รายงานการวิจัย

การประมาณค่าความน่าจะเป็นและการหาขนาดตัวอย่าง โดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและโดยใช้การแจกแจง

Estimation of Probability and Examination of Sample Size Using Chebyshev's Inequality and Known Distributions Methods

ผศ.สายชล สินสมบูรณ์ทอง

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2553

คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

หัวข้อ การประมาณค่าความน่าจะเป็นและการหาขนาดตัวอย่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและโดยใช้การแจกแจง

Estimation of Probability and Examination of Sample Size Using Chebyshev's Inequality and Known Distributions Methods

ผู้วิจัย ผศ.สายชล สินสมบูรณ์ทอง

สาขา สถิติประยุกต์

พ.ศ. 2553

บทคัดย่อ

ในการศึกษาเรื่องการประมาณค่าความน่าจะเป็นและการหาขนาดตัวอย่าง โดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและโดยใช้การแจกแจง พร้อมทั้งหาความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงสำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ได้แก่ การแจกแจงแบบเบอร์นูลลี การแจกแจงแบบทวินาม การแจกแจงแบบปัวส์ซอง การแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล การแจกแจงแบบปกติ การแจกแจงแบบแกมม่า การแจกแจงแบบไค-สแควร์ การแจกแจงแบบที และการแจกแจงแบบเอฟ เป็นต้น โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB version 7.6 ช่วยในการคำนวณ

ผลของการศึกษาพบว่าเมื่อ k มีค่าน้อย ๆ ($k = 1, 2$ และ 3) ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะอยู่ห่างไกลจากค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงค่อนข้างมาก แต่เมื่อ k มีค่าเพิ่มมากขึ้น ($k = 4$ และ 5) ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น โดยที่ความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟเทียบกับความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ $k = 2, 3$ หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก สำหรับ $k = 4, 5$ ทั้งการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่อง

นอกจากนี้ ขนาดตัวอย่างที่คำนวณได้จากอสมการเชฟบีเชฟจะมากกว่าขนาดตัวอย่างที่คำนวณได้จากความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงค่อนข้างมาก ทั้งการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่อง

Thesis Title	Estimation of Probability and Examination of Sample Size Using Chebyshev's Inequality and Known Distributions Methods
Researcher	Assit.Prof. Saichon Sinsomboonthong
Programme	Applied Statistics
Year	2010

Abstract

In this study, Estimating probability and sample size using Chebyshev's inequality and known distributions, and error of lower bound of probability by using Chebyshev's inequality compared with known distributions for discrete and continuous distributions, for example Bernoulli, Binomial, Poisson, Exponential, Normal, Gamma, Chi-square, t, and F distributions. The data analysis was by MATLAB version 7.6.

In general, results of the study show that if k has a little, then the Chebyshev's inequality lower bounds were far from real probability so much, but k has an increase, they were near real probability. Chebyshev's inequality lower bounds compared with real probabilities have highly decrease errors as k = 2, 3. Afterthat, errors have a little decrease as k = 4, 5 for discrete and continuous distributions.

In addition, the result of the study revealed that Chebyshev's inequality have sample size greater than real probability by distribution for discrete and continuous distributions.

คำสำคัญ (Keywords) : Chebyshev's inequality and Lower bound

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เนื่องจากผู้จัดทำได้รับความช่วยเหลือจากบุคคลผู้มีพระคุณหลายท่าน ดังนี้

ขอขอบพระคุณโครงการวิจัยที่เอื้อเฟื้อทุนสนับสนุนในการวิจัยครั้งนี้ โดยใช้เงินรายได้คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ขอขอบคุณนายศราวุธ สุวรรณอัตถ์ นักศึกษาปริญญาตรี ชั้นปีที่ 4 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่คอยให้ความช่วยเหลือด้านการเขียนโปรแกรม

ขอขอบคุณทุกท่านที่มิได้เอ่ยนามในที่นี้ที่ให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่าง ๆ และคอยเป็นกำลังใจให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ผศ.สายชล สินสมบูรณ์ทอง

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

สารบัญตาราง (ต่อ)

หน้า

สารบัญรูป

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

การคำนวณหาความน่าจะเป็นนั้น จำเป็นที่จะต้องทราบฟังก์ชันความน่าจะเป็น ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น หรือฟังก์ชันการแจกแจงสะสม ในการศึกษาสถานการณ์เกี่ยวกับความน่าจะเป็น บ่อยครั้งสำหรับตัวแปรสุ่ม X เราไม่สามารถหาฟังก์ชันทั้งสามเหล่านี้ได้ แต่สามารถคำนวณหาค่าเฉลี่ยและหรือความแปรปรวนได้ ในกรณีเช่นนี้ แม้ว่าไม่สามารถคำนวณหาความน่าจะเป็นที่แท้จริงได้ แต่สามารถใช้อสมการเชฟบีเชฟหาขอบเขตความน่าจะเป็นได้ ดังนั้นอสมการเชฟบีเชฟจะมีประโยชน์อย่างมากและมีคุณค่าในเชิงวิชาการอย่างมาก นอกจากนี้อสมการเชฟบีเชฟได้รับการเปิดเผยครั้งแรกโดยนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ชื่อ Irenee Bienayme ในปี ค.ศ.1787-1796 ทำให้ผู้แต่งบางคนเรียกอสมการนี้ว่า Chebyshev-Bienayme inequality ต่อมาในกลางศตวรรษที่ 19 มีนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซียชื่อ เชฟบีเชฟ (Chebyshev) ได้เปิดเผยอสมการนี้ในความสัมพันธ์กับกฎของเลขจำนวนมาก (Laws of large numbers) เขาได้ใช้อสมการเพื่อการพิสูจน์อย่างสั้น ๆ สำหรับกฎของเลขจำนวนมากซึ่งถูกเปิดเผยโดย James Bernoulli ในช่วงต้นศตวรรษที่ 18 เนื่องจากประโยชน์ของอสมการถูกแสดงโดยเชฟบีเชฟ ผู้แต่งส่วนใหญ่จึงเรียกอสมการนี้ว่า อสมการเชฟบีเชฟ (Chebyshev's inequality) (Ghahramani, S. : 2005)

โดยทั่วไปแล้วใช้ความแปรปรวนเป็นเครื่องมือวัดการกระจายของข้อมูล ซึ่งถ้าความแปรปรวนยิ่งมีค่าน้อยเท่าใด ความน่าจะเป็นที่ X แต่ละค่าจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าเฉลี่ยก็จะมากขึ้นเท่านั้น ถ้าทราบว่าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบใด ก็จะใช้การแจกแจงแบบนั้น ๆ มาคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นที่ X จะมีค่าต่าง ๆ ได้ แต่ถ้าทราบแต่เพียงค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนเท่านั้น แต่ไม่ทราบการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X ก็จะไม่สามารถหาค่าความน่าจะเป็นของ X ที่ค่าต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้อง แต่สามารถใช้อสมการเชฟบีเชฟมาประมาณค่าความน่าจะเป็นดังกล่าวได้

อสมการเชฟบีเชฟสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้หลายอย่าง โดยเฉพาะสามารถใช้หาความน่าจะเป็นที่ค่าของตัวแปรสุ่มใด ๆ จะคลาดเคลื่อนไปจากค่าเฉลี่ย โดยไม่ต้องมีข้อจำกัดว่าตัวแปรสุ่มจะต้องมีการแจกแจงแบบใด และไม่มีความจำเป็นต้องทราบการแจกแจงของตัวแปรสุ่มนั้นด้วยขอเพียงแต่ทราบค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มนั้นก็เพียงพอแล้ว แต่ไม่ได้หมายความว่าถ้าทราบการแจกแจงของตัวแปรสุ่มนั้นด้วยแล้ว จะใช้อสมการเชฟบีเชฟไม่ได้ การที่ทราบข้อสนเทศเพิ่มเติมเกี่ยวกับตัวแปรสุ่มที่สนใจ จะทำให้การคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นถูกต้องมาก

ยิ่งขึ้น เราควรทราบว่าอสมการเชฟบีเชฟสามารถให้ค่าความน่าจะเป็นได้เพียงค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างเท่านั้น ไม่สามารถให้ค่าที่แน่นอนได้ คำตอบที่ได้จากอสมการเชฟบีเชฟจึงเป็นคำตอบอย่างกว้าง ๆ หรือให้ข้อเท็จจริงได้อย่างกว้าง ๆ เท่านั้น (Blake, I. F. : 1979)

นอกจากจะใช้อสมการเชฟบีเชฟคำนวณหาค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่มใด ๆ จะมีค่าคลาดเคลื่อนไปจากค่าเฉลี่ยแล้ว ยังสามารถใช้อสมการเชฟบีเชฟคำนวณหาขนาดตัวอย่างเพื่อใช้ในการสุ่มตัวอย่างอีกด้วย ขนาดตัวอย่างที่ได้จะอยู่ในรูปของขอบเขตบนหรือขอบเขตล่างเช่นเดียวกัน แต่ขนาดตัวอย่างที่ได้โดยวิธีนี้ค่อนข้างหยาบ และมีขนาดใหญ่กว่าที่คำนวณได้จากวิธีอื่น ๆ เนื่องจากอสมการเชฟบีเชฟให้ค่าต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นค่าของความน่าจะเป็นหรือขนาดตัวอย่าง โดยอาศัยข้อสนเทศจากตัวแปรสุ่มที่ศึกษานั้นค่อนข้างน้อยมาก เมื่อได้รับข้อสนเทศน้อย คำตอบที่ได้จึงเป็นลักษณะกว้าง ๆ ไม่กระชับรัดกุม ไม่ใช่ว่าอสมการเชฟบีเชฟจะใช้ไม่ได้ดี แต่จะใช้ได้ดีก็ต่อเมื่อมีข้อสนเทศของตัวแปรที่สนใจศึกษาค่อนข้างน้อย เมื่อมีข้อสนเทศของตัวแปรที่สนใจศึกษามากขึ้นก็ควรใช้วิธีการอื่นแทน เช่น ทฤษฎีขีดจำกัดสู่ส่วนกลาง (Central Limit Theorem) (Beaumont, G. P. : 1986)

จากที่ได้กล่าวมาทั้งหมดนี้ ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะทำการศึกษาถึงการประมาณค่าความน่าจะเป็นและการหาขนาดตัวอย่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและโดยใช้การแจกแจง พร้อมทั้งหาความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง สำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่อง

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาการหาค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง

1.2.2 เพื่อศึกษาความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง

1.2.3 เพื่อหาขนาดตัวอย่างที่ควรใช้โดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับโดยใช้การแจกแจง

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

โครงการวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเรื่องการประมาณค่าความน่าจะเป็นและการหาขนาดตัวอย่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและโดยใช้การแจกแจง พร้อมทั้งหาความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง สำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ได้แก่ การแจกแจงแบบเบอร์นูลลี การแจกแจงแบบทวินาม การแจกแจงแบบปัวส์ซอง การแจกแจงแบบ

เอ็กซ์โปเนนเชียล การแจกแจงแบบปกติ การแจกแจงแบบแกมม่า การแจกแจงแบบไค-สแควร์ การแจกแจงแบบที และการแจกแจงแบบเอฟ เป็นต้น โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB version 7.6 ช่วยในการคำนวณ การเขียนโปรแกรมครั้งนี้กระทำในห้องปฏิบัติการของสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง รวมระยะเวลาดำเนินโครงการ 1 ปี

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

1.4.1 ทำให้ทราบถึงค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง

1.4.2 ทำให้ทราบถึงความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง

1.4.3 ทำให้ทราบถึงขนาดตัวอย่างที่ควรใช้โดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและโดยใช้การแจกแจง เพื่อใช้ในการสุ่มตัวอย่าง

1.5 นิยามคำศัพท์

อสมการเชฟบีเชฟ (Chebyshev's inequality) หมายถึง อสมการที่ใช้หาความน่าจะเป็นที่ค่าของตัวแปรสุ่มใด ๆ จะคลาดเคลื่อนไปจากค่าเฉลี่ย โดยไม่ต้องมีข้อจำกัดว่าตัวแปรสุ่มจะต้องมีการแจกแจงแบบใด และไม่มีความจำเป็นต้องทราบการแจกแจงของตัวแปรสุ่มนั้นด้วย ขอเพียงแต่ทราบค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มนั้นก็เพียงพอแล้ว

ค่าขอบเขตล่าง (Lower bound) หมายถึง ค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟ

บทที่ 2
ทฤษฎีและรายงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1.1 อสมการเชฟบีเชฟ (Chebyshev's inequality) (Ghahramani, S. : 2005)

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 แล้วสำหรับ $t > 0$

$$P(|X-\mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

ถ้าแทน $t = k\sigma$ ในอสมการเชฟบีเชฟ จะได้

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

หรือ

$$P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

อสมการนี้หมายความว่าในการหาค่าขอบเขตล่าง โดยอาศัยอสมการเชฟบีเชฟนั้น ถ้าการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ σ และ k เป็นค่าคงที่ที่เป็นบวกเสมอแล้ว จะได้ว่าความน่าจะเป็นที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ ไม่เกิน k เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน จะมีค่าอย่างน้อยเท่ากับ $1-\frac{1}{k^2}$ อสมการข้างบนนี้ใช้ในการหาค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็น

2.1.2 ความคลาดเคลื่อน (Error)

ในการหาความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็น โดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง หาได้จากสูตร

$$\text{ความคลาดเคลื่อน} = \left|\frac{\text{ค่าจริง} - \text{ค่าประมาณ}}{\text{ค่าจริง}}\right| \times 100\%$$

2.1.3 การหาขนาดตัวอย่าง (Sample size) (Ghahramani, S. : 2005)

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรที่มีการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและแบบต่อเนื่อง โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x)$ ที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 ให้ $\overline{X}$ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง จะได้

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \mu$$

$$V(\overline{X}) = V\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

ใช้อสมการเชฟบีเชฟกับ $\overline{X}$ สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะได้

$$P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$$

หรือ $$P\left(\left|\overline{X} - \mu\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$$

ดังนั้นถ้า $\{X_1,\ldots,X_n\}$ เป็นลำดับของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระกัน ที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 แล้วสำหรับทุกค่าของ $n \geq 1$ และ $\varepsilon > 0$ หาค่าได้ อสมการข้างบนนี้ใช้ในการหาขนาดตัวอย่าง

บทที่ 3
วิธีการดำเนินงาน

3.1 อุปกรณ์ในการวิจัย

3.1.1 อุปกรณ์ที่มีอยู่แล้ว

1) เครื่องคอมพิวเตอร์

2) เครื่องพิมพ์เลเซอร์

3) โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB version 7.6

3.1.2 อุปกรณ์ที่ต้องการเพิ่มเติม

-

3.2 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

โครงการวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเรื่องการประมาณค่าความน่าจะเป็นและการหาขนาดตัวอย่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและโดยใช้การแจกแจงสำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ดังนี้

สำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง ศึกษา 3 การแจกแจง คือ

1. การแจกแจงแบบเบอร์นูลลี
2. การแจกแจงแบบทวินาม
3. การแจกแจงแบบปัวส์ซอง

สำหรับการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ศึกษา 6 การแจกแจง คือ

1. การแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล
2. การแจกแจงแบบปกติ
3. การแจกแจงแบบแกมม่า
4. การแจกแจงแบบไค-สแควร์
5. การแจกแจงแบบที
6. การแจกแจงแบบเอฟ

วิธีการดำเนินงานกระทำได้ดังนี้

1. หาค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟ สำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่องในกรณีที่ k ตั้งแต่ 1 ถึง 10

2. หาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง สำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ในกรณีต่อไปนี้

2.1 การแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง

2.1.1 การแจกแจงแบบเบอร์นูลลี ศึกษาในกรณีที่ $p = 0.1$ ถึง 0.9 และ $k = 1$ ถึง 5

2.1.2 การแจกแจงแบบทวินาม ศึกษาในกรณีที่ $n = 5, 10, 15, 20$; $p = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ และ $k = 1$ ถึง 5

2.1.3 การแจกแจงแบบปัวส์ซอง ศึกษาในกรณีที่ $\lambda = 1$ ถึง 10 และ $k = 1$ ถึง 5

2.2 การแจกแจงแบบต่อเนื่อง

2.2.1 การแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ศึกษาในกรณีที่ $k = 1$ ถึง 10

2.2.2 การแจกแจงแบบปกติ ศึกษาในกรณีที่ $k = 1$ ถึง 10

2.2.3 การแจกแจงแบบแกมม่า ศึกษาในกรณีที่ค่า α และ $\beta = 1$ ถึง 5 และ $k = 1$ ถึง 5

2.2.4 การแจกแจงแบบไค-สแควร์ ศึกษาในกรณีที่ $r = 1$ ถึง 5 และ $k = 1$ ถึง 5 โดยที่ r เป็นจำนวนองศาความเป็นอิสระของการแจกแจง

2.2.5 การแจกแจงแบบที ศึกษาในกรณีที่ $r = 3$ ถึง 7 และ $k = 1$ ถึง 5

2.2.6 การแจกแจงแบบเอฟ ศึกษาในกรณีที่ $r_1 = 1$ ถึง 5 $r_2 = 5, 10, 15, 20$ และ $k = 1$ ถึง 5

3. หาความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง

4. หาขนาดตัวอย่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาขนาดตัวอย่างจากความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงสำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ในกรณีต่อไปนี้

4.1 การแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง

4.1.1 การแจกแจงแบบทวินาม ศึกษาในกรณีที่ $\varepsilon = 0.01$ ถึง 0.05 และ $\varepsilon = 0.10$ และ $\theta = 0.10$ ถึง 0.90

4.2 การแจกแจงแบบต่อเนื่อง

4.2.1 การแจกแจงแบบปกติ ศึกษาในกรณีที่ $\varepsilon = \sigma, \frac{\sigma}{2}$ ถึง $\frac{\sigma}{50}$

3.3 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

3.3.1 อสมการเชฟบีเชฟ (Chebyshev's inequality) (Ghahramani, S. : 2005)

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 แล้วสำหรับ $t > 0$

$$P(|X-\mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

ถ้าแทน $t = k\sigma$ ในอสมการเชฟบีเชฟ จะได้

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

หรือ $$P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

3.3.2 ความคลาดเคลื่อน (Error)

$$\text{ความคลาดเคลื่อน} = \left|\frac{\text{ค่าจริง} - \text{ค่าประมาณ}}{\text{ค่าจริง}}\right| \times 100\%$$

3.3.3 การหาขนาดตัวอย่าง (Sample size) (Ghahramani, S. : 2005)

ใช้อสมการเชฟบีเชฟกับ $\overline{X}$ สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะได้

$$P(|\overline{X}-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$$

หรือ $$P(|\overline{X}-\mu| < \varepsilon) \geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 n}$$

3.4 โปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

3.4.1 MATLAB version 7.6

บทที่ 4
ผลการวิจัยและอภิปรายผล

4.1 การหาค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟ

จากอสมการเชฟบีเชฟ

$$P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

- เมื่อ k = 1

ขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟคือ

$$P(|X-\mu| < \sigma) \geq 1-\frac{1}{1^2} = 0$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 1 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ จะเกิดขึ้นได้อย่างน้อย 0

- เมื่อ k = 2

ขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟคือ

$$P(|X-\mu| < 2\sigma) \geq 1-\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = 0.75$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 2 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ จะเกิดขึ้นได้อย่างน้อย 0.75

เมื่อ k = 3

ขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟคือ

$$P(|X-\mu| < 3\sigma) \geq 1-\frac{1}{3^2} = \frac{8}{9} = 0.8889$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 3 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ จะเกิดขึ้นได้อย่างน้อย 0.8889

เมื่อ k = 4

ขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟคือ

$$P(|X-\mu| < 4\sigma) \geq 1-\frac{1}{4^2} = \frac{15}{16} = 0.9375$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 4 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ จะเกิดขึ้นได้อย่างน้อย 0.9375

เมื่อ k = 5

ขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟคือ

$$P(|X-\mu|<5\sigma) \quad \geq \quad 1-\frac{1}{5^2} \quad = \quad \frac{24}{25} \quad = \quad 0.9600$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ ไม่เกิน 5 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ จะเกิดขึ้นได้อย่างน้อย 0.9600

ตารางที่ 4.1 ขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟที่ค่า k ตั้งแต่ 1 ถึง 10

k	1	2	3	4	5
ขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟ	0	0.7500	0.8889	0.9375	0.9600
k	6	7	8	9	10
ขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟ	0.9722	0.9796	0.9844	0.9877	0.99

จากตารางที่ 4.1 จะพบว่าค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟที่ค่า k = 1 จะเป็น 0 หลังจากนั้นค่าขอบเขตล่างจะเพิ่มขึ้นอย่างมาก จนถึง k = 5 เป็นต้นไป ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะใกล้เคียง 1

4.2 การหาค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นเมื่อทราบการแจกแจงที่แท้จริง

4.2.1 การแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง

4.2.1.1 การแจกแจงแบบเบอร์นูลลี

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี โดยมีค่าเฉลี่ย p และความแปรปรวน $p(1-p)$ แล้ว

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu|<k\sigma) &= P(-k\sigma<X-\mu<k\sigma) \\
&= P(\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma) \\
&= P\left(p-k\sqrt{p(1-p)}<X<p+k\sqrt{p(1-p)}\right)
\end{aligned}
$$

- เมื่อ $p=0.1,\ k=1$ จะได้

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu|<\sigma) &= P\left(0.1-\sqrt{0.1(0.9)}<X<0.1+\sqrt{0.1(0.9)}\right) \\
&= P(-0.2<X<0.4) \\
&= P(X=0) \quad = \quad 0.9
\end{aligned}
$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 1 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.9

- เมื่อ $p=0.1,\ k=2$ จะได้

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu|<2\sigma) &= P\left(0.1-2\sqrt{0.1(0.9)}<X<0.1+2\sqrt{0.1(0.9)}\right) \\
&= P(-0.5<X<0.7) \\
&= P(X=0) \quad = \quad 0.9
\end{aligned}
$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 2 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.9

- เมื่อ $p=0.1,\ k=3$ จะได้

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu|<3\sigma) &= P\left(0.1-3\sqrt{0.1(0.9)}<X<0.1+3\sqrt{0.1(0.9)}\right) \\
&= P(-0.8<X<1) \\
&= P(X=0) \quad = \quad 0.9
\end{aligned}
$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 3 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.9

- เมื่อ $p=0.1,\ k=4$ จะได้

$$
P(|X-\mu|<4\sigma) = P\left(0.1-4\sqrt{0.1(0.9)}<X<0.1+4\sqrt{0.1(0.9)}\right)
$$

$$= \quad P(-1.1 < X < 1.3)$$
$$= \quad P(X=0)+P(X=1)$$
$$= \quad 0.1 + 0.9 \quad = \quad 1$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 4 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 1

- เมื่อ $p = 0.1,\ k = 5$ จะได้

$$P(|X-\mu| < 5\sigma) \quad = \quad P\left(0.1-5\sqrt{0.1(0.9)} < X < 0.1+5\sqrt{0.1(0.9)}\right)$$
$$= \quad P(-1.4 < X < 1.6)$$
$$= \quad P(X=0)+P(X=1)$$
$$= \quad 0.1 + 0.9 \quad = \quad 1$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 5 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 1

ส่วนที่ค่า k อื่น ๆ ก็สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน

ดังนั้น $$P(|X-\mu| < k\sigma) = \begin{cases} 0.9 & \text{เมื่อ } p = 0.1,\ k = 1, 2, 3 \\ 1 & \text{เมื่อ } p = 0.1,\ k = 4, 5, 6, \ldots \end{cases}$$

- เมื่อ $p = 0.2,\ k = 1$ จะได้

$$P(|X-\mu| < \sigma) \quad = \quad P\left(0.2-\sqrt{0.2(0.8)} < X < 0.2+\sqrt{0.2(0.8)}\right)$$
$$= \quad P(-0.2 < X < 0.6)$$
$$= \quad P(X=0) \quad = \quad 0.8$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 1 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.8

- เมื่อ $p = 0.2,\ k = 2$ จะได้

$$P(|X-\mu| < 2\sigma) \quad = \quad P\left(0.2-2\sqrt{0.2(0.8)} < X < 0.2+2\sqrt{0.2(0.8)}\right)$$
$$= \quad P(-0.6 < X < 1)$$
$$= \quad P(X=0) \quad = \quad 0.8$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 2 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.8

- เมื่อ $p = 0.2,\ k = 3$ จะได้

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu| < 3\sigma) &= P\left(0.2-3\sqrt{0.2(0.8)} < X < 0.2+3\sqrt{0.2(0.8)}\right) \\
&= P(-1 < X < 1.4) \\
&= P(X=0)+P(X=1) \\
&= 0.8 + 0.2 \quad = \quad 1
\end{aligned}
$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 3 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 1

- เมื่อ $p = 0.2,\ k = 4$ จะได้

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu| < 4\sigma) &= P\left(0.2-4\sqrt{0.2(0.8)} < X < 0.2+4\sqrt{0.2(0.8)}\right) \\
&= P(-1.4 < X < 1.8) \\
&= P(X=0)+P(X=1) \\
&= 0.8 + 0.2 \quad = \quad 1
\end{aligned}
$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 4 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 1

ส่วนที่ค่า k อื่น ๆ ก็สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน

ดังนั้น
$$
P(|X-\mu| < k\sigma) = \begin{cases} 0.8 & \text{เมื่อ } p = 0.2,\ k = 1, 2 \\ 1 & \text{เมื่อ } p = 0.2,\ k = 3, 4, 5, \ldots \end{cases}
$$

- เมื่อ $p = 0.3,\ k = 1$ จะได้

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu| < \sigma) &= P\left(0.3-\sqrt{0.3(0.7)} < X < 0.3+\sqrt{0.3(0.7)}\right) \\
&= P(-0.16 < X < 0.76) \\
&= P(X=0) \quad = \quad 0.7
\end{aligned}
$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 1 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.7

- เมื่อ $p = 0.3,\ k = 2$ จะได้

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu| < 2\sigma) &= P\left(0.3-2\sqrt{0.3(0.7)} < X < 0.3+2\sqrt{0.3(0.7)}\right) \\
&= P(-0.62 < X < 1.22) \\
&= P(X=0)+P(X=1) \\
&= 0.7 + 0.3 \quad = \quad 1
\end{aligned}
$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 2 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 1

- เมื่อ $p = 0.3,\ k = 3$ จะได้

$$\begin{aligned} P(|X-\mu| < 3\sigma) &= P\left(0.3-3\sqrt{0.3(0.7)} < X < 0.3+3\sqrt{0.3(0.7)}\right) \\ &= P(-1.07 < X < 1.67) \\ &= P(X=0)+P(X=1) \\ &= 0.7+0.3 = 1 \end{aligned}$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 3 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 1

ส่วนที่ค่า k อื่น ๆ ก็สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน

ดังนั้น
$$P(|X-\mu| < k\sigma) = \begin{cases} 0.7 & \text{เมื่อ } p = 0.3,\ k = 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } p = 0.3,\ k = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

- เมื่อ $p = 0.4,\ k = 1$ จะได้

$$\begin{aligned} P(|X-\mu| < \sigma) &= P\left(0.4-\sqrt{0.4(0.6)} < X < 0.4+\sqrt{0.4(0.6)}\right) \\ &= P(-0.09 < X < 0.89) \\ &= P(X=0) = 0.6 \end{aligned}$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 1 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.6

- เมื่อ $p = 0.4,\ k = 2$ จะได้

$$\begin{aligned} P(|X-\mu| < 2\sigma) &= P\left(0.4-2\sqrt{0.4(0.6)} < X < 0.4+2\sqrt{0.4(0.6)}\right) \\ &= P(-0.58 < X < 1.38) \\ &= P(X=0)+P(X=1) \\ &= 0.6+0.4 = 1 \end{aligned}$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 2 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 1

- เมื่อ $p = 0.4,\ k = 3$ จะได้

$$\begin{aligned} P(|X-\mu| < 3\sigma) &= P\left(0.4-3\sqrt{0.4(0.6)} < X < 0.4+3\sqrt{0.4(0.6)}\right) \\ &= P(-1.07 < X < 1.87) \end{aligned}$$

$$= \quad P(X=0)+P(X=1)$$

$$= \quad 0.6+0.4 \quad = \quad 1$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 3 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 1

ส่วนที่ค่า k อื่น ๆ ก็สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน

ดังนั้น $$P(|X-\mu|<k\sigma) = \begin{cases} 0.6 & \text{เมื่อ } p = 0.4,\ k = 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } p = 0.4,\ k = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

- เมื่อ $p=0.5,\ k=1$ จะได้

$$P(|X-\mu|<\sigma) = P\left(0.5-\sqrt{0.5(0.5)}<X<0.5+\sqrt{0.5(0.5)}\right)$$

$$= P(0<X<1) = 0$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 1 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0

- เมื่อ $p=0.5,\ k=2$ จะได้

$$P(|X-\mu|<2\sigma) = P\left(0.5-2\sqrt{0.5(0.5)}<X<0.5+2\sqrt{0.5(0.5)}\right)$$

$$= P(-0.5<X<1.5)$$

$$= P(X=0)+P(X=1)$$

$$= 0.5+0.5 = 1$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 2 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 1

- เมื่อ $p=0.5,\ k=3$ จะได้

$$P(|X-\mu|<3\sigma) = P\left(0.5-3\sqrt{0.5(0.5)}<X<0.5+3\sqrt{0.5(0.5)}\right)$$

$$= P(-1<X<2)$$

$$= P(X=0)+P(X=1)$$

$$= 0.5+0.5 = 1$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 3 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 1

- เมื่อ $p=0.5,\ k=4$ จะได้

$$P(|X-\mu|<4\sigma) = P\left(0.5-4\sqrt{0.5(0.5)}<X<0.5+4\sqrt{0.5(0.5)}\right)$$

$$= \quad P(-1.5 < X < 2.5)$$
$$= \quad P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$
$$= \quad P(X=0)+P(X=1)$$
$$= \quad 0.5 + 0.5 \quad = \quad 1$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 4 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 1

ส่วนที่ค่า k อื่น ๆ ก็สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน

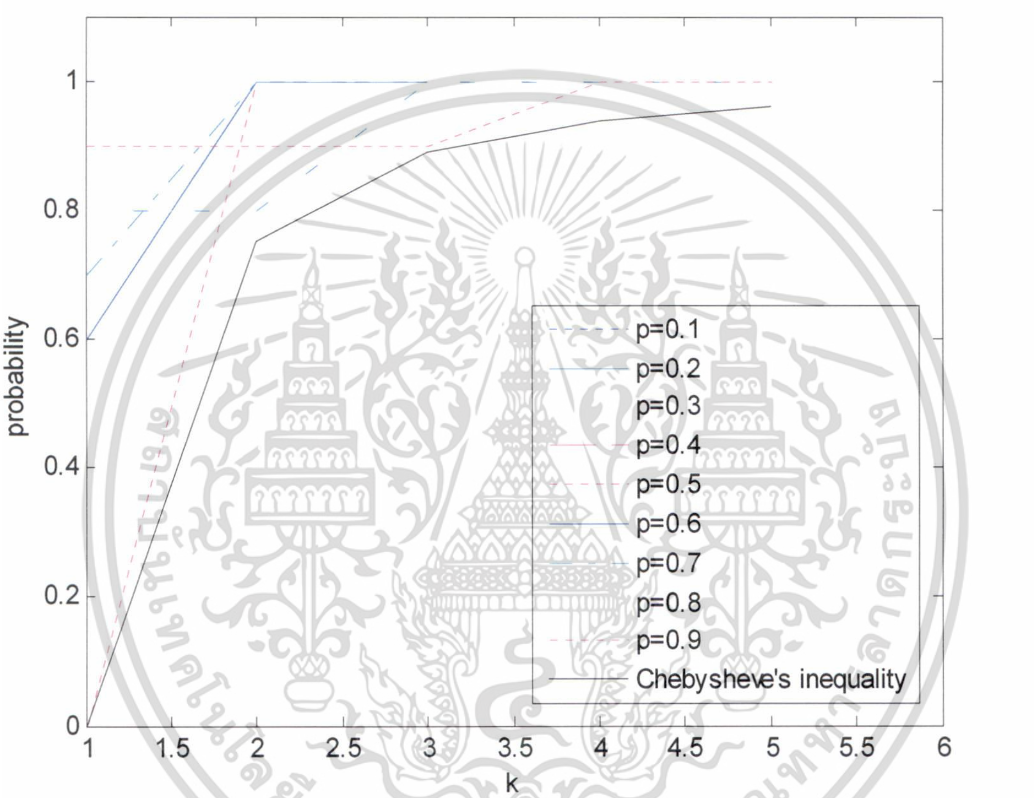
$$\text{ดังนั้น} \quad P(|X-\mu| < k\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } p = 0.5,\ k = 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } p = 0.5,\ k = 2, 3, 4, \ldots \end{cases}$$

<u>ข้อสังเกตุ</u>
- เมื่อ $p = 0.6$ จะได้ค่าเท่ากับเมื่อ $p = 0.4$
- เมื่อ $p = 0.7$ จะได้ค่าเท่ากับเมื่อ $p = 0.3$
- เมื่อ $p = 0.8$ จะได้ค่าเท่ากับเมื่อ $p = 0.2$
- เมื่อ $p = 0.9$ จะได้ค่าเท่ากับเมื่อ $p = 0.1$

ตารางที่ 4.2 ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ สำหรับการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี ที่ค่า p = 0.1 ถึง 0.9 และ k = 1 ถึง 5

p	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)	p	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)
0.1	1	0.9	100.0000	0.6	1	0.6	100.0000
	2	0.9	16.6667		2	1	25.0000
	3	0.9	1.2333		3	1	11.1100
	4	1	6.2500		4	1	6.2500
	5	1	4.0000		5	1	4.0000
0.2	1	0.8	100.0000	0.7	1	0.7	100.0000
	2	0.8	6.2500		2	1	25.0000
	3	1	11.1100		3	1	11.1100
	4	1	6.2500		4	1	6.2500
	5	1	4.0000		5	1	4.0000
0.3	1	0.7	100.0000	0.8	1	0.8	100.0000
	2	1	25.0000		2	0.8	6.2500
	3	1	11.1100		3	1	11.1100
	4	1	6.2500		4	1	6.2500
	5	1	4.0000		5	1	4.0000
0.4	1	0.6	100.0000	0.9	1	0.9	100.0000
	2	1	25.0000		2	0.9	16.6667
	3	1	11.1100		3	0.9	1.2333
	4	1	6.2500		4	1	6.2500
	5	1	4.0000		5	1	4.0000
0.5	1	0	หาค่าไม่ได้				
	2	1	25.0000				
	3	1	11.1100				
	4	1	6.2500				
	5	1	4.0000				

จากตารางที่ 4.2 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ p ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะเท่ากับ 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 สำหรับ p ทุกกรณี หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4, 5



รูปที่ 4.1 ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบเบอร์นูลลีที่ค่า p = 0.1 ถึง 0.9 และ k = 1 ถึง 5

จากรูปที่ 4.1 จะพบว่าเมื่อ k = 1 ถึง 4 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าต่ำกว่าค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงค่อนข้างมาก ยกเว้นที่ p = 0.5 และ k = 1, 2 ซึ่งค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริง และเมื่อ k > 4 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริง

4.2.1.2 การแจกแจงแบบทวินาม

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินาม โดยมีค่าเฉลี่ย np และความแปรปรวน $np(1-p)$ แล้ว

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu|<k\sigma) &= P(-k\sigma<X-\mu<k\sigma) \\
&= P(\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma) \\
&= P\left(np-k\sqrt{np(1-p)}<X<np+k\sqrt{np(1-p)}\right)
\end{aligned}
$$

- เมื่อ $n=5,\ p=0.1,\ k=1$ จะได้

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu|<\sigma) &= P\left(5(0.1)-\sqrt{5(0.1)(0.9)}<X<5(0.1)+\sqrt{5(0.1)(0.9)}\right) \\
&= P(-0.17<X<1.17) \\
&= P(X=0)+P(X=1) \\
&= 0.5905+0.3280 \quad = \quad 0.9185
\end{aligned}
$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 1 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.9185

- เมื่อ $n=5,\ p=0.1,\ k=2$ จะได้

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu|<2\sigma) &= P\left(5(0.1)-2\sqrt{5(0.1)(0.9)}<X<5(0.1)+2\sqrt{5(0.1)(0.9)}\right) \\
&= P(-0.84<X<1.84) \\
&= P(X=0)+P(X=1) \\
&= 0.5905+0.3280 \quad = \quad 0.9185
\end{aligned}
$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 2 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.9185

- เมื่อ $n=5,\ p=0.1,\ k=3$ จะได้

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu|<3\sigma) &= P\left(5(0.1)-3\sqrt{5(0.1)(0.9)}<X<5(0.1)+3\sqrt{5(0.1)(0.9)}\right) \\
&= P(-1.51<X<2.51) \\
&= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) \\
&= 0.5905+0.3280+0.0729 \quad = \quad 0.9914
\end{aligned}
$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 3 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.9914

- เมื่อ $n = 5, \ p = 0.1, \ k = 4$ จะได้

$$P(|X-\mu| < 4\sigma) = P\left(5(0.1) - 4\sqrt{5(0.1)(0.9)} < X < 5(0.1) + 4\sqrt{5(0.1)(0.9)}\right)$$
$$= P(-2.18 < X < 3.18)$$
$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$
$$= 0.5905 + 0.3280 + 0.0729 + 0.0081$$
$$= 0.9995$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 4 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.9995

- เมื่อ $n = 5, \ p = 0.1, \ k = 5$ จะได้

$$P(|X-\mu| < 5\sigma) = P\left(5(0.1) - 5\sqrt{5(0.1)(0.9)} < X < 5(0.1) + 5\sqrt{5(0.1)(0.9)}\right)$$
$$= P(-2.85 < X < 3.85)$$
$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$
$$= 0.5905 + 0.3280 + 0.0729 + 0.0081$$
$$= 0.9995$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 5 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.9995

ตารางที่ 4.3 ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ สำหรับการแจกแจงแบบทวินาม ที่ค่า n = 5, 10, 15, 20 p = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 และ k = 1 ถึง 5

n	p	K	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)	n	p	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)
5	0.1	1	0.9185	100.0000	5	0.7	1	0.8011	100.0000
		2	0.9185	18.3487			2	0.9976	24.8173
		3	0.9914	10.3425			3	1.0000	11.1100
		4	0.9995	6.2069			4	1.0000	6.2500
		5	0.9995	3.9558			5	1.0000	4.0000
5	0.3	1	0.8369	100.0000	5	0.9	1	0.9914	100.0000
		2	0.9692	22.6182			2	0.9914	24.3525
		3	0.9976	10.8935			3	0.9995	11.0691
		4	1.0000	6.2500			4	1.0000	6.2491
		5	1.0000	4.0000			5	1.0000	3.9990
5	0.5	1	0.7812	100.0000					
		2	0.9687	22.5806					
		3	1.0000	11.1100					
		4	1.0000	6.2500					
		5	1.0000	4.0000					
10	0.1	1	0.7361	100.0000	10	0.7	1	0.8033	100.0000
		2	0.9298	19.3383			2	0.9612	21.9693
		3	0.9872	9.9579			3	0.9999	11.0972
		4	0.9984	6.0965			4	1.0000	6.2494
		5	0.9999	3.9859			5	1.0000	4.0000
10	0.3	1	0.8215	100.0000	10	0.9	1	0.5811	100.0000
		2	0.9527	21.2723			2	0.9872	24.0279
		3	0.9984	10.9684			3	0.9984	10.9644
		4	0.9999	6.2365			4	0.9999	6.2362
		5	1.0000	4.0000			5	1.0000	3.9991

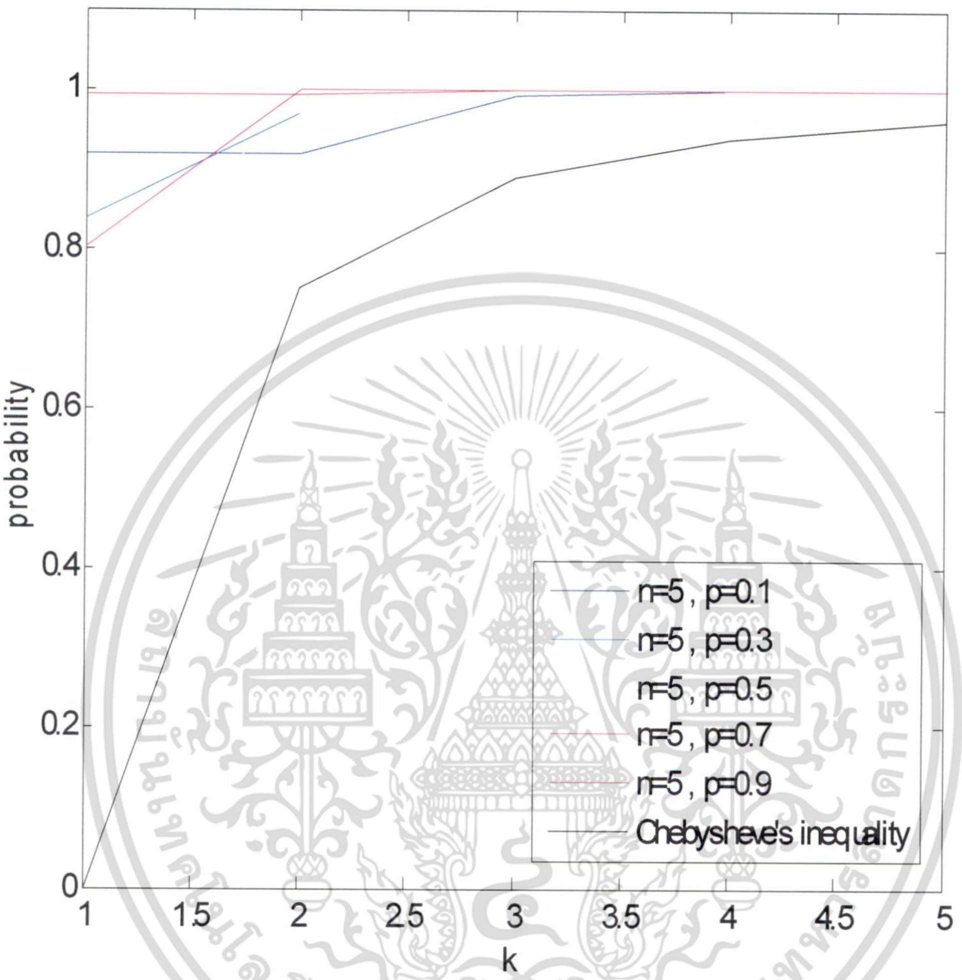
ตารางที่ 4.3 (ต่อ)

n	p	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)	n	p	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)
10	0.5	1	0.7734	100.0000					
		2	0.9883	24.1107					
		3	0.9990	11.0231					
		4	1.0000	6.2500					
		5	1.0000	4.0000					
15	0.1	1	0.8159	100.0000	15	0.7	1	0.8232	100.0000
		2	0.9444	20.5882			2	0.9916	24.3647
		3	0.9873	9.9647			3	0.9993	11.0502
		4	0.9997	6.2209			4	1.0000	6.2492
		5	1.0000	3.9968			5	1.0000	4.0000
15	0.3	1	0.8336	100.0000	15	0.9	1	0.7386	100.0000
		2	0.9848	23.8391			2	0.9873	24.0337
		3	0.9963	10.7841			3	0.9978	10.9096
		4	0.9999	6.2414			4	1.0000	6.2468
		5	1.0000	4.0000			5	1.0000	3.9997
15	0.5	1	0.7899	100.0000					
		2	0.9787	23.3700					
		3	0.9995	11.0639					
		4	1.0000	6.2500					
		5	1.0000	4.0000					
20	0.1	1	0.8670	100.0000	20	0.7	1	0.8450	100.0000
		2	0.9568	21.6158			2	0.9872	24.0294
		3	0.9976	10.8974			3	0.9997	11.0868
		4	0.9996	6.2110			4	1.0000	6.2495
		5	0.9999	3.9943			5	1.0000	4.0000

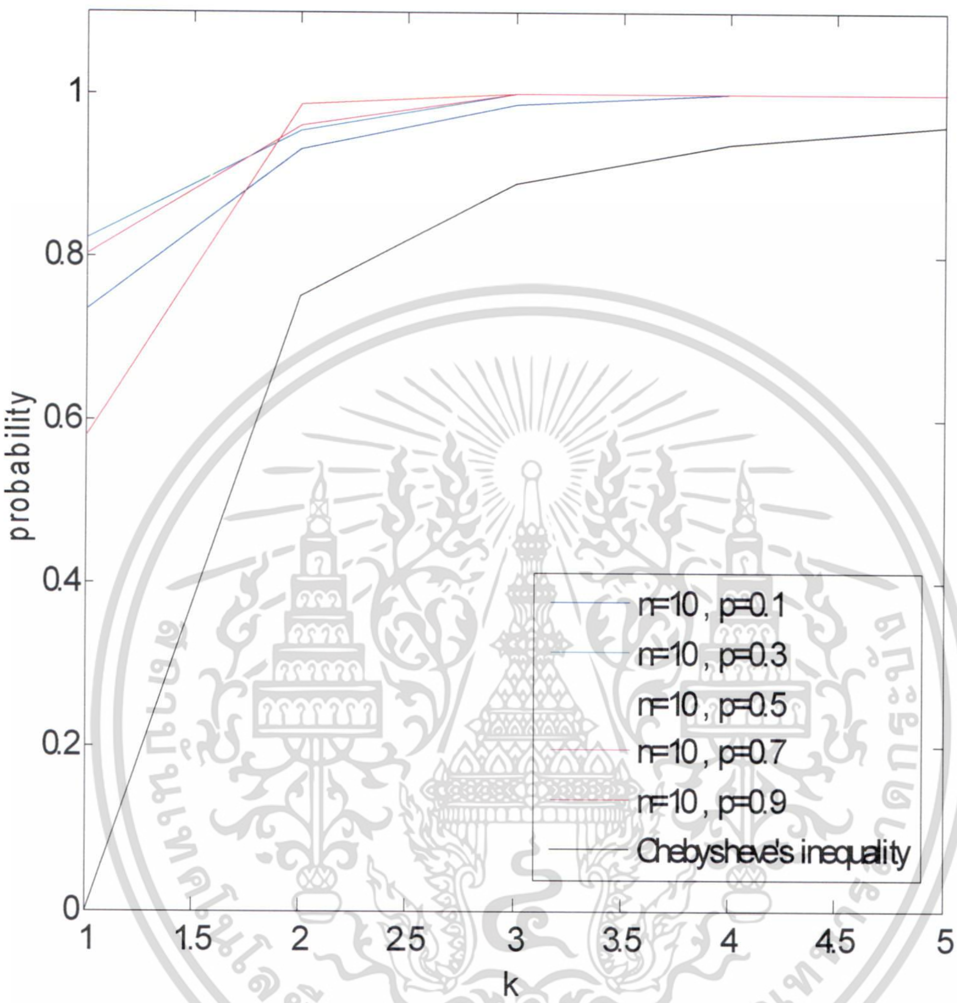
ตารางที่ 4.3 (ต่อ)

20	0.3	1	0.8512	100.0000	20	0.9	1	0.8352	100.0000
		2	0.9821	23.6297			2	0.9887	24.1464
		3	0.9987	10.9962			3	0.9996	11.0730
		4	1.0000	6.2460			4	0.9999	6.2444
		5	1.0000	3.9999			5	1.0000	3.9993
20	0.5	1	0.8108	100.0000					
		2	0.9734	22.9502					
		3	0.9985	10.9774					
		4	1.0000	6.2480					
		5	1.0000	4.0000					

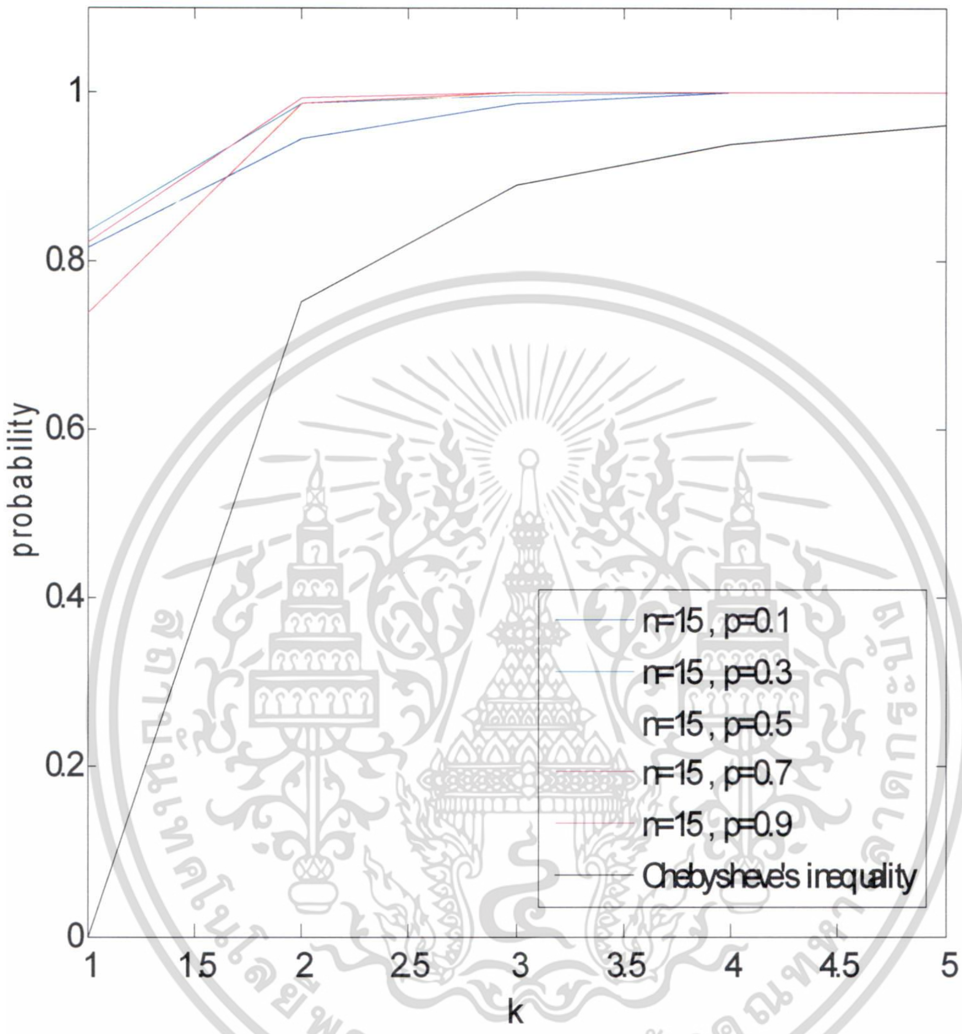
จากตารางที่ 4.3 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ p ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะเท่ากับ 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 สำหรับ p ทุกกรณี หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4, 5



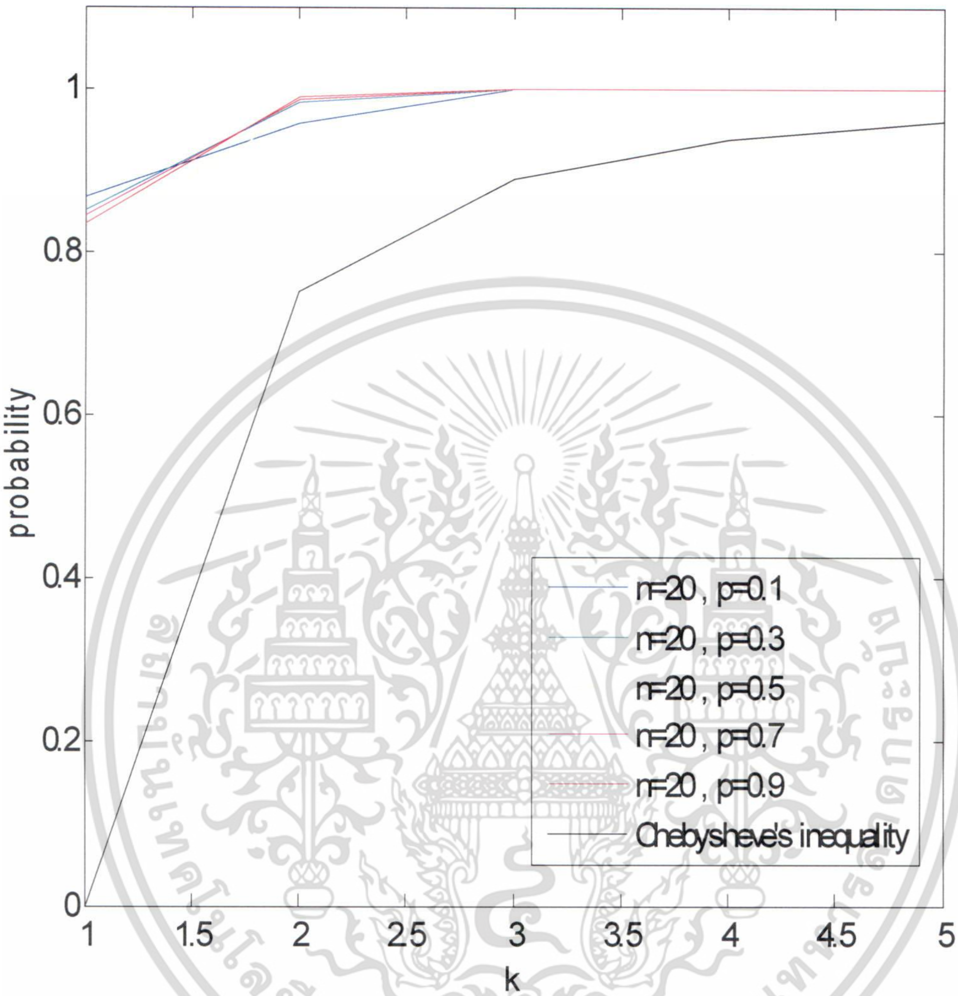
รูปที่ 4.2 ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบทวินามที่ n = 5 และ p = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9



รูปที่ 4.3 ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบทวินามที่ n = 10 และ p = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9



รูปที่ 4.4 ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบทวินามที่ n = 15 และ p = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9



รูปที่ 4.5 ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบทวินามที่ n = 20 และ p = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 และ 0.9

จากรูปที่ 4.2-4.5 จะพบว่าที่ k = 1 ถึง 3 และ p = 0.1 ถึง 0.9 เมื่อ n มีค่าเพิ่มมากขึ้น ค่าที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้น และเมื่อ k = 1 ถึง 3 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะอยู่ห่างไกลจากค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงค่อนข้างมาก แต่เมื่อ k > 3 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น

4.2.1.3 การแจกแจงแบบปัวส์ซอง

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปัวส์ซอง โดยมีค่าเฉลี่ย λ และความแปรปรวน λ แล้ว

$$\begin{aligned} P(|X-\mu|<k\sigma) &= P(-k\sigma < X-\mu < k\sigma) \\ &= P(\mu-k\sigma < X < \mu+k\sigma) \\ &= P(\lambda-k\sqrt{\lambda} < X < \lambda+k\sqrt{\lambda}) \end{aligned}$$

- เมื่อ $\lambda=1,\ k=1$ จะได้

$$\begin{aligned} P(|X-\mu|<\sigma) &= P(1-\sqrt{1} < X < 1+\sqrt{1}) \\ &= P(0<X<2) \\ &= P(X=1) \\ &= 0.3679 \end{aligned}$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 1 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.3679

- เมื่อ $\lambda=1,\ k=2$ จะได้

$$\begin{aligned} P(|X-\mu|<2\sigma) &= P(1-2\sqrt{1} < X < 1+2\sqrt{1}) \\ &= P(-1<X<3) \\ &= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) \\ &= 0.3679 + 0.3679 + 0.1839 \\ &= 0.9197 \end{aligned}$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 2 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.9197

- เมื่อ $\lambda = 1,\ k = 3$ จะได้

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu| < 3\sigma) &= P(1-3\sqrt{1} < X < 1+3\sqrt{1}) \\
&= P(-2 < X < 4) \\
&= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) \\
&= 0.3679 + 0.3679 + 0.1839 + 0.0613 \\
&= 0.981
\end{aligned}
$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 3 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.981

- เมื่อ $\lambda = 1,\ k = 4$ จะได้

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu| < 4\sigma) &= P(1-4\sqrt{1} < X < 1+4\sqrt{1}) \\
&= P(-3 < X < 5) \\
&= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4) \\
&= 0.3679 + 0.3679 + 0.1839 + 0.0613 + 0.0153 \\
&= 0.9963
\end{aligned}
$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 4 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.9963

- เมื่อ $\lambda = 1,\ k = 5$ จะได้

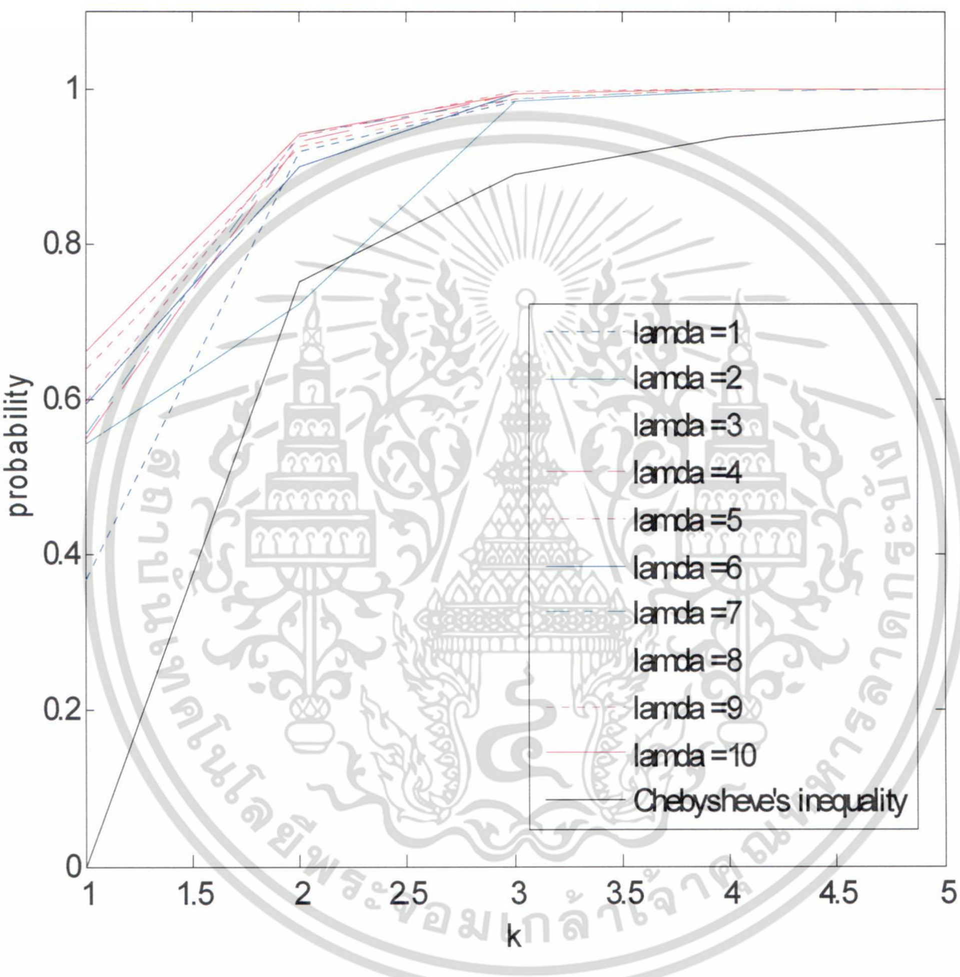
$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu| < 5\sigma) &= P(1-5\sqrt{1} < X < 1+5\sqrt{1}) \\
&= P(-4 < X < 6) \\
&= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4) \\
&\quad +P(X=5) \\
&= 0.3679 + 0.3679 + 0.1839 + 0.0613 + 0.0153 + 0.0031 \\
&= 0.9994
\end{aligned}
$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 4 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.9994

ตารางที่ 4.4 ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ สำหรับการแจกแจงแบบปัวส์ซอง ที่ค่า λ = 1 ถึง 10 และ k = 1 ถึง 5

λ	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)	λ	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)
1	1	0.3679	100.0000	6	1	0.5928	100.0000
	2	0.9197	18.4515		2	0.8987	16.5484
	3	0.9810	9.3895		3	0.9912	10.3183
	4	0.9963	5.9056		4	0.9986	6.1185
	5	0.9994	3.9429		5	0.9999	3.9945
2	1	0.5413	100.0000	7	1	0.5561	100.0000
	2	0.7218	3.9086		2	0.9394	20.1580
	3	0.9834	9.6129		3	0.9863	9.8732
	4	0.9955	5.8230		4	0.9990	6.1601
	5	0.9998	3.9772		5	1.0000	3.9957
3	1	0.4481	100.0000	8	1	0.5254	100.0000
	2	0.8663	13.4244		2	0.9224	18.6947
	3	0.9881	10.0391		3	0.9914	10.3419
	4	0.9962	5.8921		4	0.9993	6.1890
	5	0.9997	3.9719		5	1.0000	3.9968
4	1	0.5470	100.0000	9	1	0.5962	100.0000
	2	0.9306	19.4026		2	0.9373	19.9835
	3	0.9919	10.3812		3	0.9946	10.6235
	4	0.9991	6.1641		4	0.9996	6.2088
	5	0.9999	3.9927		5	1.0000	3.9976
5	1	0.6375	100.0000	10	1	0.6614	100.0000
	2	0.9252	18.9337		2	0.9409	20.2911
	3	0.9863	9.8757		3	0.9928	10.4625
	4	0.9980	6.0603		4	0.9993	6.1844
	5	0.9999	3.9934		5	1.0000	3.9955

จากตารางที่ 4.4 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ λ เกือบทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะเท่ากับ 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 สำหรับ λ ทุกกรณี หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4, 5



รูปที่ 4.6 ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบปัวส์ซองที่ $\lambda = 1$ ถึง 10 และ k = 1 ถึง 5

จากรูปที่ 4.6 จะพบว่าที่ k = 1 ถึง 3 เมื่อ λ มีค่าน้อย ๆ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริง แต่ที่ $\lambda = 2$, k = 2 ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะต่ำกว่าค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟ และเมื่อ k > 3 ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมาก และค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น

4.2.2 การแจกแจงแบบต่อเนื่อง

4.2.2.1 การแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล โดยมีพารามิเตอร์ β และ $E(X)=\beta, V(X)=\beta^2$ แล้ว

$$P(|X-\mu|<k\sigma) = \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= \int_{\beta-k\beta}^{\beta+k\beta} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{\beta(1-k)}^{\beta(1+k)} e^{-\frac{x}{\beta}} d\left(\frac{x}{\beta}\right) & ; \quad 0 \le k \le 1 \\ \displaystyle\int_{0}^{\beta(1+k)} e^{-\frac{x}{\beta}} d\left(\frac{x}{\beta}\right) & ; \quad k \ge 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left[-e^{-\frac{x}{\beta}}\right]_{\beta(1-k)}^{\beta(1+k)} & ; \quad 0 \le k \le 1 \\ \left[-e^{-\frac{x}{\beta}}\right]_{0}^{\beta(1+k)} & ; \quad k \ge 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^{-(1-k)} - e^{-(1+k)} & ; \quad 0 \le k \le 1 \\ 1-e^{-(1+k)} & ; \quad k \ge 1 \end{cases}$$

- เมื่อ k = 1 จะได้

$$P(|X-\mu|<\sigma) = 1-e^{-2} = 0.8647$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 1 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.8647

- เมื่อ k = 2 จะได้

$$P(|X-\mu|<2\sigma) = 1-e^{-3} = 0.9502$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 2 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.9179

- เมื่อ k = 3 จะได้

$$P(|X-\mu|<3\sigma) \quad = \quad 1-e^{-4} \quad = \quad 0.9817$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 3 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.8889

- เมื่อ k = 4 จะได้

$$P(|X-\mu|<4\sigma) \quad = \quad 1-e^{-5} \quad = \quad 0.9933$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 4 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.9933

- เมื่อ k = 5 จะได้

$$P(|X-\mu|<5\sigma) \quad = \quad 1-e^{-6} \quad = \quad 0.9975$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 5 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.9975

ตารางที่ 4.5 ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ สำหรับการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ที่ค่า k ตั้งแต่ 1 ถึง 10

k	1	2	3	4	5
ความน่าจะเป็น	0.8647	0.9502	0.9817	0.9933	0.9975
ความคลาดเคลื่อน (%)	100.0000	21.0692	9.4530	5.6176	3.7594
k	6	7	8	9	10
ความน่าจะเป็น	0.9991	0.9997	0.9999	1.0000	1.0000
ความคลาดเคลื่อน (%)	2.6924	2.0106	1.5502	1.2300	1.0000

จากตารางที่ 4.5 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะเท่ากับ 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4 ถึง 10

4.2.2.2 การแจกแจงแบบปกติ

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 แล้ว

$$P(|X-\mu| < k\sigma) = P(-k\sigma < X-\mu < k\sigma)$$
$$= P\left(-k < \frac{X-\mu}{\sigma} < k\right)$$
$$= P(-k < Z < k)$$
$$= 2P(Z < k)-1$$

- เมื่อ k = 1 จะได้

$$P(|X-\mu| < \sigma) = 2P(Z<1)-1 = 2(0.8413)-1$$
$$= 0.6826$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 1 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.6826

- เมื่อ k = 2 จะได้

$$P(|X-\mu| < 2\sigma) = 2P(Z<2)-1 = 2(0.9772)-1$$
$$= 0.9546$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 2 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.9546

- เมื่อ k = 3 จะได้

$$P(|X-\mu| < 3\sigma) = 2P(Z<3)-1 = 2(0.9987)-1$$
$$= 0.9974$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 3 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 0.9974

- เมื่อ k = 4 จะได้

$$P(|X-\mu| < 4\sigma) = 2P(Z<4)-1 = 2(1.0000)-1$$
$$= 1$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 4 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 1

- เมื่อ k = 5 จะได้

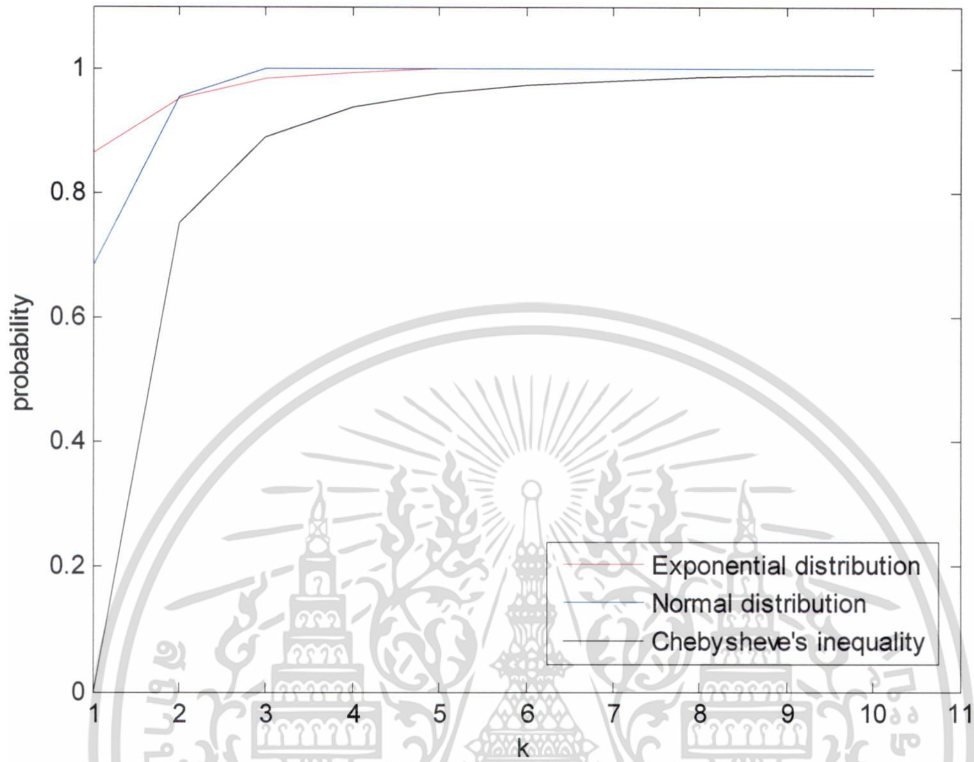
$$P(|X-\mu|<5\sigma) \quad = \quad 2P(Z<5)-1 \quad = \quad 2(1.0000)-1$$
$$= \quad 1$$

หรือโอกาสที่ X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า 5 เท่าของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ มีค่าเท่ากับ 1

ตารางที่ 4.6 ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ สำหรับการแจกแจงแบบปกติ ที่ค่า k = 1 ถึง 10

k	1	2	3	4	5
ความน่าจะเป็น	0.6826	0.9546	0.9974	1.0000	1.0000
ความคลาดเคลื่อน (%)	100.0000	21.4331	10.8783	6.2500	4.0000
k	6	7	8	9	10
ความน่าจะเป็น	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
ความคลาดเคลื่อน (%)	2.7800	2.0400	1.5600	1.2300	1.0000

จากตารางที่ 4.6 จะพบว่าเมื่อ k $\geq$ 4 ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะเท่ากับ 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4 ถึง 10



รูปที่ 4.7 ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลและการแจกแจงแบบปกติ ที่ k = 1 ถึง 10

จากรูปที่ 4.7 จะพบว่าที่ k = 1 ถึง 2 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงสำหรับการแจกแจงแบบปกติมากกว่าการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล แต่ที่ k = 2 ถึง 5 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงสำหรับการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียลมากกว่าการแจกแจงแบบปกติ

นอกจากนี้ เมื่อ k มีค่าเพิ่มมากขึ้น ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น

4.2.2.3 การแจกแจงแบบแกมม่า

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบแกมม่า โดยมีค่าเฉลี่ย $\alpha\beta$ และความแปรปรวน $\alpha\beta^2$ แล้ว

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu| < k\sigma) &= P(-k\sigma < X-\mu < k\sigma) \\
&= P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \\
&= P(\alpha\beta - k\beta\sqrt{\alpha} < X < \alpha\beta + k\beta\sqrt{\alpha}) \\
&= P(X < \alpha\beta + k\beta\sqrt{\alpha}) - P(X \le \alpha\beta - k\beta\sqrt{\alpha})
\end{aligned}
$$

ตารางที่ 4.7 ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ สำหรับการแจกแจงแบบแกมม่า ที่ค่า α และ β = 1 ถึง 5 และ k = 1 ถึง 5

α	β	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)	α	β	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)
1	1	1	0.8647	100.0000	1	4	1	0.8647	100.0000
		2	0.9502	21.0703			2	0.9502	21.0703
		3	0.9817	9.4515			3	0.9817	9.4515
		4	0.9933	5.6140			4	0.9933	5.6140
		5	0.9975	3.7614			5	0.9975	3.7614
1	2	1	0.8647	100.0000	1	5	1	0.8647	100.0000
		2	0.9502	21.0703			2	0.9502	21.0703
		3	0.9817	9.4515			3	0.9817	9.4515
		4	0.9933	5.6140			4	0.9933	5.6140
		5	0.9975	3.7614			5	0.9975	3.7614
1	3	1	0.8647	100.0000					
		2	0.9502	21.0703					
		3	0.9817	9.4515					
		4	0.9933	5.6140					
		5	0.9975	3.7614					

ตารางที่ 4.7 (ต่อ)

α	β	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)	α	β	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)
2	1	1	0.7375	100.0000	2	4	1	0.7375	100.0000
		2	0.9534	21.3323			2	0.9534	21.3323
		3	0.9859	9.8401			3	0.9859	9.8401
		4	0.9959	5.8647			4	0.9959	5.8647
		5	0.9988	3.8887			5	0.9988	3.8887
2	2	1	0.7375	100.0000	2	5	1	0.7375	100.0000
		2	0.9534	21.3323			2	0.9534	21.3323
		3	0.9859	9.8401			3	0.9859	9.8401
		4	0.9959	5.8647			4	0.9959	5.8647
		5	0.9988	3.8887			5	0.9988	3.8887
2	3	1	0.7375	100.0000					
		2	0.9534	21.3323					
		3	0.9859	9.8401					
		4	0.9959	5.8647					
		5	0.9988	3.8887					
3	1	1	0.7153	100.0000	3	4	1	0.7153	100.0000
		2	0.9558	21.5325			2	0.9558	21.5325
		3	0.9882	10.0489			3	0.9882	10.0489
		4	0.9971	5.9738			4	0.9971	5.9738
		5	0.9993	3.9331			5	0.9993	3.9331
3	2	1	0.7153	100.0000	3	5	1	0.7153	100.0000
		2	0.9558	21.5325			2	0.9558	21.5325
		3	0.9882	10.0489			3	0.9882	10.0489
		4	0.9971	5.9738			4	0.9971	5.9738
		5	0.9993	3.9331			5	0.9993	3.9331

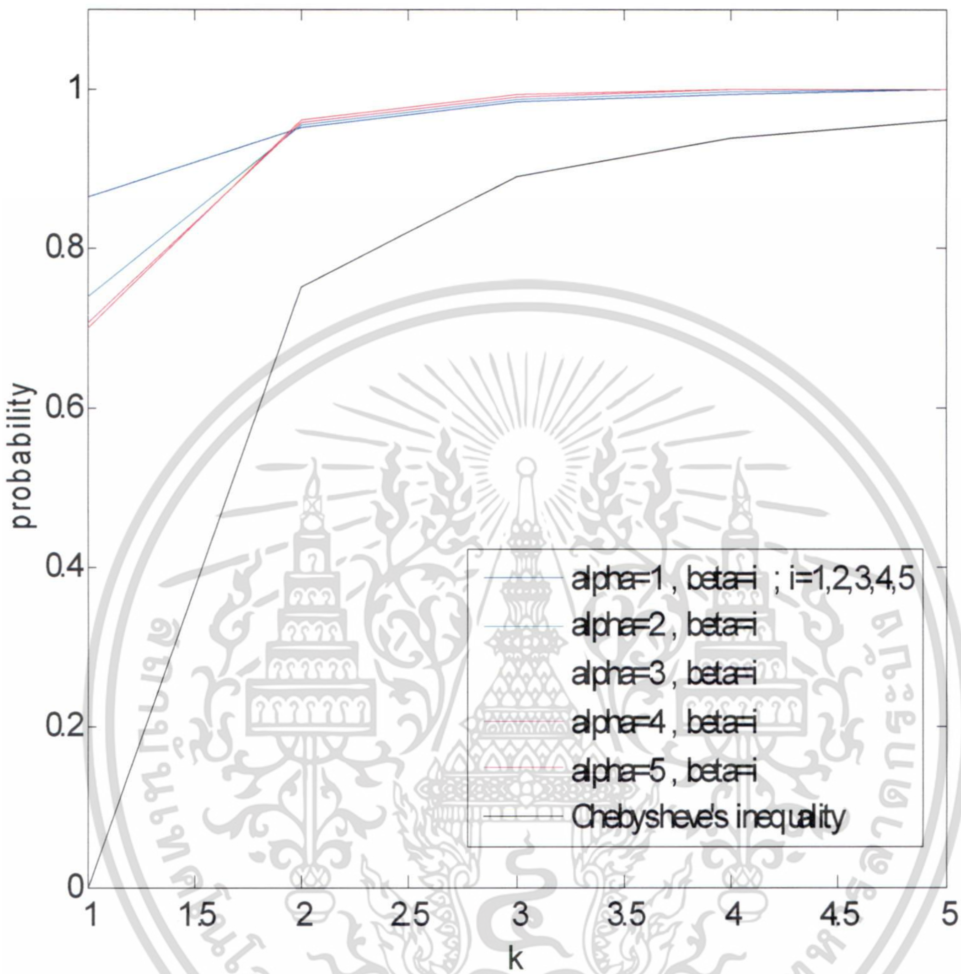
ตารางที่ 4.7 (ต่อ)

α	β	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)	α	β	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)
3	3	1	0.7153	100.0000					
		2	0.9558	21.5325					
		3	0.9882	10.0489					
		4	0.9971	5.9738					
		5	0.9993	3.9331					
4	1	1	0.7059	100.0000	4	4	1	0.7059	100.0000
		2	0.9576	21.6808			2	0.9576	21.6808
		3	0.9897	10.1816			3	0.9897	10.1816
		4	0.9977	6.0347			4	0.9977	6.0347
		5	0.9995	3.9545			5	0.9995	3.9545
4	2	1	0.7059	100.0000	4	5	1	0.7059	100.0000
		2	0.9576	21.6808			2	0.9576	21.6808
		3	0.9897	10.1816			3	0.9897	10.1816
		4	0.9977	6.0347			4	0.9977	6.0347
		5	0.9995	3.9545			5	0.9995	3.9545
4	3	1	0.7059	100.0000					
		2	0.9576	21.6808					
		3	0.9897	10.1816					
		4	0.9977	6.0347					
		5	0.9995	3.9545					
5	1	1	0.7007	100.0000	5	4	1	0.7007	100.0000
		2	0.9588	21.7775			2	0.9588	21.7775
		3	0.9907	10.2747			3	0.9907	10.2747
		4	0.9981	6.0733			4	0.9981	6.0733
		5	0.9997	3.9665			5	0.9997	3.9665

ตารางที่ 4.7 (ต่อ)

α	β	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)	α	β	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)
5	2	1	0.7007	100.0000	5	5	1	0.7007	100.0000
		2	0.9588	21.7775			2	0.9588	21.7775
		3	0.9907	10.2747			3	0.9907	10.2747
		4	0.9981	6.0733			4	0.9981	6.0733
		5	0.9997	3.9665			5	0.9997	3.9665
5	3	1	0.7007	100.0000					
		2	0.9588	21.7775					
		3	0.9907	10.2747					
		4	0.9981	6.0733					
		5	0.9997	3.9665					

จากตารางที่ 4.7 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ α และ β ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียง 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4, 5



รูปที่ 4.8 ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบแกมม่า ที่ $k = 1$ ถึง 5

จากรูปที่ 4.8 จะพบว่าที่ $k = 1, 2$ และ $\alpha = 2, 3, 4, 5$ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากกว่าที่ $\alpha = 1$ และเมื่อ $k > 2$ ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมาก นอกจากนี้เมื่อ $k > 3$ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น

4.2.2.4 การแจกแจงแบบไค-สแควร์

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบไค-สแควร์ โดยมีค่าเฉลี่ย r และความแปรปรวน 2r แล้ว

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu| < k\sigma) &= P(-k\sigma < X-\mu < k\sigma) \\
&= P(\mu - k\sigma < X < \mu + k\sigma) \\
&= P(r - k\sqrt{2r} < X < r + k\sqrt{2r}) \\
&= P(X < r + k\sqrt{2r}) - P(X \le r - k\sqrt{2r})
\end{aligned}
$$

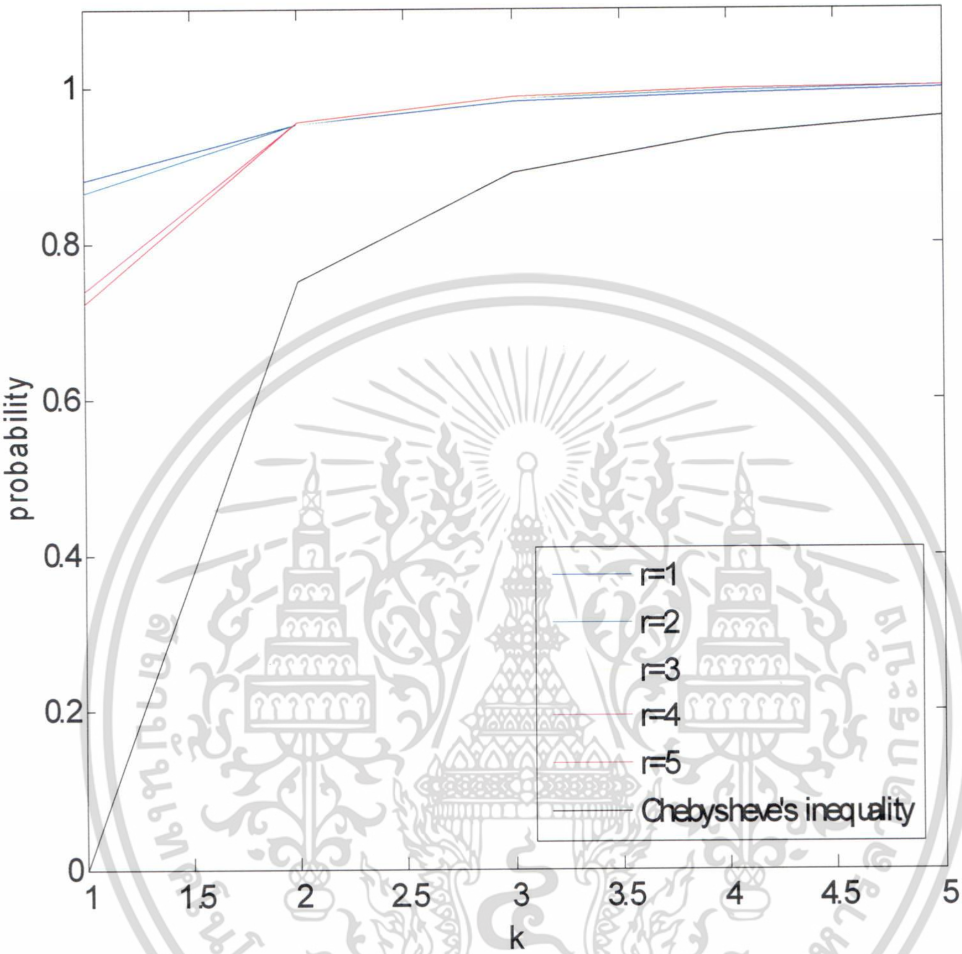
ตารางที่ 4.8 ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ สำหรับการแจกแจงแบบไค-สแควร์ ที่ค่า r = 1 ถึง 5 และ k = 1 ถึง 5

r	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)
1	1	0.8798	100.0000
	2	0.9496	21.0202
	3	0.9780	9.1067
	4	0.9901	5.3147
	5	0.9955	3.5663
2	1	0.8647	100.0000
	2	0.9502	21.0703
	3	0.9817	9.4515
	4	0.9933	5.6140
	5	0.9975	3.7614
3	1	0.7660	100.0000
	2	0.9519	21.2064
	3	0.9842	9.6807
	4	0.9949	5.7699
	5	0.9984	3.8445

ตารางที่ 4.8 (ต่อ)

r	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)
4	1	0.7375	100.0000
	2	0.9534	21.3323
	3	0.9859	9.8401
	4	0.9959	5.8647
	5	0.9988	3.8887
5	1	0.7236	100.0000
	2	0.9547	21.4403
	3	0.9872	9.9579
	4	0.9966	5.9283
	5	0.9991	3.9155

จากตารางที่ 4.8 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ r ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียง 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4, 5



รูปที่ 4.9 ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบไค-สแควร์ ที่ $r = 1$ ถึง 5 และ $k = 1$ ถึง 5

จากรูปที่ 4.9 จะพบว่าที่ $k = 1, 2$ เมื่อ r มีค่ามาก ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริง และเมื่อ $k > 2$ ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมาก นอกจากนี้เมื่อ $k > 3$ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้นคล้ายกับในการแจกแจงแบบแกมม่า

4.2.2.5 การแจกแจงแบบที

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบที โดยมีค่าเฉลี่ย 0 และความแปรปรวน $\frac{r}{r-2}$ แล้ว

$$
\begin{aligned}
P(|X-\mu|<k\sigma) &= P(-k\sigma < X-\mu < k\sigma) \\
&= P(\mu-k\sigma < X < \mu+k\sigma) \\
&= P\left(0-k\sqrt{\frac{r}{r-2}} < X < 0+k\sqrt{\frac{r}{r-2}}\right) \\
&= P\left(-k\sqrt{\frac{r}{r-2}} < X < k\sqrt{\frac{r}{r-2}}\right) \\
&= P\left(X < k\sqrt{\frac{r}{r-2}}\right) - P\left(X \le -k\sqrt{\frac{r}{r-2}}\right)
\end{aligned}
$$

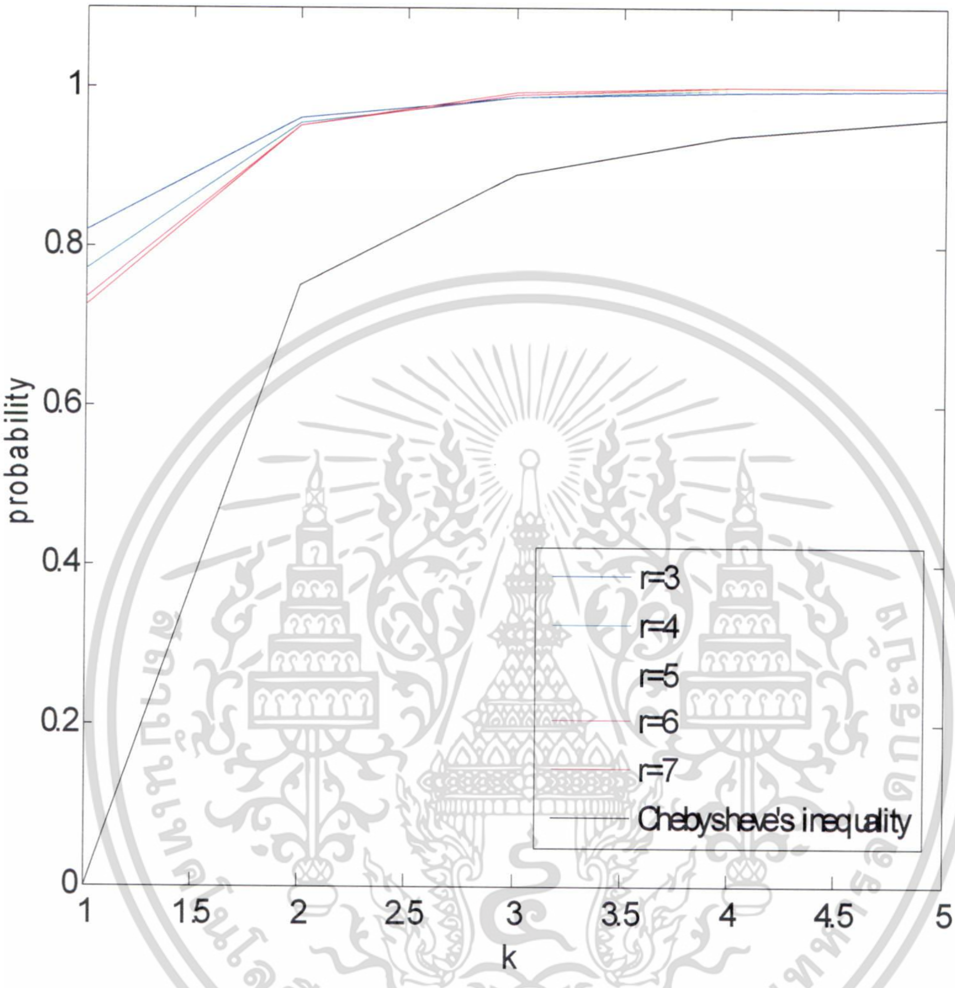
ตารางที่ 4.9 ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ สำหรับการแจกแจงแบบที ที่ค่า r ตั้งแต่ 3 ถึง 7 และ k ตั้งแต่ 1 ถึง 5

r	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)
3	1	0.8183	100.0000
	2	0.9595	21.8327
	3	0.9862	9.8619
	4	0.9938	5.6684
	5	0.9968	3.6880
4	1	0.7698	100.0000
	2	0.9526	21.2664
	3	0.9868	9.9177
	4	0.9952	5.7966
	5	0.9979	3.7969

ตารางที่ 4.9 (ต่อ)

r	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)
5	1	0.7468	100.0000
	2	0.9507	21.1097
	3	0.9883	10.0554
	4	0.9964	5.9138
	5	0.9987	3.8723
6	1	0.7334	100.0000
	2	0.9502	21.0672
	3	0.9896	10.1757
	4	0.9973	5.9949
	5	0.9991	3.9168
7	1	0.7247	100.0000
	2	0.9501	21.0637
	3	0.9907	10.2712
	4	0.9979	6.0503
	5	0.9994	3.9433

จากตารางที่ 4.9 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ r ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียง 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4, 5



รูปที่ 4.10 ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบที ที่ $r = 3$ ถึง 7 และ $k = 1$ ถึง 5

จากรูปที่ 4.10 จะพบว่าที่ $k = 1, 2$ เมื่อ r มีค่ามาก ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าเข้าใกล้กับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริง และเมื่อ $k > 2$ ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกัน นอกจากนี้เมื่อ $k > 3$ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าเข้าใกล้กับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น คล้ายกับการแจกแจงแบบแกมม่า และการแจกแจงแบบไค-สแควร์

4.2.2.6 การแจกแจงแบบเอฟ

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอฟ โดยมีค่าเฉลี่ย $\frac{r_2}{r_2-2}$ และความแปรปรวน $\frac{2r_2^2(r_1+r_2-2)}{r_1(r_2-2)^2(r_2-4)}$ แล้ว

$$P(|X-\mu|<k\sigma) = P(-k\sigma<X-\mu<k\sigma)$$
$$= P(\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma)$$
$$= P\left(\frac{r_2}{r_2-2}-k\sqrt{\frac{2r_2^2(r_1+r_2-2)}{r_1(r_2-2)^2(r_2-4)}}<X<\frac{r_2}{r_2-2}+k\sqrt{\frac{2r_2^2(r_1+r_2-2)}{r_1(r_2-2)^2(r_2-4)}}\right)$$
$$= P\left(X<\frac{r_2}{r_2-2}+k\sqrt{\frac{2r_2^2(r_1+r_2-2)}{r_1(r_2-2)^2(r_2-4)}}\right)-P\left(X\le\frac{r_2}{r_2-2}-k\sqrt{\frac{2r_2^2(r_1+r_2-2)}{r_1(r_2-2)^2(r_2-4)}}\right)$$

ตารางที่ 4.10 ความน่าจะเป็นที่แท้จริงที่ค่าของตัวแปรสุ่ม X จะแตกต่างจากค่าเฉลี่ย μ น้อยกว่า k เท่า ของค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ สำหรับการแจกแจงแบบเอฟ ที่ค่า r_1 = 1 ถึง 5 r_2 = 5, 10, 15, 20 และ k = 1 ถึง 5

r_1	r_2	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)	r_1	r_2	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)
1	5	1	0.9472	100.0000	4	5	1	0.9418	100.0000
		2	0.9792	23.4101			2	0.9782	23.3308
		3	0.9894	10.1602			3	0.9893	10.1442
		4	0.9938	5.6628			4	0.9938	5.6652
		5	0.9960	3.6123			5	0.9961	3.6194
2	5	1	0.9435	100.0000	5	5	1	0.9415	100.0000
		2	0.9785	23.3545			2	0.9782	23.3270
		3	0.9893	10.1477			3	0.9892	10.1438
		4	0.9938	5.6633			4	0.9938	5.6656
		5	0.9960	3.6163			5	0.9961	3.6200

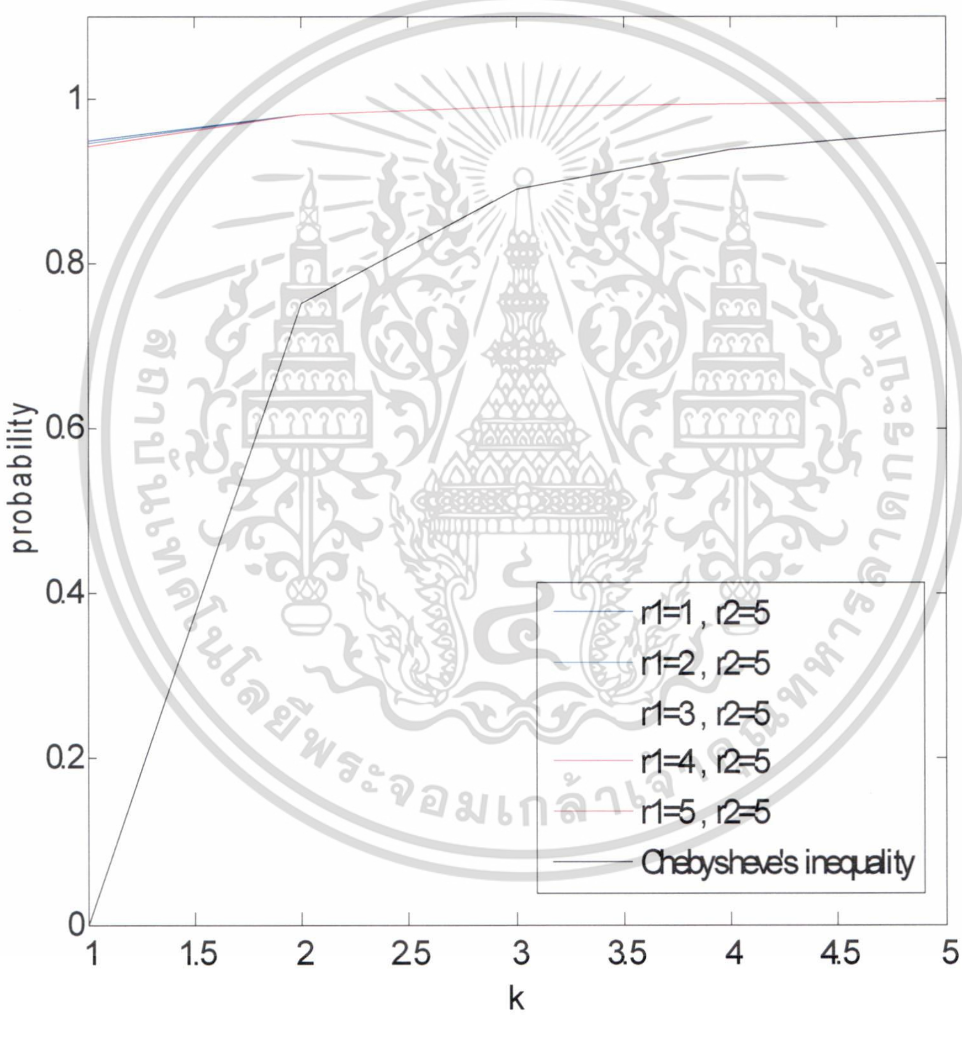
ตารางที่ 4.10 (ต่อ)

r_1	r_2	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)	r_1	r_2	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)
3	5	1	0.9423	100.0000					
		2	0.9783	23.3380					
		3	0.9893	10.1451					
		4	0.9938	5.6644					
		5	0.9960	3.6183					
1	10	1	0.9056	100.0000	4	10	1	0.8906	100.0000
		2	0.9602	21.8911			2	0.9590	21.7968
		3	0.9806	9.3560			3	0.9822	9.4961
		4	0.9896	5.2679			4	0.9913	5.4268
		5	0.9940	3.4233			5	0.9954	3.5526
2	10	1	0.8961	100.0000	5	10	1	0.8823	100.0000
		2	0.9591	21.8043			2	0.9591	21.8004
		3	0.9814	9.4236			3	0.9824	9.5145
		4	0.9906	5.3565			4	0.9915	5.4432
		5	0.9948	3.4990			5	0.9955	3.5645
3	10	1	0.8925	100.0000					
		2	0.9590	21.7949					
		3	0.9819	9.4681					
		4	0.9910	5.4012					
		5	0.9952	3.5335					
1	15	1	0.8960	100.0000	4	15	1	0.8425	100.0000
		2	0.9560	21.5499			2	0.9557	21.5246
		3	0.9792	9.2262			3	0.9822	9.5030
		4	0.9894	5.2465			4	0.9922	5.5134
		5	0.9943	3.4455			5	0.9963	3.6439

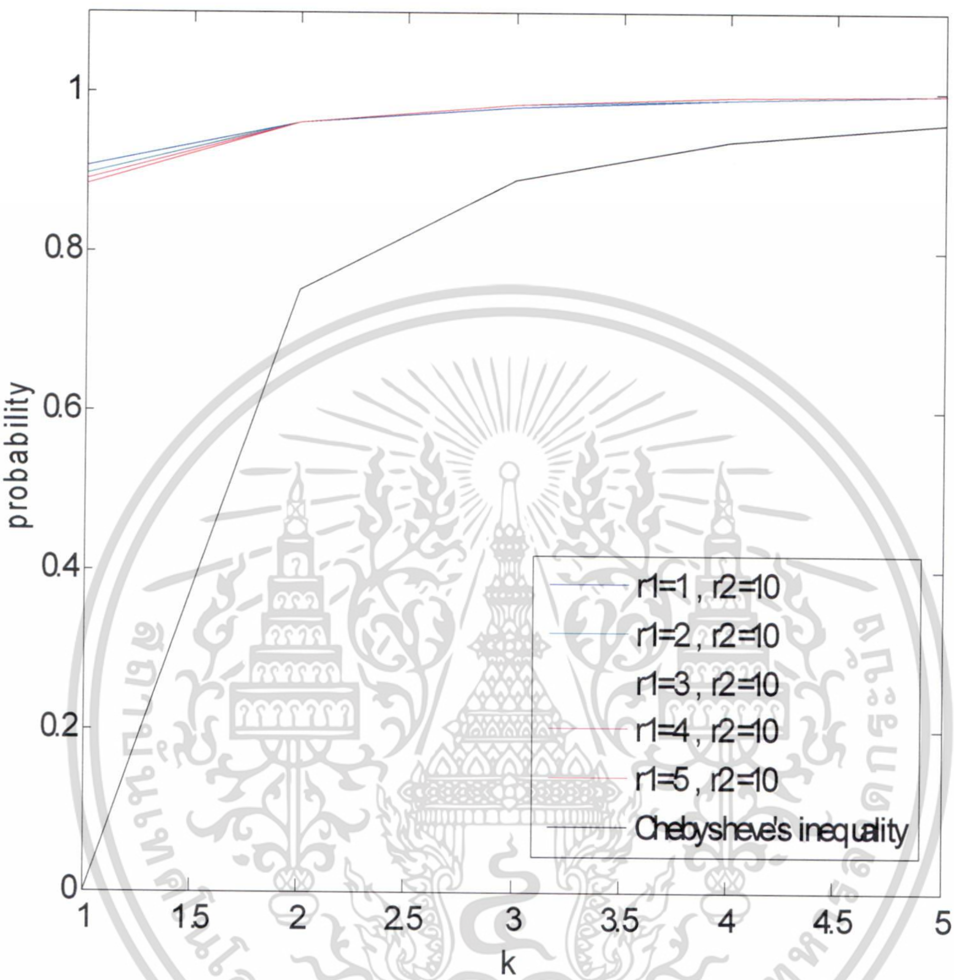
ตารางที่ 4.10 (ต่อ)

r_1	r_2	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)	r_1	r_2	k	ความน่าจะเป็น	ความคลาดเคลื่อน (%)
2	15	1	0.8845	100.0000	5	15	1	0.8244	100.0000
		2	0.9552	21.4858			2	0.9559	21.5438
		3	0.9807	9.3611			3	0.9827	9.5410
		4	0.9909	5.3933			4	0.9925	5.5427
		5	0.9954	3.5607			5	0.9965	3.6630
3	15	1	0.8767	100.0000					
		2	0.9554	21.5023					
		3	0.9816	9.4474					
		4	0.9917	5.4687					
		5	0.9960	3.6138					
1	20	1	0.8916	100.0000	4	20	1	0.8125	100.0000
		2	0.9542	21.3999			2	0.9546	21.4303
		3	0.9787	9.1800			3	0.9827	9.5464
		4	0.9895	5.2509			4	0.9929	5.5821
		5	0.9945	3.4674			5	0.9969	3.7021
2	20	1	0.8792	100.0000	5	20	1	0.7949	100.0000
		2	0.9537	21.3552			2	0.9550	21.4625
		3	0.9807	9.3577			3	0.9833	9.5984
		4	0.9913	5.4318			4	0.9933	5.6195
		5	0.9959	3.6037			5	0.9971	3.7249
3	20	1	0.8486	100.0000					
		2	0.9541	21.3918					
		3	0.9819	9.4717					
		4	0.9923	5.5256					
		5	0.9965	3.6665					

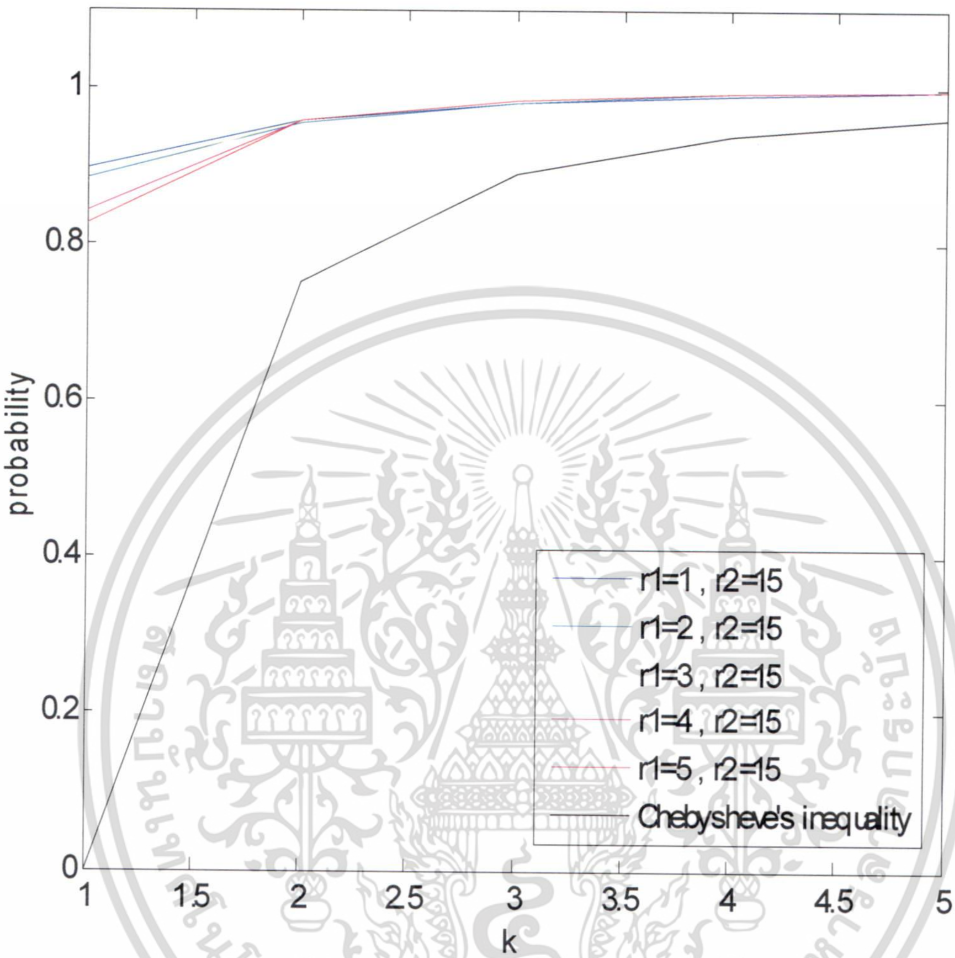
จากตารางที่ 4.10 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ r_1 และ r_2 ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียง 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4, 5



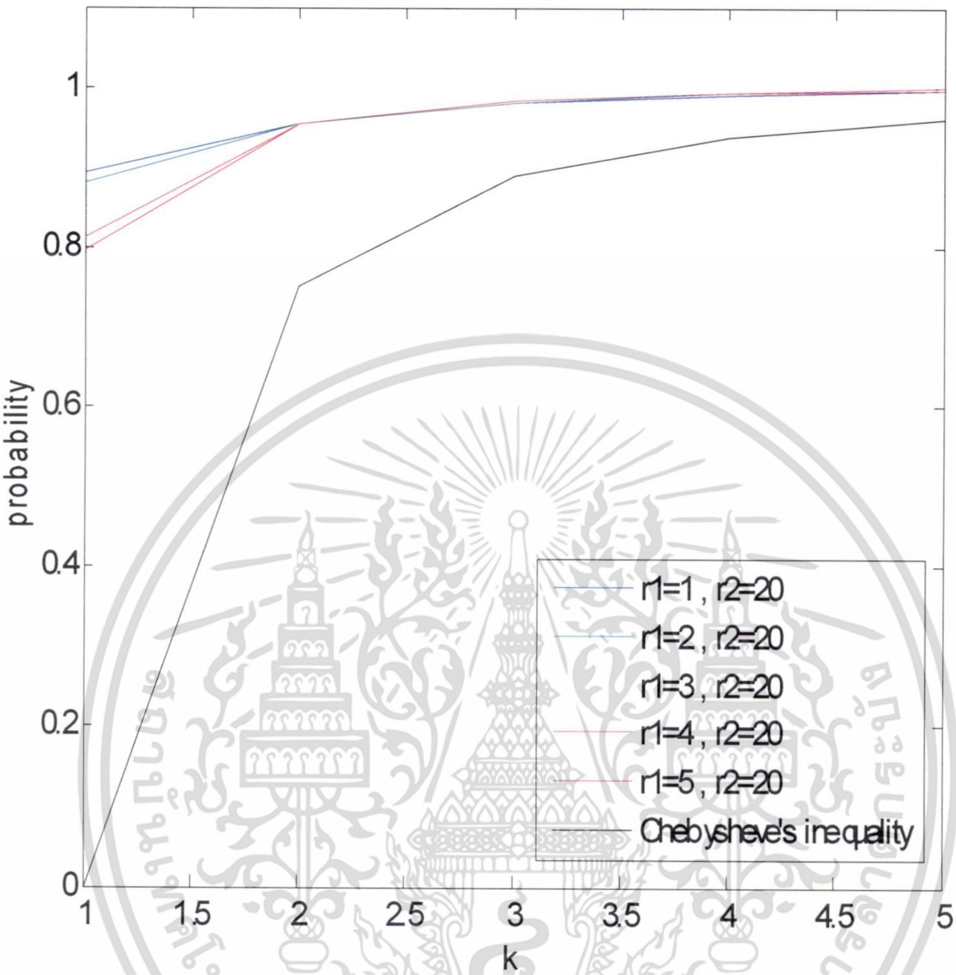
รูปที่ 4.11 ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบเอฟ ที่ $r_1 = 1$ ถึง 5, $r_2 = 5$ และ k = 1 ถึง 5



รูปที่ 4.12 ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบเอฟ ที่ $r_1 = 1$ ถึง 5, $r_2 = 10$ และ $k = 1$ ถึง 5



รูปที่ 4.13 ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบเอฟ ที่ $r_1 = 1$ ถึง 5, $r_2 = 15$ และ $k = 1$ ถึง 5



รูปที่ 4.14 ค่าขอบเขตล่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟและการแจกแจงที่แท้จริง สำหรับการแจกแจงแบบเอฟ ที่ $r_1 = 1$ ถึง 5, $r_2 = 20$ และ $k = 1$ ถึง 5

จากรูปที่ 4.11-4.14 จะพบว่าที่ $k = 1, 2$ เมื่อ r_2 มีค่าน้อย ๆ ได้แก่ $r_2 = 5, 10$ ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมากกว่าเมื่อ r_2 มีค่ามาก แต่ที่ r_2 มีค่าน้อย ๆ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะอยู่ห่างไกลจากค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากกว่าที่ r_2 มีค่ามาก ๆ และเมื่อ $k > 2$ ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมาก

นอกจากนี้เมื่อ $k > 3$ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าเข้าใกล้กับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้นเช่นเดียวกับการแจกแจงแบบแกมม่า การแจกแจงแบบไค-สแควร์ และการแจกแจงแบบที

4.3 การหาขนาดตัวอย่าง

4.3.1 การแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง

4.3.1.1 การหาขนาดตัวอย่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟ

ในการทดลองแบบเบอร์นูลลีซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง โดยที่ผลลัพธ์ในการทดลองที่ i, X_i มีค่าเป็น 1 ด้วยความน่าจะเป็น θ และมีค่าเป็น 0 ด้วยความน่าจะเป็น $1-\theta$ ดังนั้นตัวแปรสุ่ม $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ มีการแจกแจงแบบทวินาม โดยมีพารามิเตอร์เป็น n และ θ เราทราบว่า $E(X_i) = \theta$ และ $V(X_i) = \theta(1-\theta)$

ใช้กฎของเลขจำนวนมากแบบอ่อน (Weak law of large number) กับตัวแปรสุ่ม $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะได้ว่า

$$P\left(\left|\overline{X}-\theta\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = \frac{\theta(1-\theta)}{n\varepsilon^2}$$

หรือ $$P\left(\left|\overline{X}-\theta\right| < \varepsilon\right) \geq 1-\frac{\theta(1-\theta)}{n\varepsilon^2}$$

ถ้าต้องการให้ความน่าจะเป็นนี้มีค่าอย่างน้อย 0.95

จะได้ $$1-\frac{\theta(1-\theta)}{n\varepsilon^2} \geq 0.95$$

$$0.05 \geq \frac{\theta(1-\theta)}{n\varepsilon^2}$$

ดังนั้น $$n \geq \frac{20\,\theta(1-\theta)}{\varepsilon^2}$$

ตารางที่ 4.11 ขนาดตัวอย่างที่ควรใช้สำหรับการแจกแจงแบบทวินามโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟ เมื่อ ε = 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.10 และ θ = 0.1 ถึง 0.9

$\varepsilon = 0.01$	θ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	n	18,000	32,000	42,000	48,000	50,000	48,000	42,000	32,000	18,000
$\varepsilon = 0.02$	θ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	n	4,500	8,000	10,500	12,000	12,500	12,000	10,500	8,000	4,500
$\varepsilon = 0.03$	θ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	n	2,000	3,556	4,667	5,334	5,556	5,334	4,667	3,556	2,000
$\varepsilon = 0.04$	θ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	n	1,125	2,000	2,625	3,000	3,125	3,000	2,625	2,000	1,125

ตารางที่ 4.11 (ต่อ)

$\varepsilon = 0.05$	θ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	n	720	1,280	1,680	1,920	2,000	1,920	1,680	1,280	720
$\varepsilon = 0.10$	θ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
	n	180	320	420	480	500	480	420	320	180

จากตารางที่ 4.11 จะพบว่า ณ ε ระดับหนึ่ง ๆ เมื่อ θ มีค่าเพิ่มขึ้น ขนาดตัวอย่างที่ได้จะเพิ่มขึ้นจนถึง $\theta = 0.50$ หลังจากนั้นขนาดตัวอย่างที่ได้จะลดลง และณ θ ระดับหนึ่ง ๆ เมื่อ ε มีค่าเพิ่มขึ้น ขนาดตัวอย่างที่ได้จะลดลง

นอกจากนี้ ณ $\theta = 0.10$ และ 0.90, $\theta = 0.20$ และ 0.80, $\theta = 0.30$ และ 0.70, $\theta = 0.40$ และ 0.60 ขนาดตัวอย่างที่ได้จะเท่ากัน

4.3.2 การแจกแจงแบบต่อเนื่อง

4.3.2.1 การหาขนาดตัวอย่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟ

สมมติว่าสุ่มตัวอย่างมาจากประชากรที่มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระกันแบบปกติ $N(\mu,\sigma^2)$ จะได้ว่า $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบปกติ $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

ใช้กฎของเลขจำนวนมากแบบอ่อนกับตัวแปรสุ่ม $\overline{X}$ จะได้ว่า

$$P\left(\left|\overline{X}-\mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

หรือ $$P\left(\left|\overline{X}-\theta\right| < \varepsilon\right) \geq 1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

ถ้าต้องการให้ความน่าจะเป็นนี้มีค่าอย่างน้อย 0.95

จะได้ $$1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \geq 0.95$$

$$0.05 \geq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

ดังนั้น $$n \geq \frac{\sigma^2}{0.05\,\varepsilon^2} = \frac{20\,\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

ตารางที่ 4.12 ขนาดตัวอย่างที่ควรใช้โดยใช้อสมการเชฟบีเชฟสำหรับการแจกแจงแบบปกติ เมื่อ $\varepsilon = \sigma$ ถึง $\frac{\sigma}{50}$

ε	σ	$\frac{\sigma}{2}$	$\frac{\sigma}{3}$	$\frac{\sigma}{4}$	$\frac{\sigma}{5}$	$\frac{\sigma}{6}$	$\frac{\sigma}{7}$	$\frac{\sigma}{8}$	$\frac{\sigma}{9}$	$\frac{\sigma}{10}$
n	20	80	180	320	500	720	980	1,280	1,620	2,000
ε	$\frac{\sigma}{15}$	$\frac{\sigma}{20}$	$\frac{\sigma}{25}$	$\frac{\sigma}{30}$	$\frac{\sigma}{35}$	$\frac{\sigma}{40}$	$\frac{\sigma}{45}$	$\frac{\sigma}{50}$		
n	4,500	8,000	12,500	18,000	24,500	32,000	40,500	50,000		

จากตารางที่ 4.12 จะพบว่า เมื่อ ε มีค่าลดลง ขนาดตัวอย่างที่ได้จะเพิ่มขึ้น

4.3.2.2 การหาขนาดตัวอย่างจากความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง

สมมติว่าสุ่มตัวอย่างมาจากประชากรที่มีการแจกแจงเหมือนกันและเป็นอิสระกันแบบปกติ $N(\mu,\sigma^2)$ จะได้ว่า $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบปกติ $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P\left(\left|\overline{X}-\theta\right|<\varepsilon\right) &= P\left(-\varepsilon<\overline{X}-\mu<\varepsilon\right) \\ &= P\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\ &= P\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}<Z<\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z<\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)-P\left(Z\le-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) \\ &= 2P\left(Z<\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)-1 \end{aligned}$$

ถ้าต้องการให้ความน่าจะเป็นนี้มีค่าอย่างน้อย 0.95

จะได้

$$\begin{aligned} 2P\left(Z<\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)-1 &\ge 0.95 \\ P\left(Z<\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) &\ge 0.975 \end{aligned}$$

$$\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma} \geq 1.96$$

ดังนั้น

$$n \geq \frac{(1.96)^2\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{3.8416\,\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

ตารางที่ 4.13 ขนาดตัวอย่างที่ควรใช้จากความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง สำหรับการแจกแจงแบบปกติ เมื่อ $\varepsilon = \sigma$ ถึง $\frac{\sigma}{50}$

ε	σ	$\frac{\sigma}{2}$	$\frac{\sigma}{3}$	$\frac{\sigma}{4}$	$\frac{\sigma}{5}$	$\frac{\sigma}{6}$	$\frac{\sigma}{7}$	$\frac{\sigma}{8}$	$\frac{\sigma}{9}$	$\frac{\sigma}{10}$
n	4	16	35	62	97	139	189	246	312	385
ε	$\frac{\sigma}{15}$	$\frac{\sigma}{20}$	$\frac{\sigma}{25}$	$\frac{\sigma}{30}$	$\frac{\sigma}{35}$	$\frac{\sigma}{40}$	$\frac{\sigma}{45}$	$\frac{\sigma}{50}$		
n	865	1,537	2,401	3,458	4,706	6,147	7,780	9,604		

จากตารางที่ 4.13 จะพบว่า เมื่อ ε มีค่าลดลง ขนาดตัวอย่างที่ได้จะเพิ่มขึ้น และจากการเปรียบเทียบตารางที่ 4.12 และ 4.13 จะพบว่าขนาดตัวอย่างที่ได้จากอสมการเชฟบีเชฟจะมากกว่าขนาดตัวอย่างที่ได้จากความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงค่อนข้างมาก

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

1. การหาค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟ

จากตารางที่ 4.1 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟที่ค่า $k = 1$ จะเป็น 0 หลังจากนั้นค่าขอบเขตล่างจะเพิ่มขึ้นอย่างมาก จนถึง $k = 5$ เป็นต้นไป ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะใกล้เคียง 1

2. การหาค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นเมื่อทราบการแจกแจงที่แท้จริง

2.1 การแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง

2.1.1 การแจกแจงแบบเบอร์นูลลี

จากตารางที่ 4.2 เมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ p ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะเท่ากับ 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ $k = 2, 3$ สำหรับ p ทุกกรณี หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ $k = 4, 5$

จากรูปที่ 4.1 เมื่อ $k = 1$ ถึง 4 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าต่ำกว่าค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงค่อนข้างมาก ยกเว้นที่ $p = 0.5$ และ $k = 1, 2$ ซึ่งค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริง และเมื่อ $k > 4$ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริง

2.1.2 การแจกแจงแบบทวินาม

จากตารางที่ 4.3 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ p ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะเท่ากับ 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ $k = 2, 3$ สำหรับ p ทุกกรณี หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ $k = 4, 5$

จากรูปที่ 4.2-4.5 จะพบว่าที่ $k = 1$ ถึง 3 และ $p = 0.1$ ถึง 0.9 เมื่อ n มีค่าเพิ่มมากขึ้น ค่าที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้น และเมื่อ $k = 1$ ถึง 3 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะอยู่ห่างไกลจากค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงค่อนข้างมาก แต่เมื่อ $k > 3$ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น

2.1.3 การแจกแจงแบบปัวส์ซอง

จากตารางที่ 4.4 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ λ ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะเท่ากับ 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ $k = 2, 3$ สำหรับ λ ทุกกรณี หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก สำหรับ $k = 4, 5$

จากรูปที่ 4.6 จะพบว่าที่ $k = 1$ ถึง 3 เมื่อ λ มีค่าน้อย ๆ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริง แต่ที่ $\lambda = 2$, $k = 2$ ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะต่ำกว่าค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟ และเมื่อ $k > 3$ ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมาก และค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น

2.2 การแจกแจงแบบต่อเนื่อง

2.2.1 การแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล

จากตารางที่ 4.5 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะเท่ากับ 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ $k = 2, 3$ หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ $k = 4$ ถึง 10

2.2.2 การแจกแจงแบบปกติ

จากตารางที่ 4.6 จะพบว่าเมื่อ $k \geq 4$ ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะเท่ากับ 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ $k = 2, 3$ หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ $k = 4$ ถึง 10

จากรูปที่ 4.7 จะพบว่าที่ $k = 1$ ถึง 2 สำหรับการแจกแจงแบบปกติ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากกว่าการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล แต่ที่ $k = 2$ ถึง 5 สำหรับการแจกแจงแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากกว่าการแจกแจงแบบปกติ

นอกจากนี้ เมื่อ k มีค่าเพิ่มมากขึ้น ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น

2.2.3 การแจกแจงแบบแกมม่า

จากตารางที่ 4.7 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ α และ β ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียง 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ $k = 2, 3$ หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ $k = 4, 5$

จากรูปที่ 4.8 จะพบว่าที่ $k = 1, 2$ และ $\alpha = 2, 3, 4, 5$ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากกว่าที่ $\alpha = 1$ และเมื่อ $k > 2$ ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมาก นอกจากนี้เมื่อ $k > 3$ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น

2.2.4 การแจกแจงแบบไค-สแควร์

จากตารางที่ 4.8 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ r ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริง จะมีค่าใกล้เคียง 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ $k = 2, 3$ หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ $k = 4, 5$

จากรูปที่ 4.9 จะพบว่าที่ $k = 1, 2$ เมื่อ r มีค่ามาก ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริง และเมื่อ $k > 2$ ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมาก นอกจากนี้เมื่อ $k > 3$ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้นคล้ายกับในการแจกแจงแบบแกมม่า

2.2.5 การแจกแจงแบบที

จากตารางที่ 4.9 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ r ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริง จะมีค่าใกล้เคียง 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4, 5

จากรูปที่ 4.10 จะพบว่าที่ k = 1, 2 เมื่อ r มีค่ามาก ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าเข้าใกล้กับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริง และเมื่อ k > 2 ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกัน นอกจากนี้เมื่อ k > 3 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าเข้าใกล้กับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น คล้ายกับการแจกแจงแบบแกมม่า และการแจกแจงแบบไค-สแควร์

2.2.6 การแจกแจงแบบเอฟ

จากตารางที่ 4.10 จะพบว่าเมื่อ k มีค่ามาก สำหรับ r_1 และ r_2 ทุกกรณี ความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียง 1 และความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็น โดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4, 5

จากรูปที่ 4.11-4.14 จะพบว่าที่ k = 1, 2 เมื่อ r_2 มีค่าน้อย ๆ ได้แก่ r_2 = 5, 10 ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมากกว่าเมื่อ r_2 มีค่ามาก แต่ที่ r_2 มีค่าน้อย ๆ ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะอยู่ห่างไกลจากค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากกว่าที่ r_2 มีค่ามาก ๆ และเมื่อ k > 2 ค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะมีค่าใกล้เคียงกันมาก

นอกจากนี้เมื่อ k > 3 ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าเข้าใกล้กับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้นเช่นเดียวกับการแจกแจงแบบแกมม่า การแจกแจงแบบไค-สแควร์ และการแจกแจงแบบที

กล่าวโดยสรุปคือ เมื่อ k มีค่าน้อย ๆ (k = 1, 2 และ 3) ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะอยู่ห่างไกลจากค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงค่อนข้างมาก แต่เมื่อ k มีค่าเพิ่มมากขึ้น (k = 4 และ 5) ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น โดยที่ความคลาดเคลื่อนของค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟเทียบกับความน่าจะเป็นที่แท้จริงจะลดลงอย่างมาก เมื่อ k = 2, 3 หลังจากนั้นความคลาดเคลื่อนจะลดลงไม่มากนัก เมื่อ k = 4, 5 ทั้งการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่อง ดังนั้นการประมาณค่าความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟควรใช้เมื่อ k มีค่ามาก

3. การหาขนาดตัวอย่าง

3.1 การแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง

3.1.1 การหาขนาดตัวอย่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟ

จากตารางที่ 4.11 การหาขนาดตัวอย่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟสำหรับการแจกแจงแบบทวินาม จะพบว่า ณ ε ระดับหนึ่ง ๆ เมื่อ θ มีค่าเพิ่มขึ้น ขนาดตัวอย่างที่ได้จะเพิ่มขึ้นจนถึง $\theta = 0.50$ หลังจากนั้นขนาดตัวอย่างที่ได้จะลดลง และณ θ ระดับหนึ่ง ๆ เมื่อ ε มีค่าเพิ่มขึ้น ขนาดตัวอย่างที่ได้จะลดลง

นอกจากนี้ ณ $\theta = 0.10$ และ 0.90, $\theta = 0.20$ และ 0.80, $\theta = 0.30$ และ 0.70, $\theta = 0.40$ และ 0.60 ขนาดตัวอย่างที่ได้จะเท่ากัน

3.2 การแจกแจงแบบต่อเนื่อง

3.2.1 การหาขนาดตัวอย่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟ

จากตารางที่ 4.12 การหาขนาดตัวอย่างโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟสำหรับการแจกแจงแบบปกติ จะพบว่าเมื่อ ε มีค่าลดลง ขนาดตัวอย่างที่ได้จะเพิ่มขึ้น

3.2.2 การหาขนาดตัวอย่างจากความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง

จากตารางที่ 4.13 การหาขนาดตัวอย่างจากความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงสำหรับการแจกแจงแบบปกติ จะพบว่า เมื่อ ε มีค่าลดลง ขนาดตัวอย่างที่ได้จะเพิ่มขึ้น และจากการเปรียบเทียบขนาดตัวอย่างที่ได้จากอสมการเชฟบีเชฟและที่ได้จากความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงในทุกกรณี จะพบว่าขนาดตัวอย่างที่ได้จากอสมการเชฟบีเชฟจะมากกว่าขนาดตัวอย่างที่ได้จากความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้ความน่าจะเป็นค่อนข้างมาก

กล่าวโดยสรุปคือ ขนาดตัวอย่างที่คำนวณได้จากอสมการเชฟบีเชฟจะมากกว่าขนาดตัวอย่างที่คำนวณได้จากความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงค่อนข้างมาก ทั้งการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่องและการแจกแจงแบบต่อเนื่อง

5.2 ข้อเสนอแนะ

1. การหาค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเมื่อ k มีค่ามากนั้น ค่าขอบเขตล่างของอสมการเชฟบีเชฟที่ได้จะมีค่าใกล้เคียงกับค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงมากขึ้น แต่ช่วงที่ได้จะกว้างมากเกินไป ซึ่งไม่ค่อยจะมีประโยชน์มากนักที่จะหา

2. ควรศึกษาการหาค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจงสำหรับการแจกแจงแบบอื่น ๆ เช่น การแจกแจงแบบเรขาคณิต การแจกแจงแบบทวินามลบ การแจกแจงแบบเบต้า การแจกแจงแบบไวบูล การแจกแจงแบบคอชี เป็นต้น

3. ควรศึกษาการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง ณ ระดับ n, p, λ, k, α, β, r, r_1 และ r_2 ที่อื่น ๆ

4. ควรศึกษาการหาค่าความน่าจะเป็นโดยใช้ทฤษฎีขีดจำกัดสู่ส่วนกลางเพื่อเปรียบเทียบกับการหาค่าขอบเขตล่างของความน่าจะเป็นโดยใช้อสมการเชฟบีเชฟ และการหาค่าความน่าจะเป็นที่แท้จริงโดยใช้การแจกแจง

5. ควรศึกษาการหาขนาดตัวอย่างที่ควรใช้โดยใช้อสมการเชฟบีเชฟเทียบกับโดยใช้การแจกแจงเพิ่มเติม

บรรณานุกรม

Beaumont, G. P. 1986. Probability and Random Variables. New York : Ellis Horwood.

Blake, I. F. 1979. An Introduction to Applied Probability. New York : John Wiley and Sons.

Ghahramani, S. 2005. Fundamentals of Probability. 3rd ed. London : Prentice Hall.