



รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

การจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้น
Simulation of Nonlinear Damped Suspended String Vibration

นางใจปอง เกษมสุวรรณ

RCH
QA
297
จ 931 ก

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน 131041
วัน,เดือน,ปี 2.1 11ค. 2557

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2555

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

b.12596437.....
ใช้ประโยชน์ด้านการค้า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ชื่อโครงการ การจำลองการสั้นของเส้นลวดในแนวโค้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้น.....

แหล่งเงิน ทุนประเภทส่งเสริมนักวิจัย.....

ประจำปีงบประมาณ 2555 จำนวนเงินที่ได้รับการสนับสนุน 35,000 บาท

ระยะเวลาทำการวิจัย 1 ปี ตั้งแต่ 1 ตุลาคม 2554 ถึง 30 กันยายน 2555

ชื่อ-สกุล หัวหน้าโครงการ ดร. ใจปอง เกษมสุวรรณ

หน่วยงานต้นสังกัด สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอวิธีการใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันดับเพื่อหาผลเฉลยประมาณค่าเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตของสมการการสั้นของเส้นลวดในแนวโค้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสอง และนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับการสั้นแบบไม่มีความหน่วงภายใต้รูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นเดียวกัน ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าการสั้นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองมีผลทำให้เส้นลวดสั้นลง และมีลักษณะการสั้นที่แตกต่างจากรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดอย่างมาก ในขณะที่การสั้นแบบมีความหน่วงเชิงเส้น เส้นลวดสั้นลงเช่นกันแต่ยังคงรักษารูปร่างการสั้นเริ่มต้นไว้ นอกจากนี้ งานวิจัยนี้ยังได้ศึกษาเพิ่มเติมว่าความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสามมีผลต่อการสั้นในแนวโค้งเช่นเดียวกับกรณีของความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองหรือไม่ ผลจากการเปรียบเทียบทั้งหมดถูกแสดงไว้ในรูปของกราฟและตารางสรุปผล และจากผลการวิจัยยังพบว่าค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงมีผลต่อการหาแอมพลิจูดของการสั้น

คำสำคัญ : สมการการสั้นของเส้นลวดในแนวโค้ง, การสั้นแบบมีความหน่วง, ระเบียบวิธีผลต่างอันดับ, ผลเฉลยเชิงตัวเลข, การจำลองเชิงตัวเลข

Research Title: Simulation of Nonlinear Damped Suspended String Vibration

Researcher: Dr. Jaipong Kasemsuwan

Faculty: Faculty of Science

Department: Department of Mathematics, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang.

ABSTRACT

This paper presents the use of finite difference schemes to find the approximated numerical solutions of the initial-boundary-value problem of the suspended-string vibrating equation with the linear damping and the second power nonlinear damping terms. The numerical results are compared with the suspended string without damping term provided that the initial shape and velocities are all the same. The results show that the vibration amplitude decreases and the vibration pattern demonstrates quite different from the initial pattern in the nonlinear damping case. The vibration amplitude also decreases in the linear damping case but the initial vibration pattern is still maintained. The third power nonlinear damping term has also been taken into account in this work and its effect on the vibration characteristic has been investigated. The results are compared graphically and also summarized in tables. The simulation results reveal that the coefficient of the damping term plays an important role in determining the vibration amplitude.

Keywords : Suspended String Equation, Damped Vibration, Finite-Difference Method, Numerical Solution, Numerical Simulation.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำวิจัยเรื่อง การจำลองการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นนั้น ให้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดีนั้น ผู้ทำวิจัยขอกราบขอบพระคุณ Prof. Masaru Yamaguchi ผู้ให้ความรู้แก่ผู้วิจัยในปัญหาที่ทำการศึกษา รวมถึงคณาจารย์ทุกท่านที่ให้ความรู้แก่ผู้วิจัยตลอดระยะเวลาการศึกษา

ขอขอบคุณนายสิทธิเชษฐ รุ่งรัมย์พัฒน์ ผู้ช่วยวิจัยในการเขียนโปรแกรมสร้างการจำลองการสั้น และขอขอบคุณเจ้าของเอกสาร บทความ ตำรา หนังสือทุกท่านที่ผู้วิจัยใช้ในการสืบค้นข้อมูลที่ไม่ได้กล่าวนามไว้ ณ ที่นี้

โดยในการวิจัยครั้งนี้ ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง จากทุนประเภทส่งเสริมนักวิจัย ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2555

คุณค่าและประโยชน์จากการค้นคว้าอันพึงมีของรายงานการวิจัยฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบทดแทนบุญคุณต่อบิดา มารดา และครูอาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่าน

ดร. ใจปอง เกษมสุวรรณณ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญภาพ.....	VI
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	2
1.3 ขอบเขตของการวิจัย.....	3
1.4 วิธีดำเนินการวิจัย.....	3
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	3
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	5
2.1 แนวคิด ทฤษฎีหลักตามประเด็นให้ครอบคลุมเรื่องที่วิจัย.....	5
2.1.1 การแบ่งลักษณะการสั้น.....	5
2.1.1.1 การสั้นแบบอิสระหรือการสั้นแบบบังคับ.....	5
2.1.1.2 การสั้นแบบมีความหน่วงและไม่มีความหน่วง.....	5
2.1.1.3 การสั้นแบบเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น.....	6
2.1.1.4 การสั้นแบบกำหนดได้และการสั้นแบบสุ่ม.....	6
2.1.2 การประมาณค่าเชิงอนุพันธ์ด้วยผลต่างอันดับ.....	7
2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	10
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย	12
3.1 สมการการสั้นของเส้นทวัดในแนวตั้งแบบมีความหน่วง.....	12
3.2 การหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีผลต่างอันดับ (Finite Difference Method).....	13
3.2.1 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหน่วงแบบเชิงเส้น ($c = 1$).....	16
3.2.2 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง ($c = 2$).....	21

เอกสาร 3.2.2 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง ($c = 2$)..... 21

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.2.3 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม ($c = 3$).....	26
3.3 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อแสดงกราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลข.....	32
3.3.1 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมแสดงผลกราฟการสั่นแบบไม่มีการเปรียบเทียบ.....	33
3.3.2 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมแสดงผลกราฟการสั่นแบบมีการเปรียบเทียบ.....	36
บทที่ 4 ผลการวิจัย	40
4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแบบเปรียบเทียบระหว่างการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง และมีความหน่วงเชิงเส้น.....	40
4.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแบบเปรียบเทียบระหว่างการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง.....	45
4.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแบบเปรียบเทียบระหว่างการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม.....	54
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ	61
5.1 สรุปผลการวิจัย.....	61
5.2 ข้อเสนอแนะ.....	62
บรรณานุกรม	63
ภาคผนวก	
ภาคผนวก ก.....	64
ภาคผนวก ข.....	68
ประวัตินักวิจัย	84

สารบัญภาพ

รูปที่	หน้า
2.1.2.1 แสดงการประมาณค่าของความชันที่จุด P ด้วยคอร์ด AB, PB และ AP.....	8
2.1.2.2 แสดงตำแหน่งจุด $P(x,y) = P(ih, jk)$ บนตะแกรงย่อยโดยจุดพิกัด (ih, ik) แทนโดย (i, j)	9
3.2.1 กราฟแสดงการแบ่งช่วงและขอบเขตของโดเมน $[0, a] \times [0, T]$	15
3.2.2 กราฟแสดงการระบุตำแหน่งของแต่ละช่วงย่อยๆ ที่ถูกแบ่ง และการระบุตำแหน่งของผลเฉลย u	15
3.2.1.1 การระบุตำแหน่งของผลเฉลย u ในสมการ (3.7).....	16
3.2.1.2 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.10).....	17
3.2.1.3 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.11).....	18
3.2.1.4 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.14).....	19
3.2.1.5 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.17).....	20
3.2.2.1 การระบุตำแหน่งของผลเฉลย u ในสมการ (3.19).....	21
3.2.2.2 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.22).....	22
3.2.2.3 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.23).....	23
3.2.2.4 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.26).....	24
3.2.2.5 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.29).....	24
3.2.3.1 การระบุตำแหน่งของผลเฉลย u ในสมการ (3.31).....	26
3.2.3.2 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.34).....	27
3.2.3.3 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.35).....	28
3.2.3.4 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.38).....	29
3.2.3.5 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.41).....	30
3.3.1 หน้าต่าง GUI แบบไม่มีการเปรียบเทียบ.....	32
3.3.1.1 หน้าต่าง Animation แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีการเปรียบเทียบ.....	35
3.3.1.2 หน้าต่าง New Figure แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีการเปรียบเทียบ.....	35
3.3.2.1 หน้าต่าง GUI แบบมีการเปรียบเทียบ.....	36
3.3.2.2 หน้าต่าง Animation แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีการเปรียบเทียบ.....	38
3.3.2.3 หน้าต่าง New Figure แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีการเปรียบเทียบ.....	38
4.1.1 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดไม่มีความเร็วเริ่มต้น ($\psi(x) = 0$).....	40

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญภาพ (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.1.2 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x)=1$	41
4.1.3 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x)=x$	41
4.1.4 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x)=\cos x$	41
4.1.5 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x)=\sin x$	42
4.1.6 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x)=0$	42
4.1.7 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x)=1$	43
4.1.8 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x)=x$	43
4.1.9 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x)=\cos x$	44
4.1.10 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) แลภาวะมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x)=\sin x$	44
4.2.1 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดไม่มีความเร็วเริ่มต้น ($\psi(x)=0$) เมื่อ $\alpha=0.5, 2.5, 3$ ตามลำดับ	45
4.2.2 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x)=1$ เมื่อ $\alpha=0.5, 2.5, 3$ ตามลำดับ	46
4.2.3 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x)=x$ เมื่อ $\alpha=0.5, 2.5, 3$ ตามลำดับ	46

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญญภาพ (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.2.4 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \cos x$ เมื่อ $\alpha = 0.5, 2.5, 3$ ตามลำดับ	47
4.2.5 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \sin x$ เมื่อ $\alpha = 0.5, 2.5, 3$ ตามลำดับ	47
4.2.6 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดไม่มีความเร็วเริ่มต้น ($\psi(x) = 0$) เมื่อ $\alpha = 3.1, 3.2, 3.5$ ตามลำดับ	48
4.2.7 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 1$ เมื่อ $\alpha = 3.1, 3.2, 3.5$ ตามลำดับ	48
4.2.8 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = x$ เมื่อ $\alpha = 3.1, 3.2, 3.5$ ตามลำดับ	49
4.2.9 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \cos x$ เมื่อ $\alpha = 3.1, 3.2, 3.5$ ตามลำดับ	49
4.2.10 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \sin x$ เมื่อ $\alpha = 3.1, 3.2, 3.5$ ตามลำดับ	50
4.2.11 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 3$	51
4.2.12 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = x^2 + 5$	52

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญภาพ (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.2.13 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = x^3 + 10$	52
4.2.14 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 5 \sin 7x$	53
4.2.15 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 3 \cos 5x$	53
4.3.1 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 0$ เมื่อ $\alpha = 0.5, 1.3, 2$ ตามลำดับ	55
4.3.2 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 0$ เมื่อ $\alpha = 0.5, 1.3, 2$ ตามลำดับ	55
4.3.3 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 1$ เมื่อ $\alpha = 0.5, 1.3, 2$ ตามลำดับ	56
4.3.4 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = x$ เมื่อ $\alpha = 0.5, 1.3, 2$ ตามลำดับ	56
4.3.5 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \cos x$ เมื่อ $\alpha = 0.5, 1.3, 2$ ตามลำดับ	57
4.3.6 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \sin x$ เมื่อ $\alpha = 0.5, 1.3, 2$ ตามลำดับ	57
4.3.7 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 0$ เมื่อ $\alpha = 18, 1000, 10000$ ตามลำดับ	58
4.3.8 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 1$ เมื่อ $\alpha = 18, 1000, 10000$ ตามลำดับ	58
4.3.9 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = x$ เมื่อ $\alpha = 18, 1000, 10000$ ตามลำดับ	59

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญภาพ (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.3.10 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \cos x$ เมื่อ $\alpha = 18, 1000, 10000$ ตามลำดับ.....	59
4.3.11 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \sin x$ เมื่อ $\alpha = 18, 1000, 10000$ ตามลำดับ.....	60



บทที่ 1

บทนำ

ในบทนี้ จะขอกล่าวถึงความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา วัตถุประสงค์ของการวิจัย ขอบเขตของการวิจัย วิธีการดำเนินการวิจัย และประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

ในปัจจุบัน มีงานวิจัยจำนวนมากที่ทำการศึกษาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการคลื่น (Wave Equation) ทั้งมิติเดียวและหลายมิติ ตัวอย่างของสมการคลื่นที่ถูกนำมาใช้ในปัญหาทางวิทยาศาสตร์ที่สำคัญ ได้แก่ สมการคลื่นยาว (The Long Wave Equation) ที่ใช้เป็นส่วนหนึ่งในการอธิบายปรากฏการณ์เรือ่นกระจก รวมทั้งใช้ศึกษาลักษณะของคลื่นในทะเลเพื่อใช้อธิบายปรากฏการณ์น้ำขึ้นน้ำลง และใช้ศึกษาคลื่นชุนามิซึ่งเป็นคลื่นยาวที่เกิดจากแผ่นดินสั่นสะเทือนอย่างรุนแรง

สมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง (The Suspended String Oscillation Equation) [1] เป็นสมการคลื่นอีกรูปแบบหนึ่งซึ่งมีความสำคัญอย่างมาก เนื่องจากสมการดังกล่าวถูกนำมาใช้อธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ ที่สำคัญ เช่น การสั่นของตึกและการสั่นของเส้นลวดที่แขวนลึฟท์เมื่อเกิดแผ่นดินไหว การสั่นของชิ้นส่วนของเครื่องจักร หรือแม้แต่การสั่นของอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ขนาดเล็ก เช่น การสั่นของหัวอ่านฮาร์ดดิสก์ ไดรฟ์ที่เกิดจากการหมุนของแผ่นบันทึกข้อมูล เป็นต้น

ที่ผ่านมงานวิจัยส่วนใหญ่ [6]-[13] ที่ศึกษาลักษณะการสั่นในแนวตั้งเป็นงานวิจัยเชิงทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ซึ่งพิสูจน์การมีอยู่จริงของผลเฉลยประเภทต่างๆ ของปัญหาการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งทั้งที่มีความหน่วงและไม่มีความหน่วง ขั้นตอนของการพิสูจน์ในงานวิจัยเหล่านี้ทำให้ทราบว่าควรจะกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้นและข้อกำหนดของแรงภายนอกอย่างไรเพื่อป้องกันการกำทอน (Resonance) และเนื่องจากผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytic Solution) อยู่ในรูปแบบของผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันเบสเชลชนิดที่หนึ่งซึ่งทำให้เกิดความยากในการสร้างกราฟ ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาถึงผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาการสั่นในแนวตั้งดังกล่าวเพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์กราฟการสั่น งานวิจัย [15] ได้ทำการศึกษาการจำลองของการสั่นแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง โดยแสดงกราฟการสั่นของผลเฉลยประมาณค่าที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method) แอมพิจูดของการสั่นเมื่อไม่มีความเร็วเริ่มต้นถูกนำมาเปรียบเทียบกับแอมพิจูดของการสั่นเมื่อความเร็วเริ่มต้นเป็นฟังก์ชันค่าคงที่ ฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันตรีโกณมิติ ภายใต้เงื่อนไขว่าเส้นลวดมีรูปร่างเริ่มต้นเหมือนกัน และได้ข้อสรุปว่าแอมพิจูดของการสั่นจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงไม่ได้ขึ้นกับความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวดเท่านั้น แต่ขึ้นอยู่กับรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อย่างไรก็ตาม โดยทั่วไปแล้วการสั่นตามสภาพความเป็นจริงนั้นจะเป็นการสั่นแบบมีความหน่วงแบบที่ทั้งสิ้น (Damped Vibration) การสั่นจะเกิดการสูญเสียพลังงานในระหว่างเกิดการเคลื่อนที่ของระบบไม่ว่าจะมาจากสาเหตุใดก็ตาม เป็นผลทำให้พลังงานรวมของระบบมีค่าลดลงตามทฤษฎีที่แสดงไว้ใน [8] งานวิจัยนี้จะทำการศึกษาการจำลองของการสั่นแนวตั้งแบบมีความหน่วง โดยจะพัฒนาจากการจำลองของการสั่นแนวตั้งที่ถูกเสนอในงานวิจัยที่ [15] สมการการสั่นจะมีพจน์ของความหน่วงเพิ่มขึ้น (Damping Term) ทำให้ต้องมีการพัฒนาสูตรของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) ที่เหมาะสม เพื่อหาผลเฉลยประมาณค่าของสมการการสั่นดังกล่าว และแสดงกราฟการสั่นของผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยโปรแกรม MATLAB เพื่อแสดงให้เห็นว่าความหน่วงมีผลทำให้แอมพลิจูดของการสั่นลดลงจริงหรือไม่ นอกจากนี้ แอมพลิจูดของกราฟการสั่นแบบมีความหน่วงที่มีความเร็วเริ่มต้นเป็นฟังก์ชันต่างๆ กัน (เช่น ฟังก์ชันค่าคงที่ ฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นต้น) จะถูกนำมาวิเคราะห์เปรียบเทียบกับแอมพลิจูดของกราฟการสั่นแบบไม่มีความหน่วง ภายใต้เงื่อนไขว่าเส้นลวดมีรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นเหมือนกัน การเพิ่มขึ้นหรือลดลงของแอมพลิจูดการสั่นแบบมีความหน่วงจะถูกนำมาวิเคราะห์ว่าขึ้นอยู่กับความเร็วเริ่มต้นและรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดเช่นเดียวกับในงานวิจัยที่ [15] หรือไม่ พร้อมทั้งวิเคราะห์และทดสอบว่าเงื่อนไขใดที่ทำให้ผลเฉลยประมาณค่าของการสั่นลู่เข้า เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาโปรแกรมต่อไป

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

- 1.2.1 สร้างการจำลองการสั่นของเส้นลวดแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น
- 1.2.2 พัฒนาและปรับปรุงระเบียบวิธีเชิงตัวเลขให้เหมาะสมกับปัญหาการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น
- 1.2.3 หาเงื่อนไขที่ทำให้ผลเฉลยประมาณค่าของการสั่นลู่เข้า เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาโปรแกรมต่อไป
- 1.2.4 พัฒนาและปรับปรุงโปรแกรมที่ช่วยในการสร้างกราฟการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง โดยสามารถกำหนดฟังก์ชันพื้นฐานที่ใช้แทนรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงได้
- 1.2.5 วิเคราะห์และเปรียบเทียบ แอมพลิจูดของเส้นลวดแนวตั้งแบบมีความหน่วง ที่มีรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นที่แตกต่างกัน และหาข้อสรุปว่าเงื่อนไขใดบ้าง ที่มีผลต่อการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของแอมพลิจูดการสั่นได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.2.6 วิเคราะห์และเปรียบเทียบ ความแตกต่างของการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วง และไม่มีความหน่วง ที่มีรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นเดียวกัน เพื่อเป็นแนวทางในการศึกษาวิหาคผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาการสั้นของเส้นลวดภายใต้เงื่อนไขอื่นๆ ต่อไป

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1.3.1 งานวิจัยนี้เป็นการวิเคราะห์การสั้นของเส้นลวดแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสองและไม่เชิงเส้นกำลังสาม

1.3.2 ตำแหน่งเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวดจะถูกกำหนดด้วยฟังก์ชันพื้นฐาน เช่น ฟังก์ชันค่าคงที่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันพหุนาม เป็นต้น

1.3.3 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของการสั้นของเส้นลวดแบบมีความหน่วงในรูปของกราฟ พร้อมทั้งวิเคราะห์ผลกระทบของความหน่วงว่ามีผลต่อการสั้นของเส้นลวดอย่างไร

1.4 วิธีการดำเนินการวิจัย

1.4.1 ศึกษา ค้นคว้า งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และทำความเข้าใจในรายละเอียดของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขว่ามีส่วนใดในงานวิจัยที่สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับงานวิจัยนี้ได้

1.4.2 พัฒนาและปรับปรุงสูตรของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขให้เหมาะสมในการหาผลเฉลยประมาณค่าเชิงตัวเลขของปัญหาที่ทำการศึกษา พร้อมทั้งหาเงื่อนไขการลู่เข้า

1.4.3 พัฒนาและปรับปรุงโปรแกรมแสดงลักษณะกราฟของผลเฉลยลักษณะต่างๆ ที่มีรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นที่แตกต่างกัน

1.4.4 วิเคราะห์เปรียบเทียบ ลักษณะการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของแอมพลิจูดกราฟการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วง ภายใต้รูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นที่แตกต่างกัน พร้อมทั้งนำไปเปรียบเทียบกับการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งที่ไม่มีความหน่วง

1.4.5 เขียนรายงานเสนอความก้าวหน้า

1.4.6 แก้ไข เพิ่มเติมรายละเอียดของผลการวิจัย

1.4.7 รวบรวม เรียบเรียงเนื้อหา เพื่อเขียนรายงานฉบับสมบูรณ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 ได้การจำลองการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น

1.5.2 ได้สูตรและเงื่อนไขการลู่เข้าของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่สามารถนำมาใช้หาผลเฉลยประมาณค่าเชิงตัวเลขของปัญหาการสั้นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5.3 ได้โปรแกรมที่ช่วยในการสร้างกราฟการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น โดยสามารถกำหนดฟังก์ชันพื้นฐานที่ใช้แทนรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวดได้

1.5.4 ทำให้สามารถวิเคราะห์ความแตกต่างของกราฟและเงื่อนไขการเพิ่มขึ้นและลดลงของแอมพลิจูดการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น พร้อมทั้งเปรียบเทียบกับการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งที่ไม่มีความหน่วง



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

สำหรับการศึกษาปัญหาการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงนั้น มีทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

2.1 แนวคิด ทฤษฎีหลักตามประเด็นให้ครอบคลุมเรื่องที่วิจัย

2.1.1 การแบ่งลักษณะการสั่น [1]

การแบ่งประเภทของการสั่นสามารถที่จะแบ่งออกได้หลายประเภท สำหรับในหัวข้อนี้จะเป็นการอธิบายถึงการแบ่งการสั่นประเภทต่างๆ ที่สำคัญและพบเห็นในการศึกษาขั้นพื้นฐานนี้ [1]

2.1.1.1 การสั่นแบบอิสระหรือการสั่นแบบบังคับ

การสั่นแบบอิสระ (Free Vibration) คือ การสั่นของระบบในลักษณะที่หลังจากมีการรบกวนระบบที่หยุดนิ่งอยู่ที่จุดสมดุลครั้งแรกเพื่อให้เกิดการสั่นขึ้นแล้ว การสั่นนั้นดำเนินต่อไปโดยไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำกับระบบอีกเลย การรบกวนระบบอาจจะเป็นการทำให้เกิดการกจัดเบื้องต้นหรือทำให้เกิดความเร็วเริ่มต้นหรือทั้งสองแบบรวมกันก็ได้

การสั่นแบบบังคับ (Force Vibration) คือ การสั่นของระบบภายใต้แรงกระทำจากภายนอก ซึ่งแรงกระทำจากภายนอกนี้อาจจะเป็นแรงในลักษณะซ้ำตัวเองหรือไม่ซ้ำตัวเองก็ได้ การสั่นในลักษณะนี้ก็คือการสั่นเนื่องจากความไม่สมดุลของเครื่องจักรที่เกิดการหมุน สิ่งหนึ่งที่เราจะพบกับการสั่นแบบบังคับก็คือหากว่าความถี่ของแรงที่กระทำกับระบบนั้น ไปพ้องกับความถี่ธรรมชาติของระบบพอดี การสั่นที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะที่มีช่วงกว้างการสั่นที่สูงมาก เราเรียกการสั่นในลักษณะนี้ว่า *การสั่นพ้อง* (Resonance) ซึ่งผลของการสั่นพ้องนี้มักจะทำให้เกิดความเสียหายกับโครงสร้างที่กำลังเกิดการสั่นอยู่ ดังนั้นในการออกแบบวิศวกรรมมักจะหลีกเลี่ยงการเกิดการสั่นพ้องของระบบ ยกเว้นในระบบที่ต้องการให้เกิดการสั่นมากๆ เช่น ในลำโพงขนาดใหญ่ เป็นต้น

2.1.1.2 การสั่นแบบมีความหน่วงและไม่มีความหน่วง

การสั่นแบบไม่มีความหน่วง (Undamped Vibration) หมายถึง การสั่นที่ไม่มีการสูญเสียพลังงานให้กับสิ่งแวดล้อมของระบบ ไม่ว่าจะอยู่ในรูปแรงเสียดทานหรือแรงต้านอื่นใด ซึ่งเมื่อระบบเคลื่อนที่แบบไม่มีความหน่วงจะทำให้พลังงานรวมของระบบในระหว่างการเคลื่อนที่นี้มีค่าคงที่ การสั่นที่ไม่มีความหน่วงของระบบในความเป็นจริงจะเกิดขึ้นได้ในอวกาศเท่านั้น เพราะวัตถุที่เกิดการเคลื่อนที่โดยทั่วไปแล้วจะเกิดการสูญเสียพลังงานบ้างอย่างน้อยที่สุดก็จะสูญเสียพลังงานเนื่องจากแรงเสียดทานกับอากาศรอบข้าง สำหรับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ระบบที่เกิดการสั่นแบบไม่มีความหน่วงและเป็นการสั่นแบบอิสระความถี่ของการสั่นของระบบจะเรียกว่า *ความถี่ธรรมชาติ* (Natural Frequency) ซึ่งความถี่ธรรมชาตินี้ถือว่าเป็นปริมาณที่มีความสำคัญมากในการออกแบบเพื่อป้องกันการสั่นของอุปกรณ์หรือโครงสร้าง

การสั่นแบบมีความหน่วง (Damped Vibration) คือการสั่นที่เกิดการสูญเสียพลังงานในระหว่างเกิดการเคลื่อนที่ของระบบไม่ว่าจะมาจากสาเหตุใดก็ตาม ซึ่งเป็นผลทำให้พลังงานรวมของระบบมีค่าลดลงโดยทั่วไปแล้วการสั่นตามสภาพความเป็นจริงนั้นจะเป็นการสั่นแบบมีความหน่วงแทบทั้งสิ้น

2.1.1.3 การสั่นแบบเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น

ถ้าระบบของการสั่นซึ่งจะประกอบด้วย มวล สปริง และตัวหน่วง มีพฤติกรรมเปลี่ยนแปลงค่าของแรงกระทำไปอย่างเชิงเส้นกับระยะทางหรือความเร็วของพิชิตที่ใช้ เราจะเรียกการสั่นนั้นว่า *การสั่นเชิงเส้น* (Linear Vibration) แต่ถ้าหากไม่เป็นเช่นนั้น คือ มีปริมาณใดปริมาณหนึ่งเปลี่ยนแปลงไม่เป็นเชิงเส้นกับระยะทางหรือความเร็ว เราจะเรียกการสั่นนั้นว่า *การสั่นไม่เชิงเส้น* (Nonlinear Vibration) ซึ่งความแตกต่างของการสั่นทั้งสองแบบนี้ก็คือ สมการการเคลื่อนที่จะได้เป็นสมการอนุพันธ์แบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น (Linear และ Nonlinear Differential Equation) ตามลำดับ ซึ่งผลที่ตามมาคือการแก้สมการอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้นจะมีความยุ่งยากมากกว่าแบบที่เป็นเชิงเส้นมาก

นอกเหนือจากนั้นแล้ว หากการสั่นเป็นการสั่นเชิงเส้นจะทำให้เราสามารถนำหลักการของการรวมตำแหน่ง (Principle of Superposition) ซึ่งเป็นการแยกพิจารณาการสั่นเนื่องจากภาระกรรมแต่ละภาระกรรมแล้วนำผลที่ได้ทั้งหมดมารวมกันเป็นคำตอบสุดท้าย ซึ่งในหลายๆกรณีจะช่วยลดความยุ่งยากในการคำนวณลงไปได้มาก แต่สำหรับการสั่นไม่เชิงเส้นนั้นเราจะใช้หลักการดังกล่าวนี้ไม่ได้

2.1.1.4 การสั่นแบบกำหนดได้และการสั่นแบบสุ่ม

เมื่อระบบเกิดการสั่นอยู่ภายใต้แรงกระทำจากภายนอกลักษณะใดก็ตาม ถ้าหากว่าตลอดเวลาที่แรงกระทำอยู่นั้นเราสามารถกำหนดขนาดของแรงได้หรือทราบค่าความสัมพันธ์ของแรงซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลาที่แรงนั้นกระทำ เราจะเรียกแรงกระทำนั้นว่า *แรงที่กำหนดค่าได้* (Deterministic Force) ซึ่งผลของแรงนี้จะทำให้เกิด การสั่นแบบกำหนดได้ (Deterministic Vibration)

สำหรับกรณีที่แรงที่กระทำต่อระบบไม่สามารถกำหนดขนาดที่เวลาใดๆ ได้อย่างแน่นอน เราจะเรียกแรงแบบนั้นว่า *แรงแบบสุ่ม* (Undeterministic หรือ Random Force) และการสั่นที่เกิดจากแรงดังกล่าวจะเรียกว่า *การสั่นแบบสุ่ม* (Random Vibration) ซึ่งการแก้ปัญหาของการสั่นแบบสุ่มนั้นจะต้องใช้วิธีการทางสถิติเข้ามาช่วยแก้ปัญหา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.2 การประมาณค่าเชิงอนุพันธ์ด้วยผลต่างอันตะ [2]

ให้ฟังก์ชัน u และอนุพันธ์ของ u เป็นฟังก์ชันค่าเดียว ต่อเนื่อง และมีค่าอันตะ อนุกรมเทเลอร์ของ u เขียนแทนโดย

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(x) + \frac{1}{6}h^3u'''(x) + \dots \quad (1)$$

และ

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(x) - \frac{1}{6}h^3u'''(x) + \dots \quad (2)$$

ดังนั้น

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2u''(x) + O(h^4) \quad (3)$$

เมื่อ $O(h^4)$ แทนพจน์ที่ประกอบด้วย h ที่มีกำลังมากกว่าหรือเท่ากับสี่ สมมติว่าพจน์ที่ประกอบด้วย h มีกำลังที่มากกว่าหรือเท่ากับสี่มีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับกำลังของ h ที่มีค่าต่ำกว่า ดังนั้นเราจะประมาณอนุพันธ์อันดับสองของ u ด้วย

$$u''(x) = \frac{d^2u}{dx^2} \approx \frac{1}{h^2} \{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)\} \quad (4)$$

โดยมีค่าคลาดเคลื่อนอันดับ h^2 เขียนแทนด้วย $O(h^2)$ ซึ่งได้มาจากค่านำหน้าของอนุพันธ์อันดับสองจากด้านขวามือของสมการที่ (2)

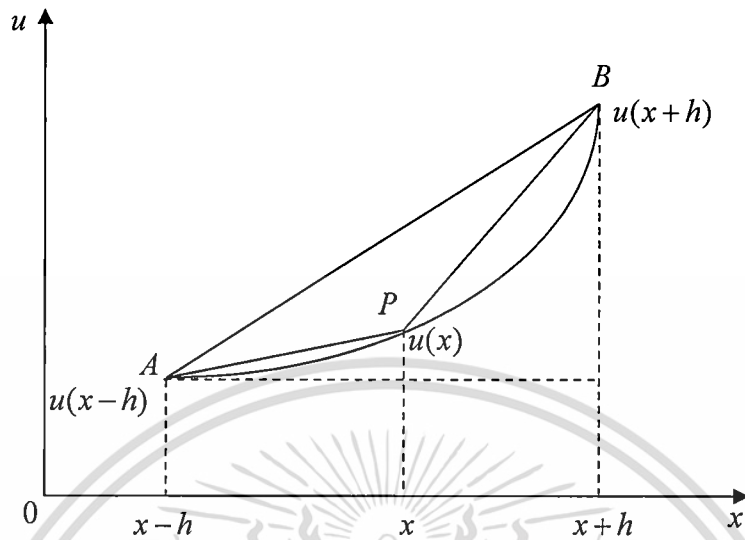
ถ้าเอาสมการที่ (2) ลบออกจากสมการที่ (1) และตัดพจน์ที่ h มีกำลังมากกว่าสามทิ้งไป จะได้

$$u'(x) = \frac{du}{dx} \approx \frac{1}{2h} \{u(x+h) - u(x-h)\} \quad (5)$$

โดยมีค่าคลาดเคลื่อนอันดับ h หรือ $O(h)$

สมการที่ (5) จะเป็นการประมาณค่าของความชันของเส้นสัมผัสที่จุด P ด้วยความชันของคอร์ด AB จากรูปที่ (1) และเรียกการประมาณนี้ว่า ผลต่างอันตะตรงกลาง (central difference) เราอาจประมาณค่าของความชันของเส้นสัมผัสที่จุด P ด้วยความชันของคอร์ด PB จะได้ผลต่างอันตะข้างหน้า (forward difference) ในรูป

$$u'(x) \approx \frac{1}{h} \{u(x+h) - u(x)\} \quad (6)$$



รูปที่ 2.1.2.1 แสดงการประมาณค่าของความชันที่จุด P ด้วยคอร์ด AB, PB และ AP

หรือประมาณด้วยความชันของคอร์ด AP จะได้ผลต่างอันตะย้อนหลัง (backward - difference) ในรูป

$$u'(x) \approx \frac{1}{h} \{u(x) - u(x-h)\} \quad (7)$$

โดยสมการที่ (6) และ (7) ได้มาจากสมการที่ (1) และ (2) ตามลำดับ โดยสมมติว่า h ที่มีกำลังมากกว่าหรือเท่ากับสองมีค่าน้อยมาก ซึ่งแสดงว่าค่าคลาดเคลื่อนของผลต่างอันตะข้างหน้าและย้อนหลังอยู่ในอันดับ $O(h)$

สัญลักษณ์แทนฟังก์ชันหลายตัวแปร

สมมติให้ $u(x,t)$ แทนฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x และ t แบ่งระนาบ xt ออกเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่าๆ กัน โดยให้ช่วงแบ่งบนแกน x คือ $\delta x = h$ และบนแกน y คือ $\delta t = k$ ตามรูปที่ 2.1.2.2

ให้พิกัด (x,t) ที่จุด P บนตะแกรงย่อยแทนโดย $x=ih, t=jk$ โดยที่ $i, j \in I$ เมื่อ I เป็นเลขจำนวนเต็ม ดังนั้นพิกัด (x,t) ที่จุด P มีค่าเป็น (ih, ik) นั่นคือ ค่าของฟังก์ชัน $u(x,t)$ ที่จุด P เขียนแทนโดย

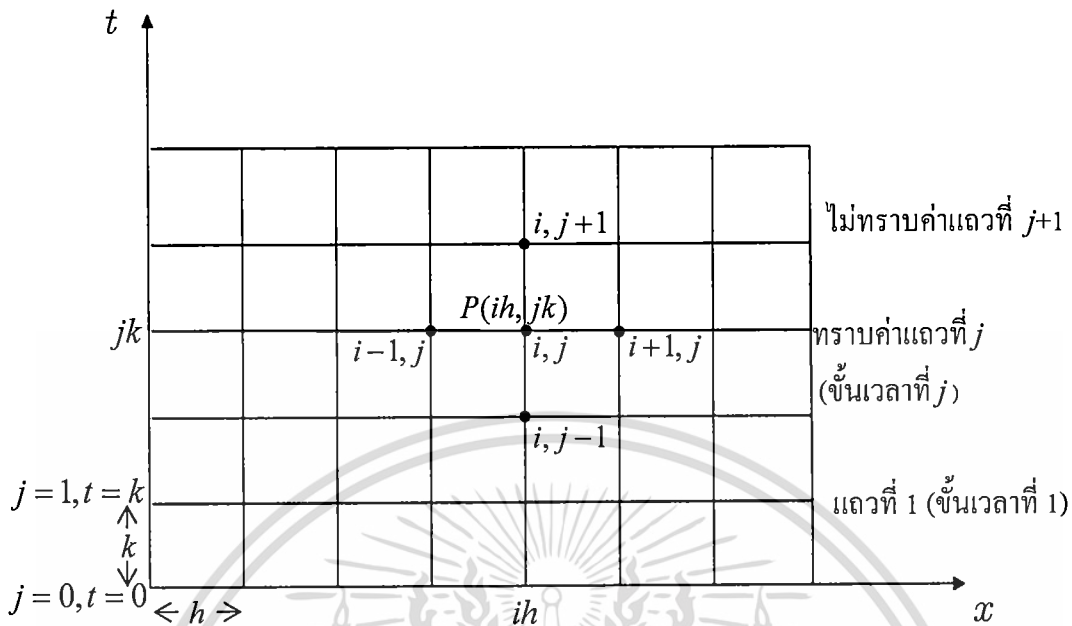
$$u(x,t) = u(ih, jk)$$

และให้สัญลักษณ์

$$u(ih, jk) = u_{i,j}$$

ดังนั้นเราเขียนค่าของฟังก์ชัน u ที่จุด (x,t) ได้ในรูปต่อไปนี้

$$u = u(x,t) = u(ih, jk) = u_{i,j}$$



รูปที่ 2.1.2.2 แสดงตำแหน่งจุด $P(x, y) = P(ih, jk)$ บนตะแกรงย่อยโดยจุดพิกัด (ih, ik) แทนโดย (i, j)

โดยอาศัยสมการที่ (4) เราสามารถเขียนอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของ u เทียบ x ที่จุด P ได้เป็น

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_P = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{1}{h^2} \{u(ih+h, jk) - 2u(ih, jk) + u(ih-h, jk)\}$$

หรือ

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{1}{h^2} \{u((i+1)h, jk) - 2u(ih, jk) + u((i-1)h, jk)\}$$

หรือ

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

ซึ่งการประมาณนี้มีค่าคลาดเคลื่อนอันดับ $O(h^2)$ ในทำนองเดียวกัน

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{i,j} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

ซึ่งค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณนี้อยู่ที่อันดับ $O(k^2)$

โดยใช้สัญลักษณ์แบบเดียวกันนี้ การประมาณด้วยผลต่างอันดับหนึ่งข้างหน้าสำหรับ $\frac{\partial u}{\partial t}$ ที่จุด P

จะเป็น

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

โดยมีค่าคลาดเคลื่อนอันดับ $O(k)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ลักษณะการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง (The Suspended String Oscillation Equation) ถูกศึกษาโดยนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซีย [3] ตามที่ได้อธิบายรายละเอียดที่มาของสมการไว้ใน [4] การสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่งจะถูกเขียนในรูปของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - Lu(x,t) = 0$$

$$\text{เงื่อนไขขอบเขตคือ} \quad u(0,t) = 0 \quad \text{เมื่อ } t \in (0, T)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้นคือ} \quad u(x,0) = f_1(x) \text{ และ } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f_2(x) \quad \text{เมื่อ } x \in (0, a)$$

เมื่อ L เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง กำหนดโดย

$$L = \left(\frac{x}{\mu + 1} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}$$

ซึ่งผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (analytical solution) อยู่ในรูปของอนุกรมอนันต์ของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 ตามที่ได้อธิบายรายละเอียดไว้ใน [5] ดังนี้

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(p_j \cos \sqrt{\lambda_j} t + \frac{q_j}{\sqrt{\lambda_j}} \sin \sqrt{\lambda_j} t \right) \frac{1}{\sqrt{a} J_{\mu+1}(\gamma_k)} \cdot \frac{1}{x^{\frac{\mu}{2}}} J_{\mu}(\gamma_k \sqrt{\frac{x}{a}})$$

ที่ผ่านมางานวิจัยส่วนใหญ่ [6]-[13] ที่ได้ศึกษาลักษณะการสั่นในแนวดิ่งนั้น เป็นงานวิจัยเชิงทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ โดยพิสูจน์การมีอยู่จริงของผลเฉลยประเภทต่างๆ ของปัญหาการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง ทั้งแบบมีความหน่วงและไม่มีความหน่วง ขั้นตอนของการพิสูจน์ในงานวิจัยเหล่านี้ทำให้ทราบว่าควรจะกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้นและข้อกำหนดของแรงภายนอกอย่างไรเพื่อป้องกันการกำทอน (Resonance) ดังที่อธิบายรายละเอียดไว้ในบทความวิชาการ [14]

เนื่องจากผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytic Solution) อยู่ในรูปแบบของผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งทำให้เกิดความยากในการสร้างกราฟ งานวิจัย [15] และ [16] ได้ศึกษาถึงผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาการสั่นในแนวดิ่งดังกล่าวเพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์กราฟการสั่น โดยงานวิจัย [16] ใช้วิธีเครงค์นิโคลสัน (Crank-Nicolson Method) ซึ่งมีสูตรดังนี้

$$\begin{Bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{M-1}^n \\ u_M^n \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(4mp-4)u_1^n + (2mp+p)u_2^n - 2u_1^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x,t)) \\ (2mp-p)u_1^n - (4mp-4)u_2^n + (2mp+p)u_3^n - 2u_2^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x,t)) \\ \vdots \\ (2mp-p)u_{M-1}^n - (4mp-4)u_M^n + (2mp+p)u_{M+1}^n - 2u_M^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x,t)) \\ -(4Mp-4)u_M^n + (4Mp)u_{M-1}^n - 2u_M^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x,t)) \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ $m = 1, \dots, M$ และ $n = 1, \dots, N$ และ $p = \frac{k^2}{h}$ เมื่อ h และ k เป็นขนาดของช่วงที่ถูกแบ่งของตำแหน่ง x และเวลา t ตามลำดับ

ผลเฉลยที่ได้ถูกนำมาใช้เปรียบเทียบกับผลที่ได้จากงานวิจัย [15] ซึ่งใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method) ตามสูตร ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} u_m^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[(2mp + p)u_{m+1}^n - (4mp - 4)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n - 2u_m^{n-1} \right] \\ u_m^1 &= \frac{1}{2} \left[(2mp + p)u_{m+1}^0 - (4mp - 2)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 + 2kf_2(x) \right] \\ u_M^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[-(4Mp - 4)u_M^n + (4Mp)u_{M-1}^n - 2u_M^{n-1} \right] \\ u_M^1 &= \frac{1}{2} \left[-(4Mp - 2)u_M^0 + (4Mp)u_{M-1}^0 + 2kf_2(x) \right] \end{aligned}$$

และจาก [16] ได้ข้อสรุปว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขจากทั้งสองวิธีมีค่าใกล้เคียงกัน ภายใต้ตำแหน่งเริ่มต้นและความเร็วต้นของเส้นลวดแบบเดียวกัน โดยวิธีแครงคั่นโคลสันดีกว่าระเบียบวิธีผลต่างอันตะ เนื่องจากค่าแอมพลิจูดที่ได้มีค่าน้อยกว่า โดยสังเกตจากกราฟจะเห็นลักษณะการสั่นที่ราบเรียบและต่อเนื่องกว่า อีกทั้งวิธีแครงคั่นโคลสันยังสามารถแบ่งความละเอียดของโดเมนเท่าใดก็ได้

เนื่องจาก โดยทั่วไปแล้วการสั่นตามสภาพความเป็นจริงนั้น จะเป็นการสั่นแบบมีความหน่วงแทบทั้งสิ้น (Damped Vibration) การสั่นจะเกิดการสูญเสียพลังงานในระหว่างเกิดการเคลื่อนที่ของระบบไม่ว่าจะมาจากสาเหตุใดก็ตาม เป็นผลทำให้พลังงานรวมของระบบมีค่าลดลงตามที่ได้ศึกษาไว้ใน [8] ดังสมการและทฤษฎีบท ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x, t) - x \partial_x^2 u(x, t) - \partial_x u(x, t) + \alpha |u_t|^{p-1} u_t &= \beta |u|^{q-1} u, & (x, t) \in \Omega, \\ u(a, t) &= 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad \partial_t u(x, 0) &= \psi(x), & x \in (0, a) \end{aligned} \quad (2.1)$$

ทฤษฎีบท ปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตตามสมการ (2.1) มีผลเฉลยอย่างอ่อน $u \in H_0^1(\Omega; x^0)$ โดย $u(\cdot, t) \in W$ สำหรับทุกๆ ค่าของ $t \in (0, T)$ และสอดคล้องกับการประมาณค่าการลดลงของพลังงาน ดังสมการ

$$\begin{aligned} \text{ถ้า } p=1 \text{ แล้ว} & \quad E(u(t), u_t(t)) \leq \tilde{c}_1 e^{kt} & \text{บน } [0, \infty) \\ \text{และถ้า } p>1 \text{ แล้ว} & \quad E(u(t), u_t(t)) \leq \tilde{c}_2 (1+t)^{-2/(p-1)} & \text{บน } [0, \infty) \end{aligned}$$

โดยที่ k , \tilde{c}_1 และ \tilde{c}_2 เป็นค่าคงที่ที่เป็นบวก และขึ้นอยู่กับค่าเริ่มต้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในบทนี้ จะกล่าวถึงที่มาสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสองและกำลังสาม และการหาสูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับเพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาดังกล่าว รวมถึงขั้นตอนของการใช้โปรแกรมเพื่อแสดงผลการคำนวณในรูปแบบของกราฟและตารางข้อมูลของผลเฉลยเชิงตัวเลข

3.1 สมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วง

งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาการจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น โดยกำหนดให้เส้นลวดยาว a หน่วย มีความยืดหยุ่น (Flexible) มีน้ำหนัก (Heavy) และมีความหนาแน่นแบบเอกรูป (Uniform Density) เส้นลวดถูกแขวนในแนวตั้งโดยปลายด้านบน ($x=0$) ถูกตรึงให้อยู่กับที่ ส่วนปลายด้านล่าง ($x=a$) มีความชันเป็นศูนย์ รูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวดขึ้นอยู่กับตำแหน่ง x กล่าวคือ $\phi(x)$ และ $\psi(x)$ ตามลำดับ ถ้ากำหนดให้ $u(x,t)$ แทนตำแหน่งการสั่น (Displacement) ของเส้นลวดที่จุด x ณ เวลา t สมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงจะแสดงในรูปแบบของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขต (Initial Boundary Value Problem) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

$$u_{tt} - (xu_{xx} + u_x) + \alpha |u_t|^{c-1} u_t = 0, \quad \alpha < 0, c \geq 1, \quad (3.1)$$

$$\text{เงื่อนไขขอบเขต} \quad u(0,t) = 0, \quad u_x(a,t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น} \quad u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0, a].$$

เมื่อ α เป็นสัมประสิทธิ์ของความหน่วงและมีค่าเป็นบวก และ $c \geq 1$

จากสมการ (3.1) จะเห็นว่ามีการเพิ่มพจน์ของความหน่วง $\alpha |u_t|^{c-1} u_t$ ซึ่งอยู่ในรูปแบบทั่วไปลงในสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วงทำให้สมการกลายเป็นสมการการสั่นแบบมีความหน่วง สำหรับที่มาของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง สามารถดูรายละเอียดตามเอกสารอ้างอิงที่กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.2

เนื่องจากสมการ (3.1) เป็นสมการแบบไม่เชิงเส้น ทำให้ยากต่อการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytic Solution) ในงานวิจัยนี้จึงทำการศึกษาผลเฉลยประมาณค่าเชิงตัวเลขโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันดับเพื่อนำมาหาผลเฉลยเชิงตัวเลขและสร้างการจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 การหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีผลต่างอันดับ (Finite Difference Method)

เพื่อประมาณค่าเชิงอนุพันธ์ด้วยผลต่างอันดับ สมการที่ (3.1) จะถูกเขียนอยู่ในรูปของ

$$\begin{aligned} u_{tt} - ((m\Delta x)u_{xx} + u_x) + \alpha|u_t|^{c-1}u_t &= 0, & \alpha < 0, c \geq 1, \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(a, t) &= 0, & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) &= \psi(x), & x \in [0, a]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

โดยที่ $m = 1, \dots, M$ เมื่อ $M = \frac{a-0}{\Delta x}$

$$\left(\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} \right) - \left[mh \left(\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) + \left(\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right) \right] + \alpha \left| \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right|^{c-1} \left(\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right) = 0 \quad (3.3)$$

$u_m^{n+1} = u(x, t+k)$, $u_m^n = u(x, t)$, $u_m^{n-1} = u(x, t-k)$, $u_{m+1}^n = u(x+h, t)$, $u_{m-1}^n = u(x-h, t)$, $u_{m+1}^{n+1} = u(x+h, t+k)$, $u_{m-1}^{n+1} = u(x-h, t+k)$, โดยที่ $m = 1, \dots, M$ และ $n = 1, \dots, N$ เมื่อ $M = \frac{a-0}{\Delta x}$ และ $N = \frac{T-0}{\Delta t}$, $h = \Delta x$ และ $k = \Delta t$ เป็นขนาดของช่วงที่ถูกแบ่งของตำแหน่ง x และเวลา t ตามลำดับ

จากพจน์สุดท้ายทางซ้ายมือของสมการ (3.3) เราสามารถพิจารณาได้เป็น 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 $u_m^{n+1} - u_m^{n-1} > 0$ จะได้ว่า

$$\alpha \left| \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right|^{c-1} \left(\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right) = \alpha \left| \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right|^c = \alpha \frac{|u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^c}{(2k)^c}$$

กรณีที่ 2 $u_m^{n+1} - u_m^{n-1} < 0$ จะได้ว่า

$$\alpha \left| \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right|^{c-1} \left(\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right) = -\alpha \left| \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right|^c = -\alpha \frac{|u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^c}{(2k)^c}$$

ก่อนอื่น จะพิจารณาสูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับที่ใช้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับกรณีที่หนึ่งก่อน ส่วนกรณีที่สองจะคำนวณในลักษณะเดียวกัน(ต่างกันแค่เพียงเครื่องหมาย) ดังนี้

เมื่อแทนค่าสมการที่ได้จากกรณีที่หนึ่งลงในสมการที่ (3.3) จะได้ว่า

$$\left(\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} \right) - \left[mh \left(\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) + \left(\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right) \right] + \alpha \frac{|u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^c}{(2k)^c} = 0 \quad (3.4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำ $2k^2$ คูณตลอดในสมการ (3.4) จะได้ว่า

$$(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1}) - [2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] + \alpha 2^{1-c} k^{2-c} |u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^c = 0 \quad (3.5)$$

ซึ่ง $p = \frac{k^2}{h}$, $c \geq 1$

พิจารณาพจน์ $|u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^c$ ในสมการ (3.5) โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem) ดังสมการต่อไปนี้

จะได้สูตรรูปทั่วไปคือ

ถ้า c และ r เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $0 \leq r \leq n$ แล้ว

$$(a+b)^c = \sum_{r=0}^c \binom{c}{r} a^{c-r} b^r$$

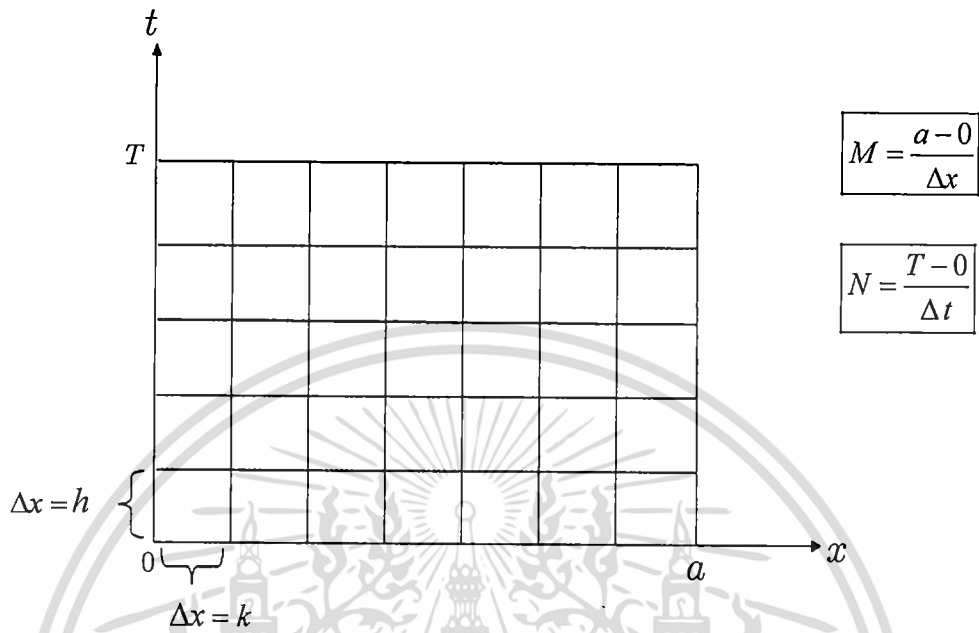
หรือ $(a+b)^c = \binom{c}{0} a^c b^{c-0} + \binom{c}{1} a^{c-1} b^1 + \binom{c}{2} a^{c-2} b^2 + \dots + \binom{c}{c} a^{c-c} b^c$

หรือ $(a+b)^c = a^c + \binom{c}{1} a^{c-1} b^1 + \binom{c}{2} a^{c-2} b^2 + \dots + b^c$

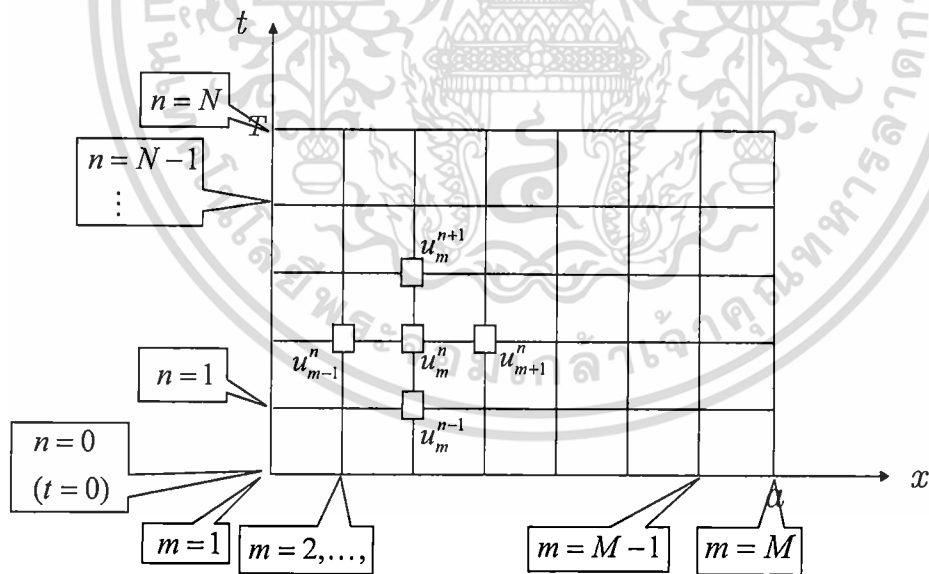
$$(u_m^{n+1} - u_m^{n-1})^c = u_m^{n+1c} + \binom{c}{1} u_m^{n+1c-1} (-u_m^{n-1})^1 + \binom{c}{2} u_m^{n+1c-2} (-u_m^{n-1})^2 + \dots + (-u_m^{n-1})^c$$

ในงานวิจัยนี้ เราจะแบ่งการพิจารณาเป็น 3 หัวข้อ คือ

- 3.2.1 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหวังแบบเชิงเส้น ($c = 1$)
- 3.2.2 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหวังไม่เชิงเส้นกำลังสอง ($c = 2$)
- 3.2.3 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหวังไม่เชิงเส้นกำลังสาม ($c = 3$)



รูปที่ 3.2.1 กราฟแสดงการแบ่งช่วงและขอบเขตของ โดเมน $[0, a] \times [0, T]$



รูปที่ 3.2.2 กราฟแสดงการระบุตำแหน่งของแต่ละช่วงย่อยๆ ที่ถูกแบ่ง และการระบุตำแหน่งของผลเฉลย u

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.1 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหน่วงแบบเชิงเส้น ($c = 1$)

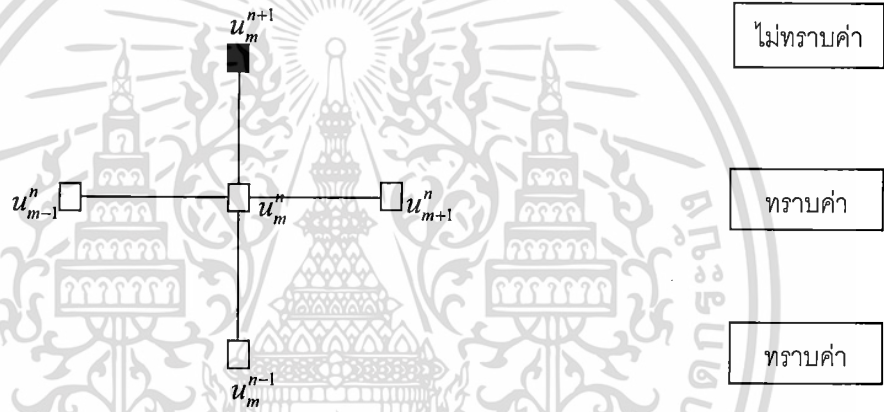
เมื่อแทน $c = 1$ ลงในสมการ (3.5) จะได้ว่า

$$(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1}) - [2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] + \alpha k(u_m^{n+1} - u_m^{n-1}) = 0 \quad (3.6)$$

จากสมการที่ (3.6) จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปชัดเจน (Explicit Form) ได้ดังนี้

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} [(2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n + (\alpha k - 2)u_m^{n-1}] \quad (3.7)$$

$$\text{ซึ่ง } p = \frac{k^2}{h}$$



รูปที่ 3.2.1.1 การระบุตำแหน่งของผลเฉลย u ในสมการ (3.7)

จากสมการ (3.7) เราจะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับทั้งหมด 4 สูตรจาก 4 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ $n = 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$

กรณีที่ 2 เมื่อ $n > 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$

กรณีที่ 3 เมื่อ $n = 0$ และ $m = M$

กรณีที่ 4 เมื่อ $n > 0$ และ $m = M$

กรณีที่ 1 แทน $n = 0$ ในสมการที่ (3.7) เมื่อ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$ จะได้ว่า

$$u_m^1 = \frac{1}{2 + \alpha k} [(2mp + p)u_{m+1}^0 + (4 - 4mp)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 + (\alpha k - 2)u_m^{-1}] \quad (3.8)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

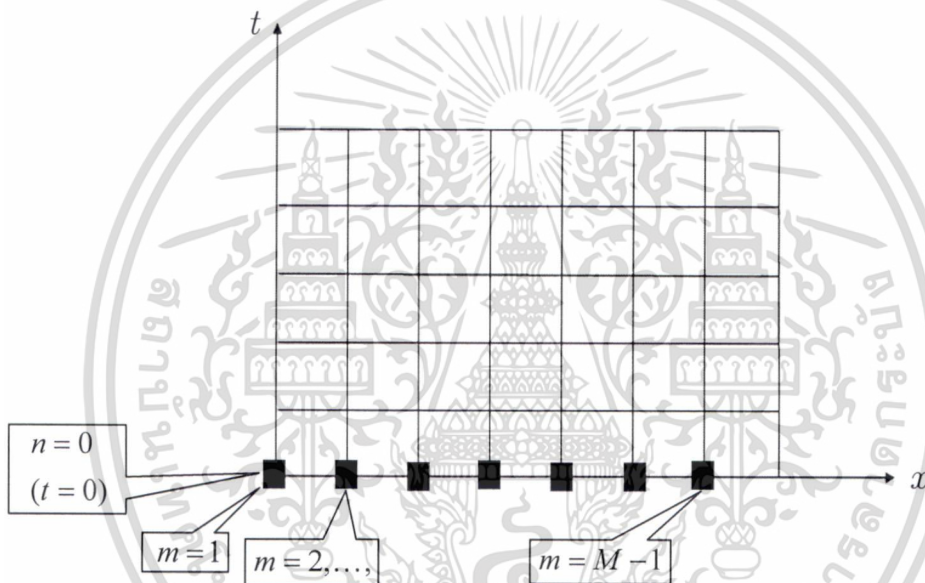
เนื่องจาก u_m^{-1} ในสมการ (3.8)อยู่นอกโดเมน $[0, a] \times [0, T]$ ดังนั้น u_m^{-1} จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันตะตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขเริ่มต้น จะได้ว่า

$$\frac{u_m^0 - u_m^{-1}}{k} \approx \psi(x) \text{ หรือ } u_m^{-1} \approx u_m^0 - k\psi(x) \quad (3.9)$$

แทนสมการที่ (3.9) ในสมการที่ (3.8) จะได้ว่า

$$u_m^1 = \frac{1}{2 + \alpha k} [(2mp + p)u_{m+1}^0 + (2 - 4mp + \alpha k)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 + (-\alpha k^2 + 2k)\psi(x)] \quad (3.10)$$

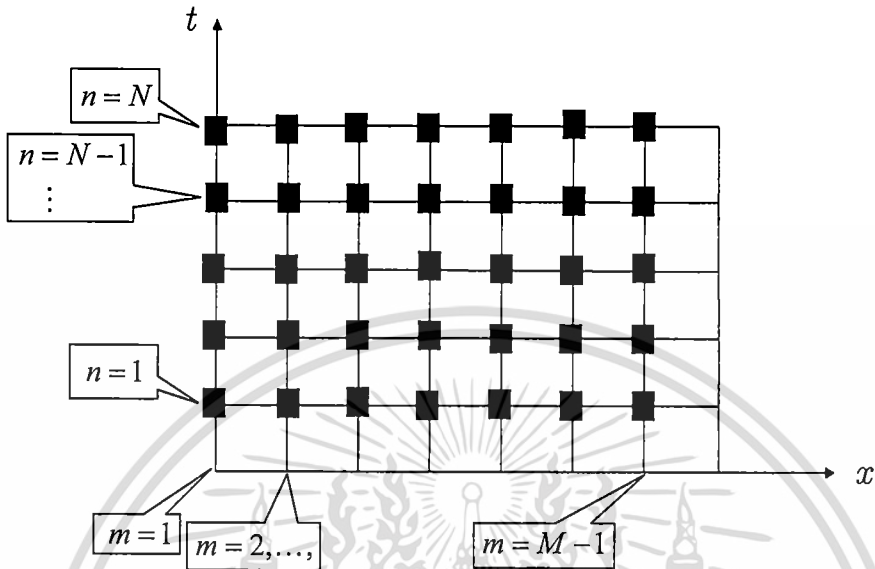
โดยที่ $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$



รูปที่ 3.2.1.2 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.10)

กรณีที่ 2 แทน $n > 0$ ในสมการที่ (3.7) เมื่อ $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$ จะได้ว่า

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} [(2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n + (\alpha k - 2)u_m^{n-1}] \quad (3.11)$$



รูปที่ 3.2.1.3 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.11)

กรณีที่ 3 แทน $n=0$ และ $m=M$ ในสมการที่ (3.10) จะได้ว่า

$$u_M^1 = \frac{1}{2+\alpha k} \left[(2Mp+p)u_{M+1}^0 + (2-4Mp+\alpha k)u_M^0 + (2Mp-p)u_{M-1}^0 + (-\alpha k^2+2k)\psi(x) \right] \quad (3.12)$$

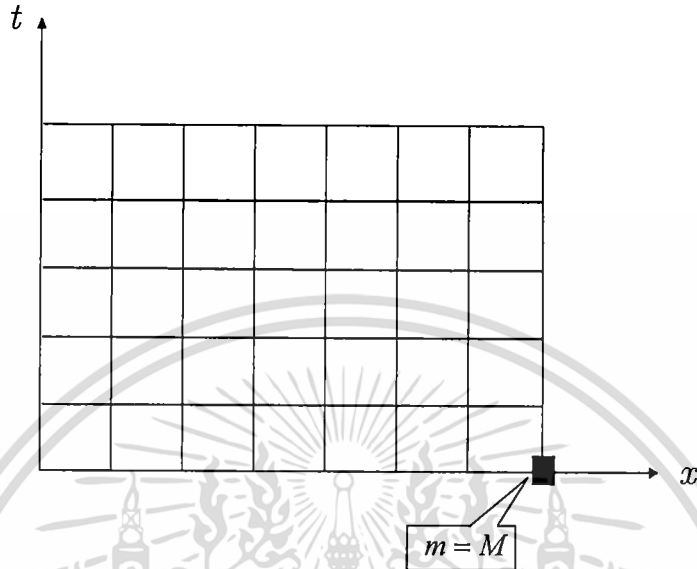
เนื่องจาก u_{M+1}^0 ในสมการ (3.12) อยู่นอกโดเมน $[0,a] \times [0,T]$ ดังนั้น u_M^1 จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^0 - u_{M-1}^0}{2h} \approx 0 \quad \text{หรือ} \quad u_{M+1}^0 \approx u_{M-1}^0 \quad (3.13)$$

แทนสมการที่ (3.13) ในสมการที่ (3.12) จะได้ว่า

$$u_M^1 = \frac{1}{2+\alpha k} \left[(2-4Mp+\alpha k)u_M^0 + 4Mp u_{M+1}^0 + (-\alpha k^2+2k)\psi(x) \right] \quad (3.14)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.2.1.4 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.14)

กรณีที่ 4 แทน $n > 0$ และ $m = M$ ในสมการที่ (3.11) จะได้ว่า

$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2+\alpha k} \left[(2Mp+p)u_{M+1}^n + (4-4Mp)u_M^n + (2Mp-p)u_{M-1}^n + (\alpha k - 2)u_M^{n-1} \right] \quad (3.15)$$

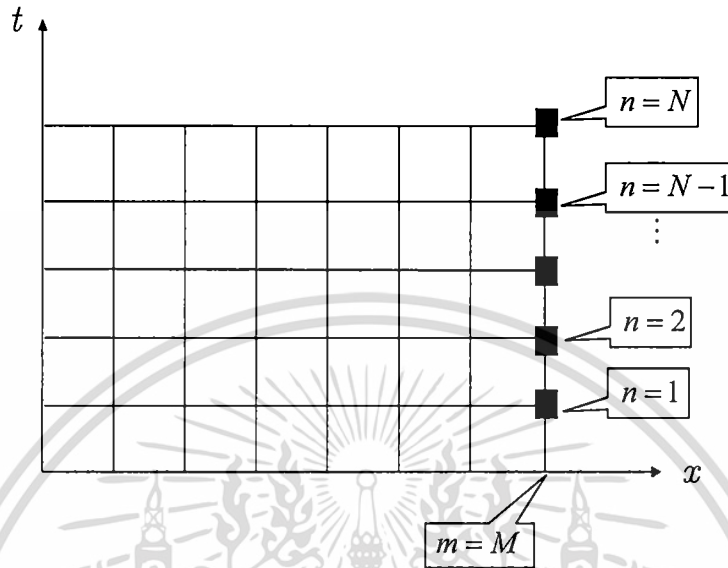
เนื่องจาก u_{M+1}^n ในสมการ (3.15)อยู่นอกโดเมน $[0, a] \times [0, T]$ ดังนั้น u_{M+1}^n จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^n - u_{M-1}^n}{2h} \approx 0 \quad \text{หรือ} \quad u_{M+1}^n \approx u_{M-1}^n \quad (3.16)$$

แทนสมการที่ (3.16) ในสมการที่ (3.15) จะได้ว่า

$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2+\alpha k} \left[(4-4Mp)u_M^n + 4Mpu_{M-1}^n + (\alpha k - 2)u_M^{n-1} \right] \quad (3.17)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.2.1.5 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.17)

จากสมการ (3.10) (3.11) (3.14) และ (3.17) จะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับสอง สำหรับหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้น ดังนี้

$$\text{สูตรที่ 1 } u_m^1 = \frac{1}{2 + \alpha k} [(2mp + p)u_{m+1}^0 + (2 - 4mp + \alpha k)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 + (-\alpha k^2 + 2k)\psi(x)]$$

$$\text{สูตรที่ 2 } u_m^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} [(2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n + (\alpha k - 2)u_m^{n-1}]$$

เมื่อ $m = 1, \dots, M - 1$

$$\text{สูตรที่ 3 } u_M^1 = \frac{1}{2 + \alpha k} [(2 - 4Mp + \alpha k)u_M^0 + 4Mp u_{M-1}^0 + (-\alpha k^2 + 2k)\psi(x)]$$

$$\text{สูตรที่ 4 } u_M^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} [(4 - 4Mp)u_M^n + 4Mp u_{M-1}^n + (\alpha k - 2)u_M^{n-1}]$$

$$\text{โดยที่ } p = \frac{k^2}{h}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.2 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง ($c = 2$)

เมื่อแทน $c = 2$ ลงในสมการ (3.5) จะได้ว่า

$$(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1}) - [2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] + \alpha 2^{-1} |u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^2 = 0 \quad (3.18)$$

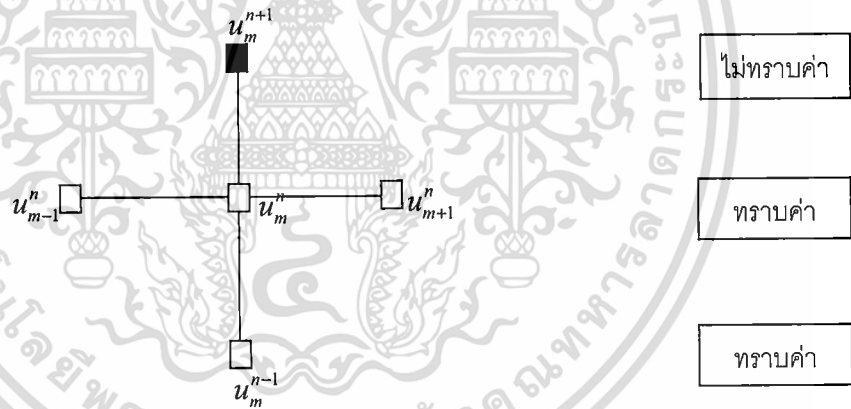
แทน $|u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^2 = (u_m^{n+1})^2 - 2u_m^{n+1}u_m^{n-1} + (u_m^{n-1})^2$ ลงในสมการ (3.18) จะได้

$$(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1}) - [2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] + \alpha 2^{-1} [(u_m^{n+1})^2 - 2u_m^{n+1}u_m^{n-1} + (u_m^{n-1})^2] = 0$$

จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปชัดแจ้ง (Explicit Form) ได้ดังนี้

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha u_m^{n-1})} (u_m^{n+1})^2 + u_m^{n+1} = \frac{1}{(2 - \alpha u_m^{n-1})} [(2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n - (\alpha u_m^{n-1} + 2)u_m^{n-1}] \quad (3.19)$$

โดย $p = \frac{k^2}{h}$



รูปที่ 3.2.2.1 การระบุตำแหน่งของผลเฉลย u ในสมการ (3.19)

จากสมการ (3.19) เราจะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับทั้งหมด 4 สูตรจาก 4 กรณี เช่นเดียวกับหัวข้อ 3.2.1 ดังนี้

กรณีที่ 1 แทน $n = 0$ ในสมการที่ (3.19) เมื่อ $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$ จะได้ว่า

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha u_m^{-1})} (u_m^1)^2 + u_m^1 = \frac{1}{(2 - \alpha u_m^{-1})} [(2mp + p)u_{m+1}^0 + (4 - 4mp)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 - (\alpha u_m^{-1} + 2)u_m^{-1}] \quad (3.20)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

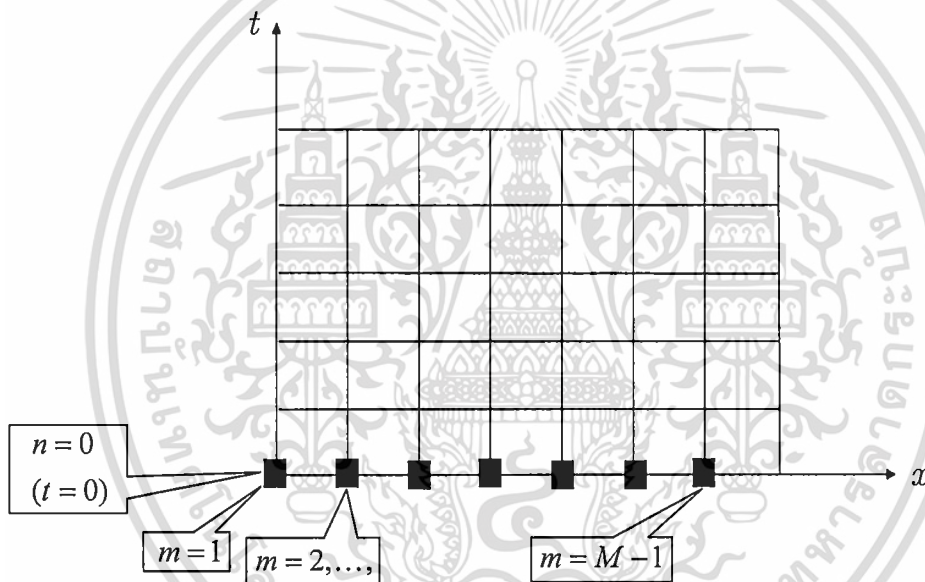
เนื่องจาก u_m^{-1} ในสมการ (3.20) อยู่นอกโดเมน $[0, a] \times [0, T]$ ดังนั้น u_m^{-1} จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขเริ่มต้น จะได้ว่า

$$\frac{u_m^0 - u_m^{-1}}{k} \approx \psi(x) \quad \text{หรือ} \quad u_m^{-1} \approx u_m^0 - k\psi(x) \quad (3.21)$$

แทนสมการที่ (3.21) ในสมการที่ (3.20) จะได้ว่า

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha(u_m^0 - k\psi(x)))} (u_m^1)^2 + u_m^1 = \frac{1}{(2 - \alpha(u_m^0 - k\psi(x)))} \left[(2mp + p)u_{m+1}^0 + (4 - 4mp)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 \right] - (\alpha(u_m^0 - k\psi(x)) + 2)(u_m^0 - k\psi(x)) \quad (3.22)$$

โดยที่ $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$



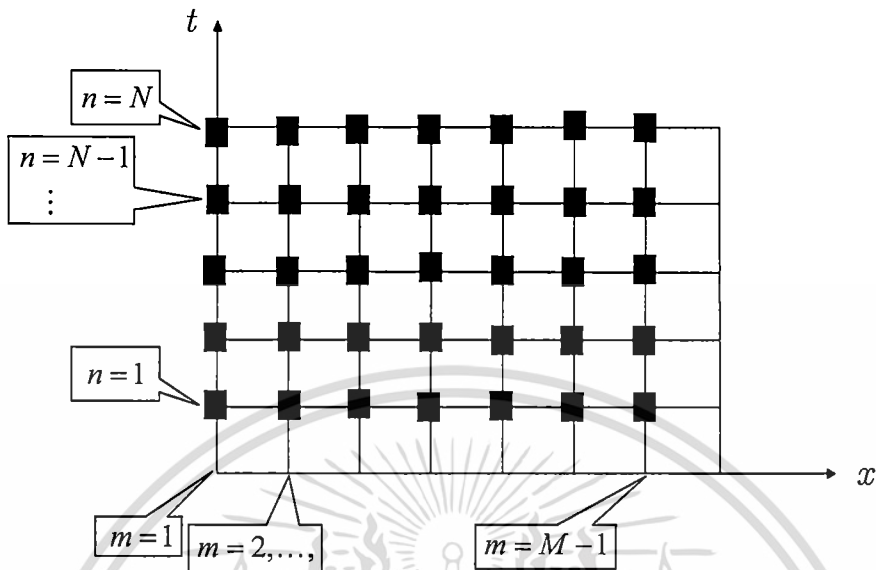
รูปที่ 3.2.2.2 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.22)

กรณีที่ 2 แทน $n > 0$ ในสมการที่ (3.7) เมื่อ $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$ จะได้ว่า

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha u_m^{n-1})} (u_m^{n+1})^2 + u_m^{n+1} = \frac{1}{(2 - \alpha u_m^{n-1})} \left[(2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n - (\alpha u_m^{n-1} + 2)u_m^{n-1} \right] \quad (3.23)$$

โดยที่ $m = 1, 2, 3, \dots, M - 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.2.2.3 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.23)

กรณีที่ 3 แทน $n=0$ และ $m=M$ ในสมการที่ (3.22) จะได้ว่า

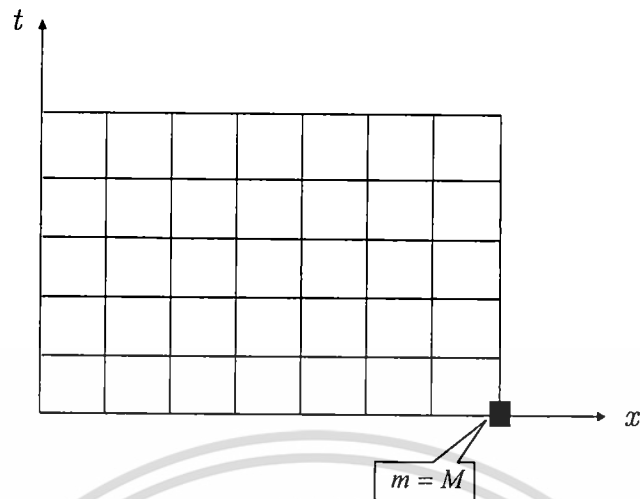
$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha(u_M^0 - kf_2(x)))} (u_M^1)^2 + u_M^1 = \frac{1}{(2-\alpha(u_M^0 - kf_2(x)))} \left[(2Mp+p)u_{M+1}^0 + (4-4Mp)u_M^0 + (2Mp-p)u_{M-1}^0 \right] \left[-\alpha(u_M^0 - kf_2(x)) + 2(u_M^0 - k\psi(x)) \right] \quad (3.24)$$

เนื่องจาก u_{M+1}^0 ในสมการ (3.24)อยู่นอกโดเมน $[0, a] \times [0, T]$ ดังนั้น u_m^{-1} จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^0 - u_{M-1}^0}{2h} \approx 0 \quad \text{หรือ} \quad u_{M+1}^0 \approx u_{M-1}^0 \quad (3.25)$$

แทนสมการที่ (3.25) ในสมการที่ (3.24) จะได้ว่า

$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha(u_M^0 - kf_2(x)))} (u_M^1)^2 + u_M^1 = \frac{1}{(2-\alpha(u_M^0 - kf_2(x)))} \left[4Mp u_{M-1}^0 + (4-4Mp)u_M^0 \right] \left[-\alpha(u_M^0 - kf_2(x)) + 2(u_M^0 - k\psi(x)) \right] \quad (3.26)$$



รูปที่ 3.2.2.4 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.26)

กรณีที่ 4 แทน $n > 0$ และ $m = M$ ในสมการที่ (3.23) จะได้ว่า

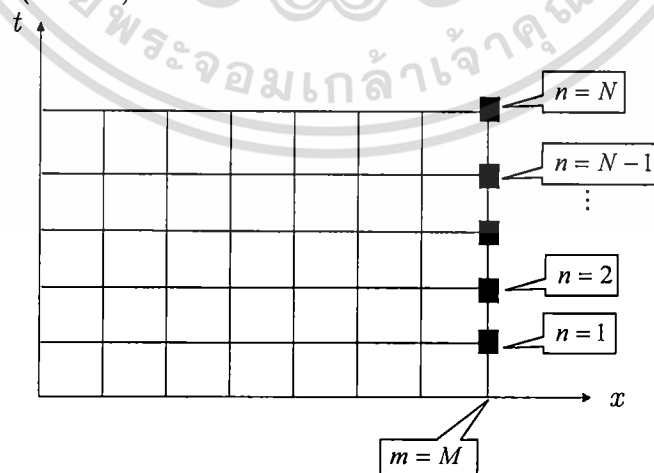
$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[(2Mp + p)u_{M+1}^n + (4 - 4Mp)u_M^n + (2Mp - p)u_{M-1}^n + (\alpha k - 2)u_M^{n-1} \right] \quad (3.27)$$

เนื่องจาก u_{M+1}^n ในสมการ (3.27)อยู่นอกโดเมน $[0, a] \times [0, T]$ ดังนั้น u_{M+1}^n จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^n - u_{M-1}^n}{2h} \approx 0 \quad \text{หรือ} \quad u_{M+1}^n \approx u_{M-1}^n \quad (3.28)$$

แทนสมการที่ (3.28) ในสมการที่ (3.27) จะได้ว่า

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha u_M^{n-1})} (u_M^{n+1})^2 + u_M^{n+1} = \frac{1}{(2 - \alpha u_M^{n-1})} \left[(2Mp + p)u_{M-1}^n + (4 - 4Mp)u_M^n + (2Mp - p)u_{M-1}^n - (\alpha u_M^{n-1} + 2)u_M^{n-1} \right] \quad (3.29)$$



รูปที่ 3.2.2.5 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.29)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (3.22) (3.23) (3.26) และ (3.29) จะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง ดังนี้

สูตรที่ 1

$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha(u_m^0 - kf_2(x)))} (u_m^1)^2 + u_m^1 = \frac{1}{(2-\alpha(u_m^0 - kf_2(x)))} \left[(2mp+p)u_{m+1}^0 + (4-4mp)u_m^0 + (2mp-p)u_{m-1}^0 \right] \left[-(\alpha(u_m^0 - kf_2(x)) + 2)(u_m^0 - k\psi(x)) \right]$$

สูตรที่ 2
$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha u_m^{n-1})} (u_m^{n+1})^2 + u_m^{n+1} = \frac{1}{(2-\alpha u_m^{n-1})} \left[(2mp+p)u_{m+1}^n + (4-4mp)u_m^n + (2mp-p)u_{m-1}^n - (\alpha u_m^{n-1} + 2)u_m^{n-1} \right]$$

เมื่อ $m = 1, \dots, M-1$

สูตรที่ 3
$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha(u_M^0 - kf_2(x)))} (u_M^1)^2 + u_M^1 = \frac{1}{(2-\alpha(u_M^0 - kf_2(x)))} \left[4Mpu_{M-1}^0 + (4-4Mp)u_M^0 \right] \left[-(\alpha(u_M^0 - kf_2(x)) + 2)(u_M^0 - k\psi(x)) \right]$$

สูตรที่ 4
$$\frac{\alpha}{2(2-\alpha u_M^{n-1})} (u_M^{n+1})^2 + u_M^{n+1} = \frac{1}{(2-\alpha u_M^{n-1})} \left[4Mpu_{M-1}^n + (4-4Mp)u_M^n - (\alpha u_M^{n-1} + 2)u_M^{n-1} \right]$$

โดยที่ $p = \frac{k^2}{h}$

จากสูตรที่ 1-4 กำหนดให้ u_M^0 เป็นรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวด ส่วน $\psi(x)$ เป็นความเร็วต้นของเส้นลวด หลังจากแทนค่าพจน์ที่ทราบค่าลงไปในสูตรทางด้านขวามือแล้ว จะติดเทอมที่ไม่ทราบค่าคือ $(u_m^{n+1})^2$ และ u_m^{n+1} ซึ่งจะอยู่ในรูปของสมการกำลังสอง กล่าวคือ $a(u_m^{n+1})^2 + bu_m^{n+1} + c = 0$ ดังนั้นเราจะสามารถหาผลเฉลยได้จาก $u_m^{n+1} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ เมื่อ $x = u_m^{n+1}$ เป็นผลเฉลยของสมการ และจะพิจารณาเฉพาะกรณีที่ผลเฉลยเป็นจำนวนจริงเท่านั้น กรณีที่ผลเฉลยเป็นจำนวนเชิงซ้อนเราจะไม่ใช่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.3 สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ สำหรับความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม ($c = 3$)

เมื่อแทน $c = 3$ ลงในสมการ (3.5) จะได้ว่า

$$(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1}) - [2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] + \alpha 2^{-1} |u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^3 = 0 \quad (3.30)$$

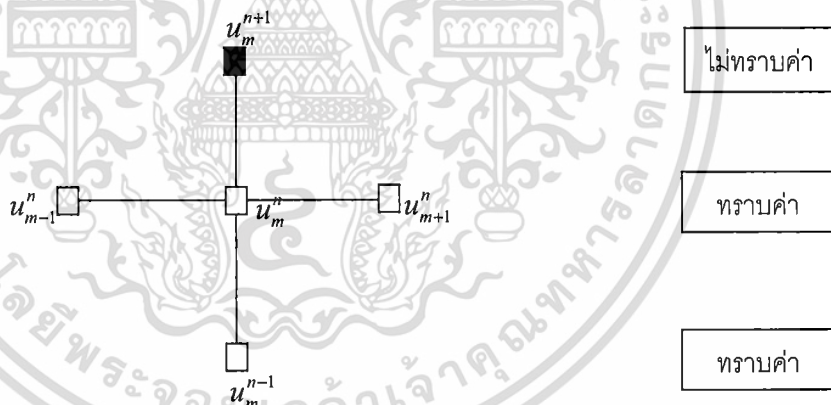
แทน $|u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^3 = (u_m^{n+1})^3 - 3(u_m^{n+1})^2 u_m^{n-1} + 3u_m^{n+1} (u_m^{n-1})^2 - (u_m^{n-1})^3$ ลงในสมการ (3.18) จะได้

$$(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1}) - [2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] + \alpha 2^{-1} \left[(u_m^{n+1})^3 - 3(u_m^{n+1})^2 u_m^{n-1} + 3u_m^{n+1} (u_m^{n-1})^2 - (u_m^{n-1})^3 \right] = 0$$

จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปชัดเจน (Explicit Form) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & (u_m^{n+1})^3 - 3u_m^{n-1} (u_m^{n+1})^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3(u_m^{n-1})^2 \right) u_m^{n+1} \\ & = \frac{2}{\alpha} (2mp + p) u_{m+1}^n + \frac{2}{\alpha} (4 - 4mp) u_m^n + \frac{2}{\alpha} (2mp - p) u_{m-1}^n + \left((u_m^{n-1})^2 - \frac{4}{\alpha} \right) u_m^{n-1} \end{aligned} \quad (3.31)$$

โดย $p = \frac{k^2}{h}$



รูปที่ 3.2.3.1 การระบุตำแหน่งของผลเฉลย u ในสมการ (3.31)

จากสมการ (3.31) เราจะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับทั้งหมด 4 สูตรจาก 4 กรณี เช่นเดียวกับหัวข้อ 3.2.1 และ 3.2.2 ดังนี้

กรณีที่ 1 แทน $n = 0$ ในสมการที่ (3.31) เมื่อ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$ จะได้ว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
& (u_m^1)^3 - 3u_m^{-1}(u_m^1)^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3(u_m^{-1})^2\right)u_m^1 \\
&= \frac{2}{\alpha}(2mp+p)u_{m+1}^0 + \frac{2}{\alpha}(4-4mp)u_m^0 + \frac{2}{\alpha}(2mp-p)u_{m-1}^0 + \left((u_m^{-1})^2 - \frac{4}{\alpha}\right)u_m^{-1}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

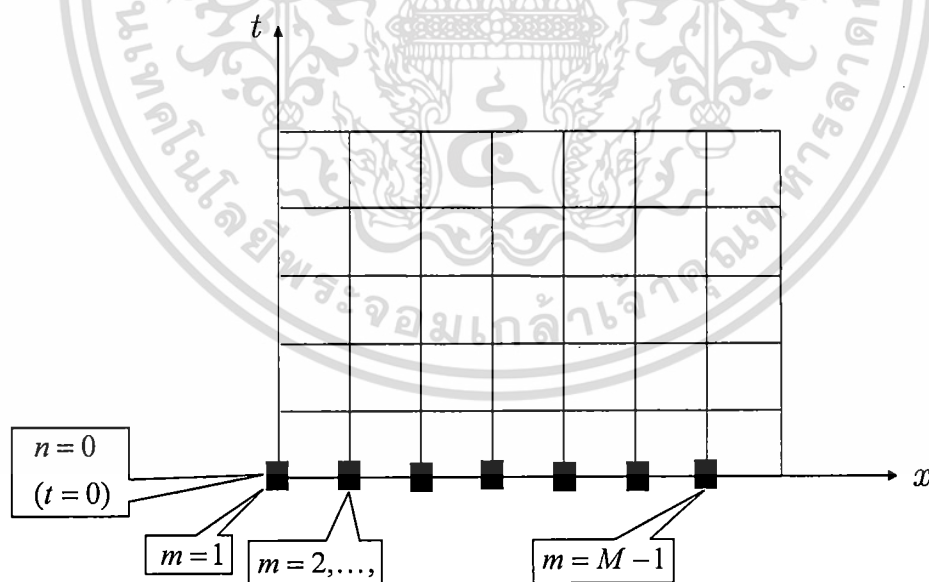
เนื่องจาก u_m^{-1} ในสมการ (3.20)อยู่นอกโดเมน $[0, \alpha] \times [0, T]$ ดังนั้น u_m^{-1} จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขเริ่มต้น จะได้ว่า

$$\frac{u_m^0 - u_m^{-1}}{k} \approx \psi(x) \quad \text{หรือ} \quad u_m^{-1} \approx u_m^0 - k\psi(x) \tag{3.33}$$

แทนสมการที่ (3.33) ในสมการที่ (3.32) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& (u_m^1)^3 - 3[u_m^0 - kf_2(x)](u_m^1)^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3\left[(u_m^0)^2 - 2u_m^0kf_2(x) + (kf_2(x))^2\right]\right)u_m^1 \\
&= \frac{2}{\alpha}(2mp+p)u_{m+1}^0 + \frac{2}{\alpha}(4-4mp)u_m^0 + \frac{2}{\alpha}(2mp-p)u_{m-1}^0 \\
&+ \left[(u_m^0)^2 - 2u_m^0kf_2(x) + (kf_2(x))^2 - \frac{4}{\alpha}\right](u_m^0 - kf_2(x))
\end{aligned} \tag{3.34}$$

โดยที่ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$



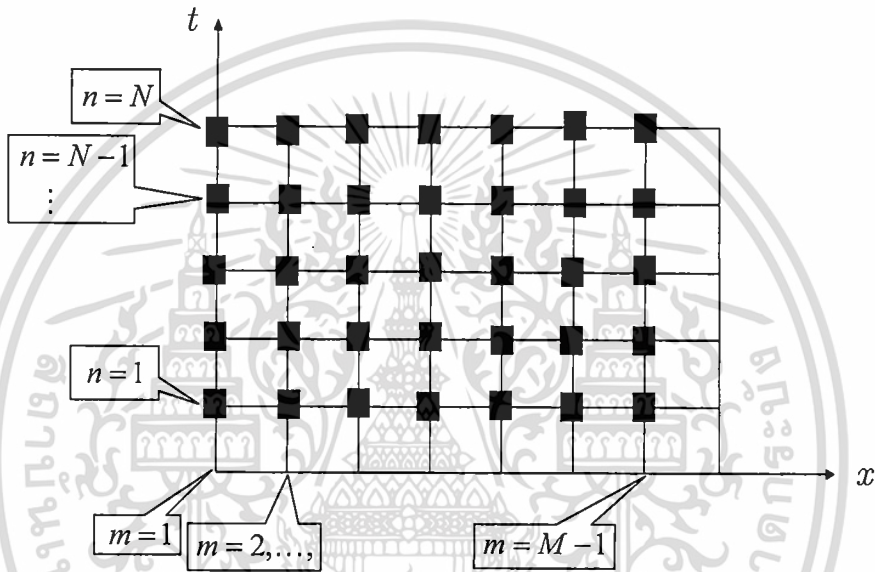
รูปที่ 3.2.3.2 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 1 และต้องใช้สูตร (3.34)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรณีที่ 2 แทน $n > 0$ ในสมการที่ (3.31) เมื่อ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & (u_m^{n+1})^3 - 3u_m^{n-1}(u_m^{n+1})^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3(u_m^{n-1})^2\right)u_m^{n+1} \\ &= \frac{2}{\alpha}(2mp + p)u_{m+1}^n + \frac{2}{\alpha}(4 - 4mp)u_m^n + \frac{2}{\alpha}(2mp - p)u_{m-1}^n + \left((u_m^{n-1})^2 - \frac{4}{\alpha}\right)u_m^{n-1} \end{aligned} \quad (3.35)$$

โดยที่ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$



รูปที่ 3.2.3.3 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 2 และต้องใช้สูตร (3.35)

กรณีที่ 3 แทน $n = 0$ และ $m = M$ ในสมการที่ (3.34) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & (u_M^1)^3 - 3[u_M^0 - kf_2(x)](u_M^1)^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3[(u_M^0)^2 - 2u_M^0 kf_2(x) + (kf_2(x))^2]\right)u_M^1 \\ &= \frac{2}{\alpha}(2Mp + p)u_{M+1}^0 + \frac{2}{\alpha}(4 - 4Mp)u_M^0 + \frac{2}{\alpha}(2Mp - p)u_{M-1}^0 + \left[(u_M^0)^2 - 2u_M^0 kf_2(x) + (kf_2(x))^2 - \frac{4}{\alpha}\right](u_M^0 - kf_2(x)) \end{aligned} \quad (3.36)$$

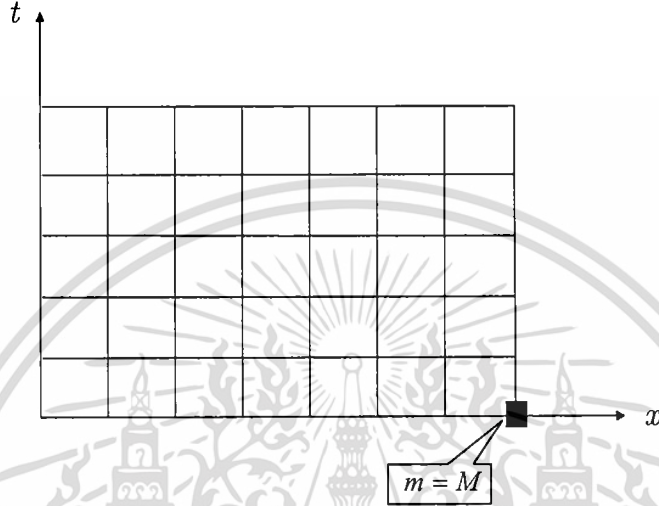
เนื่องจาก u_{M+1}^0 ในสมการ (3.24) อยู่นอกโดเมน $[0, a] \times [0, T]$ ดังนั้น u_{M+1}^0 จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันตะตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^0 - u_{M-1}^0}{2h} \approx 0 \quad \text{หรือ} \quad u_{M+1}^0 \approx u_{M-1}^0 \quad (3.37)$$

แทนสมการที่ (3.37) ในสมการที่ (3.36) จะได้ว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
& (u_M^1)^3 - 3[u_M^0 - kf_2(x)](u_M^1)^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3\left[(u_M^0)^2 - 2u_M^0 kf_2(x) + (kf_2(x))^2\right]\right)u_M^1 \\
& = \frac{2}{\alpha}(4Mp)u_{M-1}^0 + \frac{2}{\alpha}(4-4Mp)u_M^0 + \left[(u_M^0)^2 - 2u_M^0 kf_2(x) + (kf_2(x))^2 - \frac{4}{\alpha}\right](u_M^0 - kf_2(x))
\end{aligned} \tag{3.38}$$



รูปที่ 3.2.3.4 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 3 และต้องใช้สูตร (3.38)

กรณีที่ 4 แทน $n > 0$ และ $m = M$ ในสมการที่ (3.35) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& (u_M^{n+1})^3 - 3u_M^{n-1}(u_M^{n+1})^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3(u_M^{n-1})^2\right)u_M^{n+1} \\
& = \frac{2}{\alpha}(2Mp + p)u_{M+1}^n + \frac{2}{\alpha}(4-4Mp)u_M^n + \frac{2}{\alpha}(2Mp - p)u_{M-1}^n + \left((u_m^{n-1})^2 - \frac{4}{\alpha}\right)u_M^{n-1}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

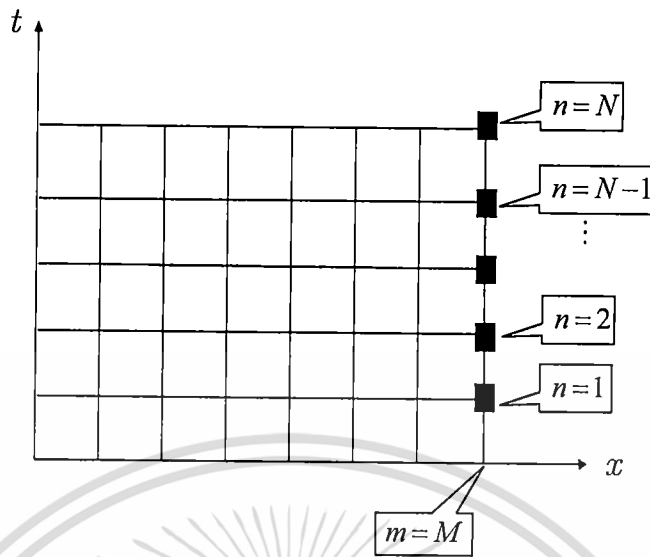
เนื่องจาก u_{M+1}^n ในสมการ (3.27) อยู่นอกโดเมน $[0, a] \times [0, T]$ ดังนั้น u_{M+1}^n จะถูกประมาณค่าโดยการแทนค่าสูตรผลต่างอันดับตรงกลาง (Central Difference) ลงในเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^n - u_{M-1}^n}{2h} \approx 0 \text{ หรือ } u_{M+1}^n \approx u_{M-1}^n \tag{3.40}$$

แทนสมการที่ (3.40) ในสมการที่ (3.39) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
& (u_M^{n+1})^3 - 3u_M^{n-1}(u_M^{n+1})^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3(u_M^{n-1})^2\right)u_M^{n+1} \\
& = \frac{2}{\alpha}(4Mp)u_{M-1}^n + \frac{2}{\alpha}(4-4Mp)u_M^n + \left((u_m^{n-1})^2 - \frac{4}{\alpha}\right)u_M^{n-1}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.2.3.5 ตำแหน่งของผลเฉลย u ในกรณีที่ 4 และต้องใช้สูตร (3.41)

จากสมการ (3.34) (3.35) (3.38) และ (3.41) จะได้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับสูงสำหรับหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม ดังนี้

สูตรที่ 1

$$\begin{aligned} & (u_m^1)^3 - 3[u_m^0 - kf_2(x)](u_m^1)^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3\left[(u_m^0)^2 - 2u_m^0kf_2(x) + (kf_2(x))^2\right]\right)u_m^1 \\ &= \frac{2}{\alpha}(2mp + p)u_{m+1}^0 + \frac{2}{\alpha}(4 - 4mp)u_m^0 + \frac{2}{\alpha}(2mp - p)u_{m-1}^0 + \left[(u_m^0)^2 - 2u_m^0kf_2(x) + (kf_2(x))^2 - \frac{4}{\alpha}\right](u_m^0 - kf_2(x)) \end{aligned}$$

สูตรที่ 2

$$\begin{aligned} & (u_m^{n+1})^3 - 3u_m^{n-1}(u_m^{n+1})^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3(u_m^{n-1})^2\right)u_m^{n+1} \\ &= \frac{2}{\alpha}(2mp + p)u_{m+1}^n + \frac{2}{\alpha}(4 - 4mp)u_m^n + \frac{2}{\alpha}(2mp - p)u_{m-1}^n + \left((u_m^{n-1})^2 - \frac{4}{\alpha}\right)u_m^{n-1} \end{aligned}$$

เมื่อ $m = 1, \dots, M - 1$

สูตรที่ 3

$$\begin{aligned} & (u_M^1)^3 - 3[u_M^0 - kf_2(x)](u_M^1)^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3\left[(u_M^0)^2 - 2u_M^0kf_2(x) + (kf_2(x))^2\right]\right)u_M^1 \\ &= \frac{2}{\alpha}(4Mp)u_{M-1}^0 + \frac{2}{\alpha}(4 - 4Mp)u_M^0 + \left[(u_M^0)^2 - 2u_M^0kf_2(x) + (kf_2(x))^2 - \frac{4}{\alpha}\right](u_M^0 - kf_2(x)) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สูตรที่ 4

$$\begin{aligned} & (u_M^{n+1})^3 - 3u_M^{n-1}(u_M^{n+1})^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3(u_M^{n-1})^2\right)u_M^{n+1} \\ &= \frac{2}{\alpha}(4Mp)u_M^{n-1} + \frac{2}{\alpha}(4-4Mp)u_M^n + \left((u_m^{n-1})^2 - \frac{4}{\alpha}\right)u_M^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{โดยที่ } p = \frac{k^2}{h}$$

นอกจากนี้ในสูตรที่ 1-4 เราจะแทน u_M^0 ด้วยรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวด ส่วน $\psi(x)$ เป็นความเร็วต้นของเส้นลวด หลังจากแทนค่าพจน์ที่ทราบค่าลงไปในสูตรทางด้านขวามือแล้ว จะติดเทอมที่ไม่ทราบค่าคือ $(u_m^{n+1})^3$, $(u_m^{n+1})^2$ และ u_m^{n+1} ซึ่ง จะ อยู่ ใน รูป ป ของ สม การ ก ำ ลัง สาม ก ล ำ ว คือ $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = 0$

กำหนดให้

$$q = \frac{9abc - 27a^2d - 2b^3}{54a^3}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{3ac - b^2}{9a^2}\right) + q^2}$$

$$s = \sqrt[3]{q+r}$$

$$t = \sqrt[3]{q-r}$$

ดังนั้น เราจะสามารถหาผลเฉลยได้จาก

$$x_1 = s+t - \frac{b}{3a}$$

$$x_2 = \frac{-1}{2}(s+t) - \frac{b}{3a} + \frac{\sqrt{3}}{2}(s-t)i$$

$$x_3 = \frac{-1}{2}(s+t) - \frac{b}{3a} - \frac{\sqrt{3}}{2}(s-t)i$$

เมื่อ $x = u_m^{n+1}$ เป็นผลเฉลยของสมการ และเมื่อใช้ x_1 จะได้กราฟแบบที่ 1

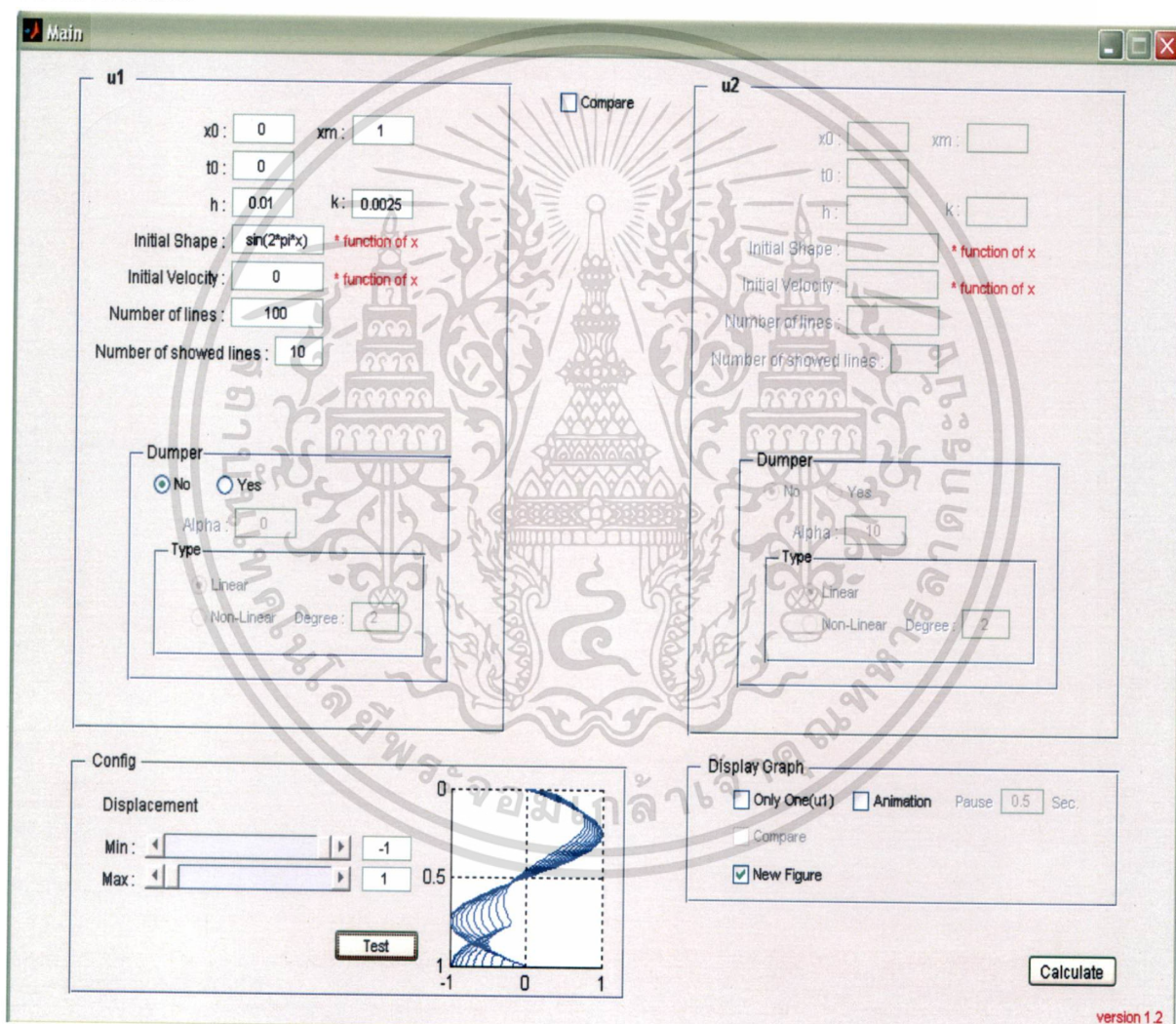
เมื่อใช้ x_2 จะได้กราฟแบบที่ 2

เมื่อใช้ x_3 จะได้กราฟแบบที่ 3

โดยกราฟแบบที่ 1 ลักษณะของกราฟไม่แน่นอน จึงไม่นำมาพิจารณา ส่วนกราฟแบบที่ 2 และ 3 ได้ผลเหมือนกัน ในงานวิจัยนี้จึงเลือกแสดงผลของกราฟแบบที่ 2

3.3 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อแสดงกราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลข

สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับจากหัวข้อ 3.2.1, 3.2.2 และ 3.2.3 จะถูกนำมาพัฒนาโดยโปรแกรม MATLAB เพื่อสร้างหน้าต่างแบบกราฟิก (Graphic User Interface: GUI) สำหรับการรับข้อมูลและแสดงผล ในรูปของตารางและกราฟของผลเฉลยประมาณค่าเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตของสมการ การสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสองและกำลังสาม โดยมี ขั้นตอนดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.3.1 หน้าต่าง GUI แบบไม่มีการเปรียบเทียบ

จากรูป 3.3.1 จะเห็นว่าหน้าต่างถูกแบ่งเป็น 2 ส่วน คือส่วน u1 และ u2 โดยส่วน u1 จะใช้รับค่าข้อมูล เมื่อต้องการแสดงผลกราฟการสั่นแบบไม่มีการเปรียบเทียบ และส่วน u2 จะใช้รับค่าข้อมูลเมื่อต้องการแสดงผลกราฟการสั่นแบบมีการเปรียบเทียบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3.1 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมแสดงผลกราฟการสั่นแบบไม่มีการเปรียบเทียบ

ขั้นที่ 1 ในส่วน u1 รับค่าข้อมูลเริ่มต้นทั้งหมด เพื่อใช้สำหรับการคำนวณ ดังนี้

- คีย์ข้อมูลความยาวของเส้นลวด ซึ่งโดยทั่วไปในการคำนวณด้วยวิธีเชิงตัวเลขจะกำหนดให้เส้นลวดยาว 1 หน่วย
- คีย์ข้อมูลเวลาเริ่มต้น โดยปกติจะกำหนดให้เวลาเริ่มต้นเป็นศูนย์
- คีย์ข้อมูลขนาดของช่วงย่อยๆ ของตำแหน่ง (h) และเวลา (k) ตามลำดับ โดยในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้ $h = 0.01$ และ $k = 0.0025$
- คีย์ข้อมูลรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวด ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้ฟังก์ชัน $\phi(x) = \sin 2\pi x$ แทนรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวด เนื่องจากเป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา
- คีย์ข้อมูลความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวด ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้ฟังก์ชันค่าคงที่, ฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันตรีโกณมิติ ตามลำดับ ดังนี้ $\psi(x) = 0$, $\psi(x) = 1$, $\psi(x) = x$, $\psi(x) = \sin x$ และ $\psi(x) = \cos x$ แทนความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวด
- คีย์ข้อมูลจำนวนของเส้นที่ต้องการคำนวณ ซึ่งในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้จำนวนของเส้นที่ต้องการให้โปรแกรมคำนวณเป็น 100 และกำหนดให้ $k = 0.0025$ แล้ว โปรแกรมจะคำนวณเส้นกราฟทั้งหมด 100 เส้น แต่ละเส้นมีเวลาห่างกัน 0.0025
- คีย์ข้อมูลจำนวนของเส้นที่ต้องการแสดง ซึ่งในงานวิจัยนี้จะกำหนดให้จำนวนของเส้นที่ต้องการให้โปรแกรมแสดงเป็น 10 และกำหนดให้จำนวนเส้นที่ต้องการคำนวณเป็น 100 โปรแกรมจะแสดงเส้นกราฟเพียง 10 เส้น จากเส้นกราฟที่คำนวณได้ทั้งหมด 100 เส้น คือเลือกแสดงผลทุกๆ 10 เส้น

ขั้นที่ 2 ในส่วนของ Dumper ให้เลือกข้อมูลของความหน่วง ดังนี้

- เลือก No เมื่อต้องการแสดงผลการสั่นแบบไม่มีความหน่วง หรือเลือก Yes เมื่อต้องการแสดงผลการสั่นแบบมีความหน่วง โดยแบ่งเป็น
 - เลือก Linear สำหรับความหน่วงแบบเชิงเส้น หรือ
 - เลือก Non-Linear และคีย์เลข 2 สำหรับความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสอง หรือ
 - เลือก Non-Linear และคีย์เลข 3 สำหรับความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสาม
- คีย์ข้อมูลค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง Alpha
ในงานวิจัยนี้ค่า Alpha จะถูกพิจารณาเป็น 3 กรณี คือ

- กรณีของความหน่วงแบบเชิงเส้น จะกำหนดให้ค่า Alpha อยู่ระหว่าง 1 ถึง 10,000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

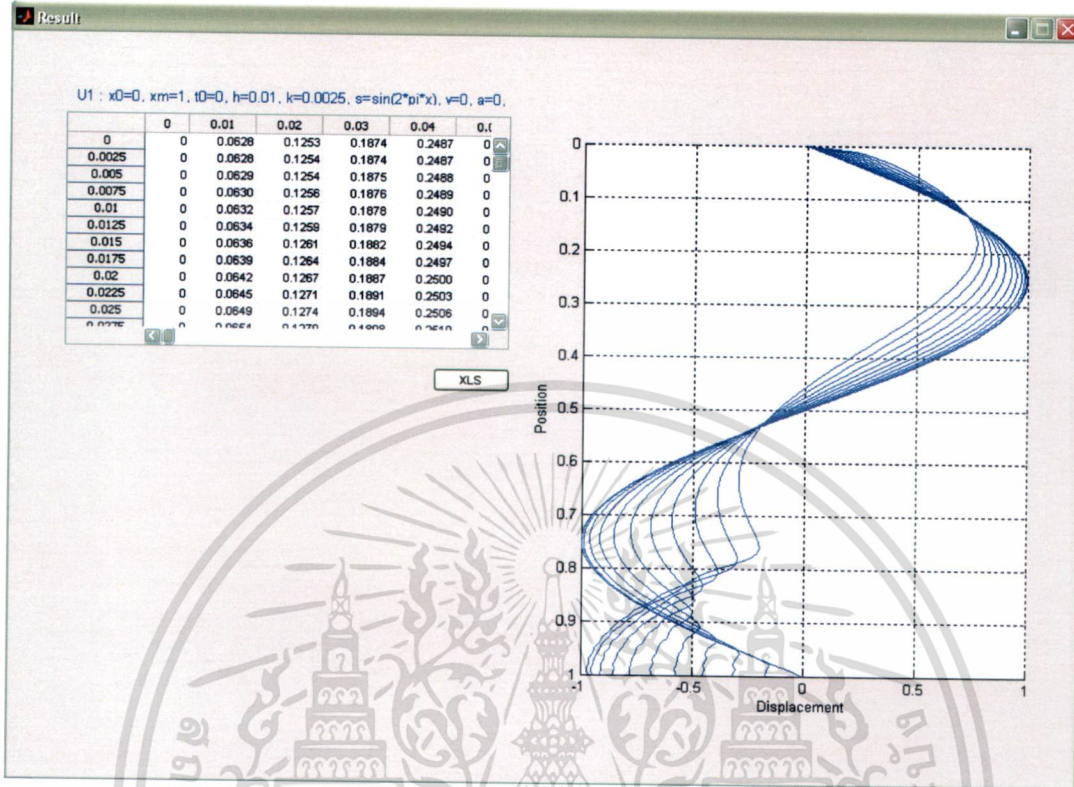
- กรณีของความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสอง จะกำหนดให้ค่า Alpha อยู่ระหว่าง 0.5 ถึง 3.5
- กรณีของความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสาม จะกำหนดให้ค่า Alpha อยู่ระหว่าง 0.5 ถึง 10,000

ขั้นที่ 3 ในส่วนของ Config จะทดสอบผลกราฟที่ได้จากการคำนวณ

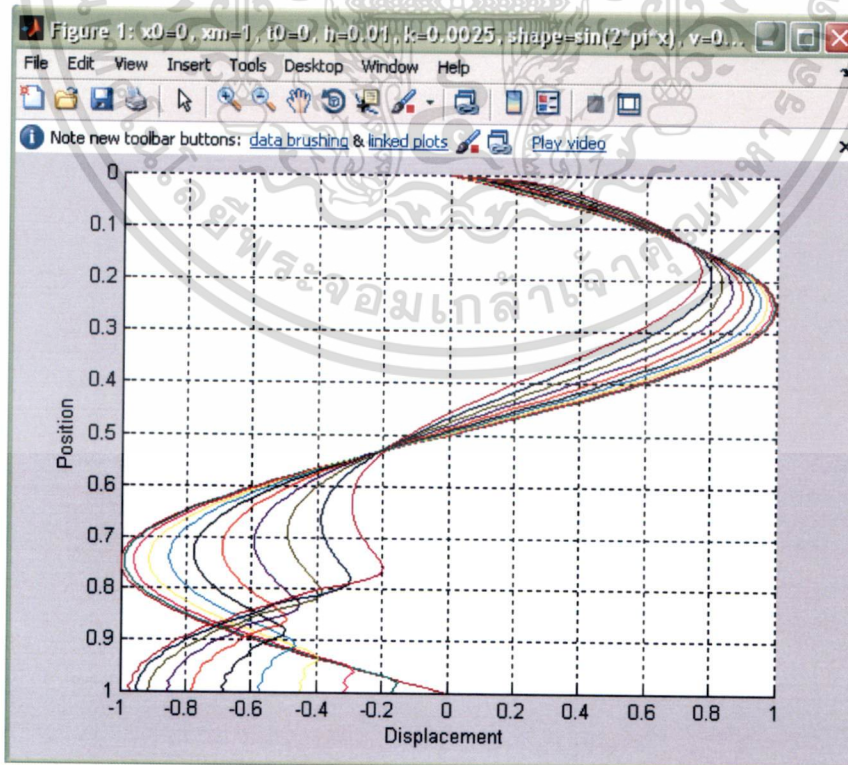
- คีย์ข้อมูลค่า Min และค่า Max เพื่อกำหนดสเกลของแกน x โดยโปรแกรมจะเซทค่าไว้ที่ -1 และ 1 ตามลำดับ
- กดปุ่ม Test เพื่อทดสอบว่าได้ผลกราฟตามที่ต้องการแล้วหรือไม่ ถ้าผลยังไม่เป็นที่พอใจ สามารถแก้ไขโดยคีย์ข้อมูลในขั้นที่ 1 ใหม่อีกครั้ง

ขั้นที่ 4 ในส่วนของ Display Graph จะแสดงผลกราฟโดยขึ้นหน้าต่างใหม่

- คลิกที่ช่อง Animation และคีย์ข้อมูลเวลาที่ต้องการตีเลยในช่อง Pause (โปรแกรมจะเซทค่าไว้ที่ 0.5 Sec.) เมื่อต้องการให้แสดงผลกราฟแบบ animation โดยจะมีหน้าต่างใหม่แสดงผลกราฟแบบ animation พร้อมทั้งตารางแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อกดปุ่ม XLS ในหน้าต่างใหม่นี้ และ save ไฟล์เป็น .xls จะได้ไฟล์ excel เก็บข้อมูลตารางของผลเฉลยเชิงตัวเลข หรือ
- หากต้องการแสดงผลกราฟที่สามารถแก้ไข ปรับเปลี่ยนรายละเอียดของกราฟได้ ให้คลิกช่อง New Figure หรือ
- หากต้องการแสดงผลกราฟทั้งสองหน้าต่าง คลิกที่ช่อง Animation และช่อง New Figure พร้อมกัน จะมีหน้าต่างใหม่ขึ้นมา 2 หน้าต่าง โดยหน้าต่างแรกแสดงผลกราฟแบบ animation พร้อมทั้งตารางแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข ส่วนหน้าต่างที่สองแสดงผลกราฟเป็นภาพสี่



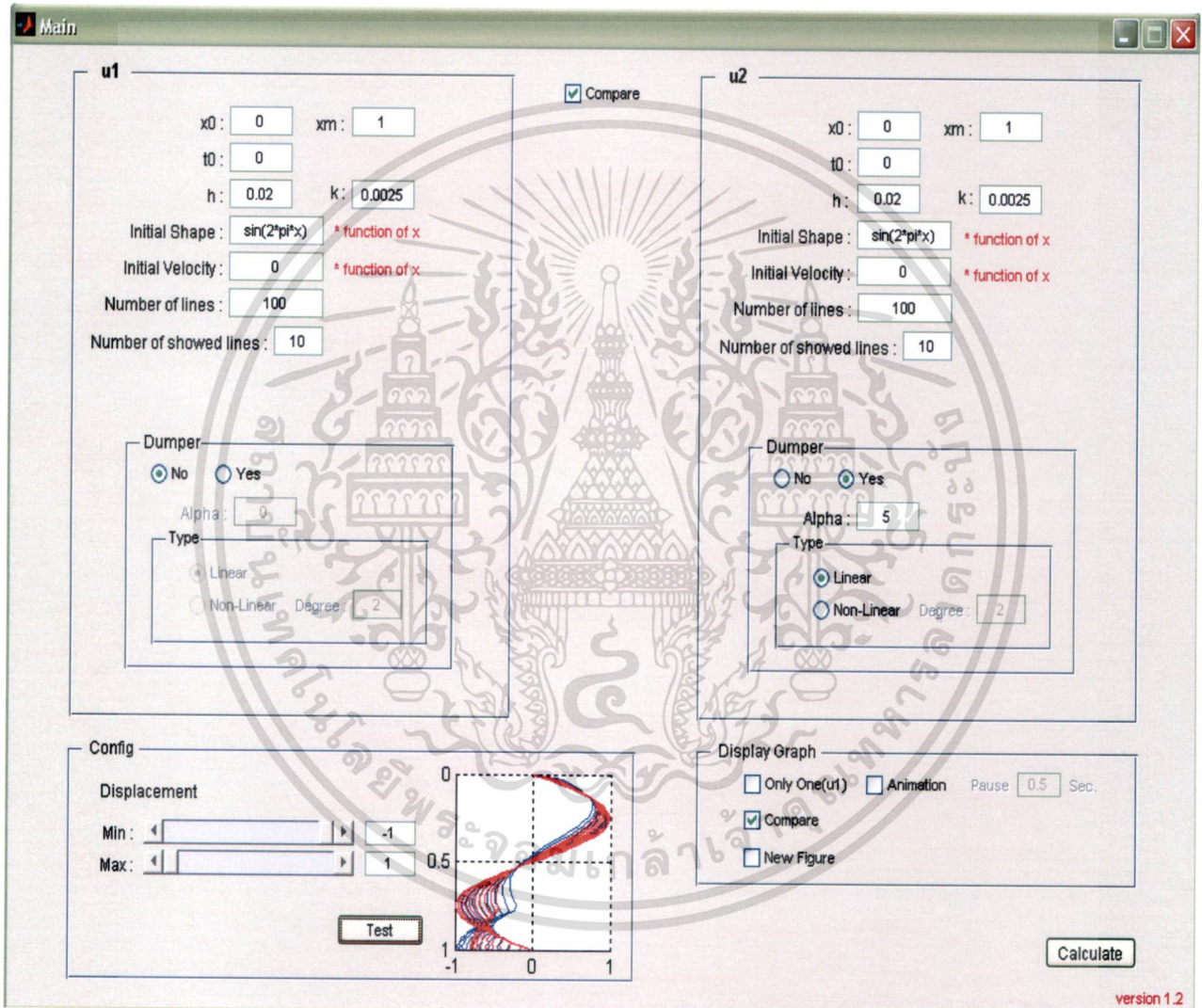
รูปที่ 3.3.1.1 หน้าต่าง Animation แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีการเปรียบเทียบ



รูปที่ 3.3.1.2 หน้าต่าง New Figure แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีการเปรียบเทียบ เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3.2 ขั้นตอนการใช้โปรแกรมแสดงผลกราฟการสั่นแบบมีการเปรียบเทียบ

ขั้นที่ 1 - คลิกที่ช่อง Compare จะเห็นว่าค่าข้อมูลเริ่มต้นในส่วนของ u2 จะถูกเซทให้เหมือนกับ u1 โดยสามารถแก้ไขข้อมูลได้ตามต้องการ แต่ในงานวิจัย เราจะใช้ข้อมูลเริ่มต้นในส่วน u2 และ u1 เหมือนกัน เพื่อทำการเปรียบเทียบความแตกต่างในส่วนของความหน่วง ดังรูป



รูปที่ 3.3.2.1 หน้าต่าง GUI แบบมีการเปรียบเทียบ

ขั้นที่ 2 ในส่วนของ Dumper ให้เลือกข้อมูลของความหน่วง ดังนี้

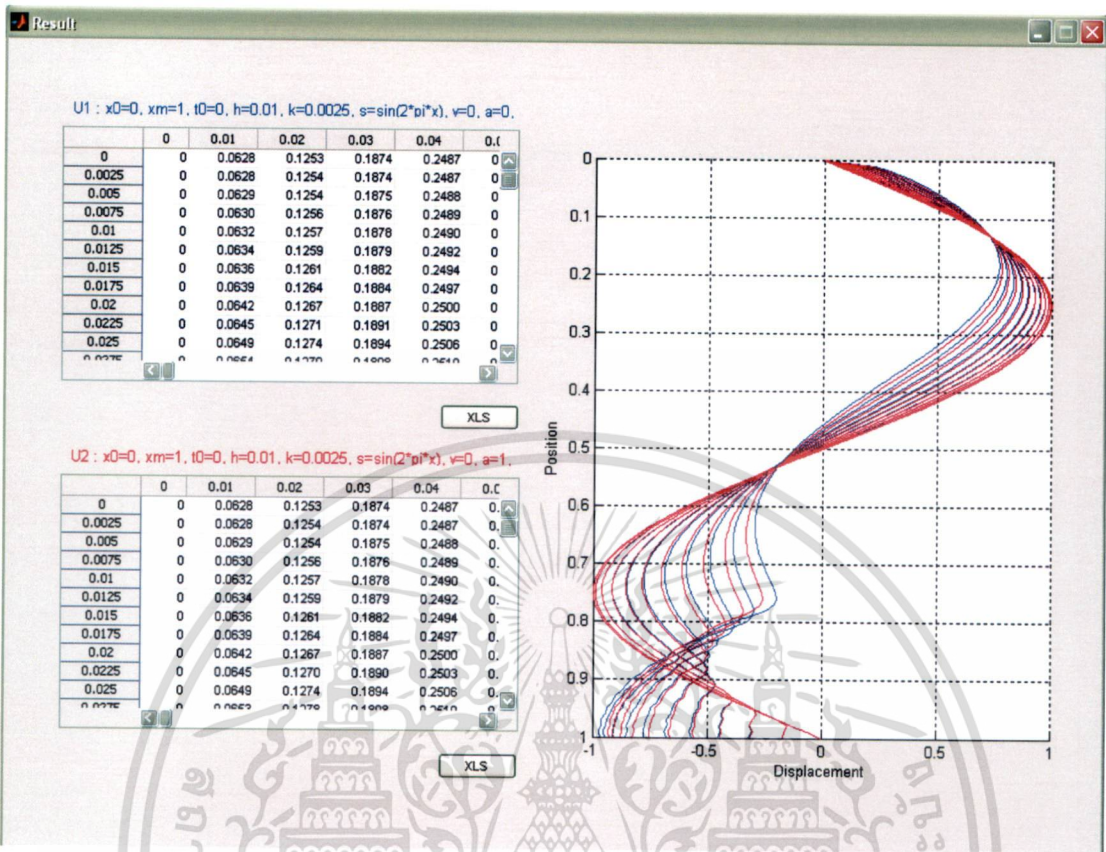
- เลือก No เมื่อต้องการแสดงผลการสั่นแบบไม่มีความหน่วง
- หรือเลือก Yes เมื่อต้องการแสดงผลการสั่นแบบมีความหน่วง โดยแบ่งเป็น
 - เลือก Linear สำหรับความหน่วงแบบเชิงเส้น หรือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

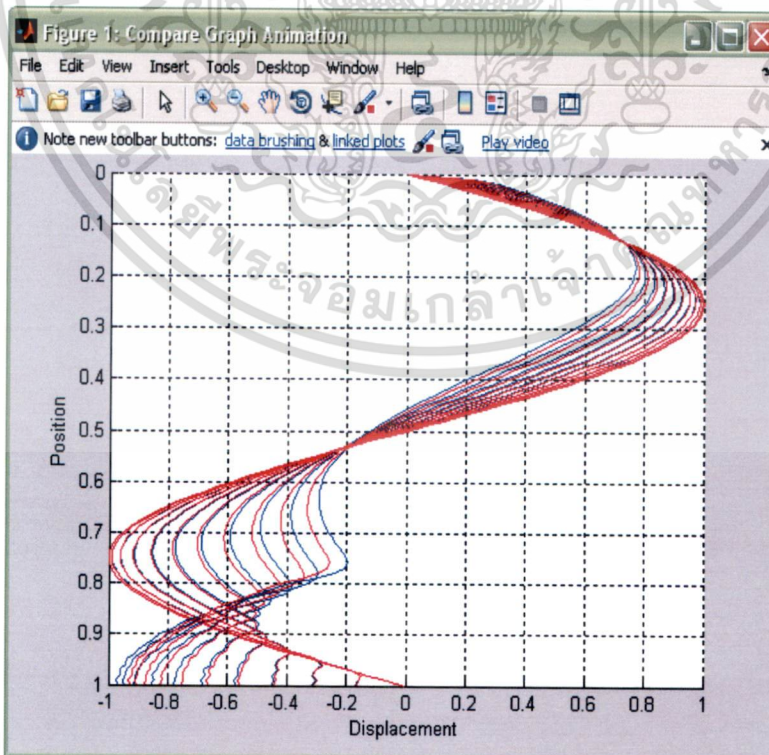
- เลือก Non-Linear และคีย์เลข 2 สำหรับความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสอง หรือ
 - เลือก Non-Linear และคีย์เลข 3 สำหรับความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสาม
 - คีย์ข้อมูลค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง Alpha
- ในงานวิจัยนี้ค่า Alpha จะถูกพิจารณาเป็น 3 กรณี คือ
- กรณีของความหน่วงแบบเชิงเส้น จะกำหนดให้ค่า Alpha อยู่ระหว่าง 1 ถึง 10,000
 - กรณีของความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสอง จะกำหนดให้ค่า Alpha อยู่ระหว่าง 0.5 ถึง 3.5
 - กรณีของความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสาม จะกำหนดให้ค่า Alpha อยู่ระหว่าง 0.5 ถึง 10,000

ขั้นที่ 3 ในส่วนของ Display Graph จะแสดงผลกราฟโดยขึ้นหน้าต่างใหม่

- คลิกที่ช่อง Compare เมื่อต้องการให้แสดงผลกราฟแบบเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยในส่วนของ u_1 (กราฟสีน้ำเงิน) และ u_2 (กราฟสีแดง) โดยในงานวิจัยจะกำหนดให้ผลเฉลยในส่วนของ u_1 เป็นการสั่นแบบไม่มีความหน่วงแล้วนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยในส่วนของ u_2 ซึ่งถูกกำหนดให้เป็นการสั่นแบบมีความหน่วง หรือ
- หากต้องการแสดงผลกราฟเปรียบเทียบแบบ animation คลิกที่ช่อง Animation และช่อง Compare พร้อมกัน จะมีหน้าต่างใหม่แสดงผลกราฟเปรียบเทียบแบบ animation พร้อมทั้งตารางแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขทั้งสองแบบ หรือ
- หากต้องการแสดงผลกราฟที่สามารถแก้ไข ปรับเปลี่ยนรายละเอียดของกราฟได้ ให้คลิกช่อง New Figure และช่อง Compare พร้อมกัน จะมีหน้าต่างใหม่ขึ้นมา 2 หน้าต่าง โดยหน้าต่างแรกแสดงผลกราฟแบบเปรียบเทียบพร้อมทั้งตารางแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข ส่วนหน้าต่างที่สองแสดงผลกราฟที่สามารถแก้ไข ปรับเปลี่ยนรายละเอียดต่างๆ ของกราฟได้ หรือ
- คลิกช่อง New Figure, ช่อง Animation และช่อง Compare พร้อมกัน จะมีหน้าต่างใหม่ขึ้นมา 2 หน้าต่าง โดยหน้าต่างแรกแสดงผลกราฟแบบเปรียบเทียบแบบ Animation พร้อมทั้งตารางแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข ส่วนหน้าต่างที่สองแสดงผลกราฟที่สามารถแก้ไข ปรับเปลี่ยนรายละเอียดต่างๆ ของกราฟได้ หรือ
- ถ้าต้องการแสดงผลกราฟจากส่วน u_1 เท่านั้น ให้คลิกที่ช่อง Only One(u_1)



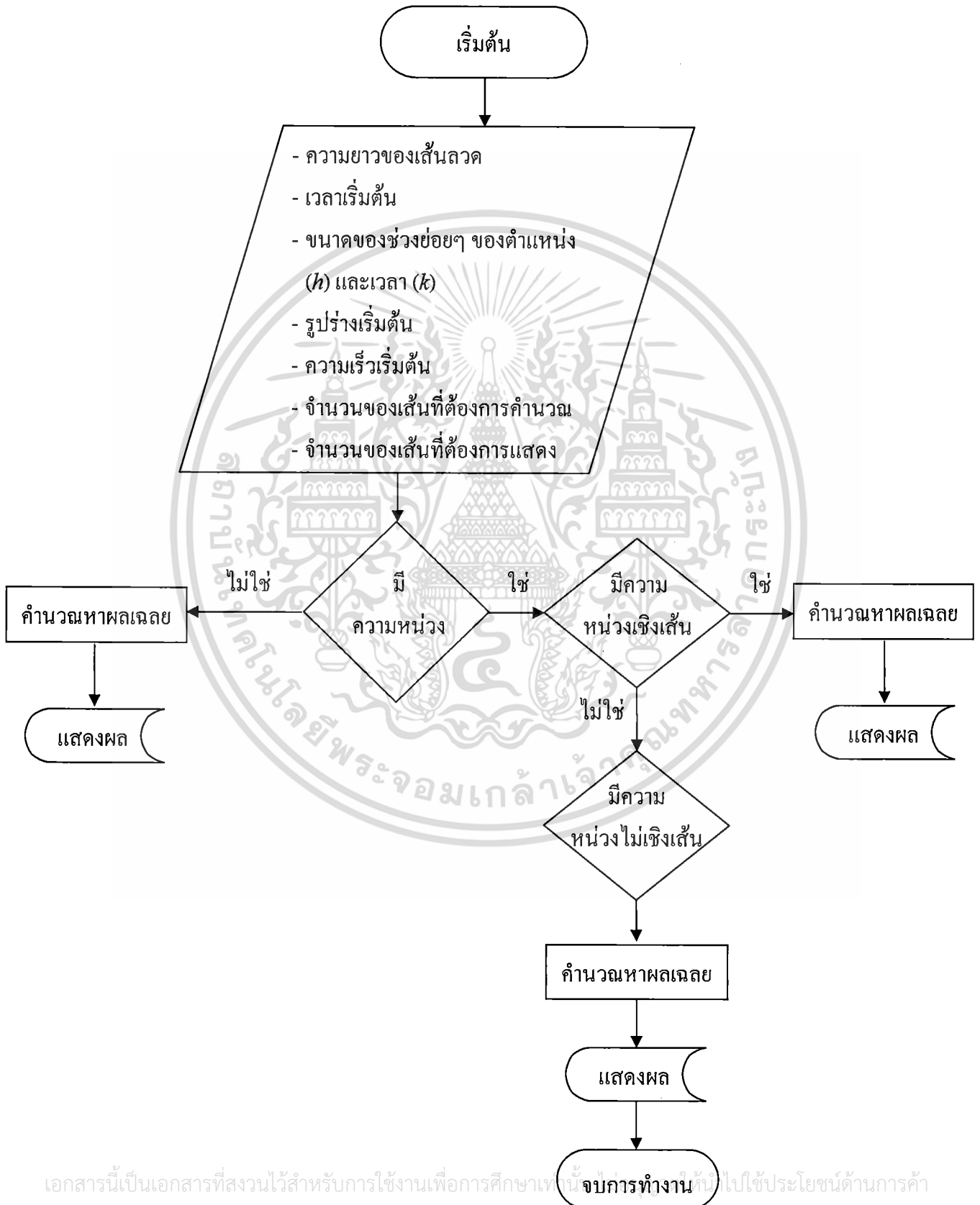
รูปที่ 3.3.2.2 หน้าต่าง Animation แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีการเปรียบเทียบ



รูปที่ 3.3.2.3 หน้าต่าง New Figure แสดงการจำลองการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีการเปรียบเทียบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แผนภาพแสดงการทำงานของโปรแกรม MATLAB



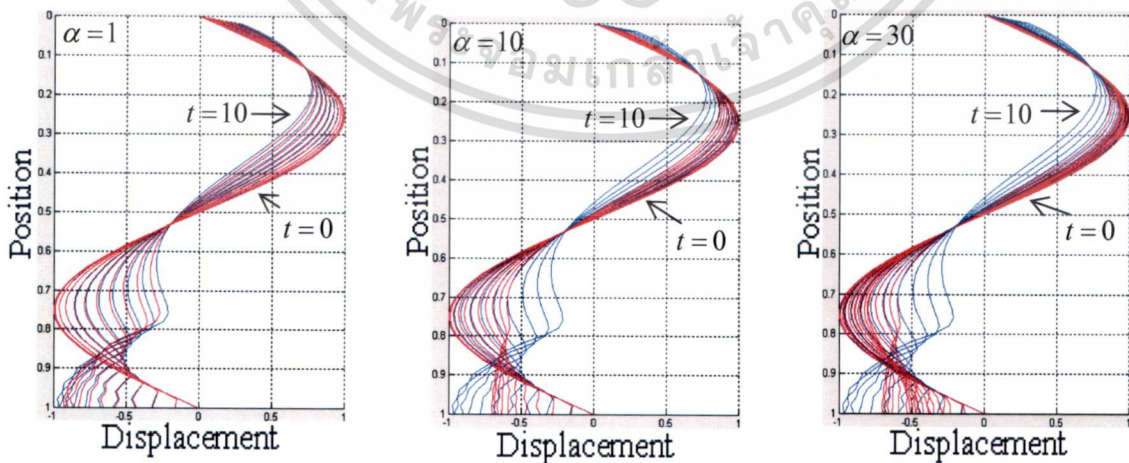
บทที่ 4

ผลวิจัยและอภิปรายผล

ในบทนี้จะแสดงการจำลองของกราฟเปรียบเทียบระหว่างการสั่นแบบไม่มีความหน่วงและมีความหน่วงเชิงเส้น, ความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง และความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม โดยในการสั่นทั้ง 3 แบบจะกำหนดให้รูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดคือ $\phi(x) = \sin 2\pi x$ เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตทั้งสองกล่าวคือ $u(0,t) = 0$ และ $u_x(a,t) = 0$ และความเร็วเริ่มต้นกำหนดโดยฟังก์ชันพื้นฐานต่างๆ ดังนี้ $\psi(x) = 0, 1, x, \cos x$ และ $\sin x$ กราฟแสดงการเปรียบเทียบทั้งหมดในบทนี้ได้จากการใช้โปรแกรม MATLAB กำหนดหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของการสั่นทั้ง 3 แบบ โดยใช้สูตรระเบียบวิธีผลต่างอันดับ และนำผลเฉลยเชิงตัวเลขแต่ละแบบดังกล่าวมาแสดงในรูปการแบบจำลองของกราฟเปรียบเทียบ พร้อมทั้งวิเคราะห์และอภิปรายผลการเปรียบเทียบที่ได้ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

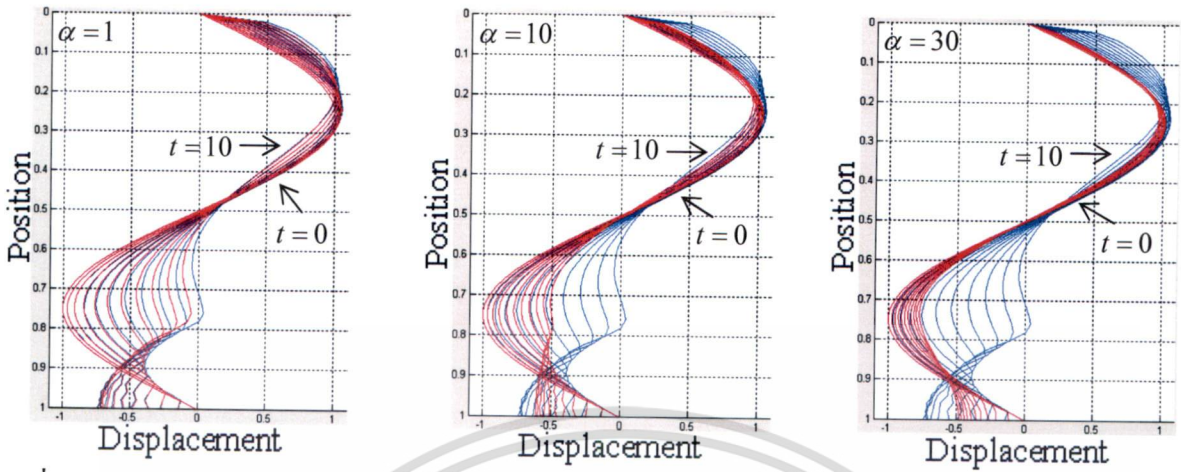
4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแบบเปรียบเทียบระหว่างการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วงและมีความหน่วงเชิงเส้น

ผลเฉลยเชิงตัวเลขของเส้นลวดแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วงถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแบบมีความหน่วงเชิงเส้น เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีรูปร่างเริ่มต้นเดียวกันคือ $\phi(x) = \sin 2\pi x$ ภายใต้ความเร็วเริ่มต้นที่แตกต่างกัน โดยกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงคือ $\alpha = 1, 10, 30$ ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 4.1.1- 4.1.5 และจากผลการเปรียบเทียบ เราจะเห็นว่าเมื่อเพิ่มค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง α แอมพลิจูดของการสั่นจะลดลง ซึ่งจะได้ผลลักษณะนี้เสมอ ถึงแม้จะมีการเปลี่ยนความเร็วเริ่มต้นเป็นค่าต่างๆ ก็ตาม

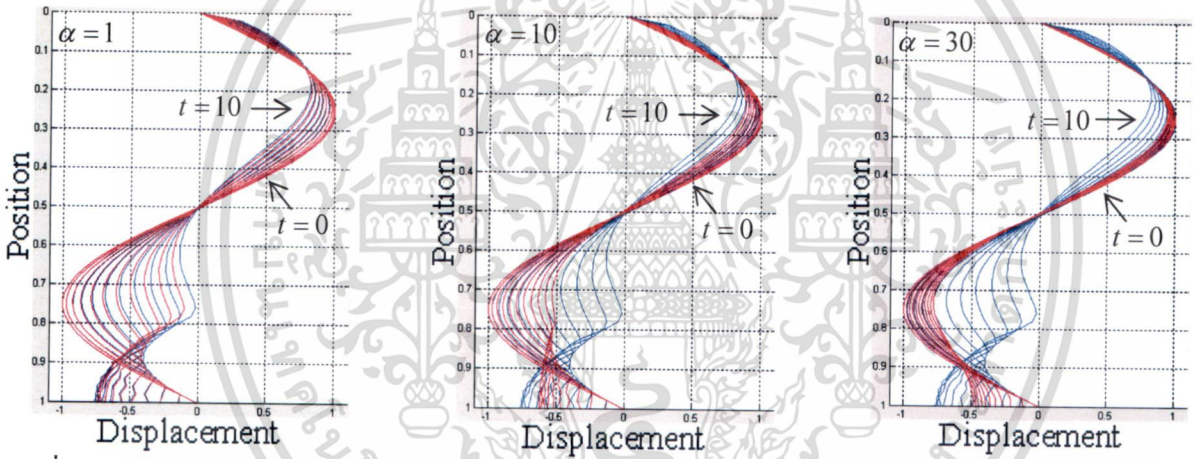


รูปที่ 4.1.1 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดไม่มีความเร็วเริ่มต้น ($\psi(x) = 0$)

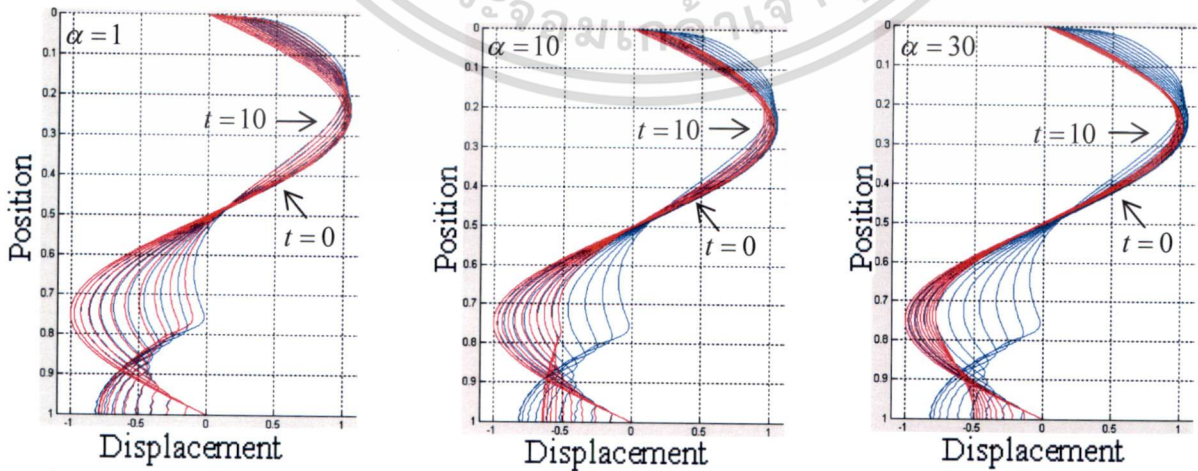
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.1.2 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 1$

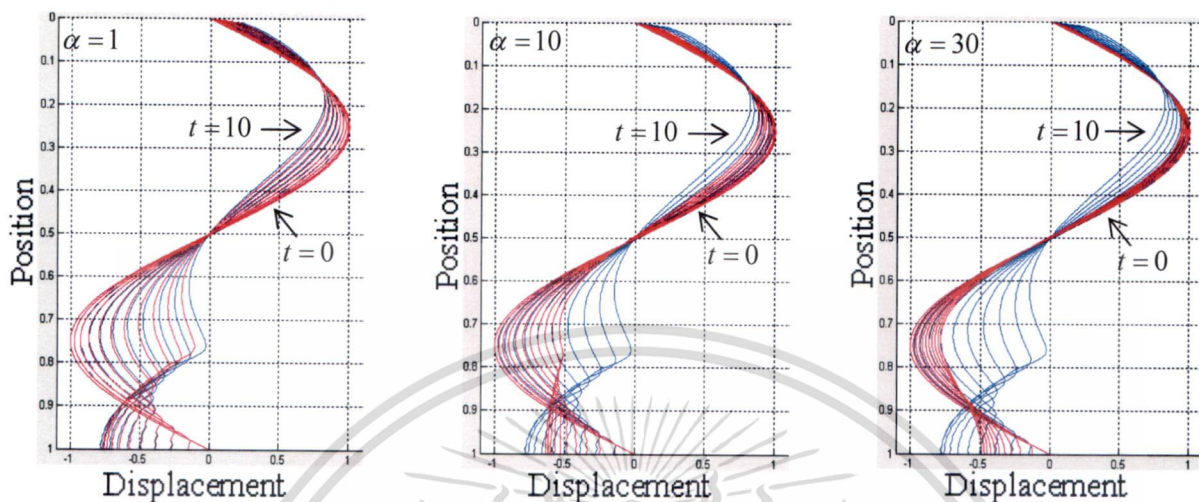


รูปที่ 4.1.3 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = x$



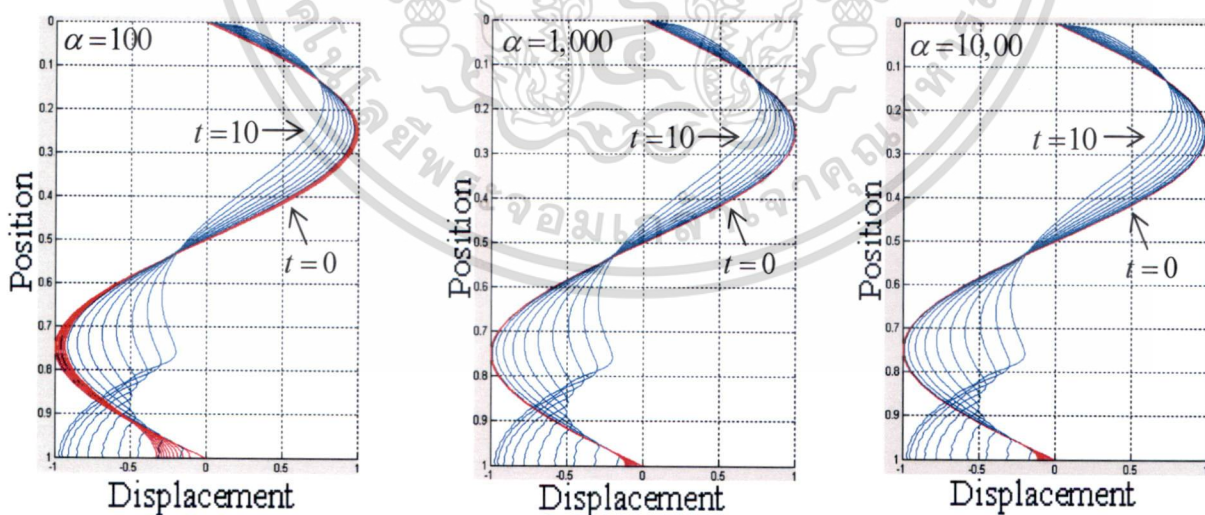
รูปที่ 4.1.4 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \cos x$

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



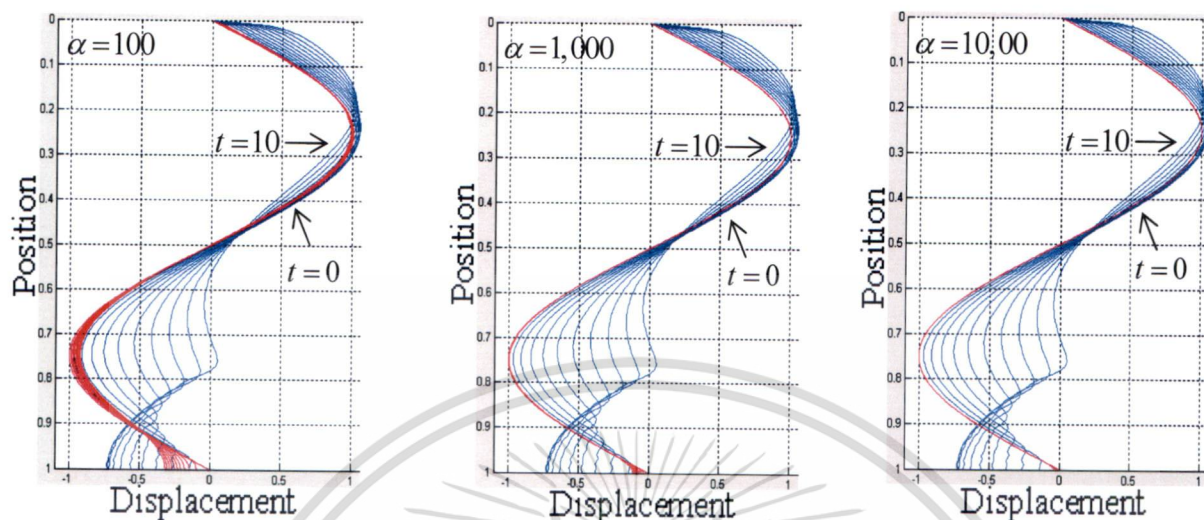
รูปที่ 4.1.5 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \sin x$

นอกจากนี้ เมื่อกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงตั้งแต่ 100 ถึง 10,000 เราจะพบว่าค่าแอมพลิจูดการสั่นจะค่อยๆ ลดลง จนกลายเป็นรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวด $\phi(x) = \sin 2\pi x$ เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้นที่แตกต่างกัน ดังรูปที่ 4.1.6 - 4.1.10

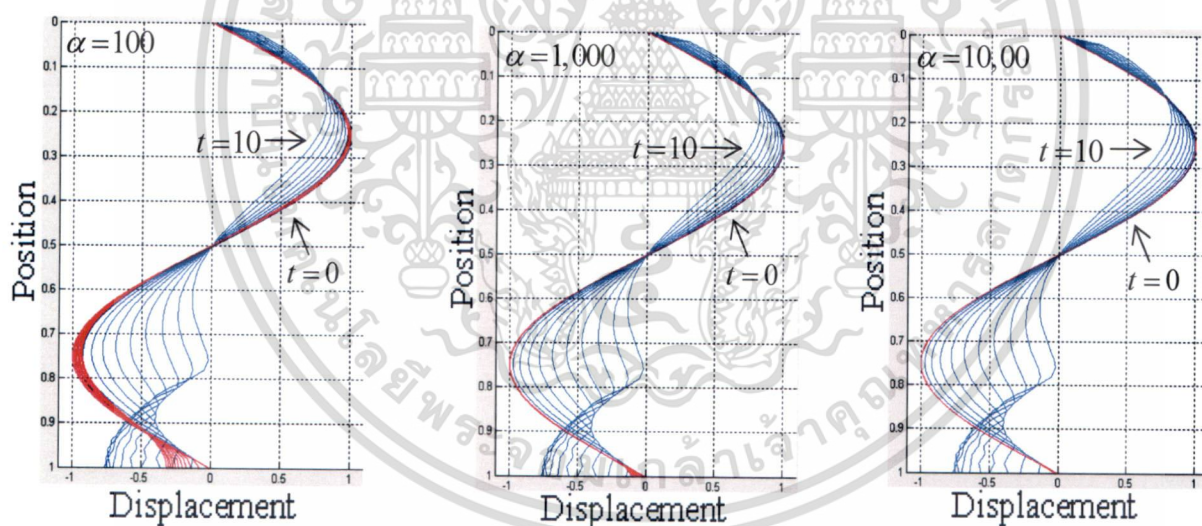


รูปที่ 4.1.6 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

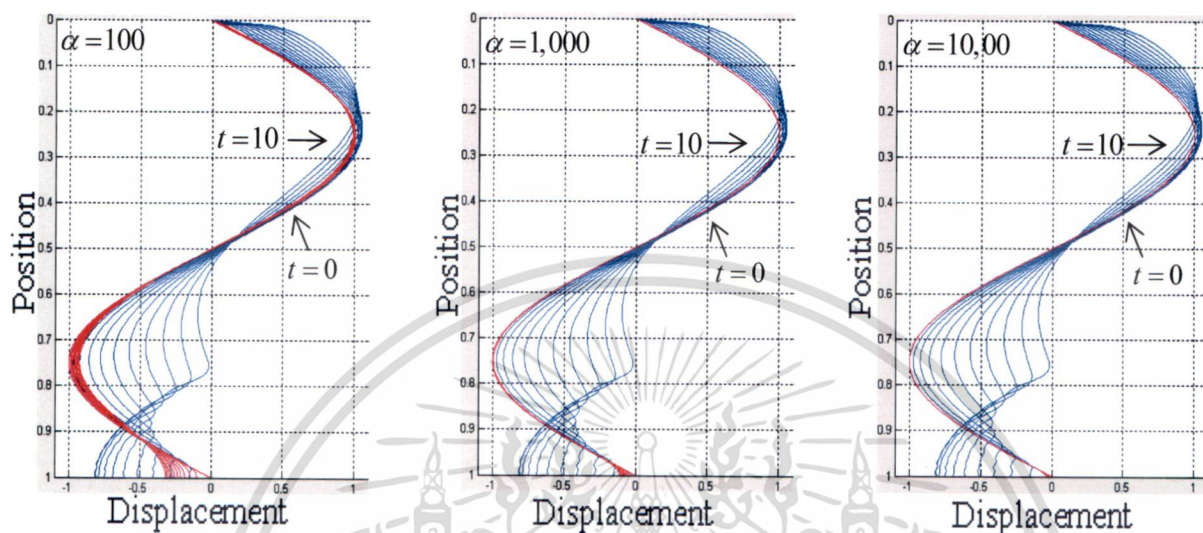


รูปที่ 4.1.7 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 1$

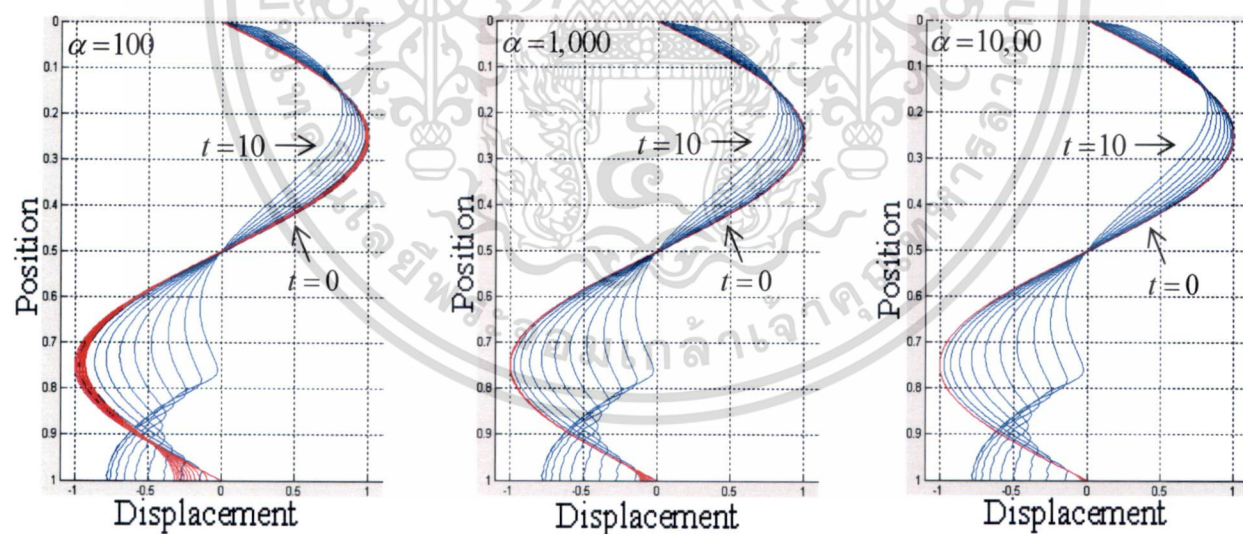


รูปที่ 4.1.8 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = x$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.1.9 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง (เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \cos x$



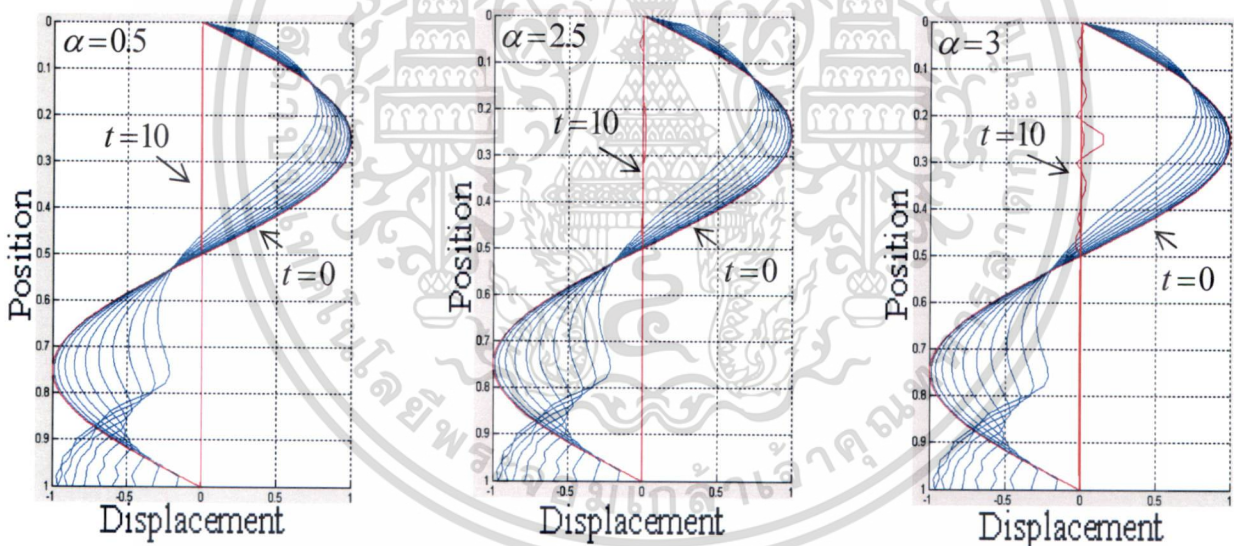
รูปที่ 4.1.10 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง (เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \sin x$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแบบเปรียบเทียบระหว่างการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง

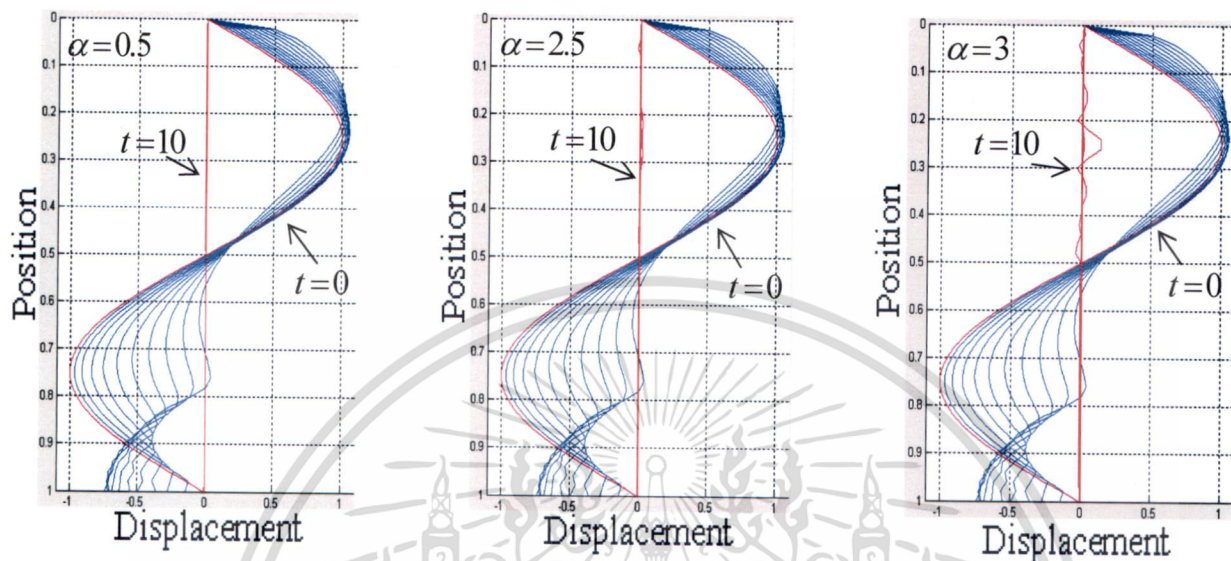
ผลเฉลยเชิงตัวเลขของเส้นลวดแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วงถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีรูปร่างเริ่มต้นเดียวกันคือ $\phi(x) = \sin 2\pi x$ โดยกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงคือ $\alpha = 0.5, 2.5, 3$ ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 4.2.1- 4.2.5 และจากผลการเปรียบเทียบ เราจะเห็นว่าแอมพลิจูดของการสั่นจะลดลงอย่างรวดเร็ว ภายใต้อัตราเร็วเริ่มต้นที่แตกต่างกัน

นอกจากนี้ จากรูปที่ 4.2.1- 4.2.5 เมื่อเปรียบเทียบระหว่างการสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง α มีค่าแตกต่างกันในช่วง 0.5 ถึง 3 เราจะเห็นว่า การสั่นมีความแตกต่างกันเพียงเล็กน้อย แม้จะมีค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงและอัตราเร็วเริ่มต้นที่แตกต่างกัน ในขณะที่เส้นลวดที่ ไม่มีความหน่วง เส้นลวดจะมีลักษณะการสั่นที่แตกต่างกันเมื่อมีอัตราเร็วเริ่มต้นแตกต่างกัน

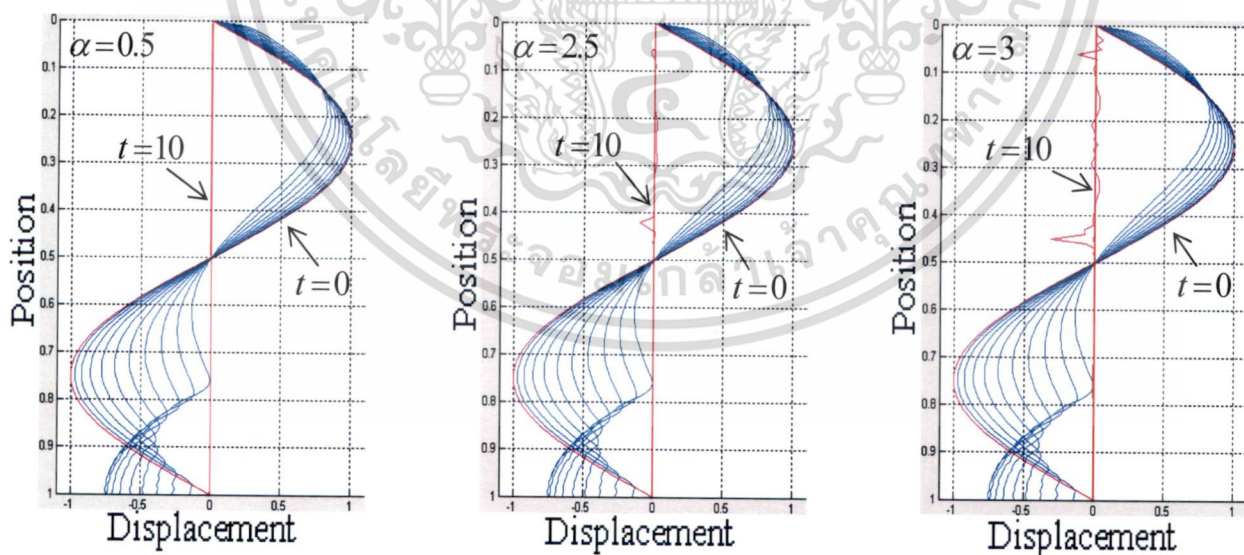


รูปที่ 4.2.1 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดไม่มีความเร็วเริ่มต้น ($\psi(x) = 0$) เมื่อ $\alpha = 0.5, 2.5, 3$ ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

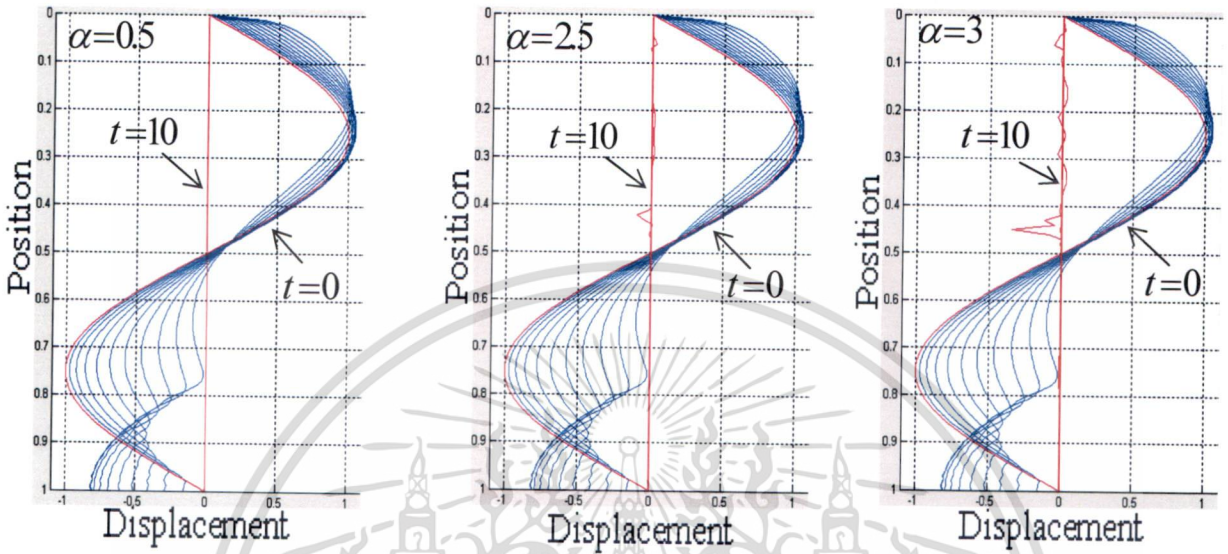


รูปที่ 4.2.2 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 1$ เมื่อ $\alpha = 0.5, 2.5, 3$ ตามลำดับ

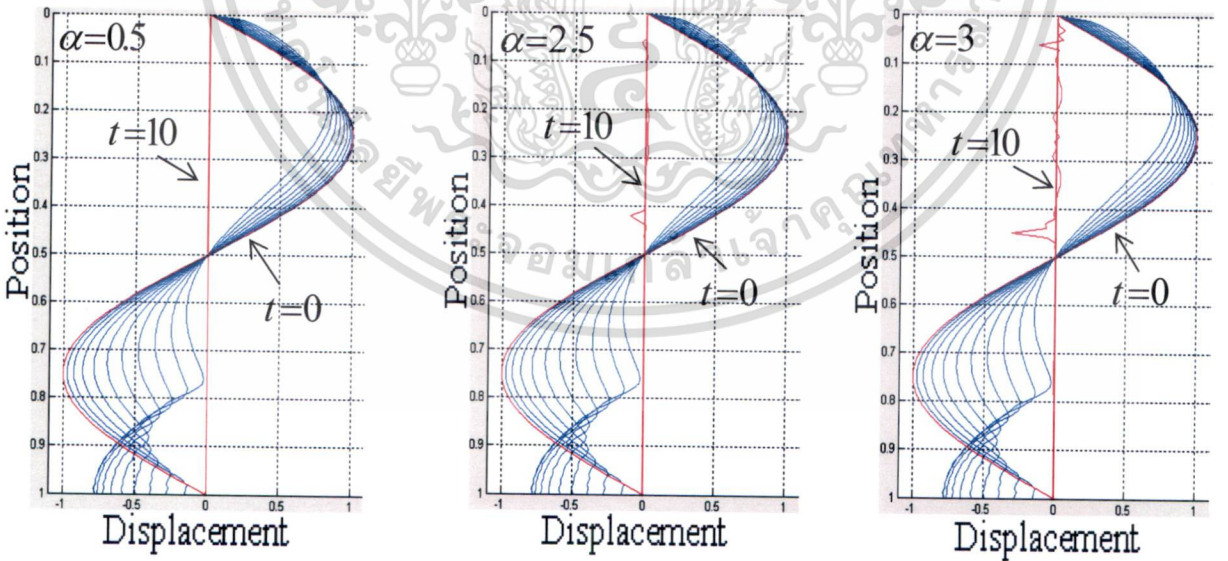


รูปที่ 4.2.3 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = x$ เมื่อ $\alpha = 0.5, 2.5, 3$ ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



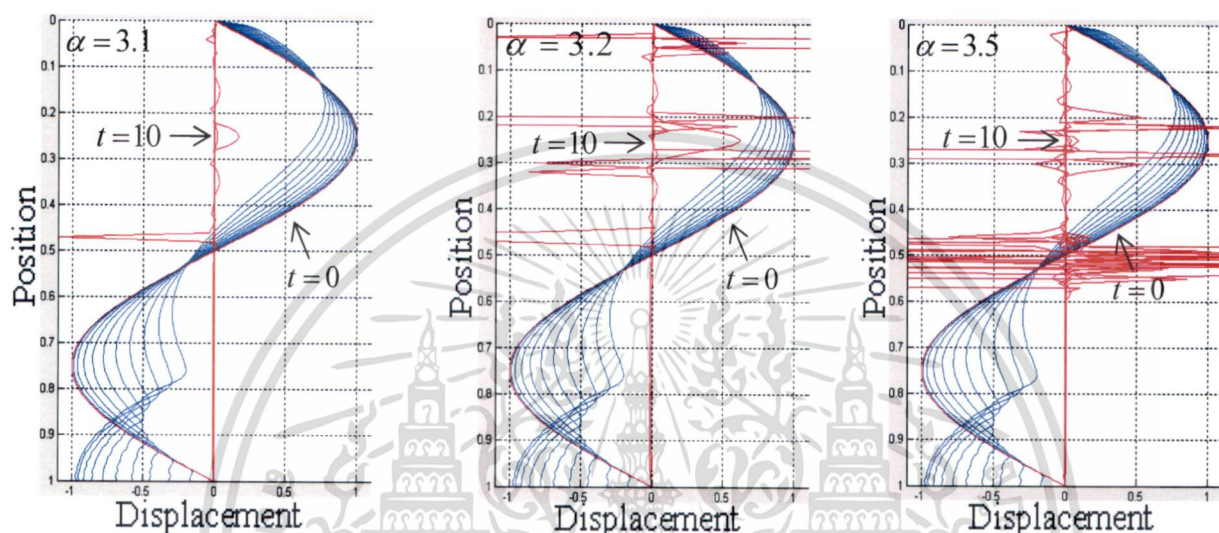
รูปที่ 4.2.4 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \cos x$ เมื่อ $\alpha = 0.5, 2.5, 3$ ตามลำดับ



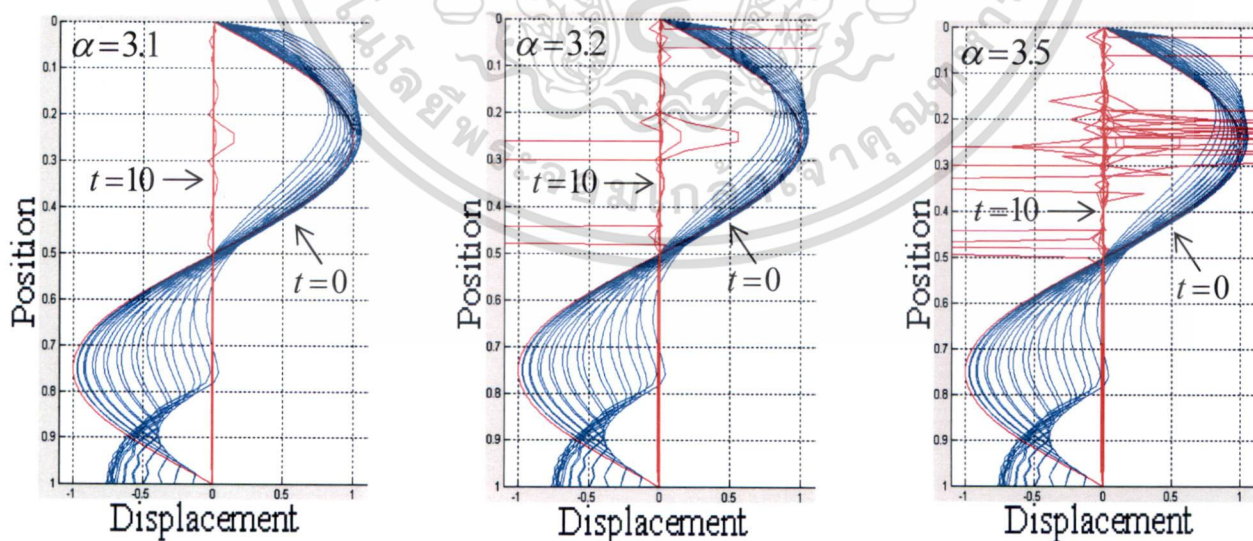
รูปที่ 4.2.5 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \sin x$ เมื่อ $\alpha = 0.5, 2.5, 3$ ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อค่อยๆ เพิ่มค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง α ในช่วง 3.1 ถึง 3.5 เส้นลวดจะสั้นเพิ่มขึ้นจนกระทั่ง ดูออกดังรูปที่ 4.2.6- 4.2.10 เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้นที่แตกต่างกัน

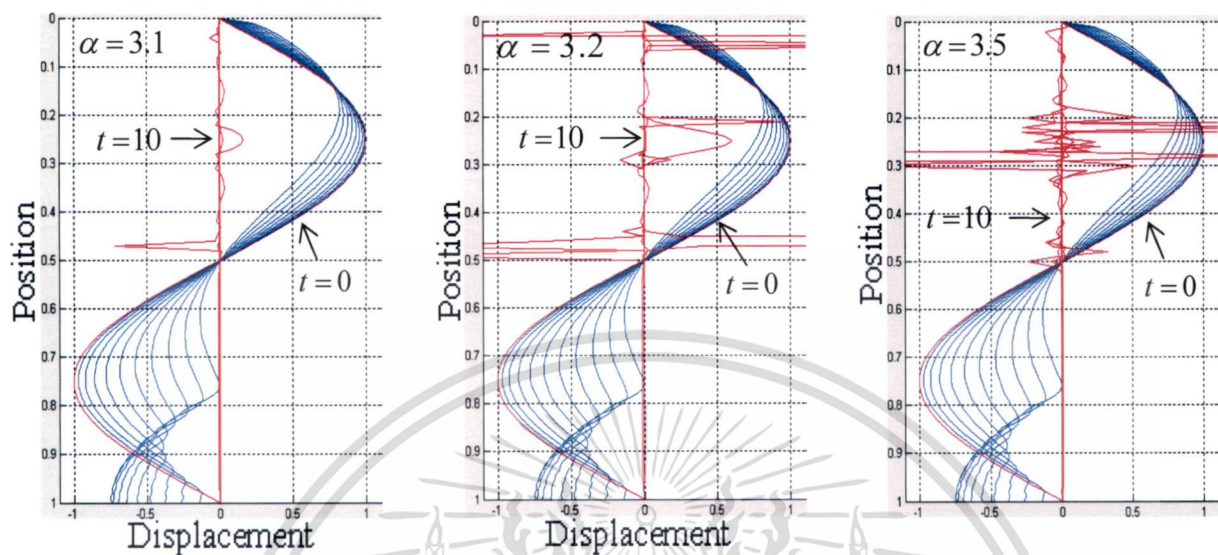


รูปที่ 4.2.6 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดไม่มีความเร็วเริ่มต้น ($\psi(x) = 0$) เมื่อ $\alpha = 3.1, 3.2, 3.5$ ตามลำดับ

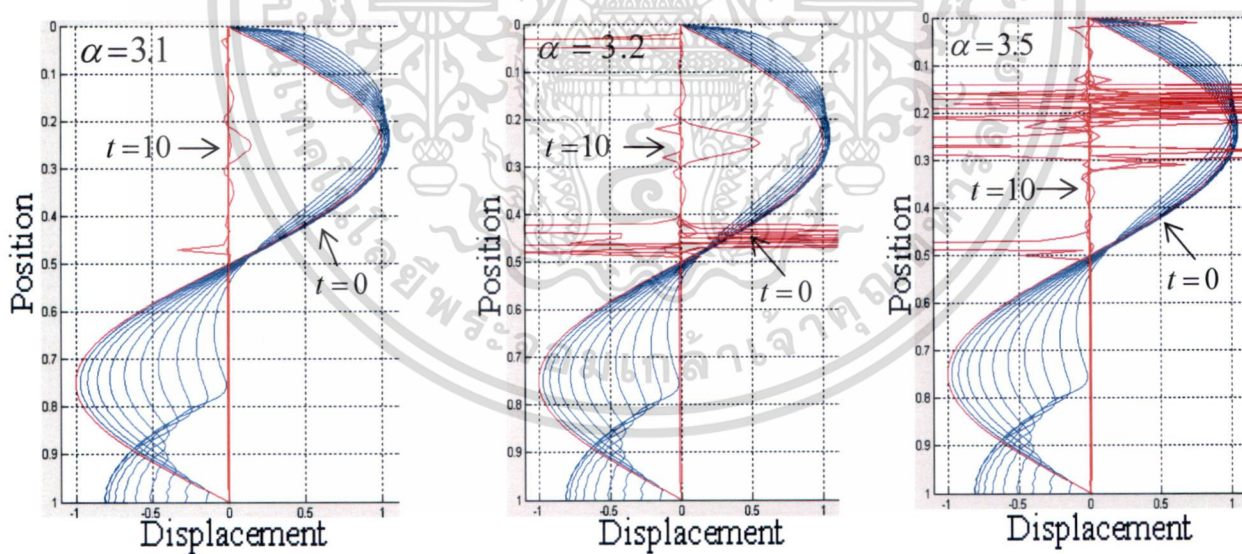


รูปที่ 4.2.7 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 1$ เมื่อ $\alpha = 3.1, 3.2, 3.5$ ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

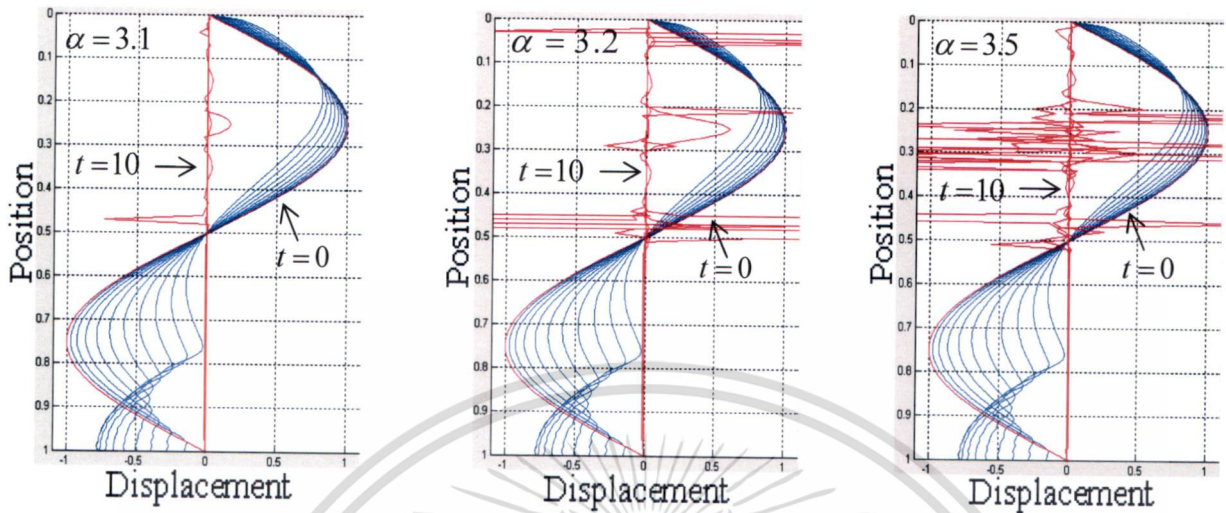


รูปที่ 4.2.8 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = x$ เมื่อ $\alpha = 3.1, 3.2, 3.5$ ตามลำดับ



รูปที่ 4.2.9 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \cos x$ เมื่อ $\alpha = 3.1, 3.2, 3.5$ ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.2.10 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \sin x$ เมื่อ $\alpha = 3.1, 3.2, 3.5$ ตามลำดับ

จากผลการเปรียบเทียบตามที่แสดงไว้ในรูปที่ 4.2.1-4.2.5 เราจะเห็นว่า การสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองมีผลทำให้เส้นลวดสั้นลงมากกว่าการสั่นแบบมีความหน่วงเชิงเส้น โดยการสั่นแบบมีความหน่วงเชิงเส้นนั้น แอมพลิจูดของการสั่นจะแปรผกผันกับค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง (α) กล่าวคือ แอมพลิจูดของการสั่นจะลดลงเมื่อ α มีค่าเพิ่มขึ้น ในขณะที่การสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองนั้น แอมพลิจูดของการสั่นจะแปรผกผันตรงกับค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง (α) กล่าวคือแอมพลิจูดของการสั่นจะลดลงเมื่อ α มีค่าลดลง

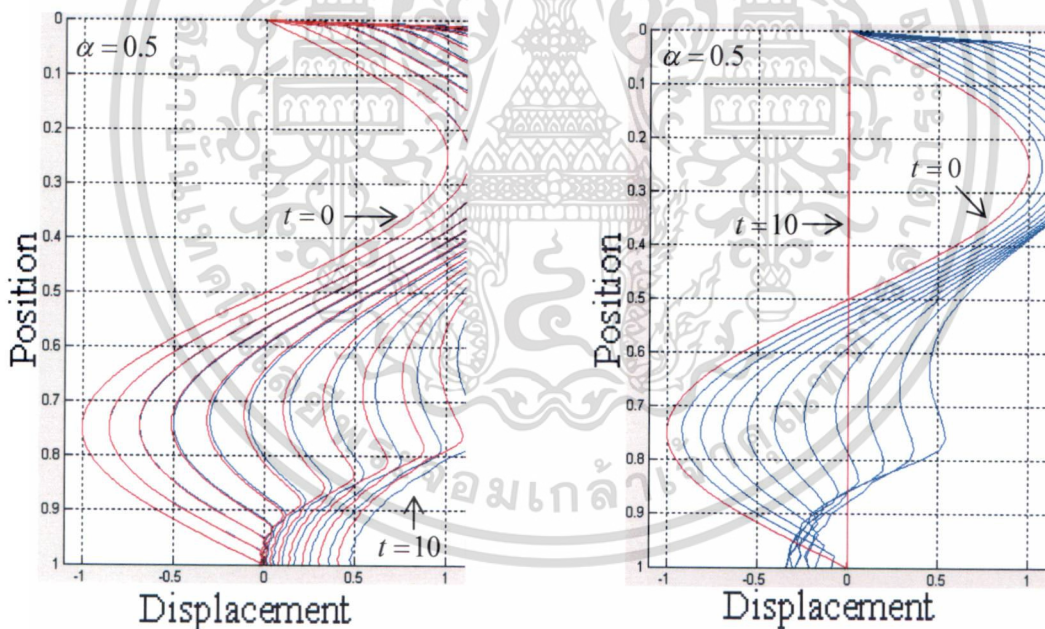
นอกจากนี้ เรายังพบว่า สำหรับการสั่นแบบมีความหน่วงเชิงเส้น ลักษณะของการสั่นยังคงรักษารูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดไว้ ในงานวิจัยนี้เรากำหนดให้รูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดคือ $\phi(x) = \sin 2\pi x$ จากรูปที่ 4.1.1- 4.1.5 จะเห็นว่าเมื่อมีความหน่วงแบบเชิงเส้น เส้นลวดจะค่อยๆ สั้นลงแบบขึ้นอยู่กับรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวดเมื่อเวลาผ่านไป ในขณะที่การสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง ลักษณะของการสั่นไม่ขึ้นอยู่กับรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวด จากรูปที่ 4.2.1- 4.2.5 ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าการสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองมีผลทำให้เส้นลวดสั้นลงอย่างรวดเร็ว และมีลักษณะการสั่นที่แตกต่างจากรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดอย่างมากเมื่อเวลาผ่านไป

ยิ่งไปกว่านั้น สำหรับกรณีของความหน่วงแบบเชิงเส้น จากรูปที่ 4.1.1- 4.1.10 จะเห็นว่าขอบเขตของค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง (α) จะเริ่มจาก 1 ถึง 10,000 ยิ่ง α มีค่ามากขึ้นๆ เส้นลวดจะสั้นลงจะกระทั่งไม่สั่นเลย ส่วนกรณีของความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสอง จากรูปที่ 4.2.1- 4.2.5 จะเห็นว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

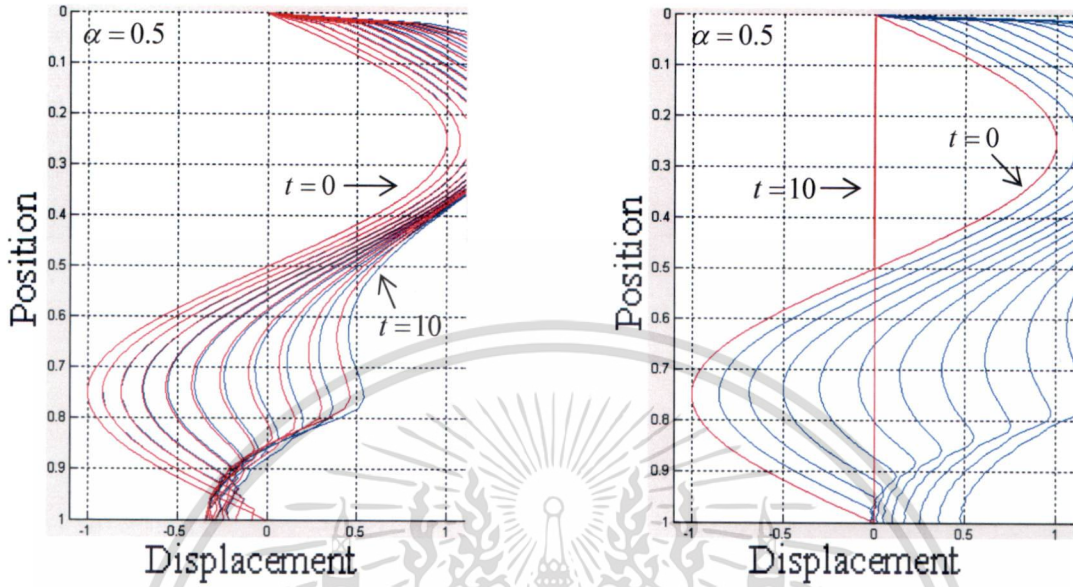
ขอบเขตของค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง (α) จะเริ่มจาก 0.5 ถึง 3 ซึ่งจะเห็นว่า การเพิ่มค่า α ในช่วงดังกล่าว มีผลต่อการลดลงของการสั่นอย่างรวดเร็วกว่าๆ กัน โดยไม่ขึ้นอยู่กับรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวด แต่เมื่อ α มีค่ามากกว่า 3 การสั่นจะดูออกดังแสดงในรูปที่ 4.2.6- 4.2.10

จากรูปที่ 4.2.11-4.2.15 ต่อไปนี้ จะเห็นว่าเมื่อกำหนดให้ความเร็วเริ่มต้นคือ $\psi(x)=3, x^2+5, x^3+10, 5\sin 7x, 3\cos 5x$ ตามลำดับ จะทำให้เกิดการสั่นแบบลู่ออก(เส้นสีฟ้า) และเมื่อเพิ่มความหน่วงแบบเชิงเส้นให้กับเส้นลวด เส้นลวดจะสั่นลดลงเล็กน้อยเมื่อเปรียบเทียบกับลักษณะการสั่นแบบไม่มีความหน่วง ซึ่งยังคงดูออกดังเส้นกราฟสีแดงในรูปทางซ้ายมือ แต่เมื่อเพิ่มความหน่วงแบบไม่เชิงเส้นกำลังสองให้กับเส้นลวด เส้นลวดจะสั่นลดลงทันทีหลังจากเวลาเริ่มต้น ซึ่งทำให้การกำหนดไม่เกิดขึ้นดังเส้นกราฟสีแดงในรูปทางขวามือ จากผลการเปรียบเทียบดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าการสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง สามารถช่วยป้องกันการเกิดการกำหนดได้

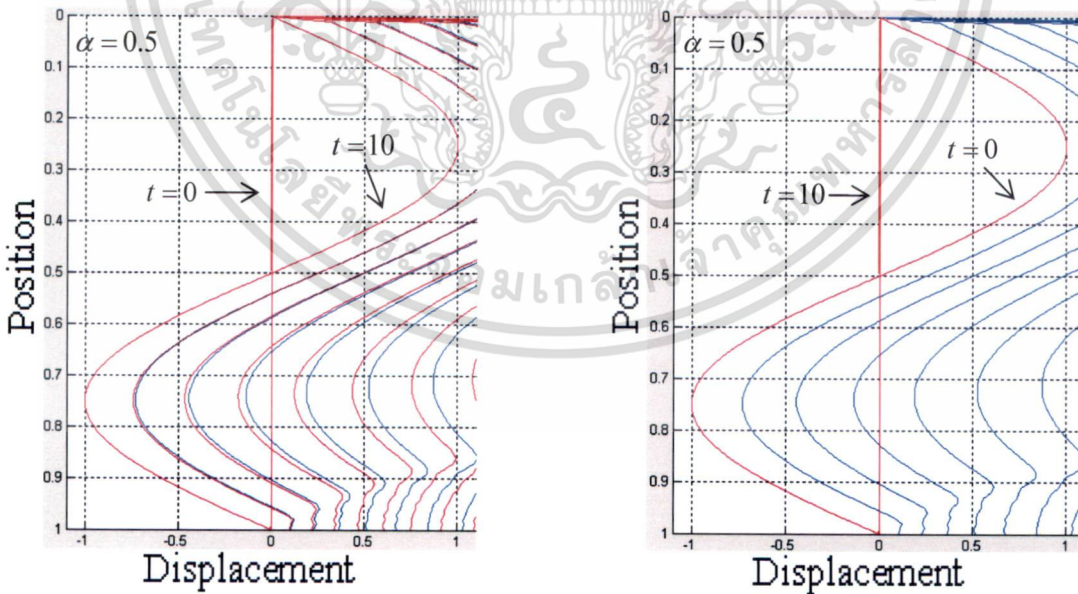


รูปที่ 4.2.11 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x)=3$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

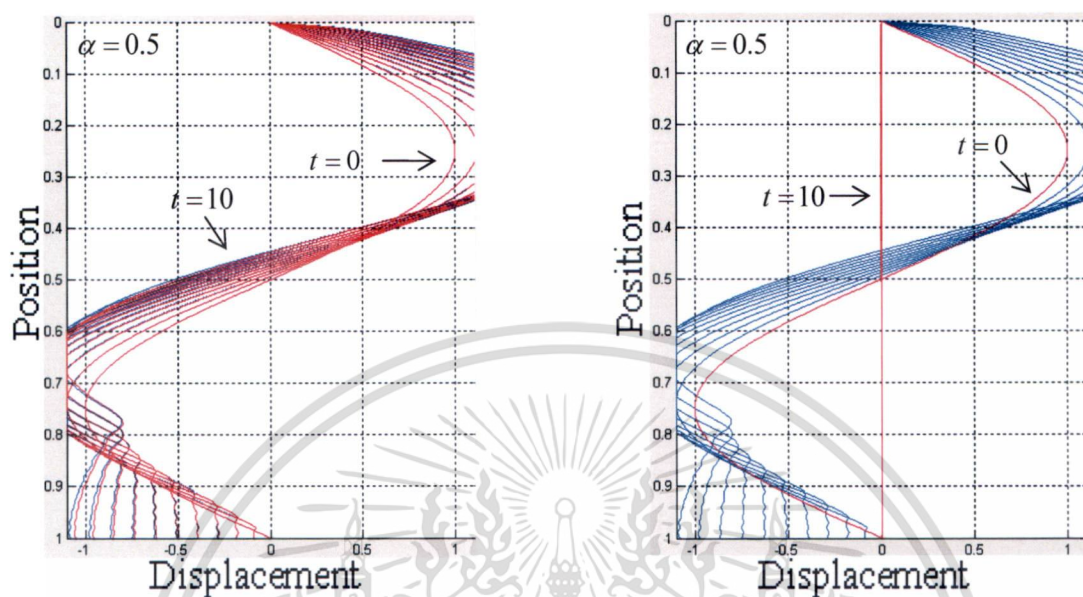


รูปที่ 4.2.12 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = x^2 + 5$

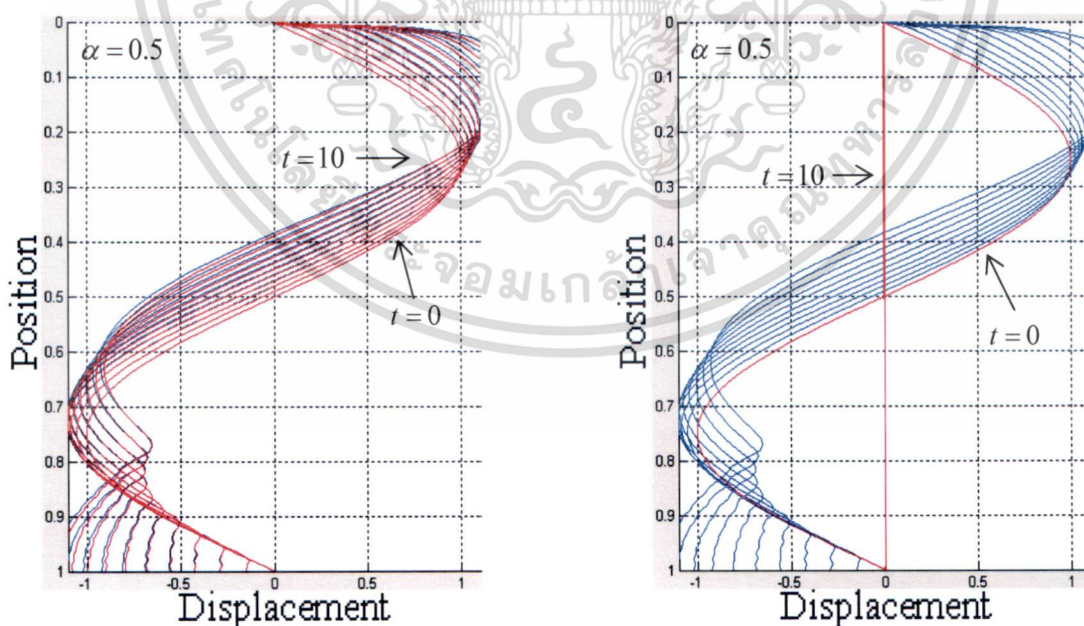


รูปที่ 4.2.13 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง(เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น(เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = x^3 + 10$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.2.14 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง (เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 5 \sin 7x$



รูปที่ 4.2.15 กราฟเปรียบเทียบระหว่างตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง (เส้นสีฟ้า) และมีความหน่วงเชิงเส้น (เส้นสีแดงรูปทางซ้ายมือ) และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง (เส้นสีแดงรูปทางขวามือ) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 3 \cos 5x$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

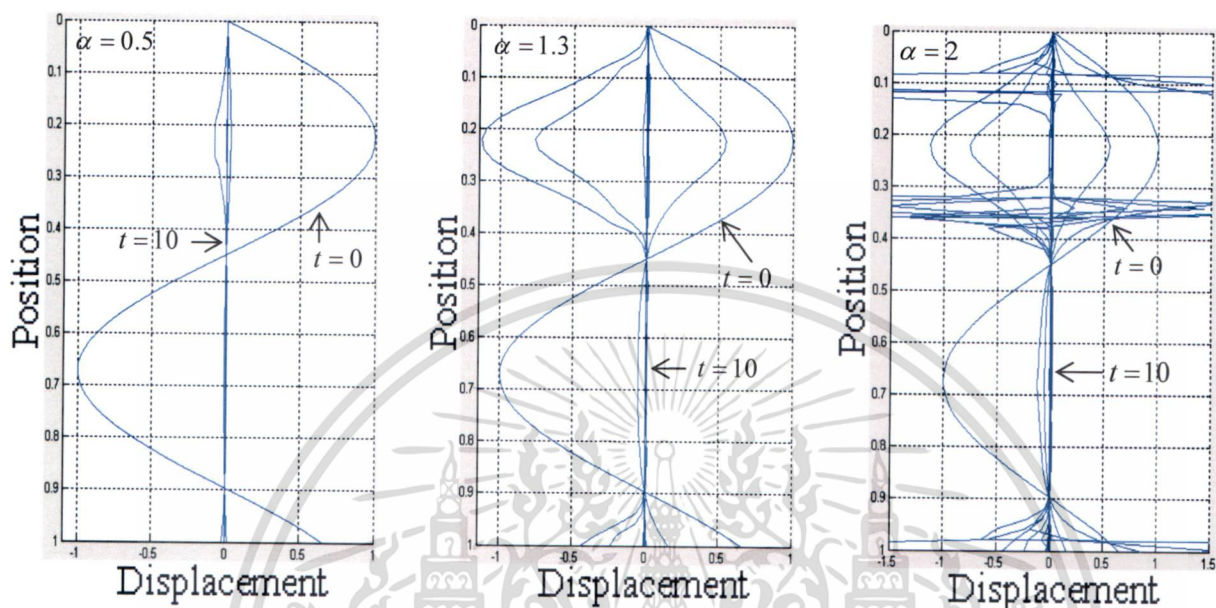
4.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขแบบเปรียบเทียบระหว่างการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบไม่มีความหน่วง และมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม

ในหัวข้อที่ 4.2 เราได้ทำการศึกษาถึงการจำลองการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง ($c = 2$) เราจะเห็นว่าแอมพลิจูดของการสั้นลดลงอย่างรวดเร็ว โดยไม่ขึ้นกับรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวด ในหัวข้อนี้ เราจะทำการศึกษาถึงลักษณะการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม ($c = 3$) เพื่อพิจารณาว่าความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสามจะมีผลต่อการสั้นในลักษณะเดียวกันกับความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองหรือไม่ ผลการวิจัยแสดงให้เห็นว่าลักษณะการสั้นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสามมีความแตกต่างจากการสั้นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองอย่างมาก ความแตกต่างที่เห็นได้ชัดอันหนึ่งคือ การสั้นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม แอมพลิจูดของการสั้นแปรผกผันกับค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง ซึ่งแตกต่างจากการสั้นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองที่แอมพลิจูดของการสั้นมีค่าแปรผันตรงกับค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วง

โดยในหัวข้อนี้ จะกำหนดให้ส่วนช่วงย่อยของตำแหน่งและเวลาคือ $h = 0.01$ และ $k = 0.05$ ตามลำดับ เนื่องจากการกำหนดค่าต่างๆ ใหม่ดังกล่าวจะทำให้ได้ผลกราฟที่สามารถพิจารณาได้ง่ายกว่าค่าเดิม แต่ยังคงใช้รูปร่างเริ่มต้น $\phi(x) = \sin 2\pi x$ และความเร็วเริ่มต้น คือ $\psi(x) = 0, 1, x, \sin x$ และ $\cos x$ เหมือนเดิม ตามลำดับ

การสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองนั้น เราพบว่าแอมพลิจูดของการสั้นเพิ่มขึ้น เมื่อ α เพิ่มขึ้น จนกระทั่งแอมพลิจูดของการสั้นลู่ออก เมื่อ α มีค่ากว่าค่า ๆ หนึ่ง ดังรูปที่ 4.3.1 และจะเห็นอีกด้วยว่าความถี่ของการสั้นเหมือนกับความถี่ของรูปร่างเริ่มต้น นอกจากนี้แอมพลิจูดการสั้นยังมากกว่า -1 ถึง 1 เมื่อ α มากกว่า 1.3

ในขณะที่การสั้นของเส้นลวดแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม เราจะพบว่าแอมพลิจูดของการสั้นจะลดลง เมื่อ α เพิ่มขึ้น ดังรูปที่ 4.3.2-4.3.4 และจะเห็นอีกด้วยว่าความถี่ของการสั้นเพิ่มขึ้นจากความถี่ของรูปร่างเริ่มต้น นอกจากนี้แอมพลิจูดการสั้นยังมากกว่า -1 ถึง 1 เสมอ ไม่ว่าจะกำหนดให้ค่า α เป็นเท่าใดก็ตาม นอกจากนี้จะสังเกตเห็นว่าเมื่อกำหนดให้ α เท่ากัน และให้เส้นลวดมีความเร็วต้นแตกต่างกัน ลักษณะการสั้นของเส้นลวดไม่แตกต่างกันมากนัก

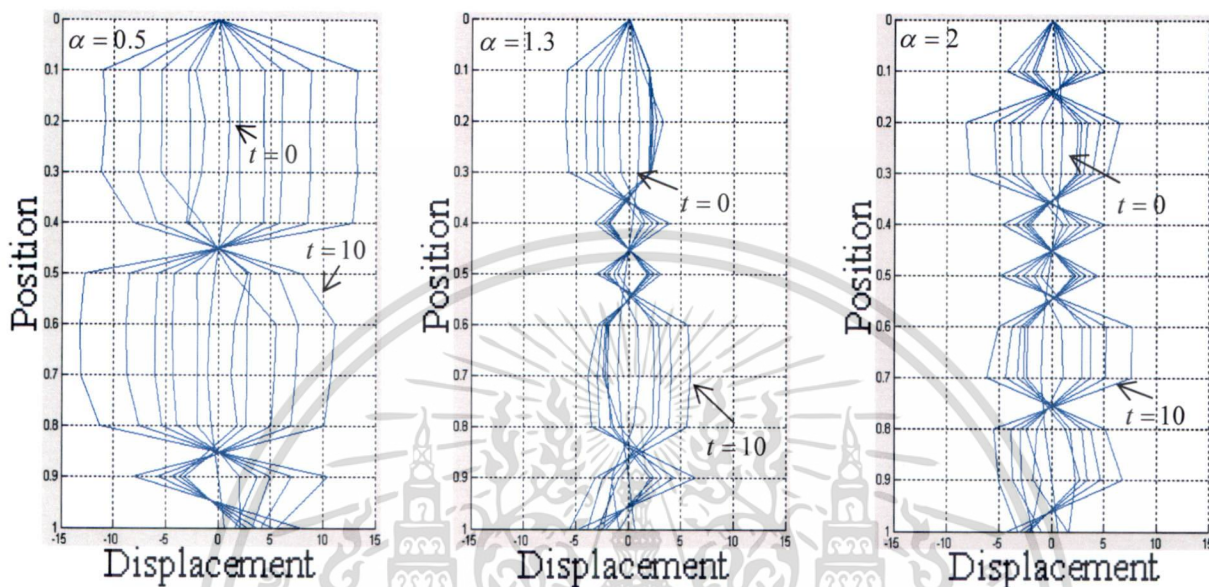


รูปที่ 4.3.1 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวโค้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x)=0$ เมื่อ $\alpha=0.5, 1.3, 2$ ตามลำดับ

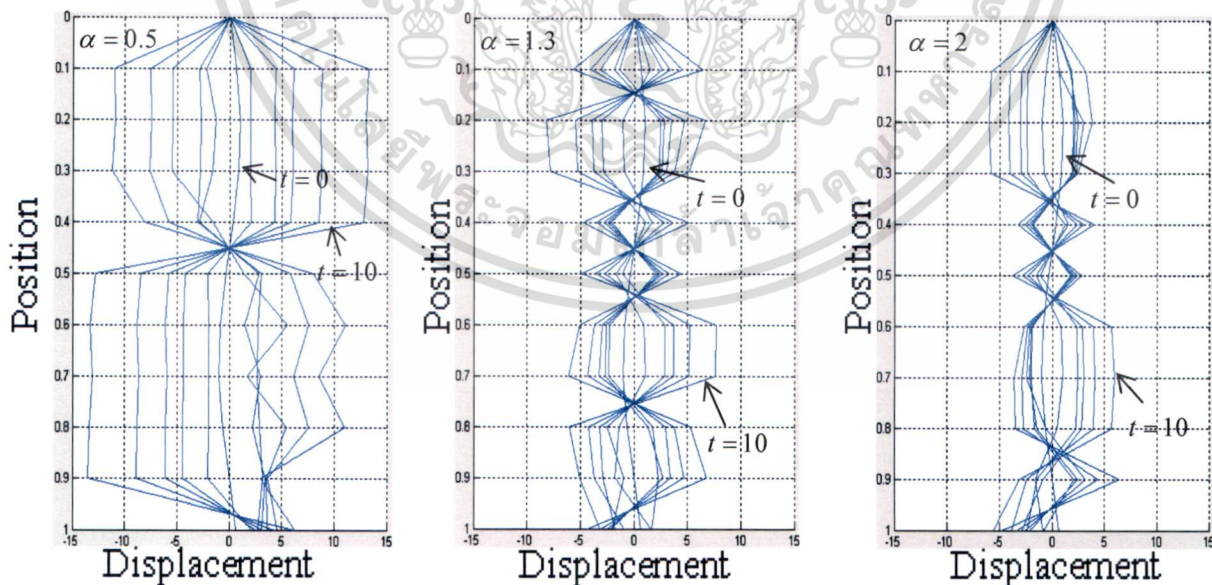


รูปที่ 4.3.2 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวโค้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x)=0$ เมื่อ $\alpha=0.5, 1.3, 2$ ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

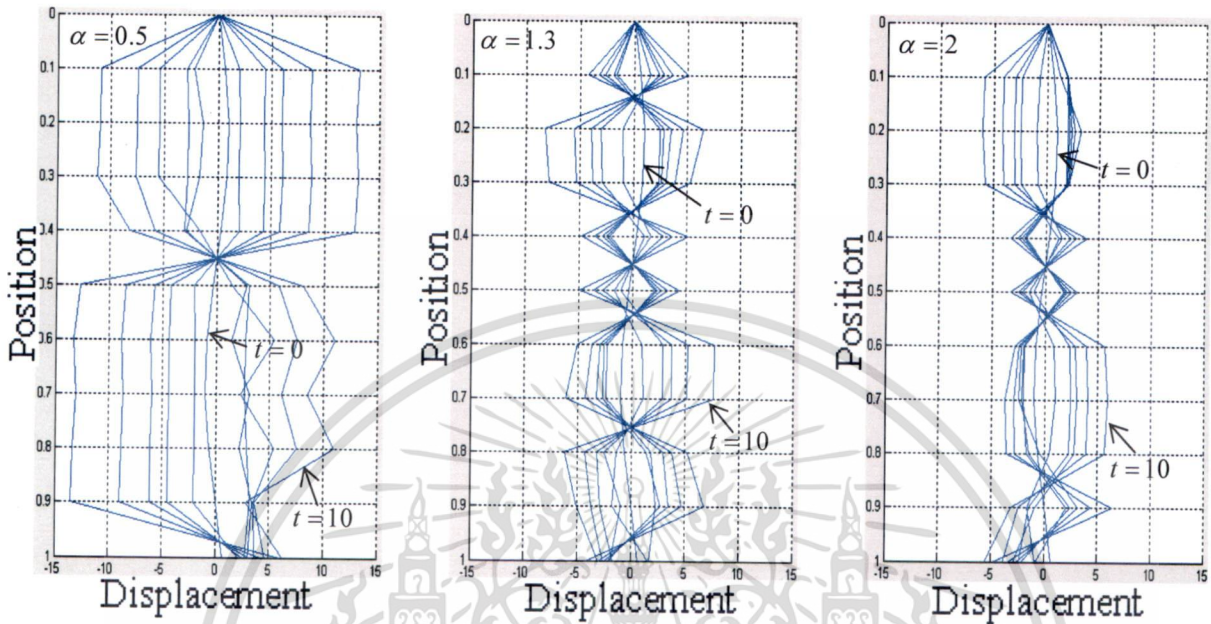


รูปที่ 4.3.3 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม เมื่อกำหนดให้เส้น
 ลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x)=1$ เมื่อ $\alpha = 0.5, 1.3, 2$ ตามลำดับ

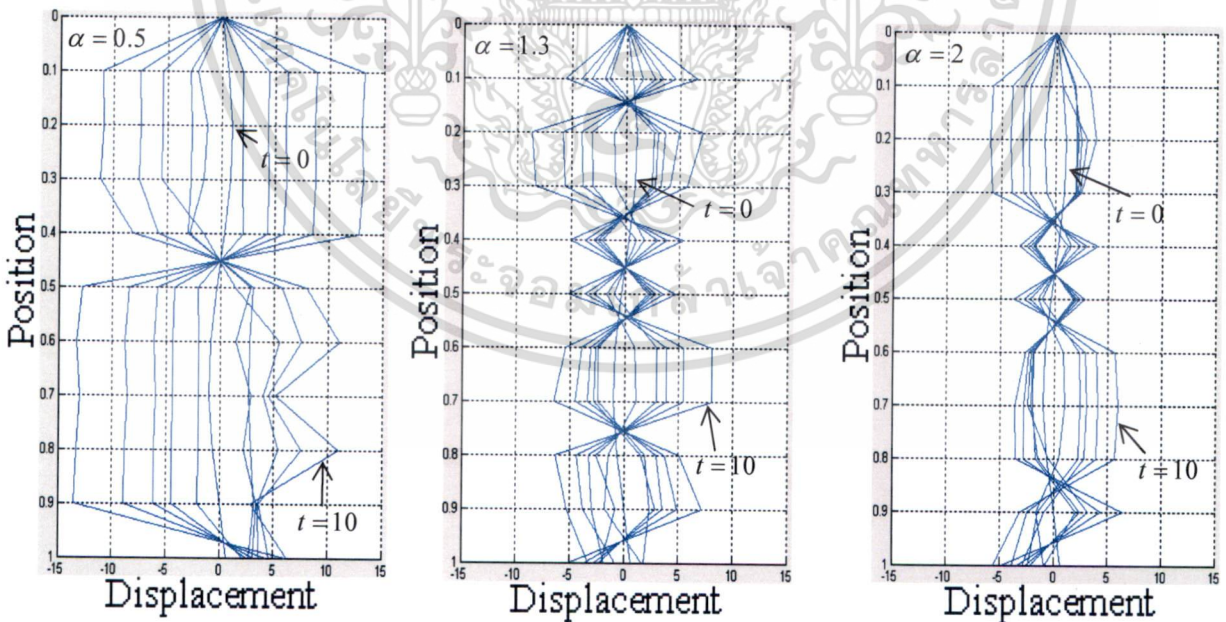


รูปที่ 4.3.4 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม เมื่อกำหนดให้เส้น
 ลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x)=x$ เมื่อ $\alpha = 0.5, 1.3, 2$ ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ในงานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



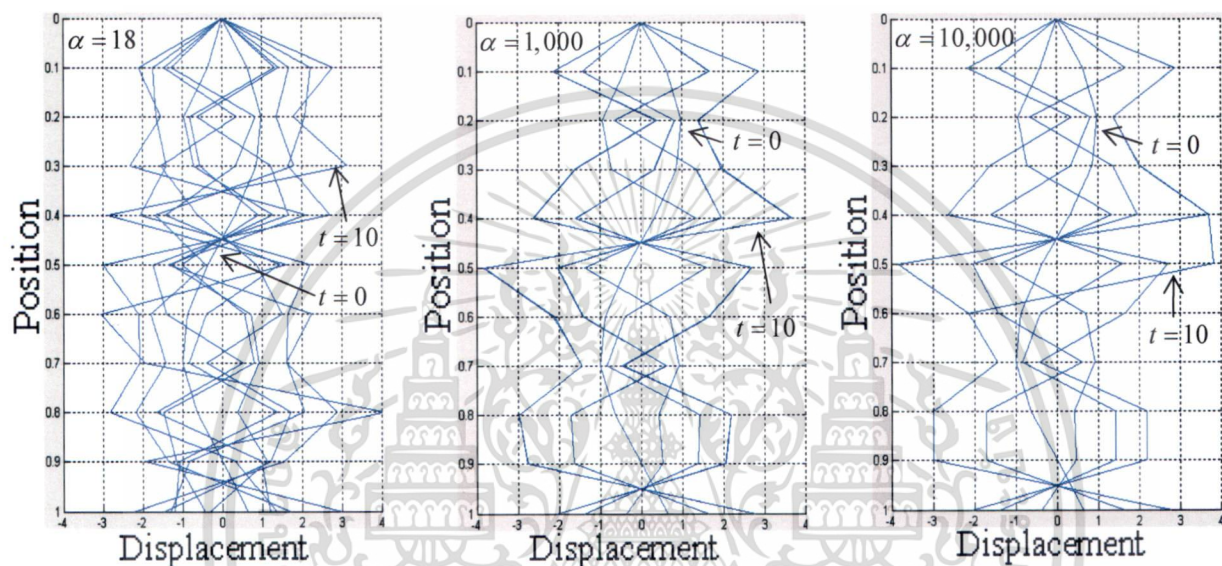
รูปที่ 4.3.5 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \cos x$ เมื่อ $\alpha = 0.5, 1.3, 2$ ตามลำดับ



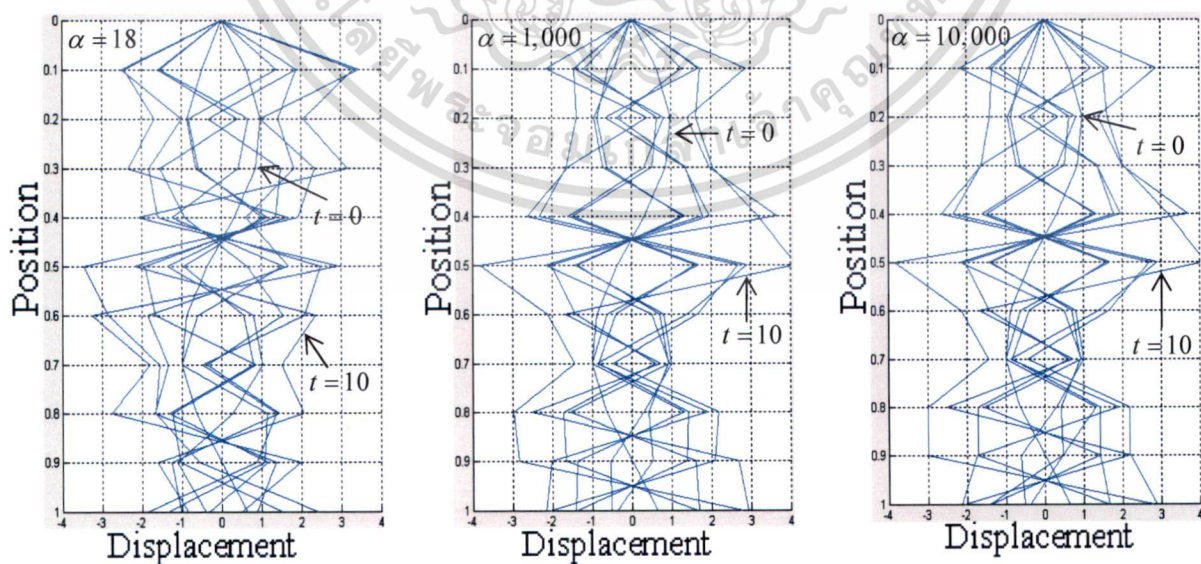
รูปที่ 4.3.6 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \sin x$ เมื่อ $\alpha = 0.5, 1.3, 2$ ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 4.3.7 -4.3.11 แสดงการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม เมื่อ $\alpha = 18, 1,000$ and $10,000$ จากรูป จะเห็นว่า การสั้นจะมีความถี่ลดลงเมื่อ α เพิ่มขึ้น โดยเราได้ทดลองเปลี่ยนค่า α ในช่วง 18 ถึง 10,000 เราพบว่าแอมพลิจูดของการสั้นจะอยู่ในช่วง -4 ถึง 4 เสมอ นอกจากนี้ เรายังพบว่าค่า α ในช่วง 1,000 ถึง 10,000 ไม่มีผลต่อลักษณะการสั้น นั่นคือการสั้นยังคงมีลักษณะเหมือนเดิม

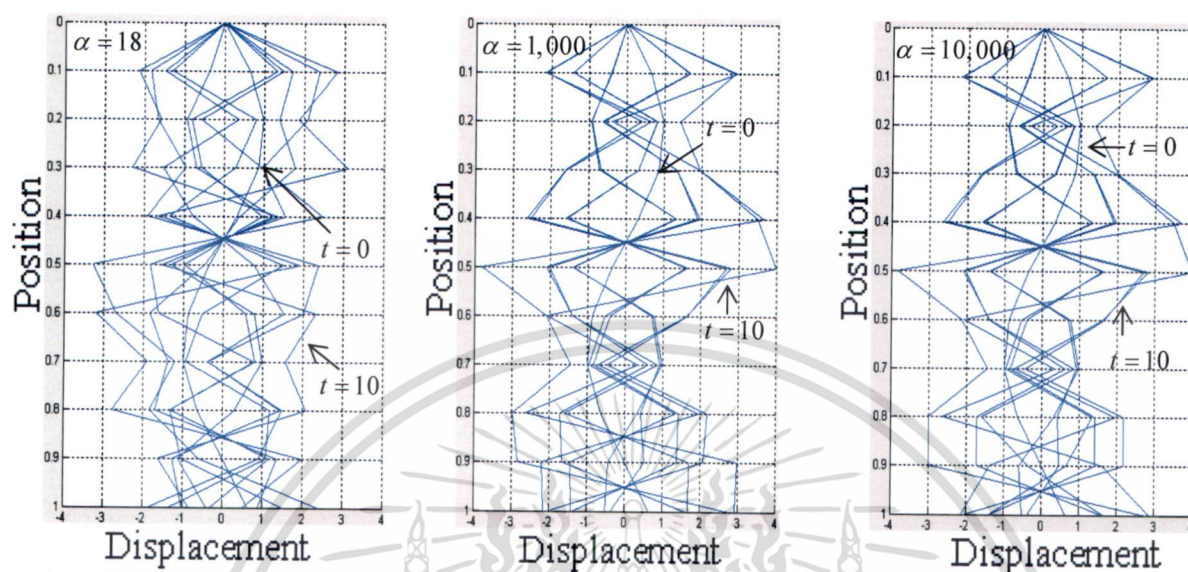


รูปที่ 4.3.8 กราฟแสดงตำแหน่งการสั้นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม(เส้นสีแดง) เมื่อ กำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 0$ เมื่อ $\alpha = 18, 1000, 10000$ ตามลำดับ

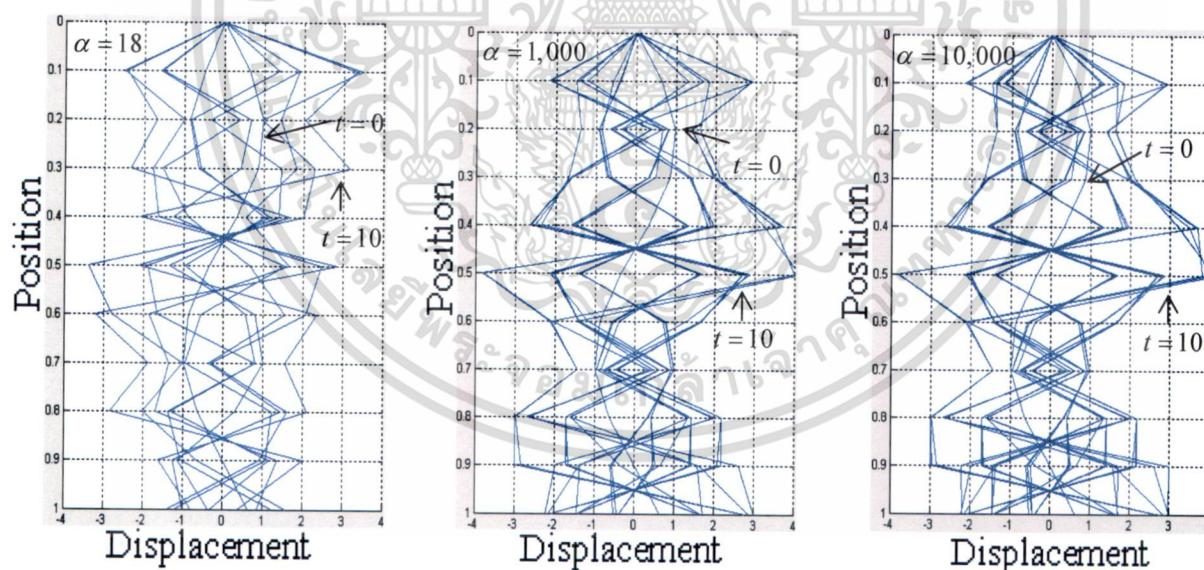


รูปที่ 4.3.7 กราฟแสดงตำแหน่งการสั้นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม(เส้นสีแดง) เมื่อ กำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = 1$ เมื่อ $\alpha = 18, 1000, 10000$ ตามลำดับ

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

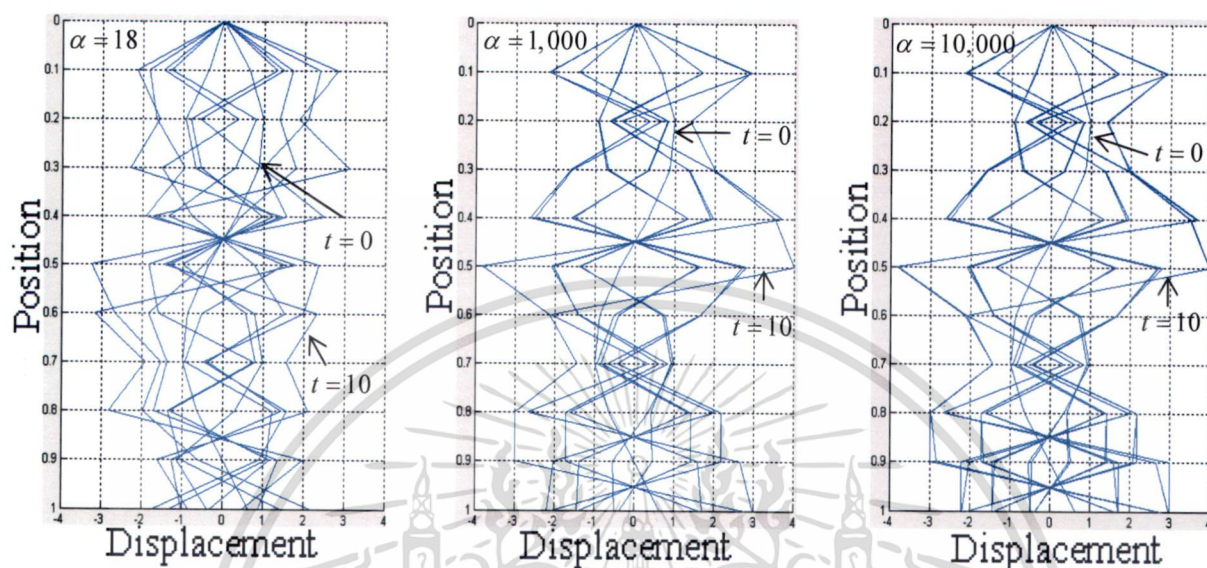


รูปที่ 4.3.9 กราฟแสดงตำแหน่งการตั้งในแนวตั้งแบบมีความหนาแน่นไม่เชิงเส้นกำลังสาม(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = x$ เมื่อ $\alpha = 18, 1000, 10000$ ตามลำดับ



รูปที่ 4.3.10 กราฟแสดงตำแหน่งการตั้งในแนวตั้งแบบมีความหนาแน่นไม่เชิงเส้นกำลังสาม(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \cos x$ เมื่อ $\alpha = 18, 1000, 10000$ ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3.11 กราฟแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสาม(เส้นสีแดง) เมื่อกำหนดให้เส้นลวดมีความเร็วเริ่มต้น $\psi(x) = \sin x$ เมื่อ $\alpha = 18, 1000, 10000$ ตามลำดับ

จากผลของการจำลองการสั่นในแนวตั้งแบบไม่เชิงเส้นกำลังสาม จะเห็นว่าแอมพลิจูดของการสั่นจะลู่ออกนอกช่วง -1 ถึง 1 เสมอ ไม่ว่าจะกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงเป็นเท่าใดก็ตาม ต่างจากการสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง ที่แอมพลิจูดของการสั่นลดลงอย่างรวดเร็ว เมื่อกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ความหน่วงอยู่ในช่วงที่จำกัด ดังนั้นการสั่นแบบไม่เชิงเส้นกำลังสามไม่สามารถช่วยในการป้องกันการเกิดการกำทอนได้ ต่างจากการสั่นแบบไม่เชิงเส้นกำลังสองที่สามารถช่วยลดการเกิดการกำทอนได้

นอกจากนี้ การสั่นทั้งสองแบบยังมีลักษณะการสั่นแบบลู่ออกที่แตกต่างกันอย่างมา ก กล่าวคือการสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองจะลู่ออกแบบกำทอน ในขณะที่การสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสามนั้น แอมพลิจูดของการสั่นจะมีค่ามากกว่า -1 ถึง 1 แต่ยังคงอยู่ภายในขอบเขตที่จำกัด

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ ระเบียบวิธีผลต่างอันดับถูกนำมาใช้เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสองและกำลังสาม และสร้างการจำลองเชิงตัวเลขในรูปแบบของกราฟเพื่อเปรียบเทียบลักษณะของการสั่นแต่ละแบบ ผลการเปรียบเทียบแสดงให้เห็นว่าค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงและกำลังของพจน์ความหน่วงมีบทบาทสำคัญต่อการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของแอมพลิจูดของการสั่น ส่งผลให้ลักษณะการสั่นทั้งสามแบบมีความแตกต่างกันอย่างสิ้นเชิง เมื่อกำหนดให้ความเร็วเริ่มต้นและรูปร่างเริ่มต้นเหมือนกัน โดยการสั่นแบบมีความหน่วงเชิงเส้น เส้นลวดจะค่อยๆ สั่นลดลงแบบขึ้นอยู่กับรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวด เมื่อเพิ่มค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงให้อยู่ระหว่าง 1 ถึง 10,000 ในขณะที่การสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสอง เส้นลวดจะสั่นลดลงอย่างรวดเร็วแบบไม่ขึ้นอยู่กับรูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวด เมื่อกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงอยู่ระหว่าง 0.5 ถึง 3 นอกจากนี้การสั่นยังมีลักษณะใกล้เคียงกัน โดยไม่ขึ้นกับค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงและความเร็วเริ่มต้นของเส้นลวดอีกด้วย และเมื่อกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงมากกว่า 3.1 เส้นลวดจะสั่นแบบลู่ออก(แบบเกิดการกำทอน) ส่วนการสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสามนั้น ลักษณะการสั่นจะลู่ออกเสมอ (แอมพลิจูดมากกว่า -1 ถึง 1) ไม่ว่าค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงเป็นเท่าใดก็ตาม และเมื่อกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงเพิ่มขึ้น เส้นลวดจะสั่นลดลง

นอกจากนี้ จากผลการเปรียบเทียบลักษณะการสั่นทั้งสามแบบ ยังพบว่า การสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสองนั้น สามารถช่วยป้องกันการเกิดการกำทอนได้ เนื่องจากแอมพลิจูดของการสั่นจะลดลงอย่างรวดเร็ว เมื่อกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงอยู่ในช่วงที่จำกัด

ในงานวิจัยนี้ สำหรับการศึกษาลักษณะการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกำลังสอง กำหนดให้ช่วงย่อยของตำแหน่งและเวลาคือ $h = 0.01$ และ $k = 0.0025$ ตามลำดับ ดังรายละเอียดในหัวข้อ 4.1 และ 4.2 ส่วนการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นกำลังสามนั้น กำหนดให้ช่วงย่อยของตำแหน่งและเวลาคือ $h = 0.01$ และ $k = 0.05$ ตามลำดับ ดังรายละเอียดในหัวข้อ 4.3 ซึ่ง h และ k ที่กำหนดทั้งหมดเป็นไปตามเงื่อนไขความเสถียรของระเบียบวิธีผลต่างอันดับ $2mp < 1$ โดย

$$p = \frac{k^2}{h}$$

5.2 ข้อเสนอแนะ

เราสามารถศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับการจำลองการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้ง ในกรณีของความหน่วงไม่เชิงเส้นแบบอื่นๆ เช่น $c > 3$ และกำหนดให้ความเร็วเริ่มต้นแทนด้วยฟังก์ชันที่ซับซ้อนขึ้น นอกจากนี้ยังสามารถนำแรงภายนอกมาพิจารณาร่วมกับความหน่วงแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้นกรณีต่างๆ ว่ามีผลต่อลักษณะการสั้นของเส้นลวดอย่างไร



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

- [1] สุทธิรา วสุวานิช. 2547. ปัญหาค่าขอบโดยวิธีวิเคราะห์และเชิงตัวเลข, พิมพ์ครั้งที่ 1 กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- [2] กนต์ธร ชานีประศาสน์. 2538. การสั่นสะเทือนทางกล, พิมพ์ครั้งที่ 3 กรุงเทพฯ: มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- [3] N. S. Koshlyakov, E. V. Gliner and M. M. Smirnov, *Differential Equations of Mathematical Physics*, Moscow, 1962 (in Russian). English Translation: North-Holland Publ. Co, 1964.
- [4] นันทิธร สอระสัน, สิทธิชัย มาละเงิน และจุฑามาศ แซ่เบ๊. 2552. “การหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น และค่าขอบเขตของสมการเส้นลวดในแนวตั้งโดยระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม.” ปัญหาพิเศษวิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- [5] คณาวุฒิ ทรัพย์คล้าย. 2555. “การจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง.” ปัญหาพิเศษวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัย สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- [6] J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, *Global Solutions of IBVP to Nonlinear Equation of Suspended String*, Tokyo Journal of Mathematics **30**, No.2 (2007), 543-556.
- [7] J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, *Global Classical Solutions of IBVP to Nonlinear Equation of Suspended String*, Tokyo Journal of Mathematics **31**, No.2 (2008), 351-373.
- [8] J. Kasemsuwan, *Exponential Decay for Nonlinear Damped Equation of Suspended String*, Proceedings of 2009 International Symposium on Computing, Communication, and Control, 2009, 308-312.
- [9] M. Yamaguchi, *Almost Periodic Oscillations of Suspended String Under Quasiperiodic Linear Force*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **303**, No.2 (2005), 643-660.
- [10] M. Yamaguchi, T. Nagai and K. Matsukane, *Forced Oscillations of Nonlinear Damped Equation of Suspended String*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **342**, No.1 (2008), 89-107
- [11] M. Yamaguchi, *Global Smooth Solutions of IBVP to Nonlinear Equation of Suspended String*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **342**, No.2 (2008), 798-815.
- [12] M. Yamaguchi, *Infinitely Many Periodic Solutions of Nonlinear Equations of Suspended Strings*, FUNKCIALAJ EKVACIOJ-SERIO INTERNACIA **51**, No.2 (2008), 245-267.
- [13] M. Yamaguchi, *Existence and Regularity of Periodic Solutions of Nonlinear Equation of a Suspended String*, FUNKCIALAJ EKVACIOJ-SERIO INTERNACIA **52**, No.2 (2009), 281-300.
- [14] ใจปอง เกษมสุวรรณ. 2553. “การศึกษาสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง” วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยหอการค้าไทย **30**, 3: 101-111.
- [15] J. Kasemsuwan, P. Chitsakul and P. Chaisanit, *Simulation of Suspended String Equation*, The 3rd Thai-Japan International Academic Conference, 2010, 60-61.
- [16] คณาวุฒิ ทรัพย์คล้าย, ใจปอง เกษมสุวรรณ. 2554. “แบบจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง” การประชุมวิชาการ ครั้งที่ 8 มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน, 1486-1491.
- [17] J. Kasemsuwan, *Numerical Solution of the Damped Vibration of Suspended String*, University of the Thai Chamber of Commerce Journal, 2012, peer-review.
- [18] J. Kasemsuwan, *The Finite Difference Scheme for the Suspended String Equation with the Nonlinear Damping Term*, International Conference on Applied Physics and Mathematics, 2012, 566-568.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

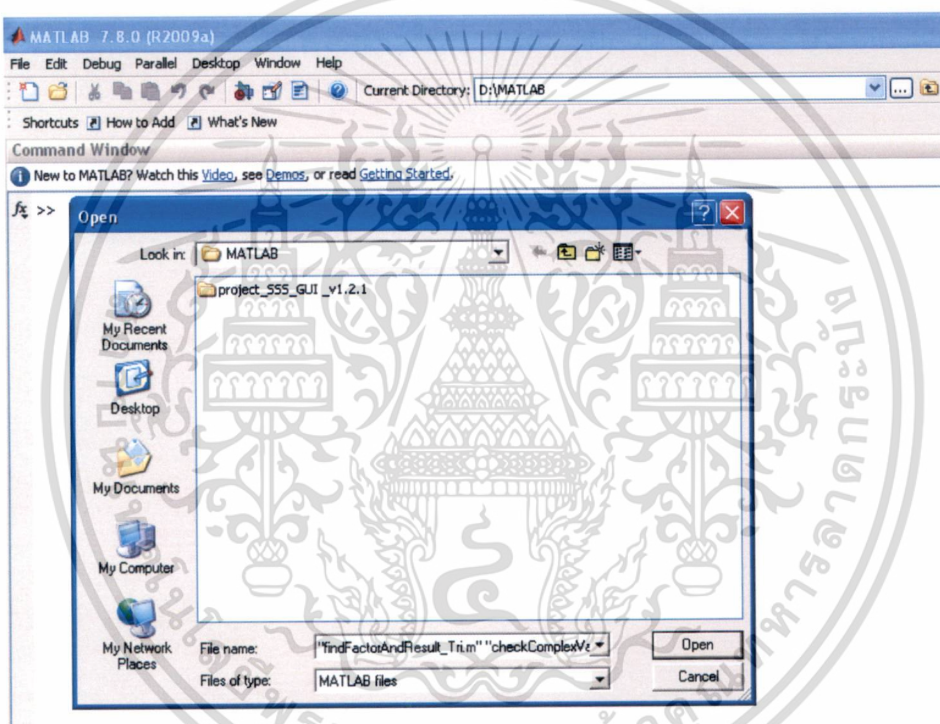
วิธีการเปิดไฟล์โปรแกรม MATLAB

ขั้นที่ 1 สำเนาไฟล์ directory “project_SSS_GUI_v1.2.1” จากแผ่น CD ลงใน directory ของ MATLAB ในเครื่อง

ขั้นที่ 2 คลิกที่ปุ่ม strat มุมล่างซ้ายมือที่หน้าจอ window

ขั้นที่ 3 เลือกเข้าโปรแกรม MATLAB

ขั้นที่ 4 คลิกปุ่มเปิดไฟล์  แล้วเข้า directory ของ MATLAB แล้วเปิดไฟล์ project_SSS_GUI_v1.2.1 ดังรูป



รูปที่ 1 รูปแสดงหน้าจอการเปิดไฟล์ในโปรแกรม MATLAB

ขั้นที่ 5 ดับเบิ้ลคลิกที่ไฟล์ “project_SSS_GUI_v1.2.1”

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นที่ 6 คัดเบิ้ลคลิกที่ไฟล์ “Main.m” จะปรากฏหน้าจอของ source code ดังนี้

```

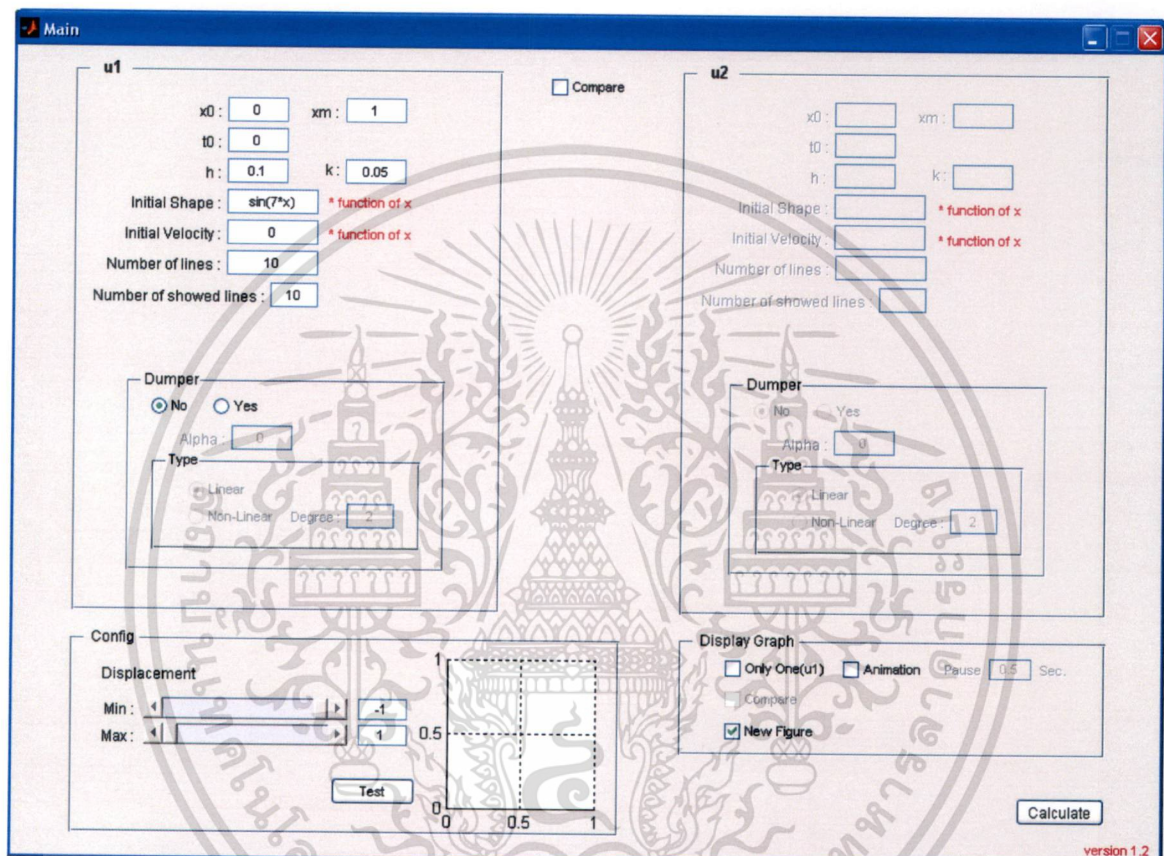
1 function varargout = Main(varargin)
2 % MAIN M-file for Main.fig
3 %
4 %   MAIN, by itself, creates a new MAIN or raises the existing
5 %   singleton*.
6 %
7 %   H = MAIN returns the handle to a new MAIN or the handle to
8 %   the existing singleton*.
9 %
10 %   MAIN('CALLBACK', hObject,eventData,handles,...) calls the local
11 %   function named CALLBACK in MAIN.M with the given input arguments.
12 %
13 %   MAIN('Property','Value',...) creates a new MAIN or raises the
14 %   existing singleton*. Starting from the left, property value pairs are
15 %   applied to the GUI before Main_OpeningFcn gets called. An
16 %   unrecognized property name or invalid value makes property application
17 %   stop. All inputs are passed to Main_OpeningFcn via varargin.
18 %
19 % *See GUI Options on GUIDE's Tools menu. Choose "GUI allows only one
20 % instance to run (singleton)".
21 %
22 % See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES
23 %
24 % Edit the above text to modify the response to help Main
25 %
26 % Last Modified by GUIDE v2.5 20-Jun-2012 21:39:51
27 %
28 % Begin initialization code - DO NOT EDIT
29 gui_Singleton = 1;
30 gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
31                  'gui_Singleton',   gui_Singleton, ...
32                  'gui_OpeningFcn', @Main_OpeningFcn, ...
33                  'gui_OutputFcn',  @Main_OutputFcn, ...
34                  'gui_LayoutFcn',   [], ...
35                  'gui_Callback',    []);
36 if nargin && ischar(varargin(1))
37     gui_State.gui_Callback = str2func(varargin(1));
38 end
39
40 if nargin
41     [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
42 else
43     gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
44 end
45 % End initialization code - DO NOT EDIT
46
47 % --- Executes just before Main is made visible.
48 function Main_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
49 % This function has no output args - see OutputFcn

```

รูปที่ 2 แสดงหน้าจอของ Source Code

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นที่ 7 คลิกปุ่ม  บนแถบเครื่องมือเพื่อ run program จะปรากฏหน้าจอ GUI ดังนี้



รูปที่ 3 รูปแสดงหน้าจอของ GUI

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลเฉลยเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งแบบมีความหน่วง

Numerical Solutions of the Damped Vibration of Suspended String

: ดร. ใจปอง เกษมสุวรรณ

: อาจารย์ประจำสาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์

: คณะวิทยาศาสตร์

: สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง

: Dr. Jaipong Kasemsuwan

: Lecturer, Department of Mathematics

: Faculty of Science

: King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang.

: Email: kwjaipon@kmitl.ac.th

บทคัดย่อ

บทความวิจัยนี้นำเสนอวิธีการใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันดับเพื่อหาผลเฉลยประมาณค่าเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตของสมการการสั่นในแนวตั้งแบบมีความหน่วงเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น และนำผลที่ได้มาเปรียบเทียบกับกรณีการสั่นแบบไม่มีความหน่วงภายใต้รูปร่างเริ่มต้นและความเร็วเริ่มต้นเดียวกัน ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าการสั่นแบบมีความหน่วงไม่เชิงเส้นมีผลทำให้เส้นลวดสั้นลง และมีลักษณะการสั่นที่แตกต่างจากรูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดอย่างมาก ในขณะที่การสั่นแบบมีความหน่วงเชิงเส้น เส้นลวดสั้นลงเช่นกันแต่ยังคงรักษารูปร่างการสั่นเริ่มต้นไว้ ผลจากการเปรียบเทียบทั้งสองกรณีถูกแสดงไว้ในรูปของกราฟและตารางสรุปผล นอกจากนี้เราพบว่าค่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วงมีผลต่อการหาแอมพลิจูดของการสั่น

คำสำคัญ : สมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง, การสั่นแบบมีความหน่วง, วิธีผลต่างอันดับ, แบบจำลองเชิงตัวเลข

Abstract

This paper presents the use of finite difference schemes to find the approximated numerical solutions of the initial-boundary-value problem involving the linear and nonlinear damped equations of a suspended string. The results are compared with the suspended string without damping term provided that the initial shape and velocities are all the same. The results show that the vibration amplitude decreases and the vibration pattern demonstrates quite different from the initial pattern in the nonlinear damping case. The vibration amplitude also decreases in the linear damping case but the initial vibration pattern is still maintained. The results are

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

compared graphically and also summarized in tables. In addition, we find that the coefficient of the damping term plays a role in determining the vibration amplitude.

Keywords: Suspended String Equation, Damped Vibration, Finite-Difference Method, Numerical Simulation.

Introduction

In this work, we study the numerical solution of the initial boundary value problem of the suspended string equation with a damping term as follows:

$$\begin{aligned} u_{tt} - (xu_{xx} + u_x) + \alpha |u_t|^{c-1} u_t &= 0 & \alpha > 0, c \geq 1 \\ u(a, t) &= 0, & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & & x \in [0, a], \end{aligned} \quad (1)$$

where $u(x, t)$ is the horizontal displacement of the string at (x, t) , α is the coefficient of the damping term and a positive number, $c \geq 1$ and Ω is a cylindrical domain $(0, a) \times (0, T)$. The string being investigated is assumed to be heavy and flexible with the length of a . In addition, the string is assumed to have a uniform density and be suspended with the upper end fixed and the lower end free. This equation (1) first introduced by Koshlyakov, Gliner, and Smirnov (1964) to explain the vibration of suspended string.

Eq. (1) was used to describe the energy decay of the global solution and was explained in Kasemsuwan (2009). The time-periodic solution of damped equation suspended string equation taking into account only linear damping term was comprehensively studied by Yamaguchi, Nagai, and Matsukane (2008). The numerical solution of Eq. (1) without damping term was obtained using the Crank-Nicolson method as Subklay and Kasemsuwan (2011) and was compared with the finite difference method suggested by Kasemsuwan et. al. (2010). The characteristics of the several types of solutions previously reported are discussed by Kasemsuwan (2009). Finite difference method is one among the most well known numerical methods for finding the numerical solution of the partial differential equations in the hyperbolic type. For example, Zhang (2005); Kutluay, and Esen (2009); Koide, and Furihata (2009) used this method to find the numerical solution of the regularized long-wave equation. In this work, we apply the finite difference method to find the numerical solution of Eq. (1) considering both linear damping ($c=1$) and nonlinear damping ($c=2$) terms. To the best of the author's

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

knowledge, no attempts have been made to solve Eq. (1) in both cases. The numerical solution of suspended string with both the linear and nonlinear damping cases are compared with the solution without damping under the same initial condition. We have found that the vibration amplitude is inversely proportional to the α term while the vibration amplitude is proportional to α in the nonlinear damping case. The finite difference method is implemented by using MATLAB and Excel. The results are graphically shown to ease the interpretation and also summarized in tables.

The Finite Difference Scheme

To solve Eq. (1), we have modified the initial condition so the suspended string equation can be shown as

$$\begin{aligned} u_{tt} - ((m\Delta x)u_{xx} + u_x) + \alpha |u_t|^{c-1} u_t &= 0, & \alpha < 0, c \geq 1, \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(a, t) &= 0, & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) &= \psi(x), & x \in [0, a]. \end{aligned} \quad (2)$$

The solution domain $0 < x < 1, t > 0$ is divided into subintervals Δx in the direction of the position x and time t .

Applying the central finite difference to Eq. (2) yields

$$\left(\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} \right) - \left[mh \left(\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) + \left(\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right) \right] + \alpha \left| \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right|^{c-1} \left(\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right) = 0, \quad (3)$$

where $u_m^{n+1} = u(x, t+k)$, $u_m^n = u(x, t)$, $u_m^{n-1} = u(x, t-k)$, $u_{m+1}^n = u(x+h, t)$, $u_{m-1}^n = u(x-h, t)$, $u_{m+1}^{n+1} = u(x+h, t+k)$, $u_{m-1}^{n+1} = u(x-h, t+k)$, m is the position step ($m = 1, \dots, M$) and n is the time step ($n = 1, \dots, N$), while h and k are the mesh size in x and t , respectively.

In this work, the numerical solution of Eq. (3) is categorized into two different cases i.e., linear damping case ($c = 1$) and nonlinear damping case ($c = 2$).

For the linear damping case, substituting $c = 1$ into Eq. (3), we get

$$\left(\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} \right) - \left[mh \left(\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) + \left(\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right) \right] + \alpha \left(\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right) = 0. \quad (4)$$

Similarly, substituting $c = 2$ into Eq. (3) for the nonlinear damping case yields

$$\left(\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} \right) - \left[mh \left(\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) + \left(\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right) \right] + \alpha \frac{|u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^2}{(2k)^2} = 0. \quad (5)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

It is noted here that when $u_m^{n+1} - u_m^{n-1} < 0$, the numerical solution, i.e. u_m^n , has the same magnitude with that when $u_m^{n+1} - u_m^{n-1} > 0$ but with the opposite sign.

Multiplying Eq. (4) with $2k^2$, the result is

$$(2u_m^{n+1} - 4u_m^n + 2u_m^{n-1}) - [2mp(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) + p(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)] + \alpha k(u_m^{n+1} - u_m^{n-1}) = 0 \quad (6)$$

where $p = \frac{k^2}{h}$, h and k are the mesh size in x and t , respectively.

By rearranging Eq. (6) into the explicit form, we have

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} [(2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n + (\alpha k - 2)u_m^{n-1}]. \quad (7)$$

Eq. (7) can be subdivided into four different cases, depending on the values of n and m as follows.

Case 1: $n = 0$ and $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$

By substituting $n = 0$ into Eq. (7), u_m^{-1} , the outside cylindrical domain, can be estimated by applying the backward difference into the initial condition to obtain

$$u_m^{-1} = u_m^0 - k\psi(x). \quad (8)$$

Substituting Eq. (8) into Eq. (7) yields

$$u_m^1 = \frac{1}{2 + \alpha k} [(2mp + p)u_{m+1}^0 + (2 - 4mp + \alpha k)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 + (-\alpha k^2 + 2k)\psi(x)]. \quad (9)$$

Case 2: $n > 0$ and $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$

Eq. (7) is employed.

Case 3: $n = 0$ and $m = M$

In this case, we find that u_{M+1}^0 is the outside cylindrical domain and can be estimated by applying the central difference into the boundary condition to obtain $u_{M+1}^0 = u_{M-1}^0$

Consequently, Eq. (7) can be simplified to

$$u_M^1 = \frac{1}{2 + \alpha k} [(2 - 4Mp + \alpha k)u_M^0 + 4Mp u_{M+1}^0 + (-\alpha k^2 + 2k)\psi(x)]. \quad (10)$$

Case 4: $n > 0$ and $m = M$

สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

In this case, u_{M+1}^n can be estimated by applying the central difference into the boundary condition in a similar manner to case 3 and we obtain

$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2 + \alpha k} \left[(4 - 4Mp)u_M^n + 4Mpu_{M-1}^n + (\alpha k - 2)u_M^{n-1} \right] \quad (11)$$

The numerical solutions of Eq. (1) for the linear damping case ($c = 1$) can be calculated by applying the finite difference equations to Eqs. (7), (9), (10) and (11).

For the nonlinear damping case ($c = 2$), we apply $|u_m^{n+1} - u_m^{n-1}|^2 = (u_m^{n+1})^2 - 2u_m^{n+1}u_m^{n-1} + (u_m^{n-1})^2$ to Eq.(5) and we have

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{2(2 - \alpha u_m^{n-1})} (u_m^{n+1})^2 + u_m^{n+1} \\ &= \frac{1}{(2 - \alpha u_m^{n-1})} \left[(2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n - (\alpha u_m^{n-1} + 2)u_m^{n-1} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Similarly, Eq. (12) can be treated similarly to Eq. (7), namely, Eq. (12) can be categorized into 4 different cases depending on the values of n and m . Then we obtain the finite difference schemes to find the numerical solutions of Eq. (1) for $c = 2$ as follows

Case 1: $n = 0$ and $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha(u_m^0 - kf_2(x)))} (u_m^1)^2 + u_m^1 = \frac{1}{(2 - \alpha(u_m^0 - kf_2(x)))} \left[(2mp + p)u_{m+1}^0 + (4 - 4mp)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 - (\alpha(u_m^0 - kf_2(x)) + 2)(u_m^0 - k\psi(x)) \right]. \quad (13)$$

Case 2: $n > 0$ and $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha u_m^{n-1})} (u_m^{n+1})^2 + u_m^{n+1} = \frac{1}{(2 - \alpha u_m^{n-1})} \left[(2mp + p)u_{m+1}^n + (4 - 4mp)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n - (\alpha u_m^{n-1} + 2)u_m^{n-1} \right]. \quad (14)$$

Case 3: $n = 0$ and $m = M$

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha(u_M^0 - kf_2(x)))} (u_M^1)^2 + u_M^1 = \frac{1}{(2 - \alpha(u_M^0 - kf_2(x)))} \left[4Mpu_{M-1}^0 + (4 - 4Mp)u_M^0 - (\alpha(u_M^0 - kf_2(x)) + 2)(u_M^0 - k\psi(x)) \right]. \quad (15)$$

Case 4: $n > 0$ and $m = M$

$$\frac{\alpha}{2(2 - \alpha u_M^{n-1})} (u_M^{n+1})^2 + u_M^{n+1} = \frac{1}{(2 - \alpha u_M^{n-1})} \left[4Mpu_{M-1}^n + (4 - 4Mp)u_M^n - (\alpha u_M^{n-1} + 2)u_M^{n-1} \right]. \quad (16)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Results and Discussion

The numerical solutions of the suspended string vibration with the linear and nonlinear damping by using the finite difference are shown in Table 1 and 2, respectively. The results are obtained under the same initial shape (i.e. $\sin(2\pi x)$) without the initial velocity.

$t \backslash x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0	0	0.58779	0.95106	0.95106	0.58779	1.2E-16	-0.58779	-0.95106
0.03	0	0.58872	0.94916	0.94657	0.58291	-0.00213	-0.58477	-0.94278
0.05	0	0.5913	0.94386	0.93408	0.5694	-0.00795	-0.57633	-0.91981
0.08	0	0.59543	0.93519	0.9139	0.54772	-0.01709	-0.56249	-0.88276
0.1	0	0.60094	0.92317	0.88634	0.51847	-0.02901	-0.54321	-0.83241
0.13	0	0.60765	0.9078	0.8518	0.48237	-0.04304	-0.51841	-0.76967
0.15	0	0.61536	0.88904	0.81072	0.44027	-0.05837	-0.48801	-0.69561
0.18	0	0.62379	0.86686	0.76357	0.3931	-0.07412	-0.4519	-0.61145
0.2	0	0.63269	0.84123	0.71092	0.34192	-0.08933	-0.41003	-0.51854
0.23	0	0.64174	0.81211	0.65333	0.28782	-0.10304	-0.36241	-0.4184
0.25	0	0.65062	0.77949	0.59148	0.23198	-0.11424	-0.30911	-0.3128

Table 1 The numerical displacements of a vibration with the linear damping term ($\alpha = 1$).

$t \backslash x$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0	0	0.58779	0.95106	0.95106	0.58779	1.2E-16	-0.58779	-0.95106
0.03	0	-0.00359	-0.03352	-0.03334	-0.00391	2.7E-05	-0.00881	-0.00921
0.05	0	-0.00034	-0.00095	-0.00087	-0.00042	-7.3E-05	-0.0004	-0.00046
0.08	0	-2.3E-05	6E-05	7.3E-05	-3.2E-05	-2.1E-05	-6.1E-07	-7.1E-06
0.1	0	-9.2E-07	1.4E-05	1.5E-05	-1.3E-06	-2.9E-06	2.3E-06	1.9E-06
0.13	0	1.9E-08	1.4E-06	1.5E-06	6E-08	-2.3E-07	3.1E-07	2.9E-07
0.15	0	8.4E-09	9.7E-08	9.4E-08	2E-08	-7.3E-09	2.7E-08	2.7E-08
0.18	0	1E-09	3.8E-09	2.9E-09	2.4E-09	1E-09	1.7E-09	1.8E-09
0.2	0	8.3E-11	-1.2E-10	-2.2E-10	2E-10	2.1E-10	6E-11	7.7E-11
0.23	0	4.8E-12	-3.9E-11	-4.7E-11	1E-11	2.3E-11	-2.5E-12	-1E-12
0.25	0	1.2E-13	-4.4E-12	-4.8E-12	-4.9E-14	1.5E-12	-7E-13	-6.1E-13

Table 2 The numerical displacements of a vibration with the nonlinear damping term ($\alpha = 3.1$).

The numerical simulations considering both non-damping (blue line) and linear damping cases (red line) under the same initial shape (i.e. $\sin(2\pi x)$) and the various α i.e. $\alpha = 1, 10, 30$ are illustrated in Figs. 1-3 for different values of t . They reveal that when alpha increases, the vibration amplitude decreases. In our calculations, we have varied the value of alpha from 0.1 to 10,000 and found that the vibration amplitude gradually decreases and approaches the initial shape of the suspended string as shown in Fig. 4.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

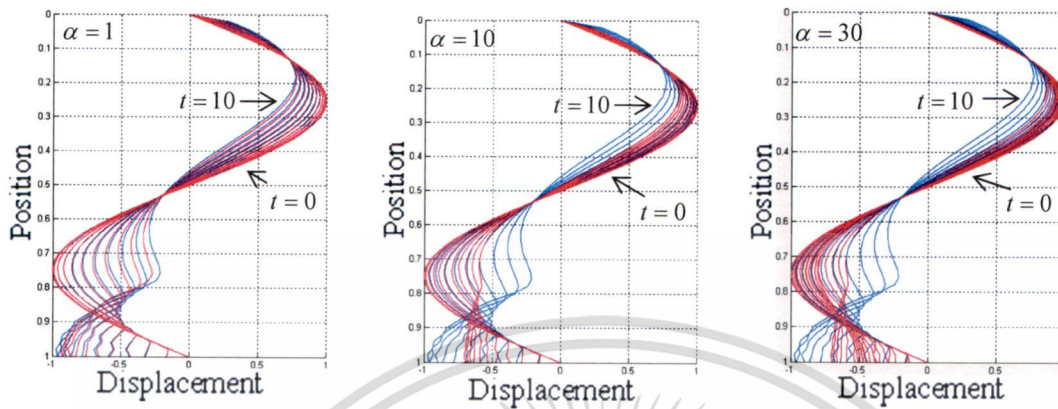


Fig.1 Graphical comparison of the vibration displacements without damping (blue line) and with linear damping (red line) for different values of alpha and time (without the initial velocity).

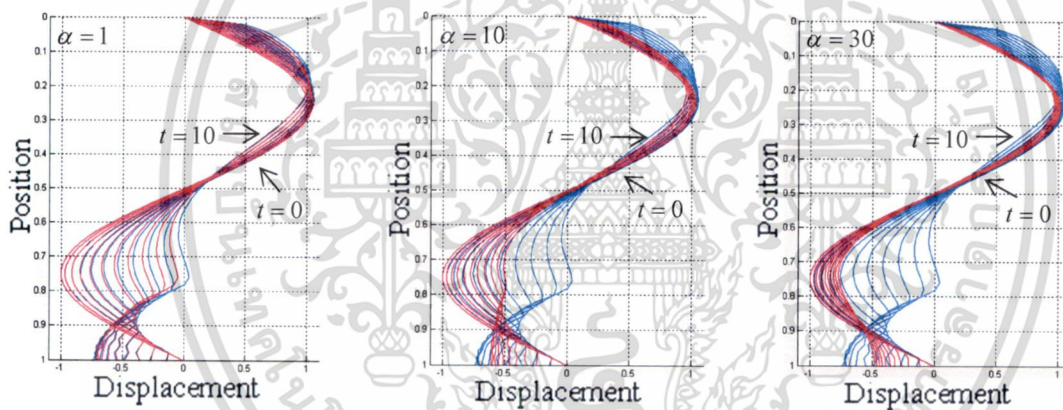


Fig.2 Graphical comparison of the vibration displacements without damping (blue line) and with linear damping (red line) for different values of alpha and time (the initial velocity: 1 m/s).

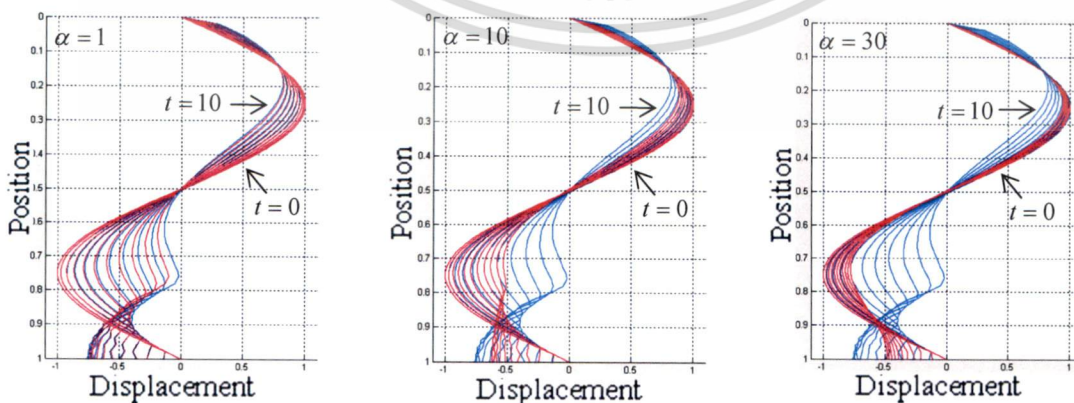


Fig.3 Graphical comparison of the vibration displacements without damping (blue line) and with linear damping (red line) for different values of alpha and time (the initial velocity: x m/s).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

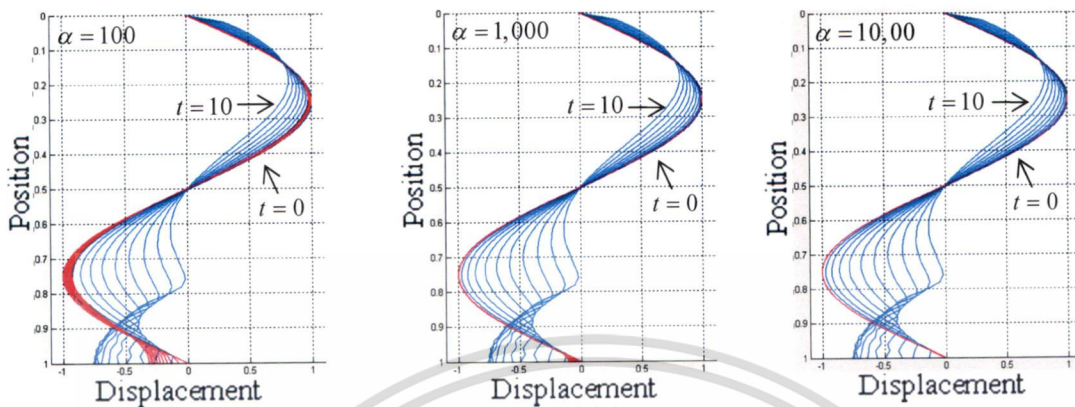


Fig.4 Graphical comparison of the vibration displacements without damping (blue line) and with linear damping (red line) for different values of alpha and time (the initial velocity: x m/s).

The numerical simulation of suspended string compared between non-damping and nonlinear damping cases under the same initial shape (i.e. $\sin(2\pi x)$) and various α i.e. $\alpha = 0.5, 2.5, 3.1$ can be illustrated in the following Figs. 5 and 6. To show that the value of alpha decreases, the vibration amplitude decreases. In our calculations, we have varied alpha from 3.1 to 3.5 and the amplitude is gradually increasing until the resonance is developed as shown in Fig.7. In addition, the initial velocity has been varied and the numerical solution shows a little variation in the vibration amplitude with nonlinear damping provided that the values of alpha and initial shape are the same. Figs. 5 and 6 confirm this fact. From Figs.5 and 6, when the initial velocity is varied from zero to one, the vibration amplitude when the nonlinear damping term taken into account almost remains the same (see red line). However, the vibration amplitude demonstrates some variation when damping term is totally ignored (see blue line).

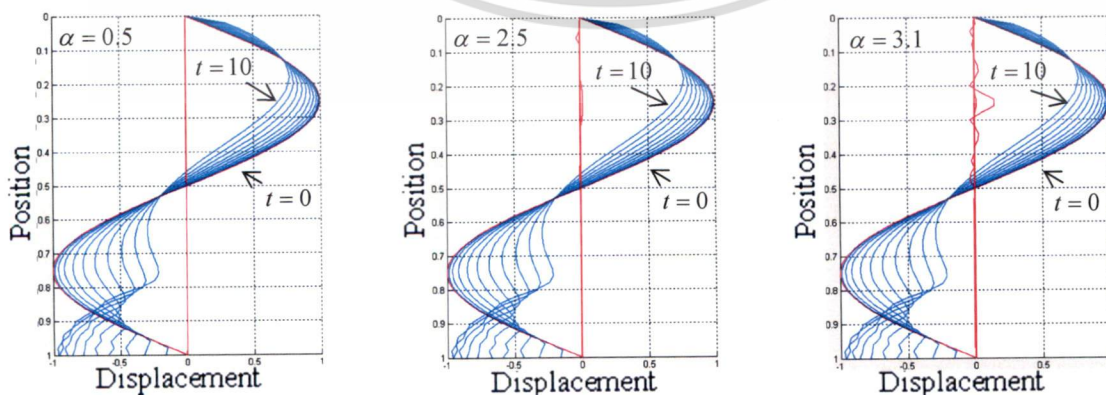


Fig.5 Graphical comparison of the vibration displacements without damping (blue line) and with nonlinear damping (red line) for different values of alpha and time (without the initial velocity).

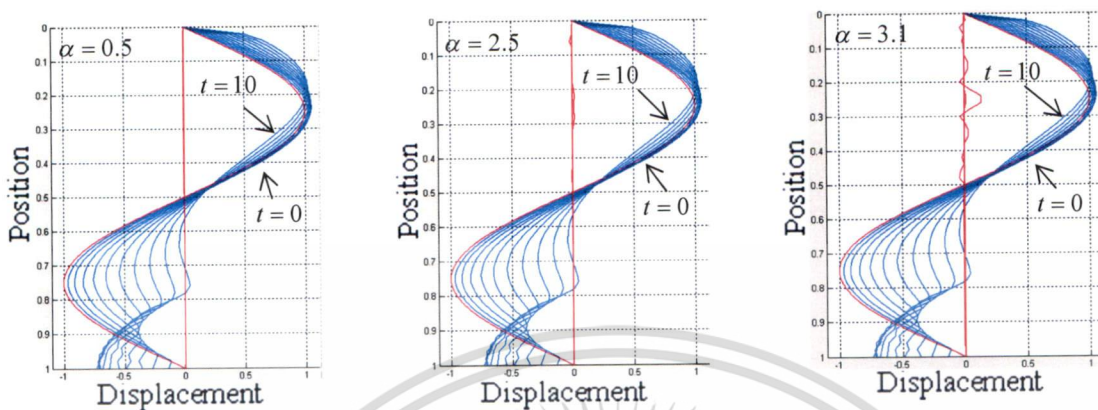


Fig.6 Graphical comparison of the vibration displacements without damping (blue line) and with nonlinear damping (red line) for different values of alpha and time (the initial velocity: 1 m/s).

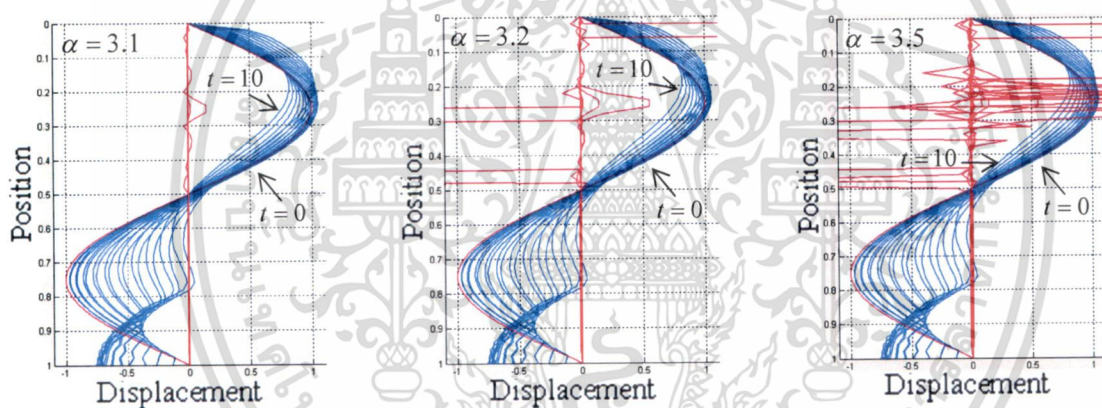


Fig.7 Graphical comparison of the vibration displacements without damping (blue line) and with nonlinear damping (red line) for different values of alpha and time (the initial velocity: x m/s).

Comparison results as shown in Figs. 5 and 6 show that the nonlinear damping term plays a more important role in decreasing the vibration amplitude than the linear damping term. In the linear damping case, the vibration amplitude is inversely proportional to the term α , while the vibration amplitude is proportional to α in the nonlinear damping case. Furthermore, we investigate the vibration characteristic under various initial constant velocities. We find that the vibration characteristic maintains the no damped shape in the linear damping case, while characteristic vibration does not depend on the no damped shape in the nonlinear damping case as illustrated in Fig. 8. From Fig. 8, the resonance takes place when the damping term is ignored (blue line) and this resonance is still preserved if the linear damping term is included

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

mainly due to the fact that the vibration maintains the initial resonance shape. However, it is noticed that the resonance is attenuated when the nonlinear damping term is included.

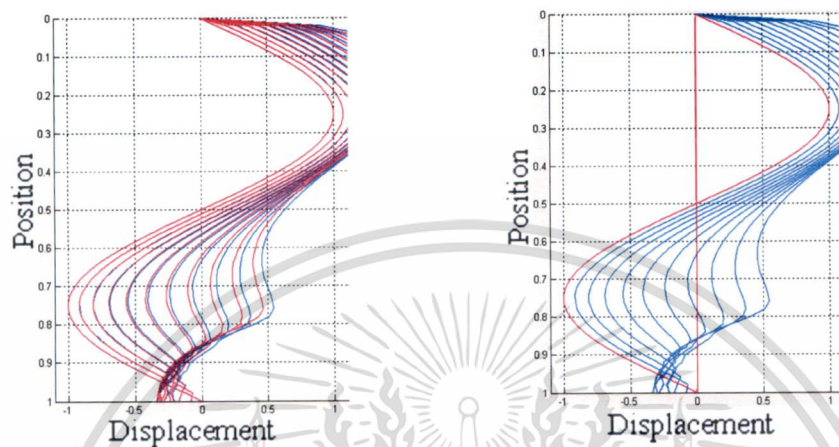


Fig.8 Graphical comparison of the vibration displacements without damping (blue line) and with linear and nonlinear damping (red line) under the same initial velocity 3 and $\alpha = 0.5$.

The stability condition of the finite difference scheme is $2mp < 1$ where $p = \frac{k^2}{h}$ with $h = 0.02$ and $k = 0.0025$. We can not only study more nonlinear damping cases i.e. $c > 2$ with various velocities but also external forces and study more the other numerical methods to compare the obtained results with the finite difference method.

Conclusion

The numerical solution of the suspended string equation with linear and nonlinear damping is obtained using the finite difference method. The comparison results taking into account both the linear and nonlinear cases are shown to be quite different provided that the same initial shape and initial velocities are assumed. The results obtained in the linear damping case show the vibration which maintains the no damped shape, while the vibration characteristic shows quite different shape in case of the nonlinear damping. In addition, in the linear damping case, the vibration amplitude is inversely proportional to the coefficient of damping term while the vibration amplitude is proportional to the coefficient of the damping term in the nonlinear damping case. Furthermore, the nonlinear damping term prevents resonance from occurring under the defined coefficient of the damping term.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Acknowledgement

This research is supported by a research fund from Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand.

References

- Kasemsuwan, Jaipong. 2009. "Exponential Decay for Nonlinear Damped Equation of Suspended String." **Proceedings of 2009 International Symposium on Computing, Communication and Control**, 308-312.
- Kasemsuwan, Jaipong., Chitsakul, P., and Chaisanit, P. 2010. "Simulation of Suspended String Equation." **The 3rd Thai-Japan International Academic Conference**, 60-61.
- Kasemsuwan, Jaipong. 2010. "A Study of Oscillation Equations of a Suspended String." **University of the Thai Chamber of Commerce Journal**, 30, 3: 101-111. (in Thai)
- ไจอ่อง เกษมสุวรรณ. 2553. "การศึกษาศมการการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้ง." **วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย**, 30, 3: 101-111.
- Subklay K., and Kasemsuwan, Jaipong. 2011. "Numerical Simulation of Suspended String Vibration." **The 8th Kasetsart University Kamphaeng Saen Campus Conference**, 1486-1491. (in Thai)
- คณาญาติ ทรัพย์คล้าย, ไจอ่อง เกษมสุวรรณ. 2554. "แบบจำลองเชิงตัวเลขของการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้ง." **การประชุมวิชาการครั้งที่ 8 มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน**, 1486-1491.
- Koide, S., and Furihata, D. 2009. "Nonlinear and Linear Conservative Finite Difference Schemes for Regularized Long Wave Equation." **Janan, Journal Industrial Applied Mathematics** Vol. 26, 15-40.
- Koshlyakov, N.S., Gliner, E.V., and Smirnov, M.M. 1964. **Differential Equations of Mathematical Physics**. Moscow: North-Holland.
- Kutluay, S., and Esen, A. 2009. "A Finite Difference Solution of the Regularized Long-Wave Equation." **Mathematics Problems in Engineering** Vol. 2006: 1-14.


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Yamaguchi, M., Nagai, T., and Matsukane, K. 2008. "Forced Oscillations of Nonlinear Damped Equation of Suspended String." **Journal of Mathematical Analysis and Applications** 342, 1: 89-107.

Zhang, L. 2005. "A Finite Difference Scheme for Generalized Regularized Long-Wave Equation." **Applied Mathematical and Computation** Vol. 168: 962-972.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ต้นฉบับตีพิมพ์ในงานประชุมวิชาการ
ICAPM 2012 : International Conference on
Applied Physics and Mathematics

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

THE FINITE DIFFERENCE SCHEME FOR THE SUSPENDED STRING EQUATION WITH THE NONLINEAR DAMPING TERM

Jaipong Kasemsuwan

Abstract— A numerical solution of the initial boundary value problem of the suspended string vibrating equation with the particular nonlinear damping term based on the finite difference scheme is presented in this paper. The effect of the third power terms of the nonlinear term on the vibration characteristic is investigated. We compare the vibration amplitude as a result of the third power nonlinear damping with the second power obtained from previous report provided that the same initial shape and initial velocities are assumed. The comparison results show that the vibration amplitude is inversely proportional to the coefficient of the damping term for the third power nonlinear damping case, while the vibration amplitude is proportional to the coefficient of the damping term in the second power nonlinear damping case.

Keywords— Finite-difference method, the nonlinear damped equation, the numerical simulation, the suspended string equation.

I. INTRODUCTION

IN this work, the numerical simulation of a heavy and flexible vibrating suspended string with finite length a with the particular nonlinear damping term is studied.

The vibration equation can be shown as [1]

$$\begin{aligned} u_{tt} - (xu_{xx} + u_x) + \alpha |u_t|^{c-1} u_t &= 0 & \alpha > 0, c \geq 1 \\ u(a, t) &= 0, & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & & x \in [0, a], \end{aligned} \quad (1)$$

where $u(x, t)$ is the horizontal displacement of the string at (x, t) , α is the coefficient of the damping term and a positive number, $c \geq 1$.

The string being investigated is assumed to be heavy and flexible with the length of a . In addition, the string is assumed to have a uniform density and be suspended with the upper end fixed and the lower end free.

It is known that Eq. (1) is used to explain the vibration of the suspended string without taking into account the damping term. To consider the damping term, [2] showed the existence of time-periodic solution for the suspended string equation with the linear damping term by assuming the periodic initial function. The global solution of Eq. (1) for an energy decay with the nonlinear external force was also shown in [3].

Jaipong Kasemsuwan is with the Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang 10520 Thailand. (phone: +66(0) 23298000 ext. 6185; fax: +66(0) 23298400 ext. 284; e-mail: kwjaipon@kmitl.ac.th).

The numerical solution without the damping term was studied by using the finite difference method and proposed in [4]. The solutions were found to agree with those obtained by the Crank-Nicolson method in [5]. The numerical solution of (1) with the first power linear damping term ($c=1$) and the second power nonlinear term ($c=2$) is studied in [6]. The purpose of this paper to investigate the effect of the second power nonlinear term to the suspended string vibration. In this work, we use a finite difference scheme to find the numerical solution of vibrating equation in Eq. (1) with the third power nonlinear damping term, i.e. $c=3$. The results are compared with the solutions of the vibrating equation with the second power nonlinear damping term.

II. THE METHOD OF SOLUTION

To apply the finite difference method to Eq. (1), the initial condition has been modified as follows

$$\begin{aligned} u_{tt} - ((m\Delta x)u_{xx} + u_x) + \alpha |u_t|^{c-1} u_t &= 0, & \alpha < 0, c \geq 1 \\ u(0, t) &= 0, \quad u_x(a, t) = 0, & t \in [0, T], \\ u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & & x \in [0, a]. \end{aligned} \quad (2)$$

The solution domains ($0 < x < 1, t > 0$) are divided into subintervals Δx and Δt in the direction of the position x and of the time t , respectively. The numerical solution at the grid point is by substituting u_{tt} , u_{xx} , u_x and u_t in Eq. (2) by the central finite difference as

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} \right) - \left[mh \left(\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) + \left(\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right) \right] \\ + \alpha \left| \frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right|^{c-1} \left(\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{2k} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

where $u_m^{n+1} = u(x, t+k)$, $u_m^n = u(x, t)$, $u_m^{n-1} = u(x, t-k)$, $u_{m+1}^n = u(x+h, t)$, $u_{m-1}^n = u(x-h, t)$, $u_{m+1}^{n+1} = u(x+h, t+k)$, $u_{m-1}^{n+1} = u(x-h, t+k)$, m is the position step ($m = 1, \dots, M$) and n is the time step ($n = 1, \dots, N$), while h and k are the mesh size in x and t , respectively.

For the third power nonlinear damping case ($c = 3$), the last term of left hand side of Eq. (3) can be shown as

$$\left| u_m^{n+1} - u_m^{n-1} \right|^3 = \left(u_m^{n+1} \right)^3 - 3 \left(u_m^{n+1} \right)^2 u_m^{n-1} + 3 u_m^{n+1} \left(u_m^{n-1} \right)^2 - \left(u_m^{n-1} \right)^3. \quad (4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Substituting Eq. (4) into Eq. (3), we have

$$\begin{aligned} & (u_m^{n+1})^3 - 3u_m^{n-1}(u_m^{n+1})^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3(u_m^{n-1})^2\right)u_m^{n+1} \\ &= \frac{2}{\alpha}(2mp + p)u_{m+1}^n + \frac{2}{\alpha}(4 - 4mp)u_m^n \\ &+ \frac{2}{\alpha}(2mp - p)u_{m-1}^n + \left((u_m^{n-1})^2 - \frac{4}{\alpha}\right)u_m^{n-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

where $p = k^2/h$

Eq. (5) can be classified into 4 different cases depending on the values of n and m . We then obtain the finite difference schemes for the numerical solution as follows:

Case 1: $n = 0$ and $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$

$$\begin{aligned} & (u_m^1)^3 - 3[u_m^0 - kf_2(x)](u_m^1)^2 \\ &+ \left(\frac{4}{\alpha} - 3\left[(u_m^0)^2 - 2u_m^0kf_2(x) + (kf_2(x))^2\right]\right)u_m^1 \\ &= \frac{2}{\alpha}(2mp + p)u_{m+1}^0 + \frac{2}{\alpha}(4 - 4mp)u_m^0 + \frac{2}{\alpha}(2mp - p)u_{m-1}^0 \\ &+ \left[(u_m^0)^2 - 2u_m^0kf_2(x) + (kf_2(x))^2 - \frac{4}{\alpha}\right](u_m^0 - kf_2(x)). \end{aligned} \quad (6)$$

Case 2: $n > 0$ and $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$

$$\begin{aligned} & (u_m^{n+1})^3 - 3u_m^{n-1}(u_m^{n+1})^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3(u_m^{n-1})^2\right)u_m^{n+1} \\ &= \frac{2}{\alpha}(2mp + p)u_{m+1}^n + \frac{2}{\alpha}(4 - 4mp)u_m^n \\ &+ \frac{2}{\alpha}(2mp - p)u_{m-1}^n + \left((u_m^{n-1})^2 - \frac{4}{\alpha}\right)u_m^{n-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Case 3: $n = 0$ and $m = M$

$$\begin{aligned} & (u_M^1)^3 - 3[u_M^0 - kf_2(x)](u_M^1)^2 \\ &+ \left(\frac{4}{\alpha} - 3\left[(u_M^0)^2 - 2u_M^0kf_2(x) + (kf_2(x))^2\right]\right)u_M^1 \\ &= \frac{2}{\alpha}(4Mp)u_{M-1}^0 + \frac{2}{\alpha}(4 - 4Mp)u_M^0 \\ &+ \left[(u_M^0)^2 - 2u_M^0kf_2(x) + (kf_2(x))^2 - \frac{4}{\alpha}\right](u_M^0 - kf_2(x)) \end{aligned} \quad (8)$$

Case 4: $n > 0$ and $m = M$

$$\begin{aligned} & (u_M^{n+1})^3 - 3u_M^{n-1}(u_M^{n+1})^2 + \left(\frac{4}{\alpha} - 3(u_M^{n-1})^2\right)u_M^{n+1} \\ &= \frac{2}{\alpha}(4Mp)u_{M-1}^n + \frac{2}{\alpha}(4 - 4Mp)u_M^n + \left((u_M^{n-1})^2 - \frac{4}{\alpha}\right)u_M^{n-1} \end{aligned} \quad (9)$$

The finite difference schemes (6)-(9) has been programmed in MATLAB and the numerical solutions are shown graphically as to be discussed in the next section.

III. RESULTS AND DISCUSSION

The numerical simulation of the vibrating suspended string equation accounting for the second and third power nonlinear damping cases under the same initial shape; i.e. $\sin(7x)$, and the various values of α ; i.e. $\alpha = 0.5, 1.3, 2$ are illustrated in Figs. 1 and 2, respectively. We have found that the amplitude of vibration decreases rapidly in case of the second power nonlinear damping accounted for especially when alpha is less than 1.2. It can be seen from Fig. 1 that the frequency of the vibration is the same as the frequency of the initial shape. In addition, the amplitude of vibration is greater than an interval of -1 to 1 when alpha is larger than 1.3.

The solution of the vibration equation is quite different if the third power nonlinear damping is considered as shown in Fig. 2. That is, the amplitude of vibration increases gradually with time for every value of alpha, while the frequency of oscillation demonstrates both decrease and increase when compared with the frequency of an initial shape. Moreover, the amplitude of vibration decreases when alpha increase as shown in Fig. 2. To investigate how initial velocity affects the solution, the initial velocity has been varied and assigned to equal to its position; i.e. $\psi(x) = 0, 1$ and x . The numerical solution shows that the vibration shape of the suspended string with the third power nonlinear damping barely change as illustrated in Figs. 2-5.

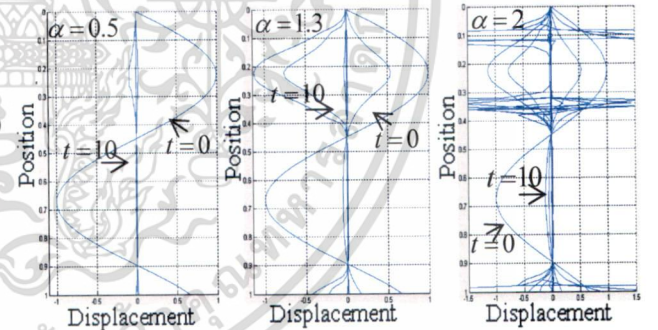


Fig.1 Graphical comparison of the vibration displacements with the second power nonlinear damping term for different values of α and time (without the initial velocity; $\psi(x) = 0$ m/s).

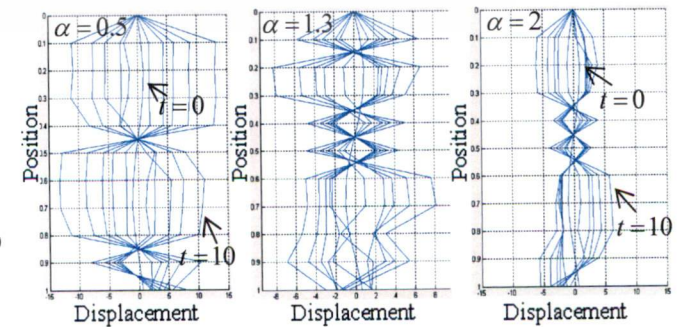


Fig.2 Graphical comparison of the vibration displacements with the third power nonlinear damping term for different values of α and time (without the initial velocity; $\psi(x) = 0$ m/s).

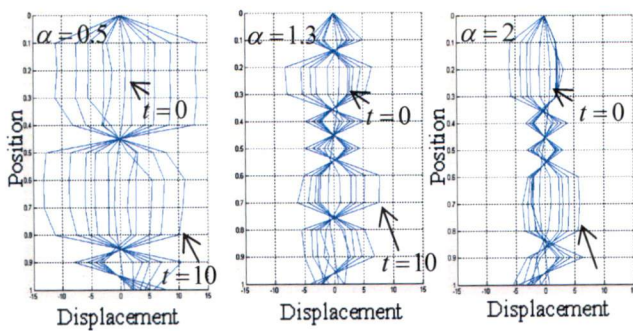


Fig.3 Graphical comparison of the vibration displacements with the third power nonlinear damping term for different values of α and time (with the initial velocity $\psi(x) = 1$ m/s).

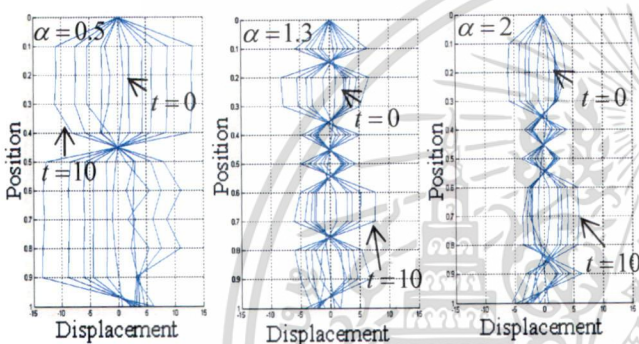


Fig.4 Graphical comparison of the vibration displacements with the third power nonlinear damping term for different values of α and time (with the initial velocity $\psi(x) = x$ m/s).

Fig. 5 shows the vibration when the third power nonlinear damping term is taken into account. Three different values of α , i.e. $\alpha = 18, 1,000$ and $10,000$ have been chosen and it is found that the frequency of oscillation decrease as α increases. In our experiment, several values of α have been assumed and the vibration amplitudes are always within the interval of -4 to 4 . In addition, the vibrations are almost the same when α is large as illustrated in Fig. 5 when $\alpha = 1,000$ and $\alpha = 10,000$.

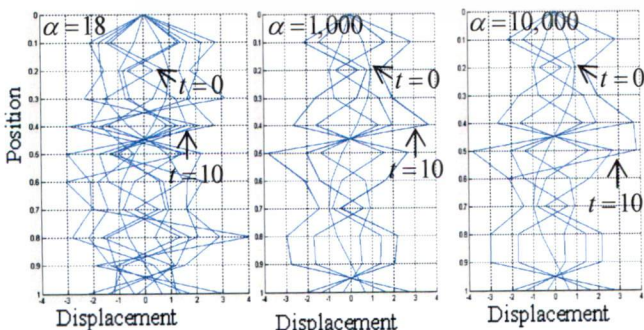


Fig.5 Graphical comparison of the vibration displacements with the third power nonlinear damping term for different values of α (without the initial velocity; $\psi(x) = 0$ m/s).

Unlike the second power nonlinear damping term, the third power results in a increase in the amplitude of vibration. As a consequence, the resonance cannot be minimized by adding the third power nonlinear damping force while the second power nonlinear damping term prevents resonance from occurring under the defined coefficient of the damping term.

The stability condition of the finite difference scheme is given by $2mp < 1$ where $p = k^2/h$, $h = 0.1$ and $k = 0.05$. The study can be further carried out by investigating various nonlinear damping cases i.e. $c > 3$ and the external forces are added to the string equation.

IV. CONCLUSION

The numerical solution based on the finite difference method for the suspended string equation with the third power nonlinear damping term is shown. The coefficient and the power of the nonlinear damping term play a important role in dictating the amplitude of vibration. For the third power nonlinear damping case, the amplitude of vibration increases which is opposite to the second power nonlinear damping case which demonstrates the decrease in the amplitude.

ACKNOWLEDGMENT

This research is supported by a research fund from Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand.

REFERENCES

- [1] N. S. Koshlyakov, E. V. Gliner and M. M. Smirnov, *Differential Equations of Mathematical Physics*, Moscow, 1962 (in Russian). English Translation : North-Holland Publ. Co, 1964.
 - [2] M. Yamaguchi, T. Nagai and K. Matsukane, *Forced oscillations of nonlinear damped equation of suspended string*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. **342**, No.1 (2008), 89-107.
 - [3] J. Kasemsuwan, *Exponential decay for nonlinear damped equation of suspended string*, *Proceedings of 2009 International Symposium on Computing, Communication, and Control*, 2009, 308-312.
 - [4] J. Kasemsuwan, P. Chitsakul and P. Chaisanit, *Simulation of suspended string equation*, *The 3rd Thai-Japan International Academic Conference*, 2010, 60-61.
 - [5] K. Subklay and J. Kasemsuwan, *Numerical simulation of suspended string Vibration*, *The 8th Kasetsart University Kamphaeng Saen Campus Conference*, 2011, 1486-1491.
- J. Kasemsuwan, *Numerical Solution of the Damped Vibration of Suspended String*, *University of the Thai Chamber of Commerce Journal*, 2012, peer-review.

ข้อมูลประวัติคณะผู้วิจัย

ประวัติส่วนตัว

ชื่อ-สกุล นางใจปอง เกษมสุวรรณณ์

เพศ ชาย หญิง วันเดือนปีเกิด 3 มกราคม 2519 อายุ 36 ปีสถานภาพ โสด สมรส

ตำแหน่งปัจจุบัน

ประวัติการศึกษา

ชื่อย่อปริญญา	สาขา	สถาบันที่จบ	ปีที่จบ
วท.บ.	คณิตศาสตร์ประยุกต์	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าฯ ลาดกระบัง	2540
วท.ม.	คณิตศาสตร์ประยุกต์	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าฯ ลาดกระบัง	2545
D.Sc.	Mathematics and Mathematical Sciences	Tokai University Japan	2550

สาขาวิจัยที่มีความชำนาญพิเศษ (แตกต่างจากวุฒิการศึกษา).....

..... Partial Differential Equation

ทุนการศึกษาและทุนวิจัยที่เคยได้รับ

ปี พ.ศ.	ทุนการศึกษาและทุนวิจัย	สถาบันที่ให้
2540	ระดับ ปริญญาตรี ทุนพัฒนาอาจารย์ (สาขาขาดแคลน)	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณ ทหารลาดกระบัง
2542-2545	ระดับ ปริญญาโท ทุนพัฒนาอาจารย์ (สาขาขาดแคลน)	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณ ทหารลาดกระบัง
2546-2550	ระดับ ปริญญาเอก ทุนสกอ. (เงินนอกงบประมาณ)	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณ ทหารลาดกระบัง
2554	ทุนการสนับสนุนผู้ช่วยวิจัยประจำปีการศึกษา 2554	ศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์
2555	ทุนประเภทส่งเสริมนักวิจัย ประจำปี 2555	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณ ทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลงานวิจัย/งานสร้างสรรค์ที่ตีพิมพ์เผยแพร่ (ระดับชาติและนานาชาติ)

- [1] J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, *Global Solutions of IBVP to Nonlinear Equation of Suspended String*, Tokyo Journal of Mathematics **30**, No.2 (2007), 543-556.
- [2] J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, *Global Classical Solutions of IBVP to Nonlinear Equation of Suspended String*, Tokyo Journal of Mathematics **31**, No.2 (2008), 351-373.
- [3] J. Kasemsuwan, *Exponential Decay for Nonlinear Damped Equation of Suspended String*, Proceedings of 2009 International Symposium on Computing, Communication, and Control, 2009, 308-312.
- [4] J. Kasemsuwan, P. Chitsakul and P. Chaisanit, *Simulation of Suspended String Equation*, The 3rd Thai-Japan International Academic Conference, 2010, 60-61.
- [5] P. Chitsakul, J. Kasemsuwan and P. Chaisanit, *A Mathematical Model for Studying Outflow from the Dam*, The 3rd Thai-Japan International Academic Conference, 2010, 46-47.
- [6] ใจปอง เกษมสุวรรณ. 2553. “การศึกษาสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง” วารสารวิชาการมหาวิทยาลัย หอการค้าไทย 30, 3: 101-111.
- [7] คณาวดี ทรัพย์คล้าย, ใจปอง เกษมสุวรรณ . 2554. “แบบจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง” การประชุมวิชาการ ครั้งที่ 8 มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตกำแพงแสน, 1486-1491.
- [8] J. Kasemsuwan, *Numerical Solution of the Damped Vibration of Suspended String*, University of the Thai Chamber of Commerce Journal, 2012, peer-review.
- [9] J. Kasemsuwan, *The Finite Difference Scheme for the Suspended String Equation with the Nonlinear Damping Term*, International Conference on Applied Physics and Mathematics, 2012, 566-568.

การเสนอผลงานวิชาการ

1. เสนอผลงานวิชาการ เรื่อง The Finite Difference Scheme for the Suspended String Equation with the Nonlinear Damping Term ประเทศ สาธารณรัฐสิงคโปร์
2. เสนอผลงานวิชาการ เรื่อง Simulation of Suspended String Equation ณ เมือง Osaka ประเทศ ญี่ปุ่น
3. เสนอผลงานวิชาการ เรื่อง Exponential Decay for Nonlinear Damped Equation of Suspended String ณ เมือง Nanyang ประเทศ สาธารณรัฐสิงคโปร์