ศึกษาถึงผลกระทบของความหน่วงที่มีผลต่อลักษณะการสั่น คือส่วนของแรงภายนอกไม่เชิงเส้น ผู้ใช้สามารถใส่ข้อมูลต่างๆ ลงในหน้าต่างแบบกราฟิก (Graphic User Interface: GUI) เพื่อให้แสดงผลในรูปของตารางและกราฟ โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.3.1 หน้าต่าง GUI เพื่อรับข้อมูลและแสดงผลกราฟ

หน้าต่าง GUI แบ่งออกเป็น 4 ส่วน ดังแสดงในรูปที่ 3.3.1 ส่วนแรกคือ u1 จะเป็นการรับค่าข้อมูลเริ่มต้นทั้งหมด และมีส่วนย่อยคือ Dumper ซึ่งจะรับค่าข้อมูลของแรงภายนอกไม่เชิงเส้นและข้อมูลของความหน่วง ส่วนที่สองคือ u2 จะเป็นการรับค่าข้อมูลเริ่มต้นเพื่อนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลในส่วนแรกที่ได้จาก u1 ส่วนที่สามคือ Config ซึ่งใช้รับค่าข้อมูลเพื่อกำหนดช่วงของกราฟการสั่น และปุ่ม Test เพื่อแสดง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กราฟการสั่น ส่วนที่สี่คือ Display Graph จะมีช่องให้เลือกแสดงกราฟในลักษณะต่างๆ โดยมีขั้นตอนการกรอกข้อมูล ดังนี้

3.3.1 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมแสดงผลกราฟการสั่นแบบไม่มีการเปรียบเทียบ

ขั้นที่ 1 ในส่วน u1 นี้ จะเป็นการรับค่าข้อมูลเริ่มต้นทั้งหมดเช่นเดียวกับ โปรแกรมในงานวิจัย [17] และ [18] เพื่อใช้สำหรับการคำนวณ ดังนี้

- คีย์ข้อมูลความยาวของเส้นลวด ซึ่งโดยทั่วไปในการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขจะกำหนดให้เส้นลวด 1 หน่วย
- คีย์ข้อมูลเวลาเริ่มต้น โดยปกติจะกำหนดให้เวลาเริ่มต้นเป็นศูนย์
- คีย์ข้อมูลขนาดของช่วงย่อยๆ ของตำแหน่ง (h) และเวลา (k) ตามลำดับ โดยในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้ $h = 0.01$ และ $k = 0.0025$
- คีย์ข้อมูลรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวด ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้ฟังก์ชัน $\phi(x) = \sin 2\pi x$ แทนรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวด เนื่องจากเป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา
- คีย์ข้อมูลความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวด ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้ความเร็วเริ่มต้นเป็น 0 เมื่อเปรียบเทียบลักษณะการสั่นแบบมีแรงภายนอก เมื่อกำหนดให้กำลัง d และสัมประสิทธิ์ β ของแรงภายนอกมีค่าต่างๆ กัน
- คีย์ข้อมูลจำนวนของเส้นที่ต้องการคำนวณ ซึ่งในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้จำนวนของเส้นที่ต้องการให้โปรแกรมคำนวณเป็น 100 และกำหนดให้ $k = 0.0025$ แล้ว โปรแกรมจะคำนวณเส้นกราฟทั้งหมด 100 เส้น แต่ละเส้นมีเวลาห่างกัน 0.0025
- คีย์ข้อมูลจำนวนของเส้นที่ต้องการแสดง ซึ่งในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้จำนวนของเส้นที่ต้องการให้โปรแกรมแสดงเป็น 10 และกำหนดให้จำนวนเส้นที่ต้องการคำนวณเป็น 100 โปรแกรมจะแสดงเส้นกราฟเพียง 10 เส้น จากเส้นกราฟที่คำนวณได้ทั้งหมด 100 เส้น คือเลือกแสดงผลทุกๆ 10 เส้น

ขั้นที่ 2 ในส่วนของ Dumper นอกเหนือจากข้อมูลของความหน่วงที่ได้ศึกษาไว้ในงานวิจัย [17] และ [18] จะมีส่วนของแรงภายนอกเพิ่มขึ้น ดังนี้

- เลือก No เมื่อต้องการแสดงผลการสั่นแบบไม่มีความหน่วง
หรือเลือก Yes เมื่อต้องการแสดงผลการสั่นแบบมีความหน่วง และ/หรือ แบบมีแรงภายนอก
- เลือก Linear สำหรับความหน่วงแบบเชิงเส้น หรือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เลือก Non-Linear และคีย์เลข 2 สำหรับความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสอง (ในงานวิจัยนี้จะพิจารณากรณีที่เป็นความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองเท่านั้น) หรือคีย์หมายเลขอื่นเพื่อกำหนดกำลังของความหน่วงที่ต้องการ
- และ/หรือ คีย์ค่ากำลัง d และค่าสัมประสิทธิ์ $Beta$ ของแรงภายนอก
- และ/หรือ คีย์ข้อมูลค่าสัมประสิทธิ์ $Alpha$ ของความหน่วง

ส่วนขั้นตอนอื่นๆ จะมีลักษณะการใช้งานเหมือนในงานวิจัย [17] และ [18] กล่าวคือ

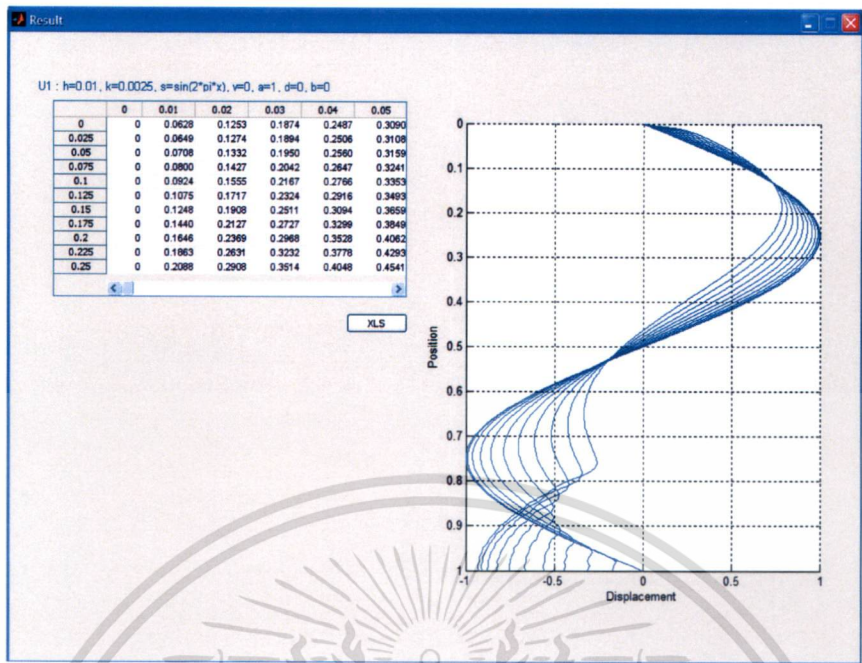
ขั้นที่ 3 ในส่วนของ Config จะทดสอบผลกราฟที่ได้จากการคำนวณ

- คีย์ข้อมูลค่า Min และค่า Max เพื่อกำหนดสเกลของแกน x โดยโปรแกรมจะเซตค่าไว้ที่ -1 และ 1 ตามลำดับ
- กดปุ่ม Test เพื่อทดสอบว่าได้ผลกราฟตามที่ต้องการแล้วหรือไม่ ถ้าผลยังไม่เป็นที่พอใจ สามารถแก้ไขโดยคีย์ข้อมูลในขั้นที่ 1 และ 2 ใหม่อีกครั้ง

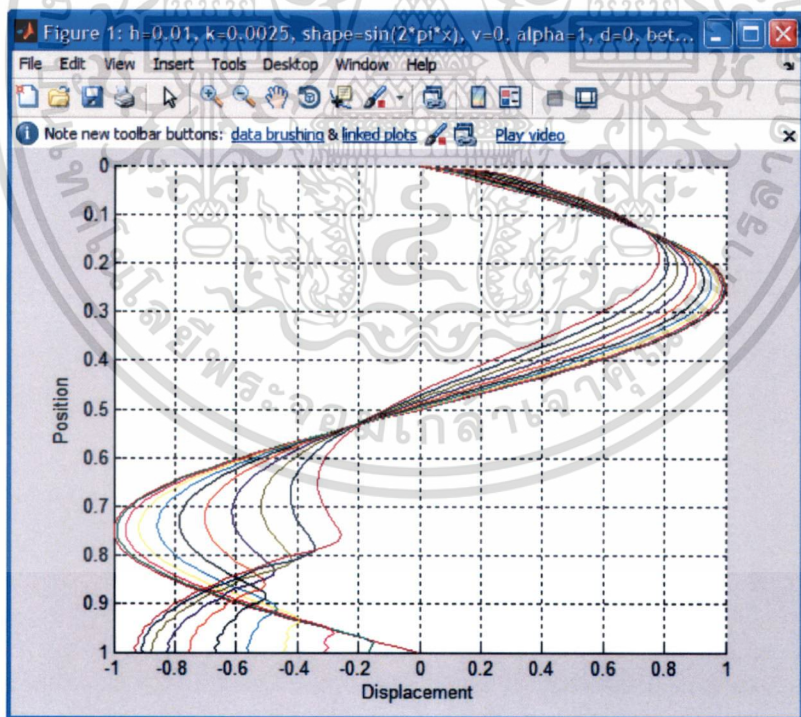
ขั้นที่ 4 ในส่วนของ Display Graph จะแสดงผลกราฟโดยขึ้นหน้าต่างใหม่

- คลิกที่ช่อง Animation และคีย์ข้อมูลเวลาที่ต้องการติลย์ในช่อง Pause (โปรแกรมจะเซตค่าไว้ที่ 0.5 Sec.) เมื่อต้องการให้แสดงผลกราฟแบบ animation โดยจะมีหน้าต่างใหม่แสดงผลกราฟแบบ animation พร้อมทั้งตารางแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อกดปุ่ม XLS ในหน้าต่างใหม่นี้ และ save ไฟล์เป็น .xls จะได้ไฟล์ excel เก็บข้อมูลตารางของผลเฉลยเชิงตัวเลข หรือ
- หากต้องการแสดงผลกราฟที่สามารถแก้ไข ปรับเปลี่ยนรายละเอียดของกราฟได้ ให้คลิกช่อง New Figure หรือ
- หากต้องการแสดงผลกราฟทั้งสองหน้าต่าง คลิกที่ช่อง Animation และช่อง New Figure พร้อมกัน จะมีหน้าต่างใหม่ขึ้นมา 2 หน้าต่าง โดยหน้าต่างแรกแสดงผลกราฟแบบ animation พร้อมทั้งตารางแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข ส่วนหน้าต่างที่สองแสดงผลกราฟเป็นภาพสี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.3.1.1 หน้าต่าง Animation แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีแรงภายนอก ไม่เชิงเส้นกำลังสอง เมื่อกำหนดให้ กำลังของแรงภายนอกคือ $d = 0$

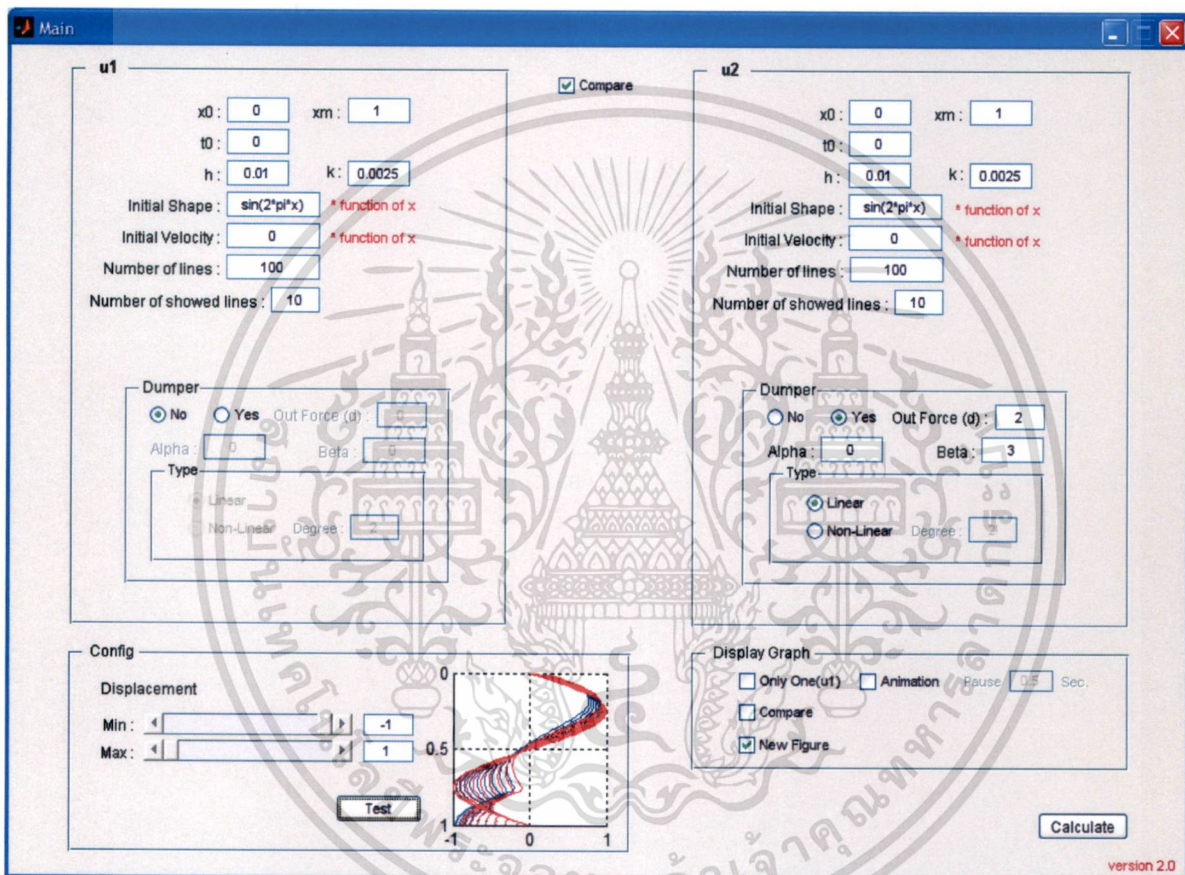


รูปที่ 3.3.1.2 หน้าต่าง New Figure แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีแรงภายนอก ไม่เชิงเส้นกำลังสอง เมื่อกำหนดให้ กำลังของแรงภายนอกคือ $d = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3.2 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมแสดงผลกราฟการสั่นแบบมีการเปรียบเทียบ

ขั้นที่ 1 เมื่อคลิกที่ช่อง Compare จะเห็นว่าค่าข้อมูลเริ่มต้นในส่วนของ u2 จะถูกเซทให้เหมือนกับ u1 โดยอัตโนมัติ แต่สามารถแก้ไขข้อมูลได้ตามต้องการ เนื่องจากงานวิจัยนี้ เราต้องการทำการเปรียบเทียบความแตกต่างในส่วนของแรงภายนอกและส่วนของความหน่วง เราจึงกำหนดข้อมูลเริ่มต้นในส่วนของ u2 และ u1 เหมือนกัน ดังรูป



รูปที่ 3.3.2.1 หน้าต่าง GUI ที่รับข้อมูลและแสดงกราฟเปรียบเทียบ

ขั้นที่ 2 ในส่วนของ Dumper นอกเหนือจากข้อมูลของความหน่วงที่ได้ศึกษาไว้ในงานวิจัย [17] และ [18] จะมีส่วนของแรงภายนอกเพิ่มขึ้น ดังนี้

- เลือก No เมื่อต้องการแสดงผลการสั่นแบบไม่มีความหน่วง
- หรือเลือก Yes เมื่อต้องการแสดงผลการสั่นแบบมีความหน่วง และ/หรือ แบบมีแรงภายนอก
- เลือก Linear สำหรับความหน่วงแบบเชิงเส้น หรือ

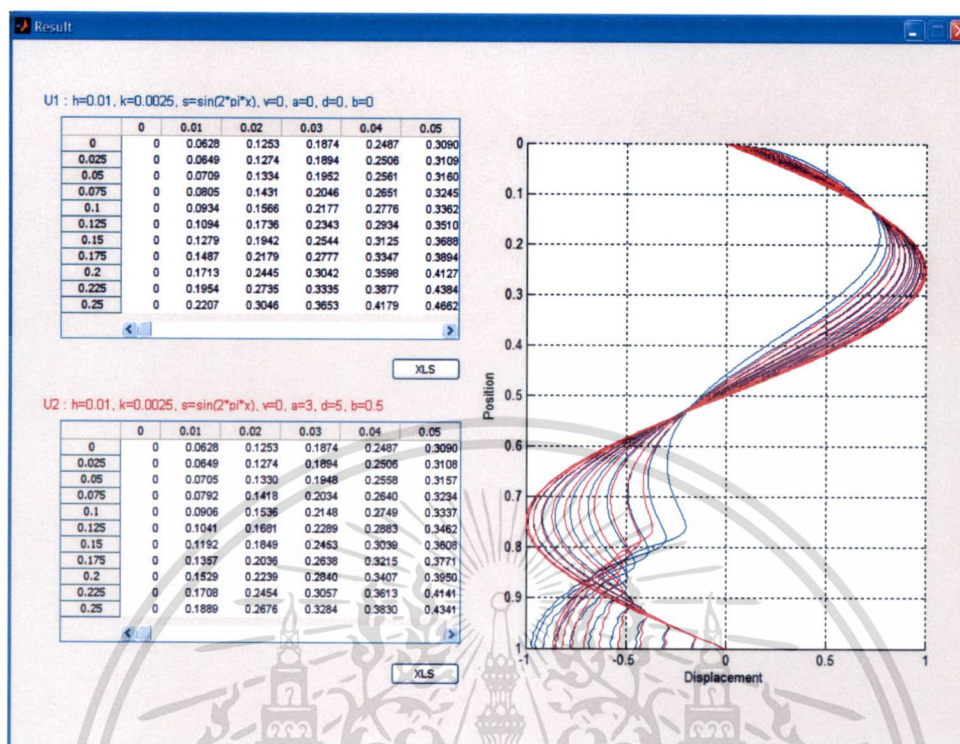
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- เลือก Non-Linear และคีย์เลข 2 สำหรับความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสอง หรือคีย์หมายเลขอื่นเพื่อกำหนดกำลังของความหน่วงที่ต้องการ
- และ/หรือ คีย์ค่ากำลัง d และค่าสัมประสิทธิ์ $Beta$ ของแรงภายนอก
- และ/หรือ คีย์ข้อมูลค่าสัมประสิทธิ์ $Alpha$ ของความหน่วง

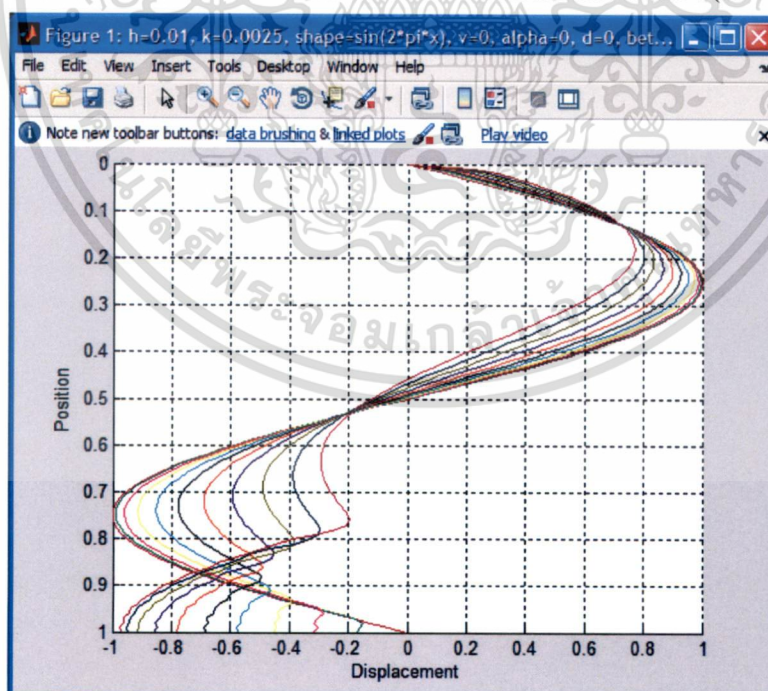
ส่วนขั้นตอนอื่นๆ จะมีลักษณะการใช้งานเหมือนในงานวิจัย [17] และ [18] กล่าวคือ

ขั้นที่ 3 ในส่วนของ Display Graph จะแสดงผลกราฟโดยขึ้นหน้าตาใหม่

- คลิกที่ช่อง Compare เมื่อต้องการให้แสดงผลกราฟแบบเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยในส่วนของ u_1 (กราฟสีน้ำเงิน) และ u_2 (กราฟสีแดง) โดยในงานวิจัยจะกำหนดให้ผลเฉลยในส่วนของ u_1 เป็นการสั่นแบบไม่มีความหน่วง และ/หรือ มีแรงภายนอก แล้วนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยในส่วนของ u_2 ซึ่งถูกกำหนดให้เป็นการสั่นแบบมีความหน่วง และ/หรือ มีแรงภายนอก หรือ
- หากต้องการแสดงผลกราฟเปรียบเทียบแบบ Animation คลิกที่ช่อง Animation และช่อง Compare พร้อมกัน จะมีหน้าต่างใหม่แสดงผลกราฟเปรียบเทียบแบบ Animation พร้อมทั้งตารางแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขทั้งสองแบบ หรือ
- หากต้องการแสดงผลกราฟที่สามารถแก้ไข ปรับเปลี่ยนรายละเอียดของกราฟได้ ให้คลิกช่อง New Figure และช่อง Compare พร้อมกัน จะมีหน้าต่างใหม่ขึ้นมา 2 หน้าต่าง โดยหน้าต่างแรกแสดงผลกราฟแบบเปรียบเทียบพร้อมทั้งตารางแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข ส่วนหน้าต่างที่สองแสดงผลกราฟที่สามารถแก้ไข ปรับเปลี่ยนรายละเอียดต่างๆ ของกราฟได้ หรือ
- คลิกช่อง New Figure, ช่อง Animation และช่อง Compare พร้อมกัน จะมีหน้าต่างใหม่ขึ้นมา 2 หน้าต่าง โดยหน้าต่างแรกแสดงผลกราฟแบบเปรียบเทียบแบบ Animation พร้อมทั้งตารางแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข ส่วนหน้าต่างที่สองแสดงผลกราฟที่สามารถแก้ไข ปรับเปลี่ยนรายละเอียดต่างๆ ของกราฟได้ หรือ
- ถ้าต้องการแสดงผลกราฟจากส่วน u_1 เท่านั้น ให้คลิกที่ช่อง Only One(u_1)



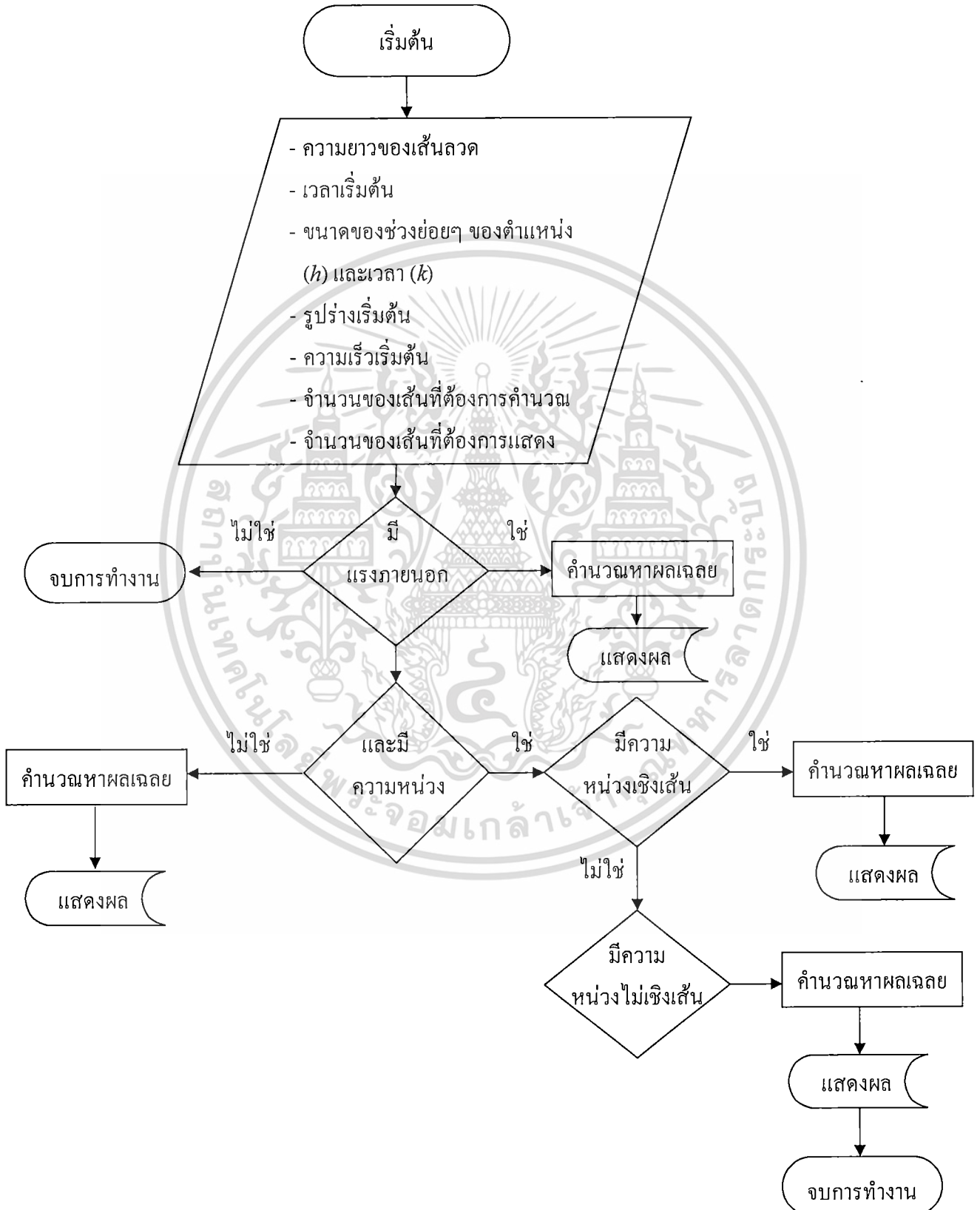
รูปที่ 3.3.2.2 หน้าต่าง Animation แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีการเปรียบเทียบระหว่างกรณีการสั่นแบบไม่มีแรงภายนอก กับแรงภายนอกมีกำลังสอง ($d = 2$)



รูปที่ 3.3.2.3 หน้าต่าง New Figure แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีการเปรียบเทียบระหว่างกรณีการสั่นแบบไม่มีแรงภายนอก กับแรงภายนอกมีกำลังสอง ($d = 2$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แผนภาพแสดงการทำงานของโปรแกรม MATLAB



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

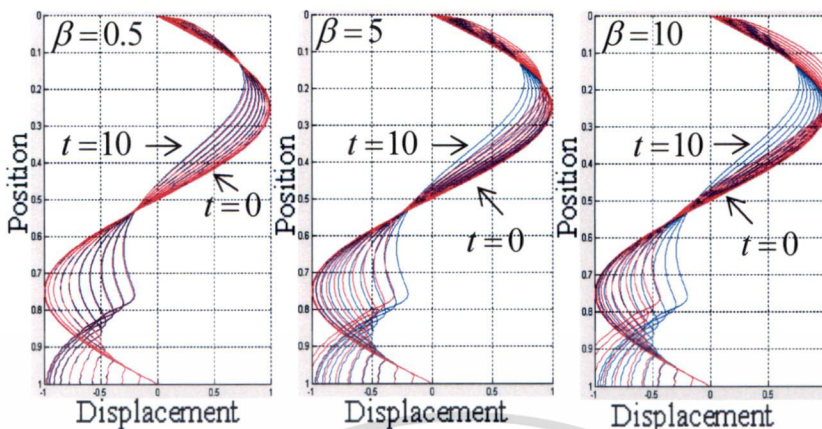
ผลวิจัยและอภิปรายผล

4.1 ลักษณะการสั่นกรณีมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น และไม่มีแรงหน่วง ($\alpha = 0$) เมื่อกำหนดให้สัมประสิทธิ์ β และกำลัง d มีค่าต่างๆ กัน

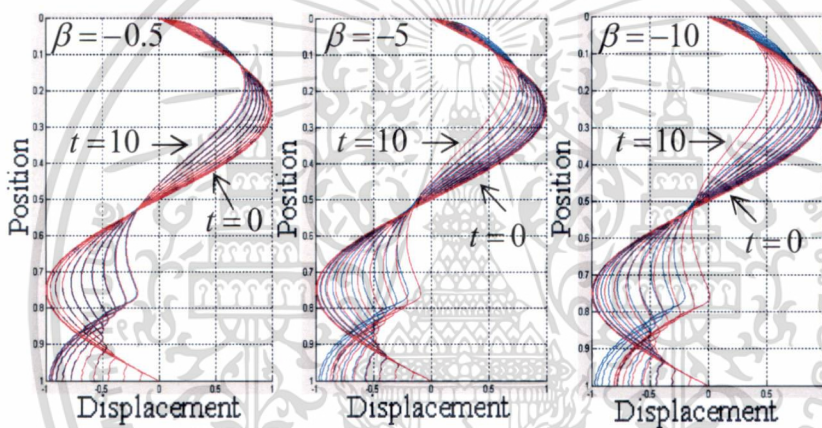
เราจะแสดงผลการเปรียบเทียบระหว่างการสั่นที่ไม่มีแรงภายนอกกับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังต่างๆ โดยกำหนดให้ไม่มีความเร็วเริ่มต้นของการสั่น ภายใต้ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอก (β) ที่แตกต่างกัน โดยแบ่งการพิจารณาเป็น 5 กรณีดังนี้

1. เปรียบเทียบการสั่นที่ปราศจากแรงภายนอกกับการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหนึ่ง ($d = 1$) เมื่อกำหนดค่า β ที่แตกต่างกัน ตามที่แสดงไว้ในรูปที่ 4.1.1- 4.1.4
2. เปรียบเทียบการสั่นโดยปราศจากแรงภายนอกกับการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสอง ($d = 2$) เมื่อกำหนดค่า β ที่แตกต่างกัน ตามที่แสดงไว้ในรูปที่ 4.1.5 และ 4.1.6
3. เปรียบเทียบการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหนึ่ง ($d = 1$) กับมีแรงภายนอกกำลังสาม ($d = 3$), แรงภายนอกกำลังหนึ่ง ($d = 1$) กับมีแรงภายนอกกำลังห้า ($d = 5$), แรงภายนอกกำลังหนึ่ง ($d = 1$) กับมีแรงภายนอกกำลังเจ็ด ($d = 7$) เมื่อกำหนดค่า β เดียวกัน ตามที่แสดงไว้ในรูปที่ 4.1.7-4.1.8
4. เปรียบเทียบการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหนึ่ง ($d = 1$) กับมีแรงภายนอกกำลังสาม ($d = 3$), แรงภายนอกกำลังสาม ($d = 3$) กับมีแรงภายนอกกำลังห้า ($d = 5$), แรงภายนอกกำลังสาม ($d = 3$) กับมีแรงภายนอกกำลังเจ็ด ($d = 7$) เมื่อกำหนดค่า β เดียวกัน ตามที่แสดงไว้ในรูปที่ 4.1.9-4.1.14
5. เปรียบเทียบการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสอง ($d = 2$) กับมีแรงภายนอกกำลังสี่ ($d = 4$), แรงภายนอกกำลังสี่ ($d = 4$) กับมีแรงภายนอกกำลังหก ($d = 6$), แรงภายนอกกำลังหก ($d = 6$) กับมีแรงภายนอกกำลังแปด ($d = 8$) เมื่อกำหนดค่า $\beta = -4, 4, 10$ และ -25 ตามที่แสดงไว้ในรูปที่ 4.1.15-4.1.18

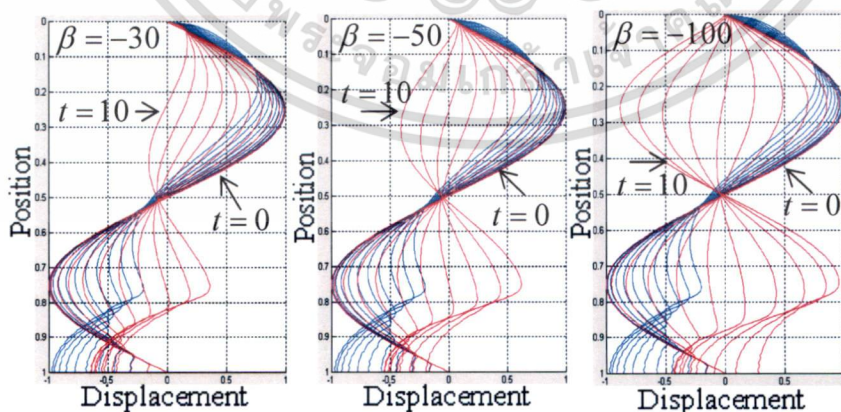
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.1.1 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่ปราศจากแรงภายนอก (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหนึ่ง (เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดค่า $\beta = 0.5, 5$ และ 10

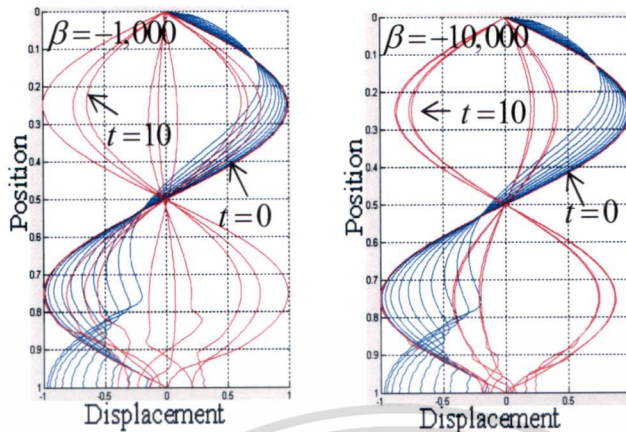


รูปที่ 4.1.2 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่ปราศจากแรงภายนอก (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหนึ่ง (เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดค่า $\beta = -0.5, -5$ และ -10



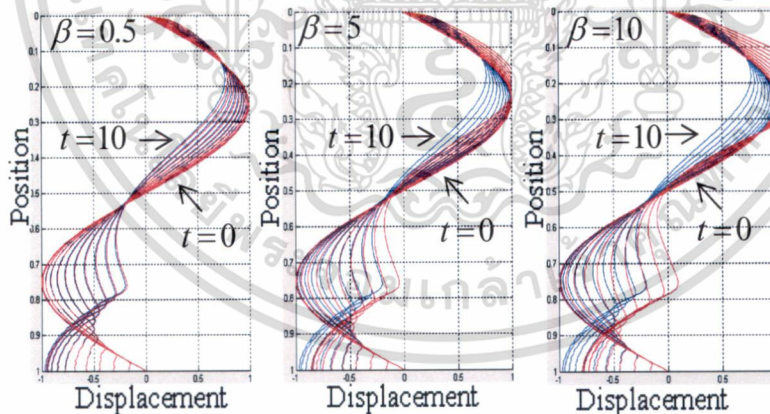
รูปที่ 4.1.3 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่ปราศจากแรงภายนอก (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหนึ่ง (เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดค่า $\beta = -30, -50$ และ -100

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



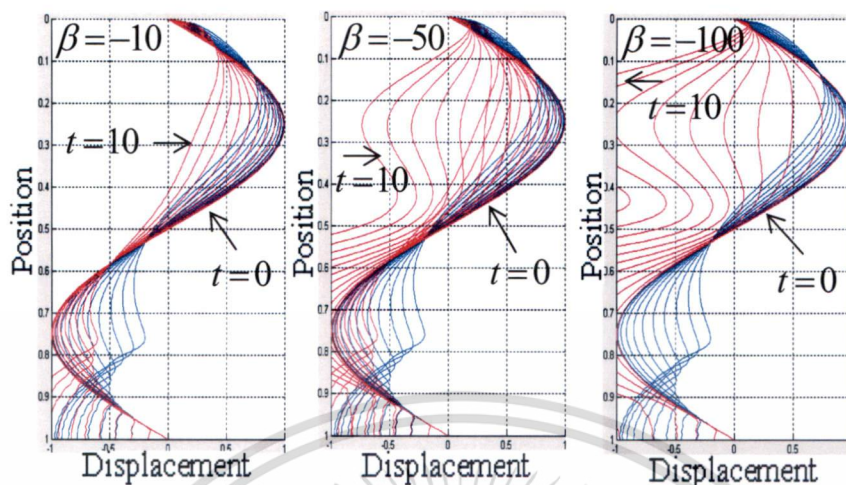
รูปที่ 4.1.4 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่ปราศจากแรงภายนอก (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหนึ่ง (เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดค่า $\beta = -1000$

เมื่อเปรียบเทียบลักษณะการสั่นแบบไม่มีแรงภายนอกและมีแรงภายนอกกำลัง 1 พบว่าแอมพลิจูดของการสั่นจะเพิ่มขึ้นจนเกิดการกำทอน เมื่อ $\beta > 0$ มีค่าเพิ่มขึ้น ดังรูปที่ 4.1.1 แอมพลิจูดของการสั่นจะลดลงเมื่อ $\beta < 0$ มีค่าลดลง ดังรูปที่ 4.1.2 และเมื่อ $\beta < 0$ มีค่าลดลงเรื่อยๆ แอมพลิจูดการสั่นลดลง แต่มีขอบเขตที่จำกัดจะอยู่ภายในช่วง -1 ถึง 1 ดังรูปที่ 4.1.3 และ 4.1.4



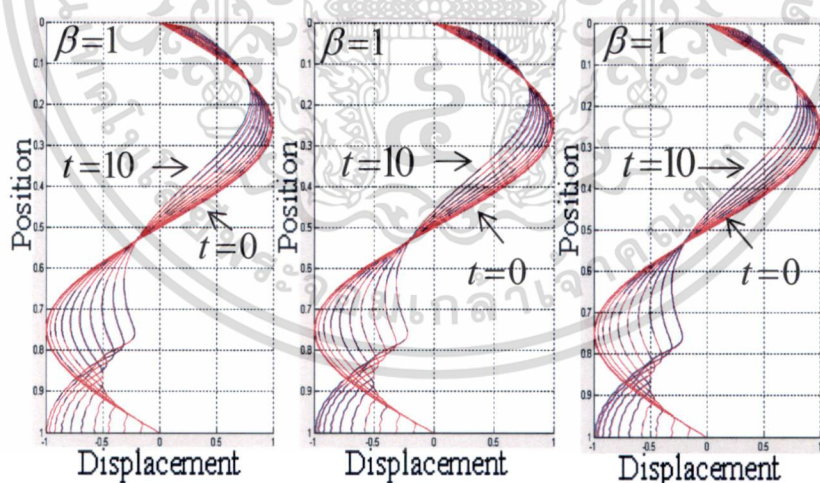
รูปที่ 4.1.5 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่ปราศจากแรงภายนอก (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสอง (เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดค่า $\beta = -0.5, -5$ และ -10

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



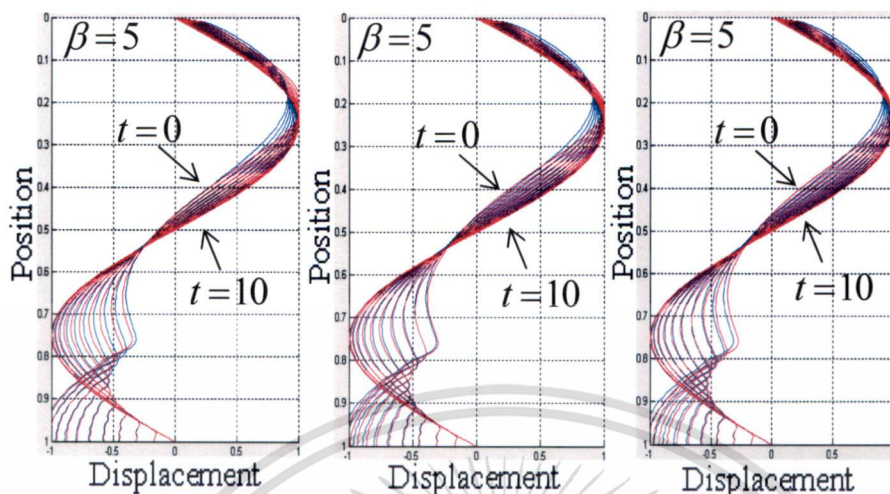
รูปที่ 4.1.6 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่ปราศจากแรงภายนอก (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหนึ่ง (เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดค่า $\beta = -10, -50$ และ -100

เมื่อเปรียบเทียบลักษณะการสั่นแบบไม่มีแรงภายนอกและมีแรงภายนอกกำลัง 2 พบว่าแอมพลิจูดของการสั่นจะเพิ่มขึ้นจนเกิดการกำทอน จนเกิดการกำทอน เมื่อ $\beta > 0$ มีค่าเพิ่มขึ้น ดังรูปที่ 4.1.5 และแอมพลิจูดของการสั่นจะลดลงจนเกิดการกำทอนเช่นเดียวกัน เมื่อ $\beta < 0$ มีค่าลดลงเรื่อยๆ ดังรูปที่ 4.1.6



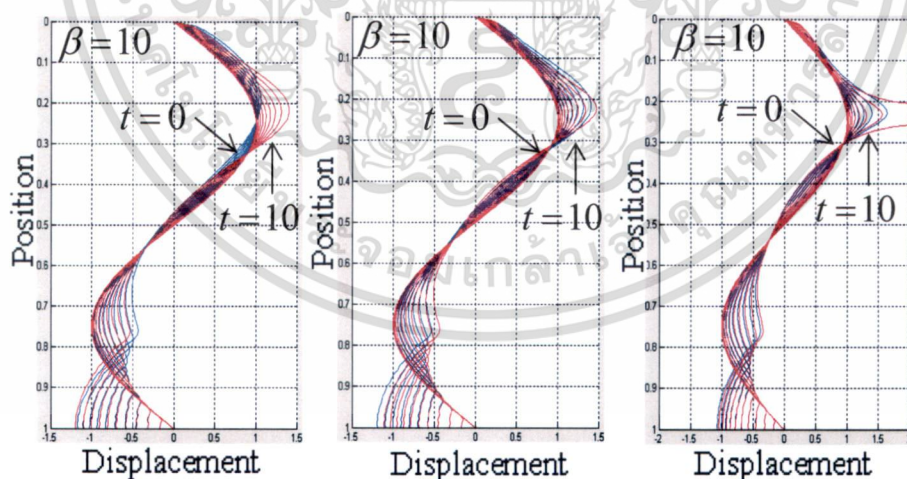
รูปที่ 4.1.7 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหนึ่ง (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสาม กำลังห้า กำลังเจ็ด (เส้นสีแดง) ตามลำดับ เมื่อกำหนดค่า $\beta = 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



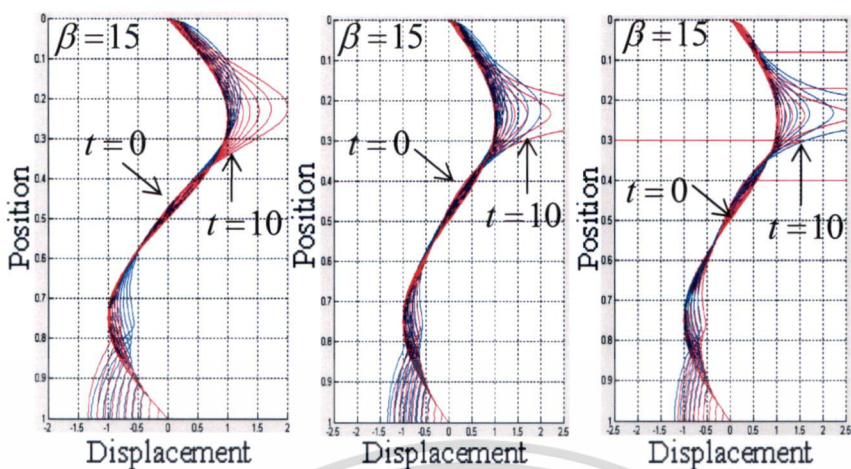
รูปที่ 4.1.8 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหนึ่ง (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสาม กำลังห้า กำลังเจ็ด (เส้นสีแดง) ตามลำดับ เมื่อกำหนดค่า $\beta = 5$

รูปที่ 4.1.7 และ 4.1.8 แสดงให้เห็นว่าเมื่อ $\beta > 0$ มีค่าน้อยๆ การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลัง 1, 3, 5 และ 7 จะมีลักษณะใกล้เคียงกัน และจะมีลักษณะการสั่นที่แตกต่างกัน เมื่อ $\beta > 0$ มีค่าเพิ่มขึ้น โดยจะเห็นว่าแอมพลิจูดของการสั่นจะมีค่าออกจกขึ้นเรื่อยๆ เมื่อเพิ่มกำลังของแรงภายนอก ดังรูปที่ 4.1.9 และ 4.1.10

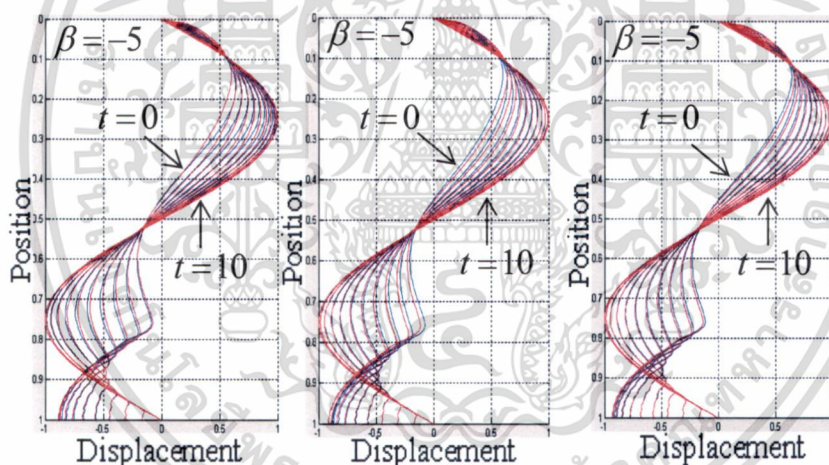


รูปที่ 4.1.9 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหนึ่ง (เส้นสีฟ้า) กับกำลังสาม (เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสาม (เส้นสีฟ้า) กับกำลังห้า (เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังเจ็ด (เส้นสีฟ้า) กับกำลังเก้า (เส้นสีแดง) ตามลำดับ เมื่อกำหนดค่า $\beta = 10$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

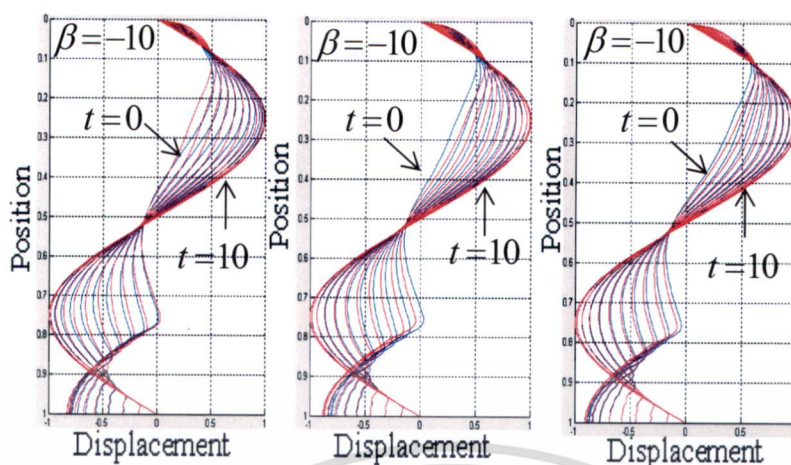


รูปที่ 4.1.10 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหนึ่ง(เส้นสีฟ้า)กับกำลังสาม(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสาม(เส้นสีฟ้า)กับกำลังห้า(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังห้า(เส้นสีฟ้า)กับกำลังเจ็ด(เส้นสีแดง) ตามลำดับ เมื่อกำหนดค่า $\beta = 15$

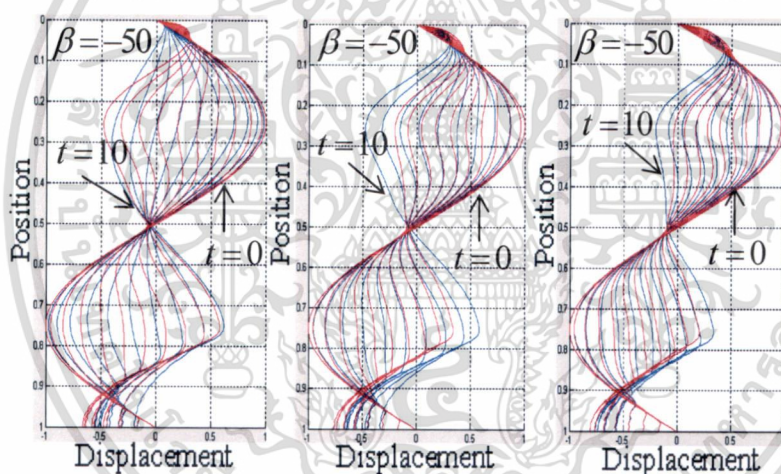


รูปที่ 4.1.11 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหนึ่ง(เส้นสีฟ้า)กับกำลังสาม(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสาม(เส้นสีฟ้า)กับกำลังห้า(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังห้า(เส้นสีฟ้า)กับกำลังเจ็ด(เส้นสีแดง) ตามลำดับ เมื่อกำหนดค่า $\beta = -5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

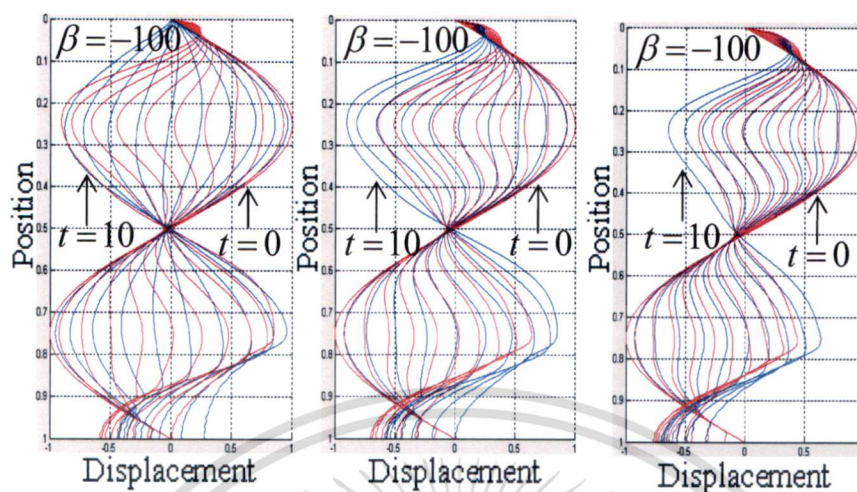


รูปที่ 4.1.12 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหนึ่ง(เส้นสีฟ้า)กับกำลังสาม(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสาม(เส้นสีฟ้า)กับกำลังห้า(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังห้า(เส้นสีฟ้า)กับกำลังเจ็ด(เส้นสีแดง) ตามลำดับ เมื่อกำหนดค่า $\beta = -10$



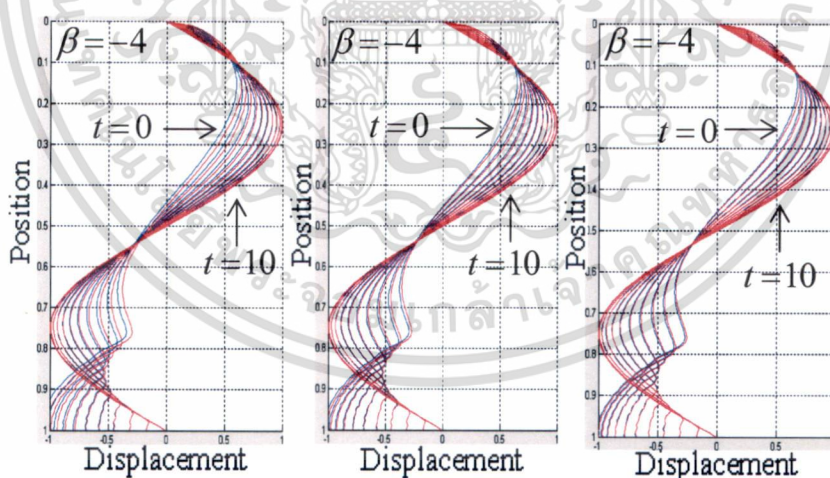
รูปที่ 4.1.13 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหนึ่ง(เส้นสีฟ้า)กับกำลังสาม(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสาม(เส้นสีฟ้า)กับกำลังห้า(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังห้า(เส้นสีฟ้า)กับกำลังเจ็ด(เส้นสีแดง) ตามลำดับ เมื่อกำหนดค่า $\beta = -50$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



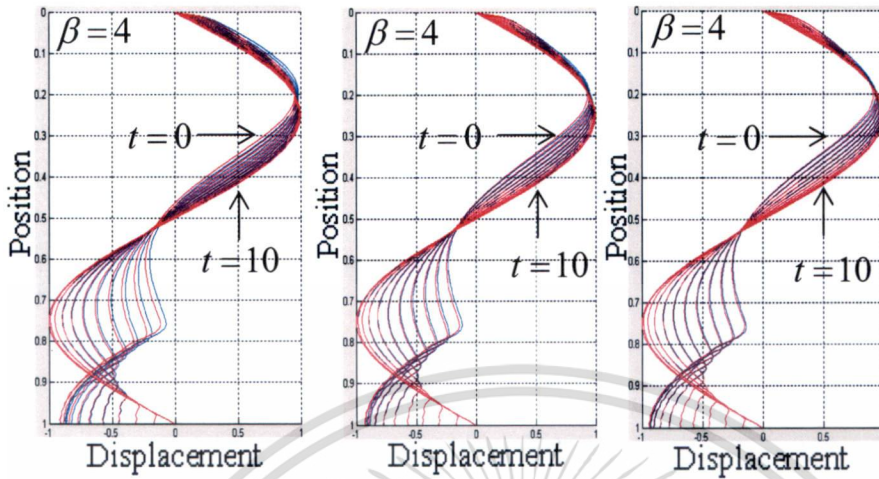
รูปที่ 4.1.14 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหนึ่ง(เส้นสีฟ้า)กับกำลังสาม(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสาม(เส้นสีฟ้า)กับกำลังห้า(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังห้า(เส้นสีฟ้า)กับกำลังเจ็ด(เส้นสีแดง) ตามลำดับ เมื่อกำหนดค่า $\beta = -100$

ส่วนรูปที่ 4.1.11-4.1.14 แสดงให้เห็นว่าเมื่อ $\beta < 0$ มีค่าน้อยลงเรื่อยๆ การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลัง 1, 3, 5, 7 ยังคงมีลักษณะใกล้เคียงกัน และไม่เกิดการกำทอนขึ้น

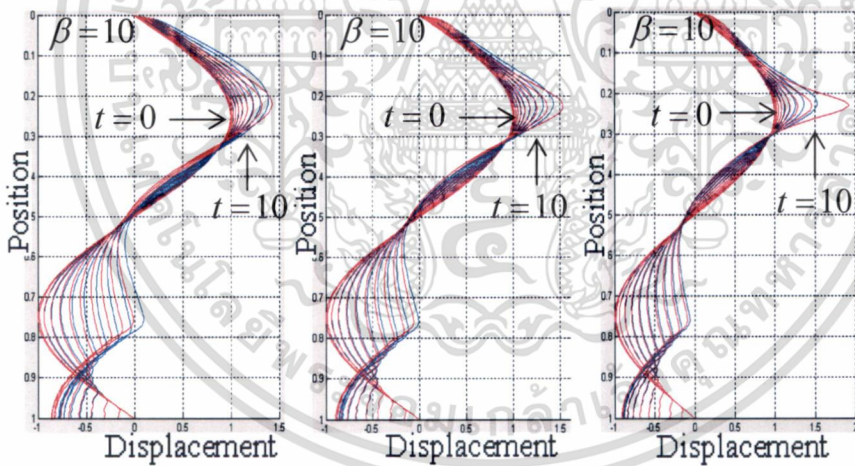


รูปที่ 4.1.15 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสอง(เส้นสีฟ้า)กับกำลังสี่(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสี่(เส้นสีฟ้า)กับกำลังหก(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหก(เส้นสีฟ้า)กับกำลังแปด(เส้นสีแดง) ตามลำดับ เมื่อกำหนดค่า $\beta = -4$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

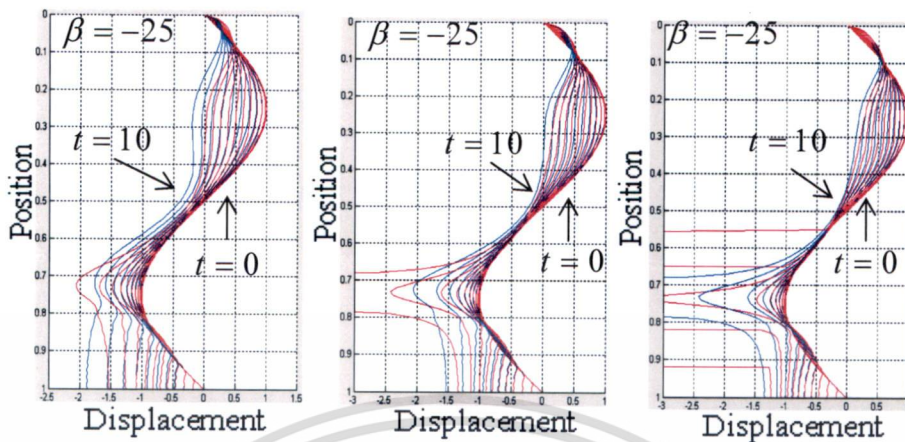


รูปที่ 4.1.16 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสอง(เส้นสีฟ้า)กับกำลังสี่(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสี่(เส้นสีฟ้า)กับกำลังหก(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหก(เส้นสีฟ้า)กับกำลังแปด(เส้นสีแดง) ตามลำดับ เมื่อกำหนดค่า $\beta = 4$



รูปที่ 4.1.17 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสอง(เส้นสีฟ้า)กับกำลังสี่(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสี่(เส้นสีฟ้า)กับกำลังหก(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหก(เส้นสีฟ้า)กับกำลังแปด(เส้นสีแดง) ตามลำดับ เมื่อกำหนดค่า $\beta = 10$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.1.18 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสอง(เส้นสีฟ้า)กับกำลังสี่(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังสี่(เส้นสีฟ้า)กับกำลังหก(เส้นสีแดง) การสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังหก(เส้นสีฟ้า)กับกำลังแปด(เส้นสีแดง) ตามลำดับ เมื่อกำหนดค่า $\beta = -25$

ในขณะที่การสั่นแบบมีแรงภายนอกยกกำลังเลขคู่ 2, 4, 6, 8 แอมพลิจูดการสั่นจะใกล้เคียงกันในช่วงที่ β มีค่าในช่วง -5 ถึง 5 ดังรูปที่ 4.1.15 และ 4.1.16 แต่แอมพลิจูดการสั่นจะแตกต่างกัน จนกระทั่งคู่ออกเมื่อ β อยู่ในช่วงดังกล่าว ดังรูปที่ 4.1.17 และ 4.1.18

เมื่อพิจารณากำลังและสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอกว่ามีผลต่อการเกิดแอมพลิจูดการสั่น ความคล้ายกันของแอมพลิจูดการสั่น การกำหนดของเส้นลวด เราพบว่าสามารถแบ่งการพิจารณาได้เป็น 2 กรณี คือ กรณีที่เส้นลวดมีแรงภายนอกกำลังคี่และกำลังคู่ ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 4.1.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกำลังและสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอกกับการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของแอมพลิจูดการสั่น

The Power of the External Force	The Coefficient of the External Force	Amplitude Similar	Amplitude Similar
Odd Power (1, 3, 5, 7)	$\beta > 0$	✓	
	$\beta < 0$		✓
Even Power (2, 4, 6, 8)	$\beta > 0$	✓	
	$\beta < 0$		✓

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.1.2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกำลังและสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอกกับความคล้ายกันของแอมพลิจูดการสั่น

The Power of the External Force	The Coefficient of the External Force	Amplitude Similar	Amplitude Similar
Odd Power (1, 3, 5, 7)	$0 < \beta < 5$		✓
	$\beta > 5$	✓	
	$\beta < 0$		✓
Even Power (2, 4, 6, 8)	$-5 < \beta < 5$		✓
	$\beta < -5, \beta > 5$	✓	

ตารางต่อไปนี้จะแสดงลักษณะการเกิดการกำทอน ซึ่งเราจะพบว่ากำทอนจะไม่เกิดขึ้นเมื่อกำลังของแรงภายนอกเป็นกำลังคี่ โดย $\beta < 0$ หรือมีค่าน้อยๆ ($0 < \beta < 5$) รวมทั้งแรงภายนอกกำลังคู่ โดย $-5 < \beta < 5$

ตารางที่ 4.1.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกำลังและสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอกกับการเกิดการกำทอนของเส้นลวด

The Power of the External Force	The Coefficient of the External Force	Resonance	No Resonance
Odd Power (1, 3, 5, 7)	$0 < \beta < 5$		✓
	$\beta > 5$	✓	
	$\beta < 0$		✓
Even Power (2, 4, 6, 8)	$-5 < \beta < 5$		✓
	$\beta < -5, \beta > 5$	✓	

จากผลที่ได้จากตารางที่ 4.1.3 เราสามารถศึกษาต่อไปว่า ถ้าเพิ่มความหน่วงเชิงเส้นหรือไม่เชิงเส้นกำลังสองให้กับการสั่น จะช่วยป้องกันการเกิดการกำทอนหรือไม่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2 ลักษณะการสั่นกรณีมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น และมีความหน่วงแบบเชิงเส้น ($c=1$) และสัมประสิทธิ์ α มีค่าแตกต่างกัน

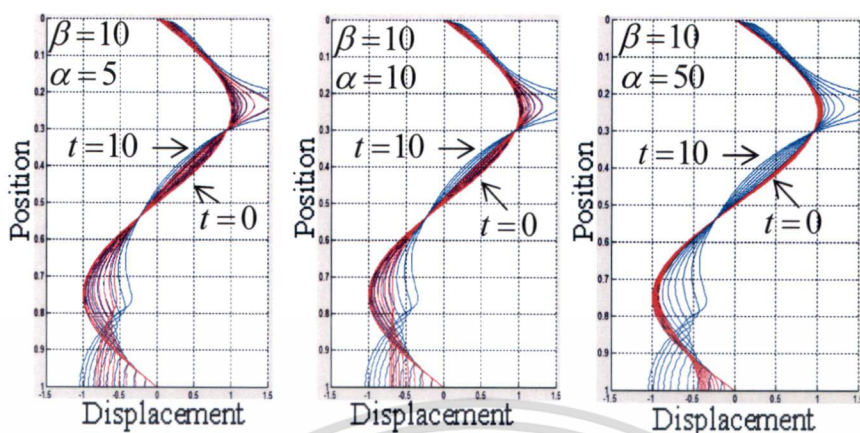
จากหัวข้อที่ 4.1 จะเห็นว่าการกำทอนจะเกิดขึ้นทั้งหมด 2 กรณี คือ
กรณีที่ 1 แรงภายนอกมีกำลังเป็นเลขคี่ และมีสัมประสิทธิ์ $\beta > 5$

กรณีที่ 2 แรงภายนอกมีกำลังเป็นเลขคู่ และมีสัมประสิทธิ์อยู่ระหว่าง $\beta < -5$ และ $\beta > 5$

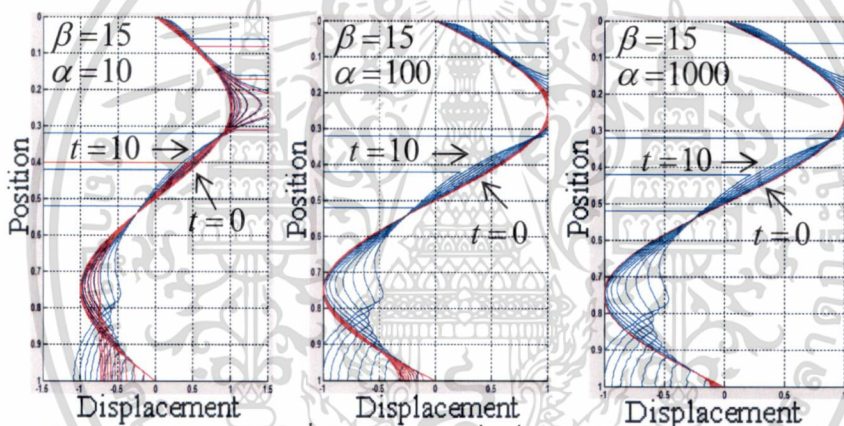
เราจะนำผลการสั่นที่ได้จากกรณีทั้ง 2 มาวิเคราะห์ต่อว่าเมื่อเพิ่มความหน่วงให้กับการสั่นแล้วจะช่วยให้ป้องกันการเกิดการกำทอนหรือไม่ อย่างไร ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. เปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังคี่ ($d = 9$) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังคี่ ($d = 9$) ร่วมกับมีความหน่วงเชิงเส้น เมื่อ β และ α ต่างๆ กัน ตามที่แสดงไว้ในรูปที่ 4.2.1- 4.2.3
2. เปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังคู่ ($d=2, 4$) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังคู่ ($d=2, 4$) ร่วมกับมีความหน่วงเชิงเส้น เมื่อ β และ α ต่างๆ กัน ตามที่แสดงไว้ในรูปที่ 4.2.4- 4.2.5
3. เปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังคู่และคี่ ($d = 2, 9$) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังคู่และคี่ ($d = 2, 9$) ร่วมกับมีความหน่วงเชิงเส้น เมื่อ β และ α ต่างๆ กัน เมื่อกำหนดให้เส้นลวดสั่นแบบมีความเร็วเริ่มต้น ตามที่แสดงไว้ในรูปที่ 4.2.6- 4.2.8

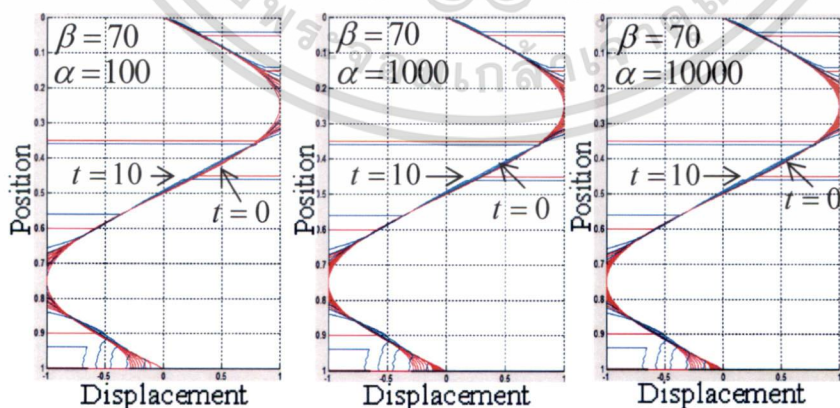
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.2.1 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังเก่า (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังเก่าร่วมกับความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\beta=10$ และ α ต่างๆ กัน



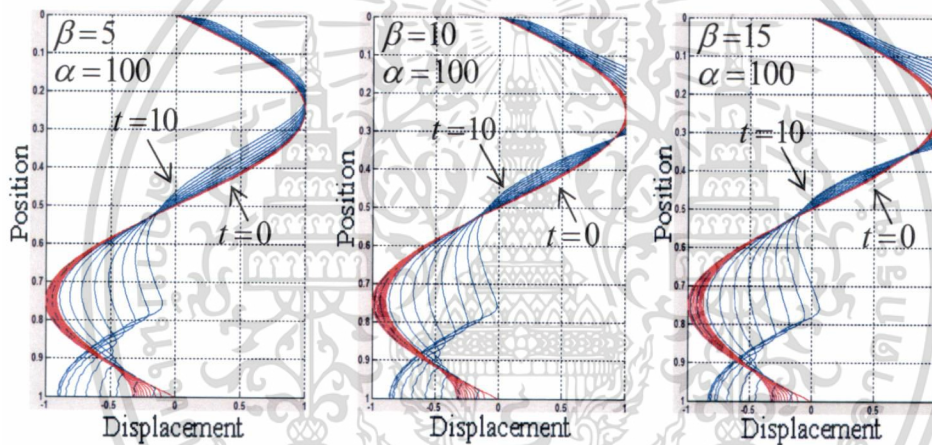
รูปที่ 4.2.2 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังเก่า (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังเก่าร่วมกับความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\beta=15$ และ α ต่างๆ กัน



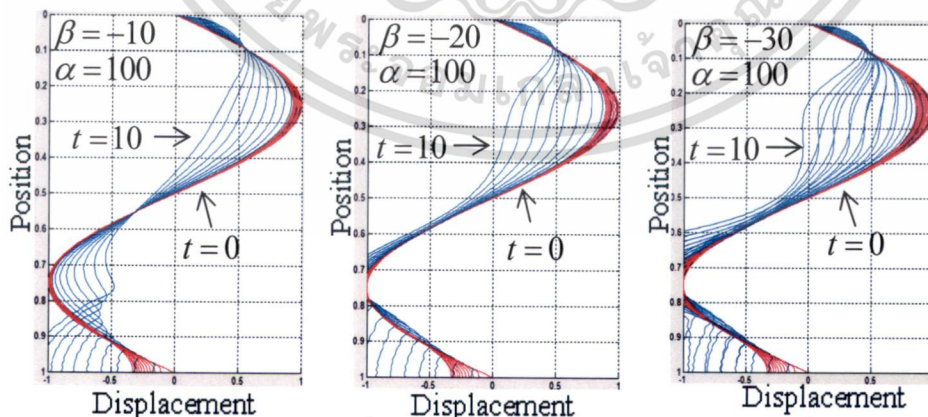
รูปที่ 4.2.3 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังเก่า (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังเก่าร่วมกับความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\beta=70$ และ α ต่างๆ กัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 4.2.1 – 4.2.3 เป็นกราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังที่ $(d = 9)$ (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังที่ $(d = 9)$ ร่วมกับความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้ d และ β เดียวกัน มีค่า α ต่างๆ กัน จากหัวข้อที่ 4.1 เราได้ข้อสรุปว่าเมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอก $\beta > 0$ มีค่าเพิ่มขึ้น แอมพลิจูดของการสั่นจะเพิ่มขึ้นจนเกิดการกำทอน จากรูปที่ 4.2.1 จะเห็นว่า เมื่อการสั่นมีความหน่วงร่วมด้วยและกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง $\alpha > 0$ มีค่าเพิ่มขึ้น จะช่วยไม่ให้เกิดการกำทอนของการสั่นได้ เนื่องจากยิ่ง α มีค่ามากๆ แอมพลิจูดของการสั่นจะใกล้เคียงกับรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวด และเมื่อเพิ่มค่า β ให้มากขึ้น จะต้องเพิ่มค่าของ α ด้วยเช่นเดียวกัน เพื่อช่วยไม่ให้เกิดการกำทอน ดังรูปที่ 4.2.2 อย่างไรก็ตาม เราไม่สามารถป้องกันการเกิดการกำทอนได้ เมื่อ β มีค่ามากจนทำให้แอมพลิจูดการสั่นลู่ออก ถึงแม้จะเพิ่มค่าของ α มากขึ้นเท่าใดก็ตาม ดังรูปที่ 4.2.3



รูปที่ 4.2.4 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสอง (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสองร่วมกับความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\alpha=100$ และ $\beta > 0$ ต่างๆ กัน

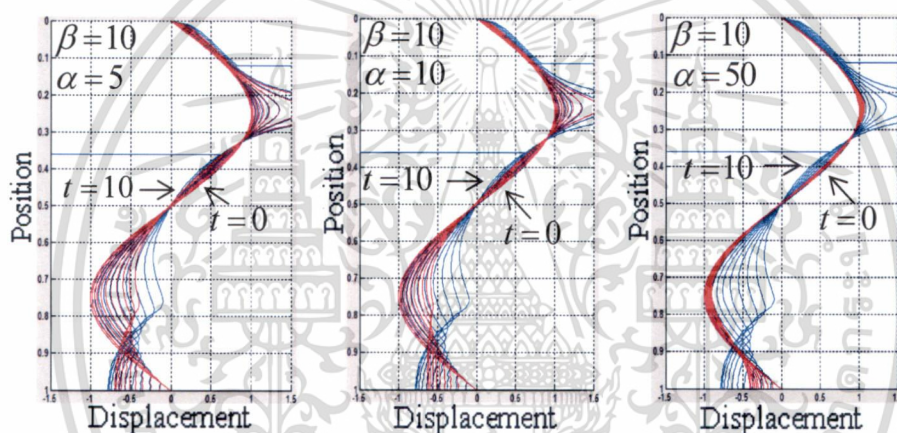


รูปที่ 4.2.5 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสี่ (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสี่ร่วมกับความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\alpha=100$ และ $\beta < 0$ ต่างๆ กัน

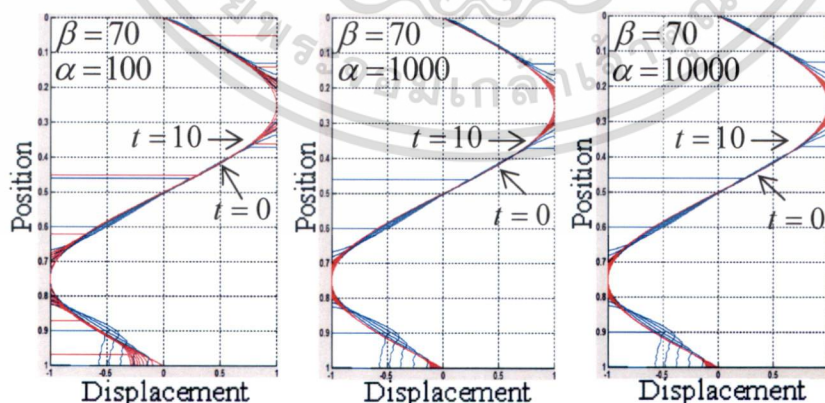
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 4.2.4 – 4.2.5 เป็นกราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังคู่ ($d=2, 4$) (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังคู่ ($d=2, 4$) ร่วมกับความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้ α เดียวกัน มีค่า β ต่างๆ กัน จะเห็นว่าการสั่นมีลักษณะคล้ายกับการสั่นแบบมีแรงภายนอกกำลังคู่ที่มีความหน่วง กล่าวคือ จากรูปที่ 4.2.4 จะเห็นว่า เมื่อการสั่นมีความหน่วงร่วมด้วย จะทำให้ไม่เกิดการกำทอนของการสั่นได้ ภายใต้เงื่อนไขว่าค่าสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอก $\beta > 0$ ต้องมีค่าจำกัด ในทำนองเดียวกันจากรูปที่ 4.2.5 จะเห็นว่า การสั่นมีความหน่วงร่วมด้วย จะช่วยไม่ให้เกิดการกำทอนด้วยเช่นกัน สำหรับ $\beta < 0$ บางค่า

ลักษณะการสั่นที่ผ่านมา เราพิจารณาการสั่นโดยปราศจากความเร็วเริ่มต้น ต่อไปเราจะพิจารณาการสั่นแบบมีความเร็วเริ่มต้นซึ่งถูกกำหนดโดยฟังก์ชันต่างๆ ว่ามีผลต่อการเกิดการกำทอนอย่างไรบ้าง ดังต่อไปนี้

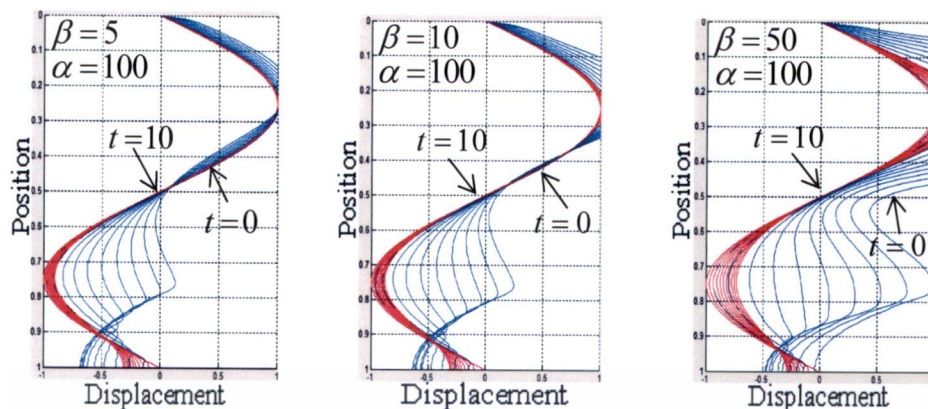


รูปที่ 4.2.6 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังคี่ (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังคี่ร่วมกับความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\beta=10$ และ α ต่างๆ กัน และความเร็วเริ่มต้นคือ x



รูปที่ 4.2.7 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังคี่ (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังคี่ร่วมกับความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\beta=70$ และ α ต่างๆ กัน และความเร็วเริ่มต้นคือ x

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

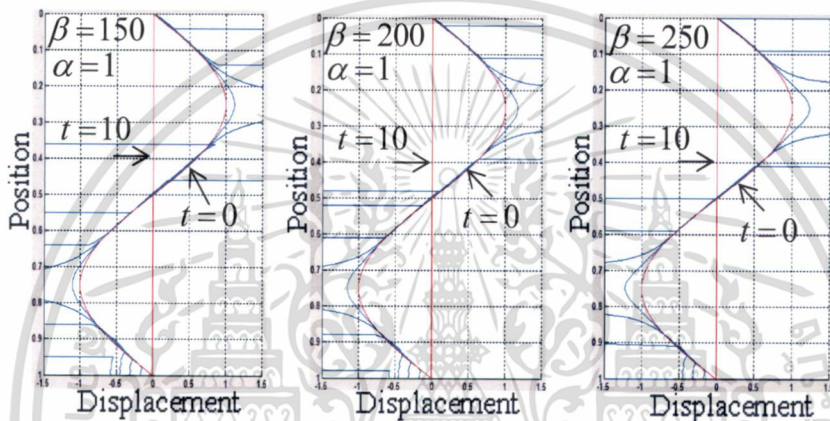


รูปที่ 4.2.8 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสอง (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสองร่วมกับความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\alpha=100$ และ $\beta > 0$ ต่างๆ กัน และความเร็วเริ่มต้นคือ x^2

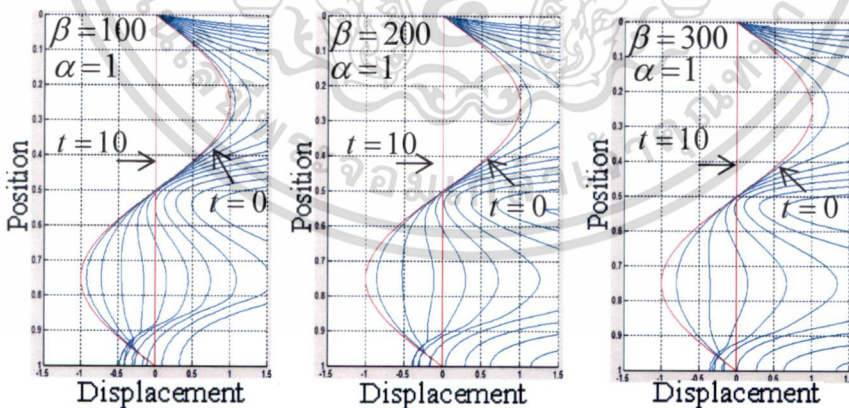
เมื่อเปรียบเทียบรูปที่ 4.2.6 กับ 4.2.1 จะเห็นว่า เมื่อเพิ่มความเร็วเริ่มต้นให้กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังเก้า จะทำให้เกิดการกำทอนเร็วขึ้นกว่าเดิม แต่ เมื่อกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงให้เหมาะสม ความหน่วงจะช่วยไม่ให้เกิดการกำทอนได้ อย่างไรก็ตามเมื่อเพิ่มสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอกให้มากขึ้น รวมทั้งการสั่นมีความเร็วเริ่มต้นด้วย ทำให้รูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดเกิดการกำทอน ความหน่วงเชิงเส้นก็ไม่สามารถช่วยลดการกำทอนได้ ดังรูปที่ 4.2.7 และได้ผลทำนองเดียวกันนี้กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสอง ดังรูปที่ 4.2.8

4.3 ลักษณะการสั่นกรณีมีแรงภายนอกไม่เชิงเส้น และมีความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสอง ($c=2$) และสัมประสิทธิ์ α มีค่าแตกต่างกัน

จากหัวข้อที่ 4.2 จะเห็นว่ามีความหน่วงเชิงเส้นช่วยไม่ให้เกิดการกำทอน และบางกรณีก็ไม่สามารถช่วยป้องกันการเกิดการกำทอนได้ ในหัวข้อนี้ จะทำการศึกษาเพิ่มเติมว่ากรณีที่ความหน่วงเชิงเส้นไม่สามารถช่วยป้องกันการเกิดการกำทอนนั้น ความหน่วงไม่เชิงเส้นจะช่วยป้องกันการเกิดการกำทอนได้หรือไม่ อย่างไร ดังนี้

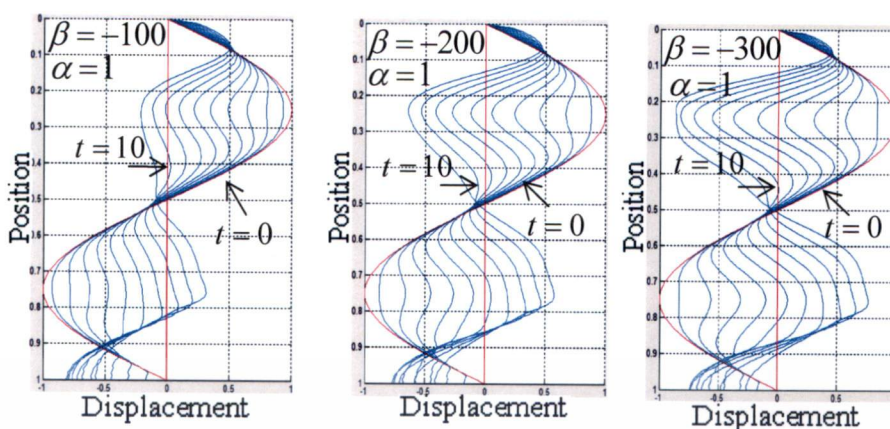


รูปที่ 4.3.1 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังเก้า (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังเก้าร่วมกับความหน่วงไม่เชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\alpha=1$



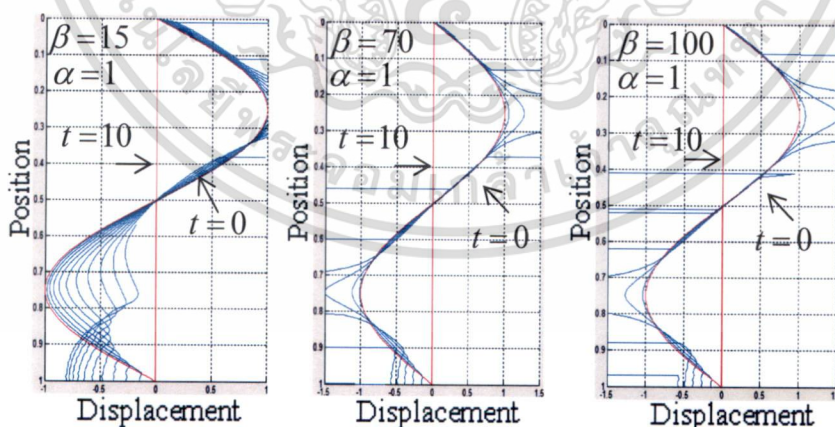
รูปที่ 4.3.2 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสอง (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสองร่วมกับความหน่วงไม่เชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\alpha=1$ และ $\beta > 5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



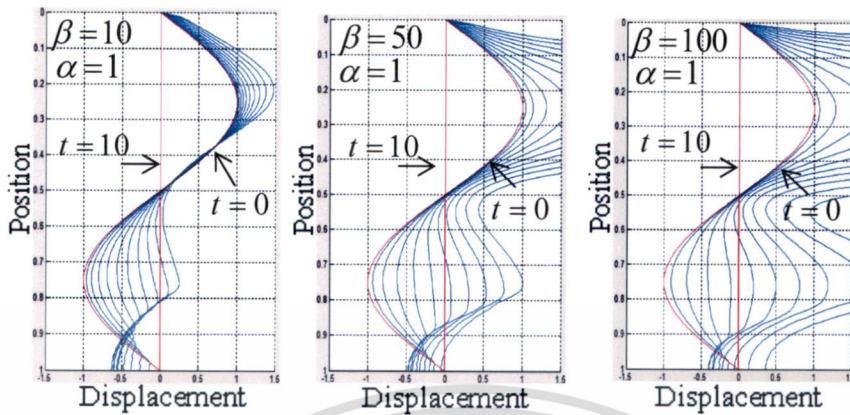
รูปที่ 4.3.3 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสอง (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสองร่วมกับความหน่วงไม่เชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\alpha=1$ และ $\beta < -5$

จากรูปที่ 4.3.1 - 4.3.3 เราพบว่าเป็นกราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังคู่และคี่ ($d = 2, 9$) (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังคู่และคี่ ($d = 2, 9$) ร่วมกับ ความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดง) จะเห็นว่าการสั่นที่มีความหน่วงไม่เชิงเส้นทำให้ไม่เกิดการก้ำก๋อขึ้น ไม่ว่าจะกำหนดให้กำลังของแรงภายนอก d เป็นเลขคู่หรือเลขคี่ก็ตาม รวมถึงเมื่อกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอก $\beta > 5$ มีค่าเพิ่มขึ้น หรือ $\beta < -5$ มีค่าลดลง เนื่องจากความหน่วงไม่เชิงเส้นจะทำให้การสั่นลดลงเข้าหาศูนย์อย่างรวดเร็ว โดยในงานวิจัยนี้ เรากำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของแรงหน่วง $\alpha = 1$ เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้นด้วย ยังคงได้ผลในทำนองเดียวกัน ดังรูปที่ 4.3.4 - 4.3.6

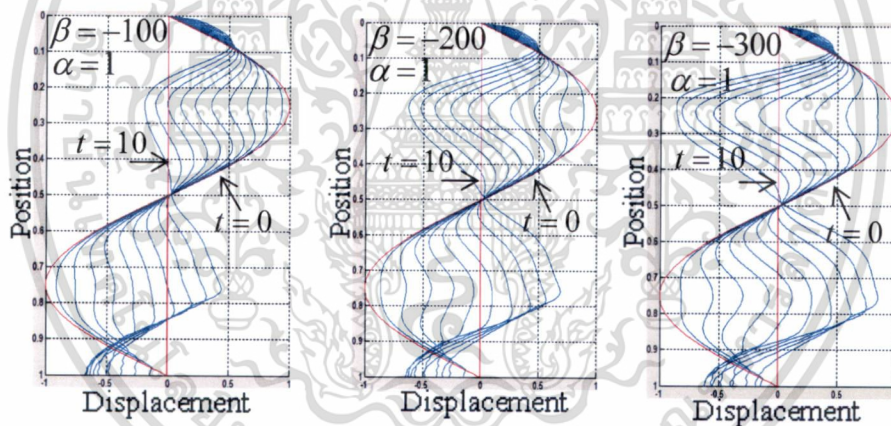


รูปที่ 4.3.4 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังเก่า (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังเก่าร่วมกับความหน่วงไม่เชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\alpha=1$ และความเร็วเริ่มต้นคือ x

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3.5 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสอง (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสองร่วมกับความหน่วงไม่เชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\alpha=1$ และ $\beta > 5$ และความเร็วเริ่มต้นคือ x



รูปที่ 4.3.6 กราฟเปรียบเทียบตำแหน่งการสั่นระหว่างการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสอง (เส้นสีฟ้า) กับการสั่นที่มีแรงภายนอกกำลังสองร่วมกับความหน่วงไม่เชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อ $\alpha=1$ และ $\beta < -5$ และความเร็วเริ่มต้นคือ x

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้เป็นการศึกษาต่อเนื่องจากงานวิจัย [17] และ [18] ซึ่งได้แสดงการจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสองและกำลังสาม ตามลำดับ งานวิจัยนี้ได้เพิ่มแรงภายนอกไม่เชิงเส้นเข้าไปในสมการการสั่น และพัฒนาระเบียบวิธีผลต่างอันดับเพื่อใช้แสดงการจำลองเชิงตัวเลขเพื่อแสดงลักษณะการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง ซึ่งการพิจารณาถูกแบ่งเป็น 3 กรณีใหญ่ๆ คือ

กรณีที่ 1 การสั่นแบบมีแรงภายนอกเท่านั้น เราพบว่าแอมพลิจูดการสั่นแบบมีแรงภายนอกทั้งแบบยกกำลังคู่หรือกำลังคี่ (d เลขคู่หรือเลขคี่) แปรผันตรงกับสัมประสิทธิ์ β ของแรงภายนอก กล่าวคือแอมพลิจูดการสั่นจะเพิ่มขึ้นเมื่อ β มีค่าเพิ่มขึ้น แอมพลิจูดการสั่นจะลดลงเมื่อ β มีค่าน้อยลง เมื่อพิจารณาความคล้ายกันของการสั่น จะพบว่า เมื่อ $\beta < 0$ และมีค่าน้อยๆ กล่าวคือ $0 < \beta < 5$ เส้นกราฟการสั่นที่มีแรงภายนอกยกกำลังคี่จะมีลักษณะใกล้เคียงกัน และการสั่นจะแตกต่างกัน เมื่อ $\beta > 5$ ส่วนแอมพลิจูดการสั่นที่มีแรงภายนอกยกกำลังคู่จะมีลักษณะใกล้เคียงกัน เมื่อ β มีค่าน้อยๆ และอยู่ในช่วง $-5 < \beta < 5$ และแตกต่างกันเมื่อ β อยู่ภายนอกช่วงดังกล่าว ซึ่งลักษณะการสั่นเหล่านี้สอดคล้องกับทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่ศึกษาไว้ในงานวิจัยที่ [6] และ [7] กล่าวคือ กรณีของแรงภายนอกแบบหน่วง กล่าวคือสัมประสิทธิ์หน้าแรงภายนอกกำลัง 3 เป็นลบ การสั่นจะไม่ลู่ออกไม่ว่า $\beta < 0$ จะเป็นเท่าใดก็ตาม และกรณีของแรงภายนอกแบบลู่ออก กล่าวคือประสิทธิ์หน้าแรงภายนอกกำลัง 3 เป็นบวก แอมพลิจูดของการสั่นจะลู่ออกเมื่อ β มีค่ามากเพียงพอ

กรณีที่ 2 การสั่นที่มีทั้งแรงภายนอกและความหน่วงเชิงเส้น เราพบว่าความหน่วงแบบเชิงเส้นสามารถช่วยไม่เกิดการก้ำก๋อได้ เมื่อกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอกและสัมประสิทธิ์ของความหน่วงที่เหมาะสม อย่างไรก็ตาม ถ้ารูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดเกิดการก้ำก๋อ ไม่ว่าจะมาจากสาเหตุของการเพิ่มสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอกหรือจากการกำหนดความเร็วเริ่มต้นก็ตาม ความหน่วงแบบเชิงเส้นจะไม่สามารถป้องกันการเกิดการก้ำก๋อได้ เนื่องจากคุณสมบัติของความหน่วงเชิงเส้น จะทำให้แอมพลิจูดการสั่นลู่ออกหรือรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดเมื่อเวลาผ่านไป

กรณีที่ 3 การสั้นที่มีทั้งแรงภายนอกกับความหน่วงไม่เชิงเส้น เราพบว่าความหน่วงไม่เชิงเส้นช่วยลดการเกิดการกำทอนได้เสมอ ไม่ว่าจะกำหนดให้กำลังและสัมประสิทธิ์ของแรงภายนอกเป็นเท่าใดก็ตาม รวมทั้งการสั้นแบบมีความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวดอีกด้วย

5.2 ข้อเสนอแนะ

สำหรับการศึกษาปัญหาการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งนั้น นอกจากรูปแบบทั่วไปของแรงภายนอกที่กำหนดไว้ในงานวิจัยนี้แล้ว เราสามารถพิจารณารูปแบบอื่นๆ ของแรงภายนอกได้อีกด้วย นอกจากนี้ เรายังสามารถใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ เช่น วิธีพลังงาน วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ และวิธีเชิงตัวเลขอื่นๆ ช่วยในการหาผลเฉลยของสมการดังกล่าวได้อีกด้วย



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

- [1] กนต์ธร ชานิประศาสน์. 2538. การสั่นสะเทือนทางกล, พิมพ์ครั้งที่ 3 กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- [2] A. Tveito and R. Winther, *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany. 2005.
- [3] N. S. Koshlyakov, E. V. Gliner and M. M. Smirnov, *Differential Equations of Mathematical Physics*, Moscow, 1962 (in Russian). English Translation: North-Holland Publ. Co, 1964.
- [4] นัยเดือน สอระสัน, สิทธิชัย มาละเงิน และจุฑามาศ แซ่เป้. 2552. “การหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น และค่าขอบเขตของสมการเส้นลวดในแนวดิ่งโดยระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม.” ปัญหาพิเศษวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- [5] คณาวุฒิ ทรัพย์คล้าย. 2555. “การจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง.” ปัญหาพิเศษวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- [6] J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, *Global Solutions of IBVP to Nonlinear Equation of Suspended String*, Tokyo Journal of Mathematics **30**, No.2 (2007), 543-556.
- [7] J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, *Global Classical Solutions of IBVP to Nonlinear Equation of Suspended String*, Tokyo Journal of Mathematics **31**, No.2 (2008), 351-373.
- [8] J. Kasemsuwan, *Exponential Decay for Nonlinear Damped Equation of Suspended String*, Proceedings of 2009 International Symposium on Computing, Communication, and Control, 2009, 308-312.
- [9] M. Yamaguchi, *Almost Periodic Oscillations of Suspended String Under Quasiperiodic Linear Force*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **303**, No.2 (2005), 643-660.
- [10] M. Yamaguchi, T. Nagai and K. Matsukane, *Forced Oscillations of Nonlinear Damped Equation of Suspended String*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **342**, No.1 (2008), 89-107
- [11] M. Yamaguchi, *Global Smooth Solutions of IBVP to Nonlinear Equation of Suspended String*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **342**, No.2 (2008), 798-815.
- [12] M. Yamaguchi, *Infinitely Many Periodic Solutions of Nonlinear Equations of Suspended Strings*, FUNKCIALAJ EKVACIOJ-SERIO INTERNACIA **51**, No.2 (2008), 245-267.
- [13] M. Yamaguchi, *Existence and Regularity of Periodic Solutions of Nonlinear Equation of a Suspended String*, FUNKCIALAJ EKVACIOJ-SERIO INTERNACIA **52**, No.2 (2009), 281-300.
- [14] ใจปอง เกษมสุวรรณ. 2553. “การศึกษาสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง” วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยหอการค้าไทย **30**, 3: 101-111.
- [15] J. Kasemsuwan, P. Chitsakul and P. Chaisanit, *Simulation of Suspended String Equation*, The 3rd Thai-Japan International Academic Conference, 2010, 60-61.
- [16] คณาวุฒิ ทรัพย์คล้าย, ใจปอง เกษมสุวรรณ. 2554. “แบบจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง” การประชุมวิชาการ ครั้งที่ 8 มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน, 1486-1491.
- [17] J. Kasemsuwan, *Numerical Solution of the Damped Vibration of Suspended String*, University of the Thai Chamber of Commerce Journal, 2012, peer-review.
- [18] J. Kasemsuwan, *The Finite Difference Scheme for the Suspended String Equation with the Nonlinear Damping Term*, International Conference on Applied Physics and Mathematics, 2012, 566-568.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาคผนวก ก.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

THE FINITE DIFFERENCE SCHEME FOR THE SUSPENDED STRING EQUATION WITH THE NONLINEAR EXTERNAL FORCES

Jaipong Kasemsuwan

Abstract— This paper presents the finite difference scheme and the numerical simulation of suspended string. The vibration solutions when the various external forces are taken into account are obtained and compared with the solutions without external force. In addition, we also investigate how the external forces and their powers and coefficients affect the amplitude of vibration.

Keywords— Nonlinear external forces, Numerical simulation, Suspended string equation.

I. INTRODUCTION

The vibration equation of the suspended string was first studied by [1]. Author in [2] considered this equation taking into account the external force having the blow up term and showed the existence of the global weak solutions. Authors in [3] considered this equation with the nonlinear factor known as absorbing term and showed the existence of the global classical solution of nonlinear suspended string equation. To fully understand the characteristics of the suspended string vibration according to mathematical theory, the numerical simulations of the suspended string vibration have been studied. Authors in [4] and [5] showed the numerical simulations of the suspended string vibration without the external force using the finite difference and Crank-Nicolson methods, respectively. The characteristics of the vibration under the same various initial shapes and initial velocities were considered. To study the effect of damping force to the vibration characteristic, authors in [6] and [7] showed the numerical simulation with the linear and nonlinear damping terms respectively.

In this work, the numerical simulation of a heavy and flexible vibrating suspended string with a finite length a with the nonlinear external force is studied. The suspended string equation with the initial and boundary conditions can be represented by

$$\begin{aligned} u_{tt} - ((m\Delta x)u_{xx} + u_x) &= \beta|u|^{d-1}u, & \beta \in R, d \geq 1, \\ u(0,t) &= 0, & t \in [0, T], \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x \in [0, a]. \end{aligned} \quad (1)$$

where $u(x,t)$ is the horizontal displacement of the string at (x,t) , β is the real number denoting the coefficient of the external force term and the power d is the positive integer.

Jaipong Kasemsuwan is with the Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, 10520, Thailand. (phone: +66(0) 23298000 ext. 6185; fax: +66(0) 23298400 ext. 284; e-mail: kwjaipon@kmitl.ac.th).

It is known that when β is positive and $d=3$, this is called the blow up case. When β is negative and $d=3$, it is called the absorbing case as studied in [2] and [3] respectively. In this work, we investigate the effect of the nonlinear external force accounting for both blow up and absorbing terms to see how they affect the amplitude vibration. In addition, we will consider how various other values of d and different values of the coefficients β of the external force play roles in dictating the vibration characteristics, e.g., the increase and decrease of the vibration amplitude and the resonance of the suspended string vibration. Finite difference method is employed to show the numerical simulation of the suspended string.

II. THE METHOD OF SOLUTION

To apply the finite difference method to (1), the initial condition has been modified as follows

$$\begin{aligned} u_{tt} - ((m\Delta x)u_{xx} + u_x) &= \beta|u|^{d-1}u, & \beta < 0, d \geq 1, \\ u(0,t) &= 0, \quad u_x(a,t) = 0, & t \in [0, T], \\ u(x,0) &= \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), & x \in [0, a]. \end{aligned} \quad (2)$$

The solution domain ($0 < x < 1, t > 0$) is divided into subintervals Δx and Δt in the direction of the position x and of the time t , respectively. The numerical solution at the grid point is found by substituting u_{tt} , u_{xx} , u_x and u_t in Eq. (2) using the central finite difference as

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} \right) - \left[mh \left(\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) + \left(\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right) \right] \\ = \beta |u_m^n|^{d-1} u_m^n, \end{aligned} \quad (3)$$

where $u_m^{n+1} = u(x, t+k)$, $u_m^n = u(x, t)$, $u_m^{n-1} = u(x, t-k)$, $u_{m+1}^n = u(x+h, t)$, $u_{m-1}^n = u(x-h, t)$, m is the position step ($m = 1, \dots, M$) and n is the time step ($n = 1, \dots, N$), while h and k are the mesh size in x and t , respectively.

For the third power nonlinear damping case ($c = 3$), the last term of left hand side of Eq. (3) can be shown as

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} \right) - \left[mh \left(\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) \right] \\ + \left(\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right) \\ = \beta |u_m^n|^{d-1} u_m^n \end{aligned} \quad (4)$$

Multiplying Eq. (4) by $2k^2$, we have

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} & \left(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1} \right) - \left[2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) \right. \\ & \left. + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) \right] \quad (5) \\ & = 2k^2\beta |u_m^n|^{d-1} u_m^n \end{aligned}$$

where $p = k^2/h$, $\beta \geq R$ and $d \geq 1$.

Eq. (5) can be classified into 4 different cases depending on the values of n and m . We then obtain the finite difference schemes for the numerical solution as follows:

Case 1: $n = 0$ and $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$

$$u_m^1 = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & (2-4mp)u_m^0 + (2mp+p)u_{m+1}^0 + (2mp-p)u_{m-1}^0 \\ & + 2k\psi(x) + 2k\beta |u_m^0|^d \end{aligned} \right] \quad (6)$$

Case 2: $n > 0$ and $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & (4-4mp)u_m^n + (2mp+p)u_{m+1}^n \\ & + (2mp-p)u_{m-1}^n - 2u_m^{n-1} + 2k\beta |u_m^n|^d \end{aligned} \right] \quad (7)$$

Case 3: $n = 0$ and $m = M$

$$u_M^1 = \frac{1}{2} \left[(2-4Mp)u_M^0 + 4Mp u_{M-1}^0 + 2k\psi(x) + 2k\beta |u_M^0|^d \right] \quad (8)$$

Case 4: $n > 0$ and $m = M$

$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2} \left[(4-4Mp)u_M^n + 4Mp u_{M-1}^n - 2u_M^{n-1} + 2k\beta |u_M^n|^d \right] \quad (8)$$

where $p = k^2/h$, $\beta \geq R$ and $d \geq 1$.

The finite difference schemes (6)-(8) have been programmed in MATLAB and the numerical solutions are shown graphically (to be discussed in the next section).

III. RESULTS AND DISCUSSION

We show the graphical comparison of the vibration displacement when no external force and nonlinear external force are accounted for provided that there is no initial velocity and various different external force coefficients (β) are considered as follows.

1. The comparison of the vibration without external force and with external force to the first power ($d=1$) under the various values of β as shown in Figs. 1- 4.

2. The comparison of the vibration without external force and with external force to the second power ($d=2$) under the various values of β as shown in Figs. 5 and 6.

3. The comparison of the vibration with external force to the first ($d=1$) and the third power ($d=3$), external force to the first ($d=1$) and the fifth power ($d=5$), external force to the first ($d=1$) and seventh ($d=7$) under the same β as shown in Figs. 7-9.

4. The comparison of the vibration with external force to the first ($d=1$) and the third power ($d=3$), external force to the third ($d=3$) and the fifth power ($d=5$), external force to the fifth ($d=3$) and seventh ($d=7$), using the same β as shown in Fig. 10-14.

5. The comparison of the vibration with external force to the second ($d=2$) and the fourth power ($d=4$), external force to the fourth ($d=4$) and the sixth power ($d=6$) and external force to the sixth ($d=6$) and the eighth power ($d=8$) using $\beta = -4, 4, 10$ and -25 as shown in Figs. 15-18.

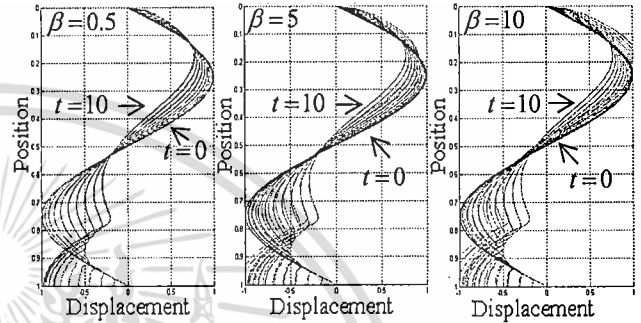


Fig.1 Graphical comparison of the vibration displacements between the no external force (blue line) and the first power nonlinear external force (red line) for different $\beta = 0.5, 5$, and 10 .

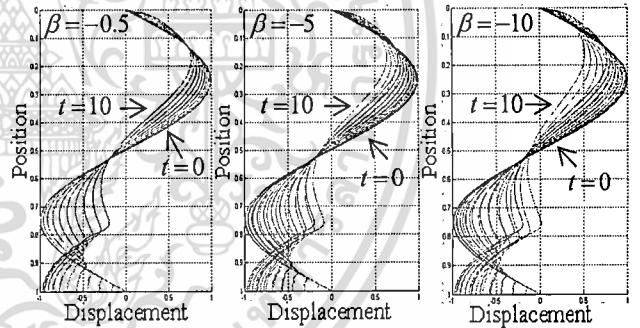


Fig.2 Graphical comparison of the vibration displacements between the no external force (blue line) and the first power nonlinear external force (red line) for different $\beta = -0.5, -5$, and -10 .

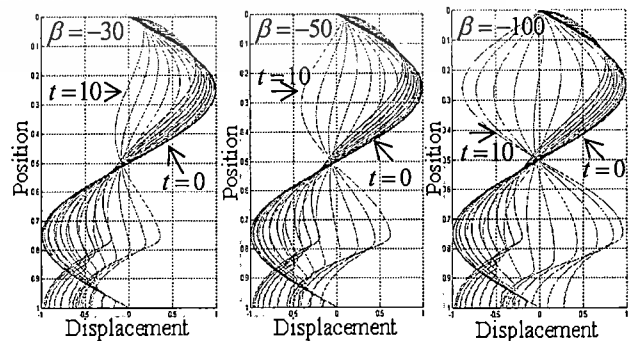


Fig.3 Graphical comparison of the vibration displacements between the no external force and the first power nonlinear external force (red line) for different $\beta = -30, -50$, and -100 .

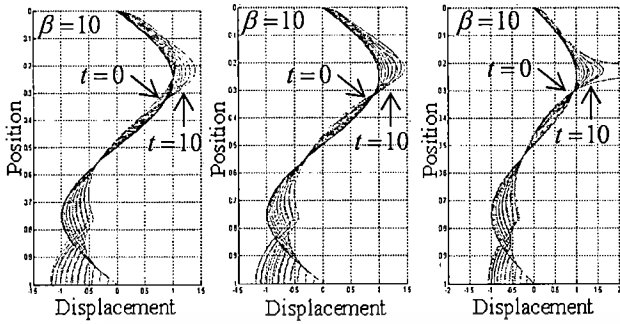


Fig.9 Graphical comparison of the vibration displacements between the first and the third power, the third power and the fifth power, the seventh power and the ninth power nonlinear external force (red line) for $\beta = 10$.

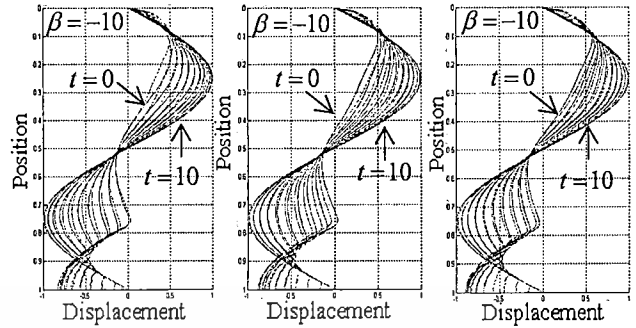


Fig.12 Graphical comparison of the vibration displacements between the first and the third power, the third power and the fifth power, the fifth power and the seventh power nonlinear external force (red line) for $\beta = -10$.

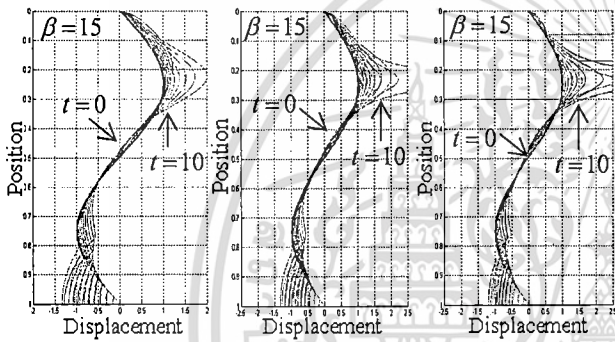


Fig.10 Graphical comparison of the vibration displacements between the first and the third power, the third power and the fifth power, the fifth power and the seventh power nonlinear external force (red line) for $\beta = 15$.

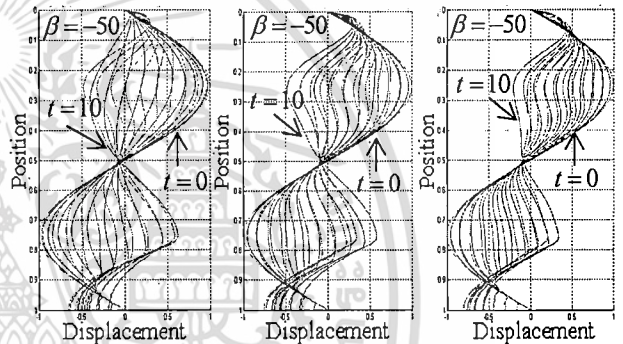


Fig.13 Graphical comparison of the vibration displacements between the first and the third power, the third power and the fifth power, the fifth power and the seventh power nonlinear external force (red line) for $\beta = -50$.

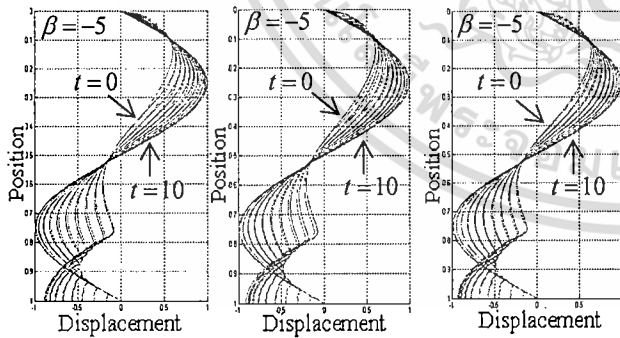


Fig.11 Graphical comparison of the vibration displacements between the first and the third power, the third power and the fifth power, fifth power and the seventh power nonlinear external force (red line) for $\beta = -5$.

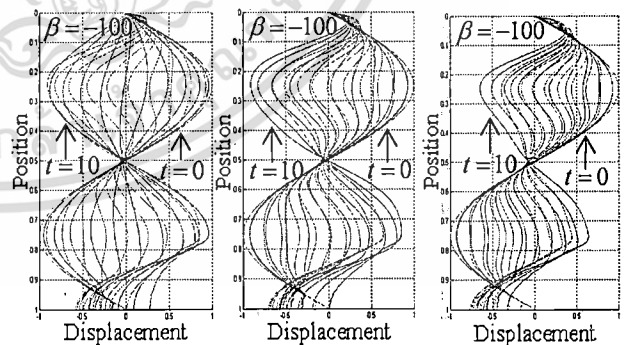


Fig.14 Graphical comparison of the vibration displacements between the first and the third power, the third power and the fifth power, the fifth power and the seventh power nonlinear external force (red line) for $\beta = -100$.

Figs. 11-14 show that the vibration with the external force to the power 1, 3, 5 and 7 which exhibit similar characteristics and show no resonance.

Table 3 summarizes the resonance characteristic. We can see that the resonance will not take place when the external force has the odd power and when β is negative or small positive values (i.e., $0 < \beta < 5$).

Table 3 The resonance of the suspended string vibration as a function of the powers and the coefficients of the external force.

The power of the external force	The coefficient of the external force	Resonance	No Resonance
Odd power (1, 3, 5, 7)	$0 < \beta < 5$		✓
	$\beta > 5$	✓	
	$\beta < 0$		✓
Even power (2, 4, 6, 8)	$\beta < 0$	✓	
	$-5 < \beta < 5$	✓	

From result table 3, we can study more the damping term how effect to resonance occurring. It prevents the resonance from occurring or not.

IV. CONCLUSION

The vibration characteristics can be divided into two different cases, namely, when the power of the external force is the odd power and the even power. In both cases, the vibration amplitude is proportional to the coefficient β of the external force. When β is negative or small positive values (i.e., $0 < \beta < 5$), the vibrations characteristics with the external force to the odd power are quite similar. However, when $\beta > 5$, the vibration characteristics demonstrate differently. In addition, when β is small and in the interval $-5 < \beta < 5$, the vibration characteristics with the external force to the even power are again quite similar and demonstrates different characteristics when β is not in the mentioned range. The numerical simulation of the suspended string shows that the vibration characteristics agree well with the mathematical theory provided in [2] and [3].

ACKNOWLEDGMENT

This research is supported by a research fund from Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, 10520, Thailand.

REFERENCES

- [1] N. S. Koshlyakov, E. V. Gliner and M. M. Smimov, *Differential Equations of Mathematical Physics*, Moscow, 1962 (in Russian). English Translation : North-Holland Publ. Co, 1964.
- [2] J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, *Global Solutions of IBVP to Nonlinear Equation of Suspended String*, Tokyo Journal of Mathematics 30, No.2 (2007), 543-556.
- [3] J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, *Global Classical Solutions of IBVP to Nonlinear Equation of Suspended String*, Tokyo Journal of Mathematics 31, No.2 (2008), 351-373.
- [4] J. Kasemsuwan, P. Chitsakul and P. Chaisanit, *Simulation of suspended string equation*, The 3rd Thai-Japan International Academic Conference, 2010, 60-61.
- [5] K. Subklay and J. Kasemsuwan, *Numerical simulation of suspended string Vibration*, The 8th Kasetsart University Kamphaeng Saen Campus Conference, 2011, 1486-1491.
- [6] J. Kasemsuwan, *Numerical Solution of the Damped Vibration of*

Suspended String, University of the Thai Chamber of Commerce Journal, 33, No.2 (2012), 77-90.

[7] J. Kasemsuwan, *The Finite Difference Scheme for the Suspended String Equation with the Nonlinear Damping Term*, International Conference on Applied Physics and Mathematics, 2012, 566-568.

ผลงานวิจัย/งานสร้างสรรค์ที่ตีพิมพ์เผยแพร่ (ระดับชาติและนานาชาติ)

- [1] J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, *Global Solutions of IBVP to Nonlinear Equation of Suspended String*, Tokyo Journal of Mathematics **30**, No.2 (2007), 543-556.
- [2] J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, *Global Classical Solutions of IBVP to Nonlinear Equation of Suspended String*, Tokyo Journal of Mathematics **31**, No.2 (2008), 351-373.
- [3] J. Kasemsuwan, *Exponential Decay for Nonlinear Damped Equation of Suspended String*, Proceedings of 2009 International Symposium on Computing, Communication, and Control, 2009, 308-312.
- [4] J. Kasemsuwan, P. Chitsakul and P. Chaisanit, *Simulation of Suspended String Equation*, The 3rd Thai-Japan International Academic Conference, 2010, 60-61.
- [5] P. Chitsakul, J. Kasemsuwan and P. Chaisanit, *A Mathematical Model for Studying Outflow from the Dam*, The 3rd Thai-Japan International Academic Conference, 2010, 46-47.
- [6] ใจปอง เกษมสุวรรณ. 2553. “การศึกษาสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง” วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยหอการค้าไทย 30, 3: 101-111.
- [7] คณาจภูมิ ทรัพย์คล้าย, ใจปอง เกษมสุวรรณ. 2554. “แบบจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง” การประชุมวิชาการ ครั้งที่ 8 มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน, 1486-1491.
- [8] P. Chitsakul, J. Kasemsuwan and P. Chaisanit, *A Mathematical Model for Studying Eye-Hand Coordination Reaction Time*, The 5th Thai-Japan International Academic Conference, 2012, 95-96.
- [9] J. Kasemsuwan, *The Finite Difference Scheme for the Suspended String Equation with the Nonlinear Damping Term*, International Conference on Applied Physics and Mathematics, 2012, 566-568.
- [10] J. Kasemsuwan, *Numerical Solution of the Damped Vibration of Suspended String*, University of the Thai Chamber of Commerce Journal **33**, No.2 (2012), 77-90.
- [11] J. Kasemsuwan, *The Finite Difference Scheme for the Suspended String Equation with the Nonlinear External Forces*, International Conference on Mathematics, Statistics and Computational Sciences, 2013, 456-461.

การเสนอผลงานวิชาการ

1. เสนอผลงานวิชาการ เรื่อง The Finite Difference Scheme for the Suspended String Equation with the ... Nonlinear External Forces ประเทศ สาธารณรัฐสิงคโปร์
2. เสนอผลงานวิชาการ เรื่อง The Finite Difference Scheme for the Suspended String Equation with the ... Nonlinear Damping Term ประเทศ สาธารณรัฐสิงคโปร์
3. เสนอผลงานวิชาการ เรื่อง Simulation of Suspended String Equation ณ เมือง Osaka ประเทศ ญี่ปุ่น
4. เสนอผลงานวิชาการ เรื่อง Exponential Decay for Nonlinear Damped Equation of Suspended String ณ เมือง Nanyang ประเทศ สาธารณรัฐสิงคโปร์



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้