

รายงานการวิจัย
ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ C_n^2 บางกราฟ
Determinant of Adjacency Matrices of Some Graph C_n^2

ดร. เดชา สมณะ

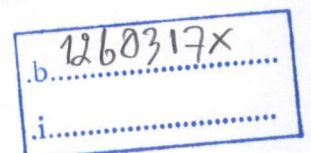
(หัวหน้าโครงการ)

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2555

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เลขหมู่..... RCH
เลขทะเบียน... 131126 GA
วัน,เดือน,ปี... 22 มี.ค. 2557 191
08420



ชื่อโครงการ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ C_n^2 บางกราฟ

ชื่อโครงการ)..... Determinant of Adjacency Matrices of Some Graph C_n^2

แหล่งเงิน..... เงินรายได้คณะวิทยาศาสตร์.....

ประจำปีงบประมาณ..... 2555..... จำนวนเงินที่ได้รับการสนับสนุน..... 35,000..... บาท

ระยะเวลาทำการวิจัย..... 1..... ปี ตั้งแต่..... 1 ตุลาคม 2554..... ถึง..... 30 กันยายน 2555 ✓

ชื่อ-สกุล หัวหน้าโครงการ และผู้ร่วมโครงการวิจัย พร้อมระบุ หน่วยงานต้นสังกัดและ อีเมลล์

ชื่อ-สกุล..... นายเคชา สมณะ.....

ตำแหน่งทางวิชาการ..... อาจารย์..... สาขาวิชา..... คณิตศาสตร์

คณะ..... วิทยาศาสตร์..... โทรศัพท์..... 0-2326-4344 ต่อ 283 และ 0-2737-3000 ต่อ 6187

E-mail dechasamana@hotmail.com or ksdecha@kmitl.ac.th.....

คำสำคัญ (Keywords)..... Determinant, Adjacency Matrix, Square cycle graph.....

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ คณาจารย์ เจ้าหน้าที่ นักศึกษา ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่ช่วยเหลือในการอำนวยความสะดวกเกี่ยวกับอุปกรณ์ เอกสารต่าง ๆ ที่จำเป็นในการทำงานวิจัย

ขอขอบพระคุณ ครอบครัวสมณะ ที่ได้ส่งเสริมและสนับสนุน พร้อมทั้งให้กำลังใจในการทำงานวิจัย รวมทั้ง นายนิติภูมิ อัครวิศิษฐกุล ที่เป็นผู้ช่วยนักวิจัยในงานวิจัยนี้

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่สนับสนุนงบประมาณในการทำงานวิจัย

ดร. เตชา สมณะ

บทคัดย่อ

กราฟวงกำลังสอง C_n^2 คือ กราฟที่มีจำนวนจุดยอด n จุดและจุดยอด u และ v มีเส้นเชื่อมกันก็ต่อเมื่อระยะทางระหว่าง u และ v มีค่าไม่เกิน 2 ซึ่งในงานนี้เราได้หาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสอง ได้ดังนี้

$$\det(A(C_n^2)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0, 2, 4 \pmod{6} \\ 16 & ; n \equiv 3 \pmod{6} \\ 4 & ; n \equiv 1, 5 \pmod{6} \end{cases}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

นอกจากนี้ เราได้หาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟที่เกิดจากการดำเนินการการบวกระหว่างกราฟวงกำลังสองกับกราฟ G ($C_n^2 + G$) และกราฟวงกำลังสอง C_n^2 ประชิดกับวิถี P_{n_2} ที่จุด v_1 ($C_n^2 \cup_{v_1} P_{n_2}$) โดยที่ $v_1 \in V(P_{n_2})$

ABSTRACT

Square cycle graph C_n^2 is a graph which has n vertices and two vertices u and v are adjacent if and only if distance between u and v not greater than 2. We show that the determinant of adjacency matrix of square cycle graph C_n^2 are as follows

$$\det(A(C_n^2)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0, 2, 4(\text{mod } 6) \\ 16 & ; n \equiv 3(\text{mod } 6) \\ 4 & ; n \equiv 1, 5(\text{mod } 6) \end{cases}$$

where n is a positive integer.

Furthermore, we show that the determinant of adjacency matrix of graph $C_n^2 \dot{+} G$ and the determinant of adjacency matrix of graph $C_n^2 \cup_{v_1} P_{n_2}$ which is a square cycle graph C_n^2 adjacent a path P_{n_2} at vertex v_1 , where $v_1 \in V(P_{n_2})$.

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของงานวิจัย

การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟเป็นการนำองค์ความรู้ทางด้านทฤษฎีกราฟและพีชคณิตเชิงเส้นมาประยุกต์รวมกัน ซึ่งมีการศึกษาอย่างกว้างขวาง การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟที่เป็นที่รู้จักทั่วไป เช่น กราฟแบบบริบูรณ์ (Complete graph) กราฟวง (Cycle graph) กราฟวิถี (Path graph) กราฟวงล้อ (Wheel graph) เป็นต้น แต่การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟนั้นทำได้ยาก เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์ของกราฟต่าง ๆ จะขึ้นอยู่กับจำนวนจุดและจำนวนเส้นของกราฟนั้น ๆ และนอกจากนี้ยังมีกราฟอื่น ๆ ที่น่าสนใจ คือ กราฟวงกำลัง d (d - power cycle graph, C_n^d) โดยที่กราฟวงกำลัง d ที่สนใจ คือ กราฟวงกำลังสองซึ่งได้มีการศึกษาสมบัติต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง อาทิเช่น การให้สีของกราฟ การนับจำนวนกราฟต้นไม้แบบแผ่ทั่ว เป็นต้น แต่ยังไม่มีการศึกษาการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสอง จึงทำให้ผู้วิจัยเกิดความสนใจหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสอง

1.2 วัตถุประสงค์

- 1.2.1 เพื่อศึกษาบทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟและพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น
- 1.2.2 เพื่อศึกษาสมบัติและทฤษฎีบทของดีเทอร์มิแนนต์และการหาค่าเฉพาะ (Eigenvalue) ของเมทริกซ์ต่าง ๆ
- 1.2.3 เพื่อหาดีเทอร์มิแนนต์และหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสอง

1.3 ขอบเขตงานวิจัย

ขอบเขตของงานวิจัยนี้ เราต้องการหาดีเทอร์มิแนนต์และหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสอง รวมไปถึงการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟที่เกิดจากการดำเนินการการบวกระหว่างกราฟวงกำลังสองกับกราฟ G และกราฟวงกำลังสองที่ประชิดกับวิถีที่จุด v_1 โดยที่ v_1 เป็นจุดยอดในวิถี

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1.4.1 สามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสองได้
- 1.4.2 สามารถหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสองได้
- 1.4.3 สามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟอื่น ๆ ที่เกิดจากการดำเนินการของกราฟ C_n^2 ได้
- 1.4.4 ได้งานวิจัยที่ได้เผยแพร่ในงานประชุมวิชาการระดับชาติได้

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

- 1.5.1 ศึกษา ค้นคว้า ตำรา เอกสาร หนังสือเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟและพีชคณิตเชิงเส้น
- 1.5.2 ศึกษา ค้นคว้า งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหาค่าดีเทอร์มิแนนต์และกราฟวงกำลังสอง
- 1.5.3 เขียน โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อตรวจสอบค่าดีเทอร์มิแนนต์ของกราฟวงกำลังสอง
- 1.5.4 ตั้งสมมติฐานและพิสูจน์ทฤษฎีในงานวิจัยนี้
- 1.5.5 สรุปผลงานวิจัย
- 1.5.6 นำงานวิจัยไปเผยแพร่ในวารสารระดับชาติหรืองานประชุมวิชาการระดับชาติ
- 1.5.7 รายงานผลงานวิจัย

บทที่ 2

นิยามและทฤษฎีบทเบื้องต้น

2.1 เมทริกซ์ (Matrix)

บทนิยาม 2.1 เมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ประกอบด้วย จำนวนจริงที่เขียนเรียงเป็นแถว (Row) m แถวและเขียนในแนวตั้ง n หลัก (Column) โดยปิดล้อมจำนวนจริงเหล่านี้ด้วยเครื่องหมาย [] หรือ () จำนวนแต่ละจำนวนในเมทริกซ์ เรียกว่า สมาชิกของเมทริกซ์

เราใช้อักษรพิมพ์ใหญ่ภาษาอังกฤษ A, B, C, \dots แทน เมทริกซ์และอักษรตัวเล็ก a, b, c, \dots แทน สมาชิกหรือจำนวนในเมทริกซ์ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ จะใช้ a_{ij} แทน สมาชิกที่อยู่ในแถวที่ i และหลักที่ j ของ A และถ้า A มีขนาดเป็น $m \times n$ แล้ว จะเขียน A ด้วย

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad A = [a_{ij}]_{m \times n}$$

ตัวอย่างเช่น เมทริกซ์ A ที่มีขนาดเป็น 3×4 จะเขียนแทนด้วย

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

ในกรณีที่เมทริกซ์ A มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลักเท่ากับ n จะเรียกเมทริกซ์ A ว่าเป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ และจะเรียก $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ ว่าเป็นสมาชิกในแนวทแยงของ A

2.2 ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants)

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A ใดๆ จะมีสเกลาร์ตัวหนึ่ง ซึ่งถูกกำหนดให้กับเมทริกซ์นั้น ๆ สเกลาร์นี้จะเรียกว่า ดีเทอร์มิแนนต์ของ A ซึ่งเขียนแทนด้วย $\det A$ หรือ $|A|$ และดีเทอร์มิแนนต์นี้ ก็คือฟังก์ชันจากสับเซตของเซตของเมทริกซ์ ไปยังเซตของจำนวนจริง ดีเทอร์มิแนนต์นี้มีประโยชน์ช่วยในการแก้ระบบสมการเชิง

บทนิยาม 2.2 ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ ดีเทอร์มิแนนต์ของ A เขียนแทนด้วย $\det A$ หรือ $|A|$ กำหนดโดย

$$\det A = \sum_{\alpha} (\text{sgn } \alpha) a_{1\alpha(1)} a_{2\alpha(2)} \cdots a_{n\alpha(n)}$$

โดยที่ผลบวกคิดทุกวิธีเรียงสับเปลี่ยน α ของ x_n ซึ่งมีทั้งหมด $n!$ พจน์บวกกัน

ถ้า α เป็นคู่ $\text{sgn } \alpha$ ก็จะเป็นบวก และถ้า α เป็นคี่ $\text{sgn } \alpha$ ก็จะเป็นลบ

$$\text{ในกรณีที่ } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{เราจะเขียน } \det A = |A| \text{ ในรูป } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2.3 ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ (Eigenvalue)

บทนิยาม 2.3 ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ เรียกสเกลาร์ λ ที่ทำให้ $Av = \lambda v$ มีค่าตอบที่ไม่เป็นทริเวียลว่าเป็น ค่าเฉพาะ (Eigenvalue) ของ A เรียกเวกเตอร์ v ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ซึ่งสอดคล้องกับ λ ว่าเป็น เวกเตอร์เฉพาะ (Eigenvector) ของ A

ในการหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ขนาด $n \times n$ เราจะเขียน $Av = \lambda v$ ใหม่เป็น $(\lambda I - A)v = \underline{0}$ โดย λ จะเป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ถ้า สมการ $(\lambda I - A)v = \underline{0}$ มีค่าตอบที่ไม่เป็นศูนย์ เรียกสมการ $(\lambda I - A)v = \underline{0}$ นี้ว่า สมการลักษณะเฉพาะ (Characteristic equation) ของ A สำหรับสเกลาร์ที่สอดคล้องกับสมการนี้เป็นค่าเฉพาะของ A และเมื่อกระจาย $|\lambda I - A|$ ออกจะได้พหุนาม (Polynomial) ใน λ ซึ่งเรียกว่า พหุนามลักษณะเฉพาะ (Characteristic polynomial) ของ A จะได้ว่า

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

บทนิยาม 2.4 [6] กำหนดให้ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A แล้ว

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

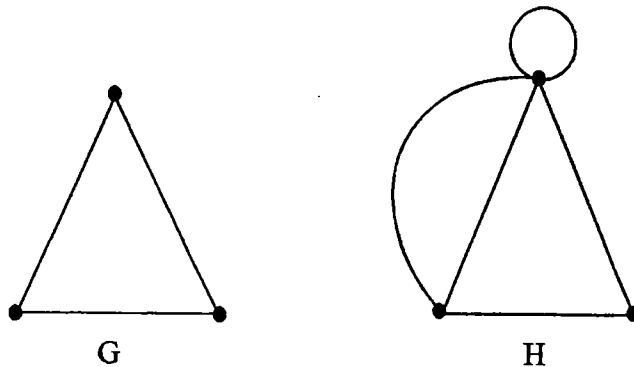
2.4 ทฤษฎีกราฟ

บทนิยาม 2.5 กราฟ G ประกอบด้วยคู่อันดับของเซต (V, E) โดย V คือเซตของจุด (Vertex) และ E คือเซตของเส้นเชื่อม (Edge) ระหว่างคู่ของจุดในกราฟ จำนวนสมาชิกใน V เรียกว่า อันดับ (Order) ของ G

บทนิยาม 2.6 วงวน (Loop) คือ เส้นที่มีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดเดียวกัน

บทนิยาม 2.7 เส้นเชื่อมขนาน (Multiple edges) คือ เส้นเชื่อมตั้งแต่สองเส้นขึ้นไปที่เชื่อมคู่ของจุดคู่เดียวกัน

บทนิยาม 2.8 กราฟเชิงเดียว (Simple graph) คือกราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมขนานและไม่มีวงวน
ตัวอย่าง เช่น



รูปที่ 2.1 G เป็นกราฟเชิงเดียว และ H เป็นกราฟที่มีวงวนและเส้นเชื่อมขนาน

หมายเหตุ ในรายงานนี้เราจะกล่าวถึงกราฟเชิงเดียวเท่านั้น

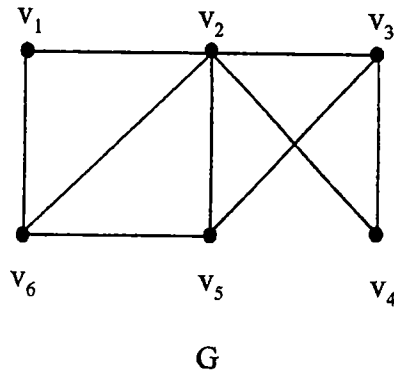
บทนิยาม 2.9 ให้ u และ v เป็นจุดในกราฟ G จะกล่าวว่า u ประชิด (Adjacent) กับ v เมื่อเส้นเชื่อมใน G เชื่อมระหว่างจุด u และ v และเขียนแทนเส้นเชื่อมดังกล่าวด้วย uv และจะเรียก u และ v ว่าจุดปลายของเส้นเชื่อม uv

บทนิยาม 2.10 เมทริกซ์ประชิด (Adjacency Matrices) การเขียนเมทริกซ์ประชิด พิจารณาจากความหมายของคำว่าประชิด คือ การระบุว่าจุดยอดใดกับจุดยอดใดประชิดกันบ้าง เขียนแทนด้วย $A(G)$ โดยนิยามค่าในเมทริกซ์ประชิดดังนี้

ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ซึ่งกำหนดให้ n คือจุดทั้งหมดในกราฟและสมาชิกในเมทริกซ์ A โดยที่

$$a_{ij} = \begin{cases} 1; & v_i v_j \in E(G) \\ 0; & v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

ตัวอย่างเช่น



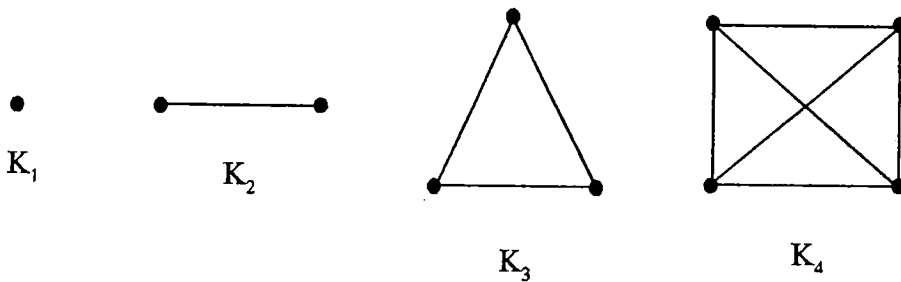
รูปที่ 2.2 กราฟ G

จากกราฟ G เขียนเป็นเมทริกซ์ประชิดได้เป็น

$$A(G) = \begin{matrix} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

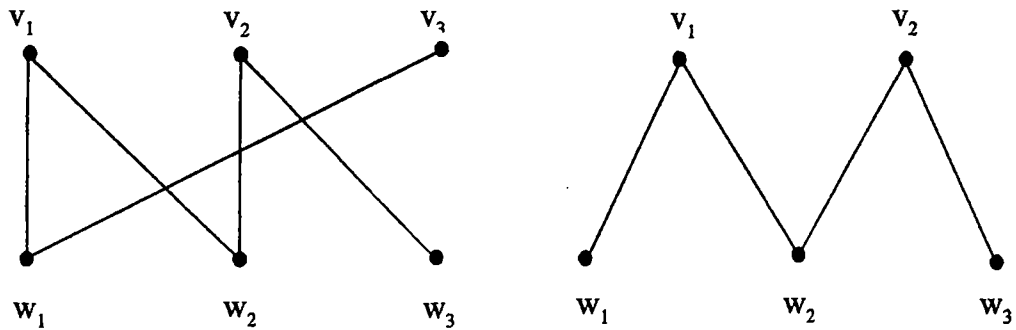
ต่อไปเราจะยกตัวอย่างกราฟต่าง ๆ ที่เป็นที่รู้จักทั่วไปบ้างแล้ว

บทนิยาม 2.11 กราฟบริบูรณ์ (Complete graph) คือ กราฟที่มีจุดยอด n จุด แทนด้วย K_n โดยที่ถ้า v_i และ v_j เป็นจุดยอดที่ต่างต่างกันใน K_n จะต้องมีด้านเชื่อมระหว่างจุดยอด v_i และ v_j เสมอ



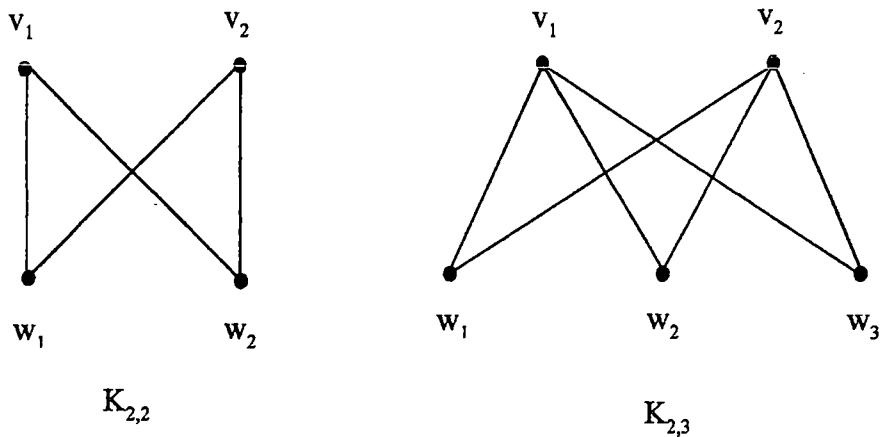
รูปที่ 2.3 กราฟบริบูรณ์

บทนิยาม 2.12 กราฟสองส่วน (Bipartite graph) คือ กราฟที่จุดยอดทั้งหมดสามารถแบ่งส่วนได้ 2 กลุ่มและไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดในกลุ่มเดียวกัน



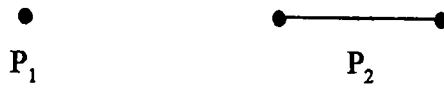
รูปที่ 2.4 กราฟสองส่วน

บทนิยาม 2.13 กราฟสองส่วนบริบูรณ์ (Complete bipartite graph) คือ กราฟสองส่วนที่มีจุดยอด $m+n$ จุด ซึ่งแบ่งเป็น 2 กลุ่ม ๆ ละ m จุด และ n จุด โดยมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดที่อยู่ต่างกลุ่มกันครบทุกคู่ เขียนแทนด้วย $K_{n,m}$



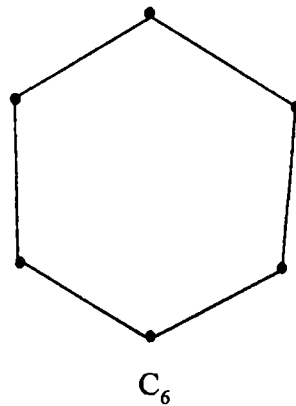
รูปที่ 2.5 กราฟสองส่วนบริบูรณ์

บทนิยาม 2.14 วิถี (Path) คือ วิถีที่มี $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ โดยที่ $n \geq 1$ ซึ่งสามารถลำดับจุดยอดเป็น v_1, v_2, \dots, v_n ซึ่งจุด v_i จะเชื่อมกับ v_j ก็ต่อเมื่อ $|i - j| = 1$ เขียนแทนวิถีที่มีจุดยอด n จุดด้วย P_n



รูปที่ 2.6 กราฟวิถี

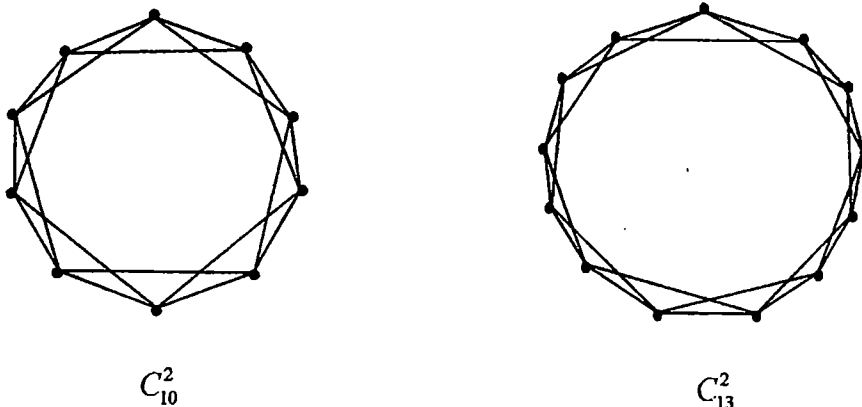
บทนิยาม 2.15 กราฟวัฏจักร (Cycle graph) คือ กราฟที่มีจุดยอดตั้งแต่ 3 จุดซึ่งสามารถวาดให้จุดยอดทั้งหมดเรียงอยู่บนวงกลม โดยที่จุดยอดสองจุดประชิดกัน ก็ต่อเมื่อ จุดยอดสองจุดนั้นอยู่ติดกันบนวงกลม เขียนแทนวัฏจักรที่มีจุดยอด n จุดด้วย C_n



รูปที่ 2.7 กราฟวัฏจักร

บทนิยาม 2.16 กราฟวัฏจักรกำลัง (Cycle power graph) คือ กราฟที่มีจำนวนจุด n จุดและระยะห่างระหว่าง 2 จุดใด ๆ มีระยะห่างอย่างน้อยหรือเท่ากับ d เขียนแทนด้วย C_n^d

บทนิยาม 2.17 กราฟวัฏจักรกำลังสอง (Square cycle graph) คือ กราฟที่มีจำนวนจุด n จุดและระยะห่างระหว่าง 2 จุดใด ๆ มีระยะห่างอย่างน้อยหรือเท่ากับ 2 เขียนแทนด้วย C_n^2 โดยที่ $n \geq 6$



รูปที่ 2.8 กราฟวัฏจักรกำลังสอง

จากรูปที่ 2.8 ซึ่งเป็นกราฟวัฏจักรกำลังสองที่มีจำนวนจุด 10 จุด และ 13 จุดตามลำดับ สามารถนำกราฟวัฏจักรกำลังสองทั้งสองรูปมาเขียนเป็นให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ประชิด ได้ดังนี้

$$A(C_{10}^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(C_{13}^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 2.18 เซอร์คูแลนต์เมทริกซ์ (Circulant matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกในแถวแนวทแยงมุมเป็นศูนย์และสมาชิกตำแหน่งอื่นในแถวแรกเป็น $a_i = a_{n-i+2}$ สำหรับ $i = 2, \dots, n$

บทนิยาม 2.19 เซอร์คูแลนต์กราฟ (Circulant graph) คือ กราฟที่สามารถเขียนเมทริกซ์ประชิดของกราฟนั้นให้อยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์เซอร์คูแลนต์

จากตัวอย่างด้านบน จะเป็นที่ได้ว่าเมทริกซ์ประชิดของ C_n^2 เป็นเซอร์คูแลนต์เมทริกซ์ทำให้กราฟนี้เป็นเซอร์คูแลนต์กราฟด้วย

นอกจากนี้ยังมีการรวบรวมการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของต่าง ๆ ดังนี้ [4]

$$\det(A(K_n)) = (-1)^{n-1}(n-1)$$

$$\det(A(P_n)) = \begin{cases} (-1)^k & ; n = 2k \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$\det(A(C_n)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0 \pmod{4} \\ -4 & ; n \equiv 2 \pmod{4} \\ 2 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$\det(A(W_n)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0 \pmod{4} \\ -n & ; n \equiv 1 \pmod{4} \\ 2n & ; n \equiv 2 \pmod{4} \\ -n & ; n \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

บทที่ 3

ผลงานวิจัย

จากการศึกษาทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ ทางผู้วิจัยได้แบ่งงานออกเป็น 2 ส่วน คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสอง และ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสองดำเนินการกับกราฟอื่น ๆ

3.1 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสอง

ในบทที่ 2 ได้กล่าวว่เมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสองเป็นเซอร์คูแลนเมทริกซ์ ดังนั้นเราจะหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสองโดยใช้สมบัติของการเป็นเซอร์คูแลนกราฟดังประพจน์ต่อไปนี้

ประพจน์ 3.1 [2] ถ้าสมาชิกแถวแรกของเซอร์คูแลนเมทริกซ์มีสมาชิกเป็น $[0, a_2, \dots, a_n]$ โดยที่ $a_i = a_{n-i+2}$ สำหรับ $i = 2, \dots, n$ ดังนั้น ค่าเฉพาะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $E(G; k)$ ซึ่ง

$$E(G; k) = \sum_{j=1}^n a_j z^{j-1}$$

โดยที่ $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, $k = 1, 2, \dots, n$

เนื่องจากกราฟวงกำลังสองเป็นเซอร์คูแลนกราฟดังนั้น

$$E(C_n^2; k) = \sum_{j=1}^n a_j z^{j-1} \quad (3.1)$$

โดยที่ $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, $k = 1, 2, \dots, n$ ดังนั้นเมื่อพิจารณาแถวแรกของเมทริกซ์ประชิดของเซอร์คูแลนกราฟ จะเห็นว่า $a_j = 1$ สำหรับ $j = 2, 3, n-1$ และ n ดังนั้น

$$E(C_n^2; k) = z + z^2 + z^{n-2} + z^{n-1} \quad (3.2)$$

จาก (3.2) จะได้ว่า

$$E(C_n^2; k) = e^{\frac{2k\pi i}{n}} + e^{\frac{4k\pi i}{n}} + e^{\frac{2k(n-2)\pi i}{n}} + e^{\frac{2k(n-1)\pi i}{n}}$$

$$= e^{\frac{2k\pi i}{n}} + e^{\frac{4k\pi i}{n}} + e^{\frac{2kn\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{-4k\pi i}{n}} + e^{\frac{2kn\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{-2k\pi i}{n}}$$

โดยที่สูตรของออยเลอร์ คือ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ และ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ กับ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ทำให้
ได้ว่า

$$\begin{aligned} E(C_n^2; k) &= \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) + \left(\cos \frac{4k\pi}{n} + i \sin \frac{4k\pi}{n} \right) \\ &\quad + \left(\cos \frac{-4k\pi}{n} + i \sin \frac{-4k\pi}{n} \right) + \left(\cos \frac{-2k\pi}{n} + i \sin \frac{-2k\pi}{n} \right) \\ &= \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) + \left(\cos \frac{4k\pi}{n} + i \sin \frac{4k\pi}{n} \right) \\ &\quad + \left(\cos \frac{4k\pi}{n} - i \sin \frac{4k\pi}{n} \right) + \left(\cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) \\ E(C_n^2; k) &= 2 \cos \frac{2k\pi}{n} + 2 \cos \frac{4k\pi}{n} \end{aligned}$$

จาก $\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\right)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} E(C_n^2; k) &= 2 \left[2 \cos\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{4k\pi + 2k\pi}{n} \right) + 2 \cos\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{4k\pi - 2k\pi}{n} \right) \right] \\ E(C_n^2; k) &= 4 \left(\cos \frac{3k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n} \right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

ต่อไป เราจะแสดงบทตั้งที่จะนำมาใช้ในการพิสูจน์การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของ
กราฟวงกำลังสอง

บทตั้ง 3.2 ให้ q เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\prod_{k=1}^{2q} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right) \prod_{k=2q+2}^{4q+1} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right) \prod_{k=4q+3}^{6q+2} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right) = 2^{-12q}$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^{2q} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right) \prod_{k=2q+2}^{4q+1} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right) \prod_{k=4q+3}^{6q+2} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{2q} \left(\frac{2 \sin \left(\frac{3k\pi}{6q+3} \right) \cos \left(\frac{3k\pi}{6q+3} \right) 2 \sin \left(\frac{k\pi}{6q+3} \right) \cos \left(\frac{k\pi}{6q+3} \right)}{2 \sin \left(\frac{3k\pi}{6q+3} \right) 2 \sin \left(\frac{k\pi}{6q+3} \right)} \right) \\ & \quad \prod_{k=2q+2}^{4q+1} \left(\frac{2 \sin \left(\frac{3k\pi}{6q+3} \right) \cos \left(\frac{3k\pi}{6q+3} \right) 2 \sin \left(\frac{k\pi}{6q+3} \right) \cos \left(\frac{k\pi}{6q+3} \right)}{2 \sin \left(\frac{3k\pi}{6q+3} \right) 2 \sin \left(\frac{k\pi}{6q+3} \right)} \right) \\ & \quad \prod_{k=4q+3}^{6q+2} \left(\frac{2 \sin \left(\frac{3k\pi}{6q+3} \right) \cos \left(\frac{3k\pi}{6q+3} \right) 2 \sin \left(\frac{k\pi}{6q+3} \right) \cos \left(\frac{k\pi}{6q+3} \right)}{2 \sin \left(\frac{3k\pi}{6q+3} \right) 2 \sin \left(\frac{k\pi}{6q+3} \right)} \right) \\ &= \prod_{k=1}^{2q} \left(\frac{\sin \left(\frac{6k\pi}{6q+3} \right) \sin \left(\frac{2k\pi}{6q+3} \right)}{2 \sin \left(\frac{3k\pi}{6q+3} \right) 2 \sin \left(\frac{k\pi}{6q+3} \right)} \right) \prod_{k=2q+2}^{4q+1} \left(\frac{\sin \left(\frac{6k\pi}{6q+3} \right) \sin \left(\frac{2k\pi}{6q+3} \right)}{2 \sin \left(\frac{3k\pi}{6q+3} \right) 2 \sin \left(\frac{k\pi}{6q+3} \right)} \right) \\ & \quad \prod_{k=4q+3}^{6q+2} \left(\frac{\sin \left(\frac{6k\pi}{6q+3} \right) \sin \left(\frac{2k\pi}{6q+3} \right)}{2 \sin \left(\frac{3k\pi}{6q+3} \right) 2 \sin \left(\frac{k\pi}{6q+3} \right)} \right) \\ &= \frac{1}{2^{12q}} \left(\frac{\left[\sin \left(\frac{6\pi}{6q+3} \right) \sin \left(\frac{12\pi}{6q+3} \right) \dots \sin \left(\frac{6(2q)\pi}{6q+3} \right) \right] \left[\sin \left(\frac{2\pi}{6q+3} \right) \sin \left(\frac{4\pi}{6q+3} \right) \dots \sin \left(\frac{2(2q)\pi}{6q+3} \right) \right]}{\left[\sin \left(\frac{3\pi}{6q+3} \right) \sin \left(\frac{6\pi}{6q+3} \right) \dots \sin \left(\frac{3(2q)\pi}{6q+3} \right) \right] \left[\sin \left(\frac{\pi}{6q+3} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{6q+3} \right) \dots \sin \left(\frac{(2q)\pi}{6q+3} \right) \right]} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\sin\left(\frac{6(2q+2)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{6(2q+3)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{6(4q+1)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{3(2q+2)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{3(2q+3)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{3(4q+1)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\sin\left(\frac{2(2q+2)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{2(2q+3)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{2(4q+1)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{(2q+2)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(2q+3)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(4q+1)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\sin\left(\frac{6(4q+3)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{6(4q+4)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{6(6q+2)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{3(4q+3)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{3(4q+4)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{3(6q+2)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\sin\left(\frac{2(4q+3)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{2(4q+4)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{2(6q+2)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{(4q+3)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(4q+4)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(6q+2)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& = \frac{1}{2^{12q}} \left(\frac{\sin\left(\frac{6(q+1)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{6(q+2)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{6(2q)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{9\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{3(2q-1)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\sin\left(\frac{(12q+12)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(12q+18)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(24q+6)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{(6q+6)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(6q+9)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(12q+3)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\sin\left(\frac{(24q+18)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(24q+24)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(36q+12)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{(12q+9)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(12q+12)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(18q+6)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\sin\left(\frac{(2q+2)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(2q+4)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{4q\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(2q-1)\pi}{6q+3}\right)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\sin\left(\frac{(4q+4)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(4q+6)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(8q+2)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{(2q+2)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(2q+3)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(4q+1)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\sin\left(\frac{(8q+6)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(8q+8)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(12q+4)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{(4q+3)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(4q+4)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(6q+2)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& = \frac{1}{2^{12q}} \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{9\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{3(2q-1)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\sin\left(\frac{(6q+6)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(6q+12)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(12q)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{(6q+6)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(6q+9)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(12q+3)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\sin\left(\frac{(12q+12)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(12q+18)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(24q+6)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{(12q+9)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(12q+12)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(18q+6)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \sin\left(\frac{((18q+9)+(6q+9))\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{((18q+9)+(6q+15))\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{((18q+9)+(18q+3))\pi}{6q+3}\right) \\
& \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(2q-1)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\sin\left(\frac{(2q+2)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(2q+4)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{4q\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{(2q+2)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(2q+3)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(4q+1)\pi}{6q+3}\right)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\sin\left(\frac{(4q+4)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(4q+6)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(8q+2)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{(4q+3)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(4q+4)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(6q+2)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\sin\left(\frac{((6q+3)+(2q+3))\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{((6q+3)+(2q+5))\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{((6q+3)+(6q+1))\pi}{6q+3}\right) \right) \\
& = \frac{1}{2^{12q}} \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{9\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{3(2q-1)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{(6q+9)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(6q+15)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(12q+3)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\sin\left(\frac{(18q+12)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(18q+18)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(24q+6)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{(12q+9)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(12q+15)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(18q+3)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\sin\left(3\pi + \frac{(6q+9)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(3\pi + \frac{(6q+15)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(3\pi + \frac{(12q+3)\pi}{6q+3}\right) \right) \\
& \left(\sin\left(3\pi + \frac{(12q+9)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(3\pi + \frac{(12q+15)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(3\pi + \frac{(18q+3)\pi}{6q+3}\right) \right) \\
& \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(2q-1)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{(2q+3)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(2q+5)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(4q+1)\pi}{6q+3}\right)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\sin\left(\frac{(6q+4)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(6q+6)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(8q+2)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{(4q+3)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(4q+5)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(6q+1)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\sin\left(\pi + \frac{(2q+3)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\pi + \frac{(2q+5)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\pi + \frac{(4q+1)\pi}{6q+3}\right) \right) \\
& \left(\sin\left(\pi + \frac{(4q+3)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\pi + \frac{(4q+5)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\pi + \frac{(6q+1)\pi}{6q+3}\right) \right) \\
& = \frac{1 \cdot (-1)^{4q}}{2^{12q}} \left(\frac{\sin\left(\frac{((18q+9)+3)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{((18q+9)+9)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{((18q+9)+(6q-3))\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{9\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{3(2q-1)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\sin\left(\frac{(6q+9)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(6q+15)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(12q+3)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{(6q+9)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(6q+15)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(12q+3)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\sin\left(\frac{(12q+9)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(12q+15)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(18q+3)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{(12q+9)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(12q+15)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(18q+3)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\sin\left(\frac{((6q+3)+1)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{((6q+3)+3)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{((6q+3)+(2q-1))\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(2q-1)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\left(\sin\left(\frac{(2q+3)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(2q+5)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(4q+1)\pi}{6q+3}\right) \right)}{\sin\left(\frac{(2q+3)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(2q+5)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(4q+1)\pi}{6q+3}\right)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\sin\left(\frac{(4q+3)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(4q+5)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(6q+1)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{(4q+3)\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{(4q+5)\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(6q+1)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
 &= \frac{1 \cdot (-1)^{4q}}{2^{12q}} \left(\frac{\sin\left(3\pi + \frac{3\pi}{6q+3}\right) \sin\left(3\pi + \frac{9\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(3\pi + \frac{3(2q-1)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{9\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{3(2q-1)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
 & \left(\frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\pi + \frac{(2q-1)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(2q-1)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
 &= \frac{1 \cdot (-1)^{6q}}{2^{12q}} \left(\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{9\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{3(2q-1)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{9\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{3(2q-1)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
 & \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(2q-1)\pi}{6q+3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6q+3}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6q+3}\right) \dots \sin\left(\frac{(2q-1)\pi}{6q+3}\right)} \right) \\
 &= 2^{-12q}
 \end{aligned}$$

□

บทตั้ง 3.3 ให้ q เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\begin{aligned}
 & \prod_{k=1}^{6q} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+1} \cos \frac{k\pi}{6q+1} \right) = 2^{-12q} \\
 \text{พิสูจน์} \quad & \prod_{k=1}^{6q} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+1} \cos \frac{k\pi}{6q+1} \right) = \prod_{k=1}^{6q} \left(\frac{2 \sin \left(\frac{3k\pi}{6q+1} \right) \cos \left(\frac{3k\pi}{6q+1} \right) 2 \sin \left(\frac{k\pi}{6q+1} \right) \cos \left(\frac{k\pi}{6q+1} \right)}{2 \sin \left(\frac{3k\pi}{6q+1} \right) 2 \sin \left(\frac{k\pi}{6q+1} \right)} \right) \\
 & = \prod_{k=1}^{6q} \left(\frac{\sin \left(\frac{6k\pi}{6q+1} \right) \sin \left(\frac{2k\pi}{6q+1} \right)}{2 \sin \left(\frac{3k\pi}{6q+1} \right) 2 \sin \left(\frac{k\pi}{6q+1} \right)} \right) \\
 & = \frac{1}{2^{12q}} \left(\frac{\sin \left(\frac{6\pi}{6q+1} \right) \sin \left(\frac{12\pi}{6q+1} \right) \dots \sin \left(\frac{6(6q)\pi}{6q+1} \right)}{\sin \left(\frac{3\pi}{6q+1} \right) \sin \left(\frac{6\pi}{6q+1} \right) \dots \sin \left(\frac{3(6q)\pi}{6q+1} \right)} \right) \\
 & \quad \left(\frac{\sin \left(\frac{2\pi}{6q+1} \right) \sin \left(\frac{4\pi}{6q+1} \right) \dots \sin \left(\frac{2(6q)\pi}{6q+1} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{6q+1} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{6q+1} \right) \dots \sin \left(\frac{(6q)\pi}{6q+1} \right)} \right) \\
 & = \frac{1}{2^{12q}} \left(\frac{\sin \left(\frac{6(3q+1)\pi}{6q+1} \right) \sin \left(\frac{6(3q+2)\pi}{6q+1} \right) \dots \sin \left(\frac{6(6q)\pi}{6q+1} \right)}{\sin \left(\frac{3\pi}{6q+1} \right) \sin \left(\frac{9\pi}{6q+1} \right) \dots \sin \left(\frac{3(6q-1)\pi}{6q+1} \right)} \right) \\
 & \quad \left(\frac{\sin \left(\frac{2(3q+1)\pi}{6q+1} \right) \sin \left(\frac{2(3q+2)\pi}{6q+1} \right) \dots \sin \left(\frac{2(6q)\pi}{6q+1} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{6q+1} \right) \sin \left(\frac{3\pi}{6q+1} \right) \dots \sin \left(\frac{(6q-1)\pi}{6q+1} \right)} \right) \\
 & = \frac{1}{2^{12q}} \left(\frac{\sin \left(\frac{(18q+6)\pi}{6q+1} \right) \sin \left(\frac{6(18q+12)\pi}{6q+1} \right) \dots \sin \left(\frac{(36q)\pi}{6q+1} \right)}{\sin \left(\frac{3\pi}{6q+1} \right) \sin \left(\frac{9\pi}{6q+1} \right) \dots \sin \left(\frac{3(6q-1)\pi}{6q+1} \right)} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\sin\left(\frac{(6q+2)\pi}{6q+1}\right) \sin\left(\frac{(6q+4)\pi}{6q+1}\right) \dots \sin\left(\frac{(12q)\pi}{6q+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6q+1}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6q+1}\right) \dots \sin\left(\frac{(6q-1)\pi}{6q+1}\right)} \right) \\
&= \frac{1}{2^{12q}} \left(\frac{\sin\left(\frac{((18q+3)+(3))\pi}{6q+1}\right) \sin\left(\frac{((18q+3)+(9))\pi}{6q+1}\right) \dots \sin\left(\frac{((18q+3)+(18q-3))\pi}{6q+1}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{6q+1}\right) \sin\left(\frac{9\pi}{6q+1}\right) \dots \sin\left(\frac{3(6q-1)\pi}{6q+1}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\sin\left(\frac{(6q+1)+(1)\pi}{6q+1}\right) \sin\left(\frac{(6q+1)+(3)\pi}{6q+1}\right) \dots \sin\left(\frac{(6q+1)+(6q-1)\pi}{6q+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6q+1}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6q+1}\right) \dots \sin\left(\frac{(6q-1)\pi}{6q+1}\right)} \right) \\
&= \frac{1}{2^{12q}} \left(\frac{\sin\left(3\pi + \frac{3\pi}{6q+1}\right) \sin\left(3\pi + \frac{9\pi}{6q+1}\right) \dots \sin\left(3\pi + \frac{3(6q-1)\pi}{6q+1}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{6q+1}\right) \sin\left(\frac{9\pi}{6q+1}\right) \dots \sin\left(\frac{3(6q-1)\pi}{6q+1}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6q+1}\right) \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{6q+1}\right) \dots \sin\left(\pi + \frac{(6q-1)\pi}{6q+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6q+1}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6q+1}\right) \dots \sin\left(\frac{(6q-1)\pi}{6q+1}\right)} \right) \\
&= \frac{1 \cdot (-1)^{6q}}{2^{12q}} \left(\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{6q+1}\right) \sin\left(\frac{9\pi}{6q+1}\right) \dots \sin\left(\frac{3(6q-1)\pi}{6q+1}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{6q+1}\right) \sin\left(\frac{9\pi}{6q+1}\right) \dots \sin\left(\frac{3(6q-1)\pi}{6q+1}\right)} \right) \\
& \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6q+1}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6q+1}\right) \dots \sin\left(\frac{(6q-1)\pi}{6q+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6q+1}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6q+1}\right) \dots \sin\left(\frac{(6q-1)\pi}{6q+1}\right)} \right)
\end{aligned}$$

$$= 2^{-12q}$$

□

บทตั้ง 3.4 ให้ q เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\prod_{k=1}^{6q+4} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+5} \cos \frac{k\pi}{6q+5} \right) = 2^{-2(6q+4)}$$

พิสูจน์ $\prod_{k=1}^{6q+4} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+5} \cos \frac{k\pi}{6q+5} \right)$

$$= \prod_{k=1}^{6q+4} \left(\frac{2 \sin \left(\frac{3k\pi}{6q+5} \right) \cos \left(\frac{3k\pi}{6q+5} \right) 2 \sin \left(\frac{k\pi}{6q+5} \right) \cos \left(\frac{k\pi}{6q+5} \right)}{2 \sin \left(\frac{3k\pi}{6q+5} \right) 2 \sin \left(\frac{k\pi}{6q+5} \right)} \right)$$

$$= \prod_{k=1}^{6q+4} \left(\frac{\sin \left(\frac{6k\pi}{6q+5} \right) \sin \left(\frac{2k\pi}{6q+5} \right)}{2 \sin \left(\frac{3k\pi}{6q+5} \right) 2 \sin \left(\frac{k\pi}{6q+5} \right)} \right)$$

$$= \frac{1}{2^{2(6q+4)}} \left(\frac{\sin \left(\frac{6\pi}{6q+5} \right) \sin \left(\frac{12\pi}{6q+5} \right) \dots \sin \left(\frac{6(6q+4)\pi}{6q+5} \right)}{\sin \left(\frac{3\pi}{6q+5} \right) \sin \left(\frac{6\pi}{6q+5} \right) \dots \sin \left(\frac{3(6q+4)\pi}{6q+5} \right)} \right)$$

$$\left(\frac{\sin \left(\frac{2\pi}{6q+5} \right) \sin \left(\frac{4\pi}{6q+5} \right) \dots \sin \left(\frac{2(6q+4)\pi}{6q+5} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{6q+5} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{6q+5} \right) \dots \sin \left(\frac{(6q+4)\pi}{6q+5} \right)} \right)$$

$$= \frac{1}{2^{2(6q+4)}} \left(\frac{\sin \left(\frac{6(3q+3)\pi}{6q+5} \right) \sin \left(\frac{6(3q+4)\pi}{6q+5} \right) \dots \sin \left(\frac{6(6q+4)\pi}{6q+5} \right)}{\sin \left(\frac{3\pi}{6q+5} \right) \sin \left(\frac{9\pi}{6q+5} \right) \dots \sin \left(\frac{3(6q+3)\pi}{6q+5} \right)} \right)$$

$$\left(\frac{\sin \frac{2(3q+3)\pi}{6q+5} \sin \frac{2(3q+4)\pi}{6q+5} \dots \sin \frac{2(6q+4)\pi}{6q+5}}{\sin \left(\frac{\pi}{6q+5} \right) \sin \left(\frac{3\pi}{6q+5} \right) \dots \sin \left(\frac{(6q+3)\pi}{6q+5} \right)} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{2(6q+4)}} \left(\frac{\sin\left(\frac{(18q+18)\pi}{6q+5}\right) \sin\left(\frac{(18q+24)\pi}{6q+5}\right) \dots \sin\left(\frac{(36q+24)\pi}{6q+5}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{6q+5}\right) \sin\left(\frac{9\pi}{6q+5}\right) \dots \sin\left(\frac{3(6q+3)\pi}{6q+5}\right)} \right) \\
&\quad \left(\frac{\sin\left(\frac{(6q+5+1)\pi}{6q+5}\right) \sin\left(\frac{(6q+5+3)\pi}{6q+5}\right) \dots \sin\left(\frac{(6q+5+6q+3)\pi}{6q+5}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6q+5}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6q+5}\right) \dots \sin\left(\frac{(6q+3)\pi}{6q+5}\right)} \right) \\
&= \frac{1}{2^{2(6q+4)}} \left(\frac{\sin\left(3\pi + \frac{3\pi}{6q+5}\right) \sin\left(3\pi + \frac{9\pi}{6q+5}\right) \dots \sin\left(3\pi + \frac{3(6q+3)\pi}{6q+5}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{6q+5}\right) \sin\left(\frac{9\pi}{6q+5}\right) \dots \sin\left(\frac{3(6q+3)\pi}{6q+5}\right)} \right) \\
&\quad \left(\frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6q+5}\right) \sin\left(\pi + \frac{3\pi}{6q+5}\right) \dots \sin\left(\pi + \frac{(6q+3)\pi}{6q+5}\right)}{\sin\frac{\pi}{6q+5} \sin\frac{3\pi}{6q+5} \dots \sin\frac{(6q+3)\pi}{6q+5}} \right) \\
&= \frac{1 \cdot (-1)^{6q+4}}{2^{2(6q+4)}} \left(\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{6q+5}\right) \sin\left(\frac{9\pi}{6q+5}\right) \dots \sin\left(\frac{3(6q+3)\pi}{6q+5}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{6q+5}\right) \sin\left(\frac{9\pi}{6q+5}\right) \dots \sin\left(\frac{3(6q+3)\pi}{6q+5}\right)} \right) \\
&\quad \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6q+5}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{6q+5}\right) \dots \sin\left(\frac{(6q+3)\pi}{6q+5}\right)}{\sin\frac{\pi}{6q+5} \sin\frac{3\pi}{6q+5} \dots \sin\frac{(6q+3)\pi}{6q+5}} \right)
\end{aligned}$$

$$= 2^{-2(6q+4)}$$

□

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ C_n^2 เป็นกราฟวงกำลังสองที่มีจำนวนจุดยอด n จุดและ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 6 แล้ว

$$\det(A(C_n^2)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0, 2, 4 \pmod{6} \\ 16 & ; n \equiv 3 \pmod{6} \\ 4 & ; n \equiv 1, 5 \pmod{6} \end{cases}$$

พิสูจน์ ให้ $E(C_n^2; k)$ เป็นค่าเฉพาะลำดับที่ k^{th} ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสอง C_n^2

จากสมการ (3.3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det(A(C_n^2)) &= \prod_{k=1}^n E(C_n^2; k) \\ &= \prod_{k=1}^n 4 \left(\cos \frac{3k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

เราแบ่งการพิจารณาเป็น 3 กรณี คือ

กรณีที่ 1 $n \equiv 0, 2, 4 \pmod{6}$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนคู่ และ $1 \leq k \leq n$ เราจะทำการพิจารณาในกรณีที่ $k = \frac{n}{2}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} E\left(C_n^2; \frac{n}{2}\right) &= 4 \left(\cos \frac{3\left(\frac{n}{2}\right)\pi}{n} \cos \frac{\left(\frac{n}{2}\right)\pi}{n} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

จากสมการ (3.5) เราได้ว่า

$$\begin{aligned} \det(A(C_n^2)) &= \prod_{k=1}^n E(C_n^2; k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 $n \equiv 3 \pmod{6}$ โดยที่ $n = 6q + 3, \exists q \in \mathbb{Z}^+$

จากสมการ (3.5) เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 \det(A(C_n^2)) &= \prod_{k=1}^n E(C_n^2, k) \\
 &= \prod_{k=1}^{6q+3} 4 \left(\cos \frac{3k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n} \right) \\
 &= \left(4 \cos \frac{3(2q+1)\pi}{6q+3} \cos \frac{(2q+1)\pi}{6q+3} \right) \left(4 \cos \frac{3(4q+2)\pi}{6q+3} \cos \frac{(4q+2)\pi}{6q+3} \right) \\
 &\quad \left(4 \cos \frac{3(6q+3)\pi}{6q+3} \cos \frac{(6q+3)\pi}{6q+3} \right) \cdot 2^{12q} \prod_{k=1}^{2q} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right) \\
 &\quad \prod_{k=2q+2}^{4q+1} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right) \prod_{k=4q+3}^{6q+2} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right) \\
 &= (-2) \cdot (-2) \cdot (4) \cdot 2^{12q} \prod_{k=1}^{2q} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right) \\
 &\quad \prod_{k=2q+2}^{4q+1} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right) \prod_{k=4q+3}^{6q+2} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right)
 \end{aligned}$$

โดยบทตั้ง 3.2 เราจะได้ว่า

$$= (-2) \cdot (-2) \cdot (4) \cdot 2^{12q} \cdot 2^{-12q}$$

$$= 16$$

ดังนั้น $\det(A(C_n^2)) = 16$ เมื่อ $n \equiv 3 \pmod{6}$

กรณีที่ 3 $n \equiv 1(\text{mod } 6)$ หรือ $n \equiv 5(\text{mod } 6)$ เราจะทำการพิจารณาเป็น 2 กรณี ได้แก่

กรณีที่ 3.1 $n \equiv 1(\text{mod } 6)$ และจากสมการ (3.5) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} \det(A(C_n^2)) &= \prod_{k=1}^n E(C_n^2; k) \\ &= \prod_{k=1}^{6q+1} 4 \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+1} \cos \frac{k\pi}{6q+1} \right) \\ &= \left(4 \cos \frac{3(6q+1)\pi}{6q+1} \cos \frac{(6q+1)\pi}{6q+1} \right) \cdot 2^{12q} \prod_{k=1}^{6q} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+1} \cos \frac{k\pi}{6q+1} \right) \end{aligned}$$

โดยบทตั้ง 3.3 ทำให้ได้

$$\det(A(C_n^2)) = 4$$

กรณีที่ 3.2 $n \equiv 5(\text{mod } 6)$ และจากสมการ (3.5) ทำให้ได้

$$\begin{aligned} \det(A(C_n^2)) &= \prod_{k=1}^n E(C_n^2; k) \\ &= \prod_{k=1}^{6q+5} 4 \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+5} \cos \frac{k\pi}{6q+5} \right) \\ &= \left(4 \cos \frac{3(6q+5)\pi}{6q+5} \cos \frac{(6q+5)\pi}{6q+5} \right) \cdot 2^{2(6q+4)} \prod_{k=1}^{6q+4} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+5} \cos \frac{k\pi}{6q+5} \right) \\ &= (4) \cdot 2^{2(6q+4)} \prod_{k=1}^{6q+4} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+5} \cos \frac{k\pi}{6q+5} \right) \end{aligned}$$

โดยบทตั้ง 3.4 จะได้ว่า

$$\det(A(C_n^2)) = (4) \cdot 2^{2(6q+4)} \cdot 2^{-2(6q+4)}$$

$$= 4$$

จากกรณีที่ 3.1 และ 3.2 ทำให้ได้ $\det(A(C_n^2)) = 4$ สำหรับ $n \equiv 1, 5 \pmod{6}$

จากกรณีที่ 1 2 และ 3 สรุปได้ว่า

$$\det(A(C_n^2)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0, 2, 4 \pmod{6} \\ 16 & ; n \equiv 3 \pmod{6} \\ 4 & ; n \equiv 1, 5 \pmod{6} \end{cases}$$

□

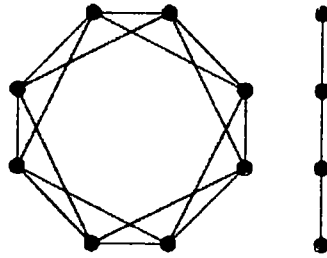
3.2 คือทฤษฎีบทของเมทริกซ์ประชิดของกราฟต่าง ๆ

ในส่วนนี้ เราจะกล่าวถึงการนำกราฟวงกำลังสองมาดำเนินการกับกราฟอื่น ๆ ทำให้เกิดกราฟใหม่นั้น คือ

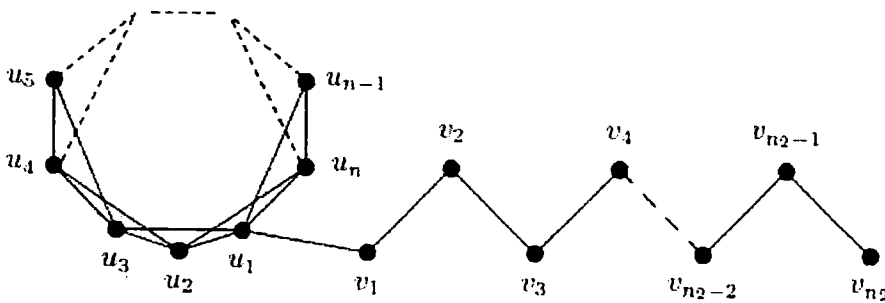
บทนิยาม 3.6 การดำเนินการบวกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $G_1 + G_2$ คือ ให้ $G_1 = (V_1, E_1)$ และ $G_2 = (V_2, E_2)$ ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$) ดังนั้นกราฟที่เกิดจากการดำเนินการบวก คือกราฟ $G = (V, E)$ โดยที่ $V = V_1 \cup V_2$ และ $E = E_1 \cup E_2$

บทนิยาม 3.7 [6] ให้ n_1 และ n_2 เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n_1 \geq 6$ กราฟ $C_{n_1}^2 \cup_{v_1} P_{n_2}$ เป็นกราฟที่เกิดจากกราฟ $C_{n_1}^2$ ประชิดกับจุด v_1 โดยที่ $v_1 \in V(P_{n_2})$

ตัวอย่างเช่น



รูปที่ 3.1 กราฟ $C_8^2 + P_4$



รูปที่ 3.2 กราฟ $C_{n_1}^2 \cup_{v_1} P_{n_2}$

ต่อไปจะเป็นทฤษฎีบทที่จำเป็นในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $G_1 \dot{+} G_2$ และกราฟ $C_n^2 \cup_n P_{n_2}$ มีดังนี้

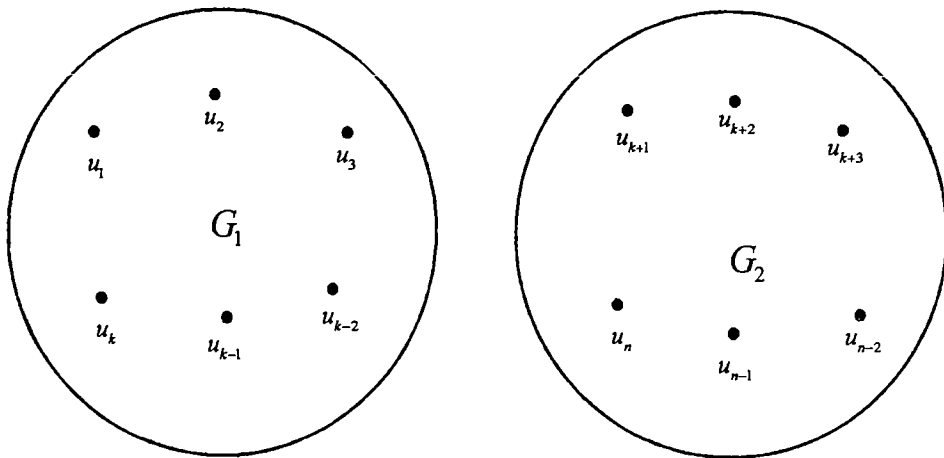
ทฤษฎีบท 3.8 [8] ให้ A, B, C และ D เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n, n \times m, m \times n$ และ $m \times m$ ตามลำดับแล้ว

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A) \det(D) \text{ โดยที่ } 0 \text{ เป็นเมทริกซ์ศูนย์}$$

ทฤษฎีบท 3.9 [13] ให้กราฟ G เป็นกราฟที่มีจำนวนจุดยอดมากกว่า 2 จุด และจุดยอด v_1, v_2 เป็นจุดยอดที่แตกต่างกันในกราฟ G โดยที่ $N(v_1) \subseteq N(v_2)$ และให้ G' เป็นกราฟที่ได้จากกราฟ G โดยการนำเส้นออกทุกเส้นของ v_2 โดยที่ $y \in N(v_1)$ ดังนั้น $\det(A(G)) = \det(A(G'))$

ทฤษฎีบท 3.10 ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟเชิงเดียวแล้ว $\det(A(G_1 \dot{+} G_2)) = \det(A(G_1)) \det(A(G_2))$

พิสูจน์ กำหนดให้กราฟ G_1 ประกอบด้วยจุดยอด u_1, u_2, \dots, u_k และให้กราฟ G_2 ประกอบด้วยจุดยอด $u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n$ และเมื่อนำกราฟทั้งสองมาดำเนินการการบวก จะเป็นดังรูปข้างล่าง



รูปที่ 3.3 กราฟ $G_1 \dot{+} G_2$

จะเห็นได้ว่าจุดยอดของกราฟ G_1 และกราฟ G_2 ไม่ประชิดกันเลยและเมื่อเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ประชิดจะได้

$$A(G_1 + G_2) = \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{10em}}^{k\text{-สมาชิก}} \hspace{1em} \overbrace{\hspace{10em}}^{n-k\text{-สมาชิก}} \\ \left[\begin{array}{cc|cccc} & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & 0 & & & & 0 \\ & & A(G_1) & & & 0 & & \ddots & & 0 \\ & & & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & \\ 0 & & & & 0 & & & & & \\ 0 & & \ddots & & 0 & & A(G_2) & & & \\ \vdots & & & & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & & \end{array} \right] \end{array}$$

สามารถเขียนใหม่ได้

$$A(G_1 + G_2) = \begin{bmatrix} A(G_1) & \underline{0} \\ \underline{0} & A(G_2) \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } \underline{0} \text{ เป็นเมทริกซ์ศูนย์}$$

จากทฤษฎีบท 3.8 ทำให้ได้ว่า

$$\det(A(G_1 + G_2)) = \det(A(G_1)) \det(A(G_2)) \quad \square$$

กำหนดให้ G_1 แทนด้วยกราฟ $C_{n_1}^2$ และกราฟ G_2 แทนด้วยกราฟ P_{n_2} จะได้

$$\det(A(C_{n_1}^2 + P_{n_2})) = \begin{cases} 0 & ; n_1 \text{ เป็นเลขคู่ หรือ } n_2 \text{ เป็นเลขคี่} \\ 16 & ; n_1 = 6q_1 + 3 \text{ และ } n_2 = 4q_2 \\ -16 & ; n_1 = 6q_1 + 3 \text{ และ } n_2 = 4q_2 - 2 \\ 4 & ; n_1 = 6q_1 + 1 \text{ หรือ } n_1 = 6q_1 + 5 \text{ และ } n_2 = 4q_2 \\ -4 & ; n_1 = 6q_1 + 1 \text{ หรือ } n_1 = 6q_1 + 5 \text{ และ } n_2 = 4q_2 - 2 \end{cases} \quad (3.6)$$

โดยที่ q_1 และ q_2 เป็นจำนวนเต็มบวก

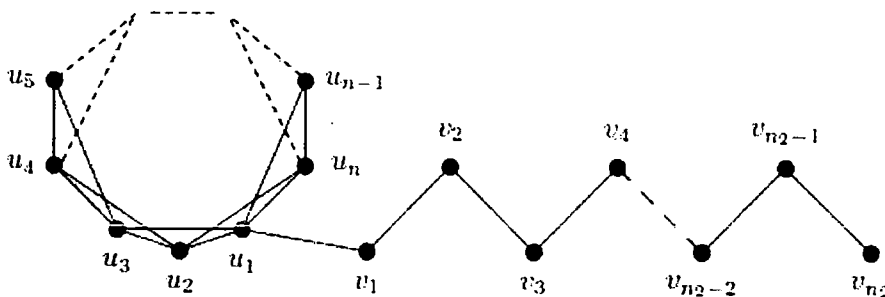
ถ้าดับถัดไป เราจะหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสอง $C_{n_1}^2$ ประชิดกับกราฟวิถี P_{n_2} ที่จุด v_1 โดยที่ $v_1 \in V(P_{n_2})$ นั่นก็คือ $\det(A(C_{n_1}^2 \cup_{v_1} P_{n_2}))$

บทแทรก 3.11 ให้ C_n^2 เป็นกราฟวงกำลังสองที่มีจุดยอด n_1 จุด และ P_{n_2} เป็นกราฟวิถีที่มีจุดยอด n_2 จุด โดยที่ n_2 เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ ถ้า $C_n^2 \cup_{v_1} P_{n_2}$ คือกราฟวงกำลังสอง C_n^2 ประชิดกับกราฟวิถี P_{n_2} ที่จุด v_1 ซึ่ง $v_1 \in V(P_{n_2})$ แล้ว

$$\det(A(C_n^2 \cup_{v_1} P_{n_2})) = \begin{cases} 0 & ; n_1 \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \\ 16 & ; n_1 = 6q_1 + 3 \text{ และ } n_2 = 4q_2 \\ -16 & ; n_1 = 6q_1 + 3 \text{ และ } n_2 = 4q_2 - 2 \\ 4 & ; n_1 = 6q_1 + 1 \text{ หรือ } n_1 = 6q_1 + 5 \text{ และ } n_2 = 4q_2 \\ -4 & ; n_1 = 6q_1 + 1 \text{ หรือ } n_1 = 6q_1 + 5 \text{ และ } n_2 = 4q_2 - 2 \end{cases} \quad (3.7)$$

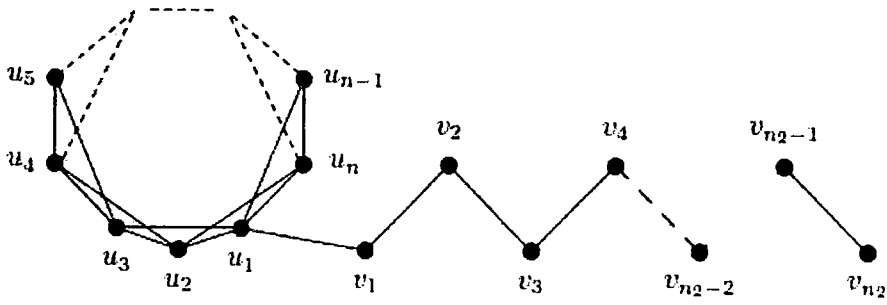
โดยที่ q_1 และ q_2 เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ กำหนดให้กราฟ C_n^2 ประกอบด้วยจุดยอด u_1, u_2, \dots, u_n และกราฟ P_{n_2} ประกอบด้วยจุดยอด v_1, v_2, \dots, v_{n_2} และเมื่อนำกราฟทั้งสองมาประชิดกันที่จุด v_1 โดยที่ $v_1 \in V(P_{n_2})$ เป็นดังรูปข้างล่าง

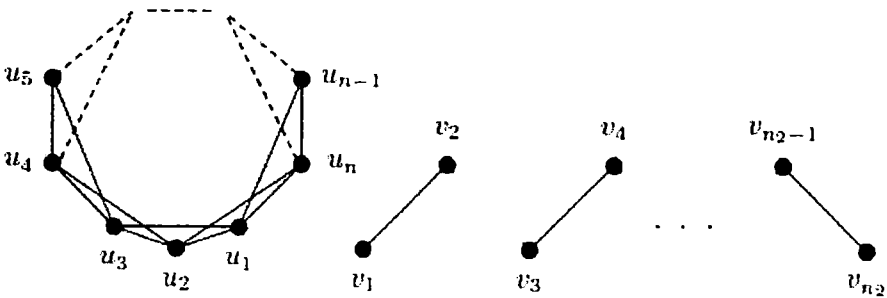


รูปที่ 3.4 กราฟวงกำลังสอง ประชิดกับกราฟวิถีที่จุด v_1 หรือกราฟ $C_n^2 \cup_{v_1} P_{n_2}$

พิจารณาจุดยอด v_{n_2} และจุดยอด v_{n_2-2} ของกราฟ $C_n^2 \cup_{v_1} P_{n_2}$ ซึ่งจะเห็นว่า $N(v_{n_2}) \subseteq N(v_{n_2-2})$ และเมื่อนำเส้น $v_{n_2} v_{n_2-2}$ ออก ทำให้ได้ดังรูปด้านล่าง



รูปที่ 3.5 รูปที่เกิดจากการตัดเส้นออกจากด้วยทฤษฎีบท 3.7



รูปที่ 3.6 กราฟ $C_{n_1}^2 + \underbrace{P_2 + P_2 + \dots + P_2}_{n/2}$

นั่นคือ กราฟ $C_{n_1}^2 \cup_{v_1} P_{n_2-2} + P_2$ ต่อไปจะพิจารณาจุด v_{n_2-2} และ v_{n_2-4} ซึ่ง $N(v_{n_2-2}) \subseteq N(v_{n_2-4})$ และนำเส้น $v_{n_2-2}v_{n_2-4}$ ออก จะได้กราฟ $C_{n_1}^2 \cup_{v_1} P_{n_2-4} + P_2 + P_2$ ทำต่อไปเรื่อย ๆ จะทำให้ได้กราฟ $C_{n_1}^2 + \underbrace{P_2 + P_2 + \dots + P_2}_{n/2}$ ดังรูปที่ 3.6 เมื่อใช้ทฤษฎีบท 3.9 และสมการ (3.6) จะได้ว่า

$$\det(A(C_{n_1}^2 \cup_{v_1} P_{n_2})) = \det(A(C_{n_1}^2 + \underbrace{P_2 + P_2 + \dots + P_2}_{n/2}))$$

นั่นคือ

$$\det(A(C_{n_1}^2 \cup_{v_1} P_{n_2})) = \begin{cases} 0 & ; n_1 \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \\ 16 & ; n_1 = 6q_1 + 3 \text{ และ } n_2 = 4q_2 \\ -16 & ; n_1 = 6q_1 + 3 \text{ และ } n_2 = 4q_2 - 2 \\ 4 & ; n_1 = 6q_1 + 1 \text{ หรือ } n_1 = 6q_1 + 5 \text{ และ } n_2 = 4q_2 \\ -4 & ; n_1 = 6q_1 + 1 \text{ หรือ } n_1 = 6q_1 + 5 \text{ และ } n_2 = 4q_2 - 2 \end{cases}$$

□

บทที่ 4

สรุปวิจารณ์และข้อเสนอแนะงานวิจัยในอนาคต

จากที่เราได้หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประจิดของกราฟวงกำลังสองทำให้ได้ทั้งบทตั้งและทฤษฎีบทออกมาเป็นดังนี้

(1) ให้ q เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\prod_{k=1}^{2q} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right) \prod_{k=2q+2}^{4q+1} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right) \prod_{k=4q+3}^{6q+2} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right) = 2^{-12q}$$

(2) ให้ q เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\prod_{k=1}^{6q} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+1} \cos \frac{k\pi}{6q+1} \right) = 2^{-12q}$$

(3) ให้ q เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\prod_{k=1}^{6q+4} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+5} \cos \frac{k\pi}{6q+5} \right) = 2^{-2(6q+4)}$$

(4) ให้ C_n^2 เป็นกราฟวงกำลังสองที่จำนวนจุด n จุดและ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 6 ดังนั้น

$$\det(A(C_n^2)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0, 2, 4 \pmod{6} \\ 16 & ; n \equiv 3 \pmod{6} \\ 4 & ; n \equiv 1, 5 \pmod{6} \end{cases}$$

(5) ให้ C_n^2 เป็นกราฟวงกำลังสองที่มีจุดยอด n_1 จุด และ P_{n_2} เป็นกราฟวิถีที่มีจุดยอด n_2 จุด โดยที่ n_2 เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ ถ้า $C_n^2 \cup_{v_1} P_{n_2}$ คือกราฟวงกำลังสอง C_n^2 ประชิดกับกราฟวิถี P_{n_2} ที่จุด v_1 ซึ่ง $v_1 \in V(P_{n_2})$ แล้ว

$$\det(A(C_n^2 \cup_{v_1} P_{n_2})) = \begin{cases} 0 & ; n_1 \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \\ 16 & ; n_1 = 6q_1 + 3 \text{ และ } n_2 = 4q_2 \\ -16 & ; n_1 = 6q_1 + 3 \text{ และ } n_2 = 4q_2 - 2 \\ 4 & ; n_1 = 6q_1 + 1 \text{ หรือ } n_1 = 6q_1 + 5 \text{ และ } n_2 = 4q_2 \\ -4 & ; n_1 = 6q_1 + 1 \text{ หรือ } n_1 = 6q_1 + 5 \text{ และ } n_2 = 4q_2 - 2 \end{cases}$$

โดยที่ q_1 และ q_2 เป็นจำนวนเต็มบวก

ในอนาคต เราสามารถนำกราฟวงกำลังสองดำเนินการกับกราฟอื่น ๆ ทำให้เกิดกราฟใหม่ ๆ ขึ้นมาแล้วสามารถหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟนั้น ๆ ได้

โครงการวิจัยนี้ได้นำเสนอในงานประชุมวิชาการระดับชาติ คือ

การประชุมภาคใหญ่วิชาการ ครั้งที่ 3 Hatyai symposium 2012, Hatyai University, Thailand

โดยนำเสนอเรื่อง “ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟบางกราฟ”

และงานวิจัยที่อยู่ในระหว่างการส่งตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติ คือ

N. Adsawatithisakul and D. Samana, “Determinant of Adjacency Matrix of Square Cycle

Graph.” IAENG International Journal of Applied Mathematics. (To appear)

บรรณานุกรม

- [1] A.Abdollahi. "Determinant of adjacency matrices of graph." <http://arxiv.org/abs/0908.3324>, Cornell University.
- [2] N.Biggs. **Algebraic Graph Theory**. Cambridge University Press, Cambridge, 1974.
- [3] C.N. Campos and C.P.de Mello. "A result on the total colouring of powers of cycles." **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, 2004, 18, 47-52.
- [4] D.M. Cvetkovic, M.Doob, and H. Sachs. **Spectra of Graphs: Theory and Application**. Academic Press, New York, 1980.
- [5] M.Doob. "Circulant graphs with $\det(-A(G)) = -\deg(G)$:codeterminants with K_n ." **Linear Algebra Appl.**, 2002, 340, 87-96.
- [6] L. Goldberg. **Matrix Theory with Applications**. McGraw – Hill International Editions, Mathematics and Statistics Series, 1991.
- [7] B. Gyurov and J. Cloud. **On the algebraic properties of Pin-Wheel graphs and Applications.**, 73rd annual meeting of the Oklahoma Arkansas section, 2011 University of central Oklahoma.
- [8] I.N.Herstein and J.D.Winter. **Matrix Theory and Linear Algebra**. Macmillan Publishing Company, a division of Macmillan, 1988.
- [9] Y. Hoa, C. Woo and P. Chen. "On the sandpile group of the square cycle C_n^2 .", **Linear Algebra Appl.**, 2006, 418, 457-467.
- [10] S. Hu. "The Classification and maximum determinants of the adjacency matrices of graphs with one cycle." **J. Math. Study**, 2003, 36, no.1, 102-104.
- [11] M. Krivelevich and A. Nachmias. "Colouring powers of cycles from random lists." **European Journal of Combinatorics**, 2004, 25, 961-968.

- [12] D.Li and M.Liu. "Hadwiger's conjecture for powers of cycles and their complements." **European Journal of Combinatorics**, 2007, 28, 1152-1155.
- [13] H.M.Rara. "Reduction procedures for calculating the determinant of the adjacency matrix of some graphs and the singularity of square planar grids." **Discrete Mathematics** 151, 1996, 213-219.
- [14] D.B.West. **Introduction to Graph Theory**. Prentice – Hall, Inc, 1996.
- [15] G.Williams. **Linear Algebra with Application**. Jones and Bartlett Publishers, LLC, 2011.

21. ประวัติผู้วิจัย

๑. ชื่อ - นามสกุล (ภาษาไทย) นายเดชา สมณะ
ชื่อ - นามสกุล (ภาษาอังกฤษ) Mr. Decha Samana
๒. เลขหมายบัตรประจำตัวประชาชน 3-5014-00695-37-6
๓. หน่วยงานและสถานที่ติดต่อได้สะดวก พร้อมหมายเลขโทรศัพท์ โทรสาร และไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์ (e-mail)
ตึกจุฬารัตน์ 1 ห้อง 227
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
dechsamana@hotmail.com and ksdecha@kmitl.ac.th

๔. ประวัติการศึกษา

Bachelor of Science (B.S.) (Mathematics), Naresuan University, Phisanulok, Thailand.

Master of Science (M.S.) (Applied Mathematics), Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand

Doctor of Philosophy (Ph.D.) (Mathematics), Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand

๕. ประสบการณ์งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และ/หรือที่ผ่านมา ทั้งภายในและภายนอกประเทศ โดยระบุสถานภาพ
ในการทำวิจัยว่าเป็นผู้อำนวยการแผนงานวิจัย หัวหน้าโครงการวิจัย หรือผู้ร่วมวิจัยในแต่ละข้อเสนอการวิจัย

1. D. Samana and V. Longani, Finding Lower Bounds of Some Bipartite Ramsey Numbers Using Probabilistic Method, Proceeding of the 29th Congress on Science and Technology of Thailand 2003, Khon Kean University.

2. M. Podisuk, W. Rattanametawee and D. Samana, Applications of Orthogonal Polynomials, Proceedings of the 7th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Cancun, Mexico, 2005.

3. P. Pongsumpun and D. Samana, Mathematical model for asymptomatic and symptomatic infections of dengue disease, WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine, p. 264-269, Issue 3, Volume 3, March 2006.

4. D. Samana and V. Longani, Upper Bounds for Ramsey Numbers $R(4,t)$, Advances and Applications in Discrete Mathematics, Volume 3, Issue 2, April(2009), p.151-154.

5. D. Samana and V. Longani, Lower Bounds of Ramsey Numbers $R(k,l)$, IAENG International Journal of Applied Mathematics, Volume 39, Issue 4, November(2009), <http://www.iaeng.org/IJAM>.

6. D. Samana and V. Longani, A Lower Bound of Some Classical Ramsey Numbers $R(3,t)$, The 8th International Conference on Optimaization: Techniques and Applications (ICOTA8), Fudan University, Shanghai, China, 2010.

7. D. Samana and N. Adsawatithisakul, Lower Bounds of Multicolor Bipartite Ramsey Numbers of $K_{p,p}$, Proceeding of The 16th Annual Meeting in Mathematics, Khon Kean University, Thailand , 2011.

8. Ch. Thaiprayoon, D. Samana and J. Tariboon, Three-point boundary value problems for second-order impulsive integro-differential equations, *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. 5, 2011, no. 37-40, 1961-1972.
9. Ch. Thaiprayoon, D. Samana and J. Tariboon, Multi-point boundary value problem for first order impulsive integro-differential equations with multi-point jump conditions, *Boundary Value Problems*, Volume 2012, April (2012).
10. D. Samana and V. Longani, Upper Bounds of Ramsey Numbers, *Applied Mathematical Sciences*, Vol.6, 2012, no.98, 4857-4861.
11. D. Samana, Lower Bounds of Multicolor Bipartite Ramsey Numbers $br(K_{p,q}; m)$, *Applied Mathematical Science*, Vol.6, 2012, no.98, 4863-4867.
12. D. Samana and V. Longani, Lower Bounds of Some Small Ramsey Numbers, *Proceeding of the 33rd International Conference on Mathematical, Computational and Statistical Science, and Engineering*, World Academy of Science, Engineering and Technology, Issue 69, Singapore 2012.

การเผยแพร่งานวิจัย

Determinant of Adjacency Matrix of Square Cycle Graph

Nitiphoom Adsawatithisakul and Decha Samana

Abstract—Square Cycle, C_n^2 is a graph that has n vertices and two vertices u and v are adjacent if and only if distance between u and v not greater than 2. In this paper, we show that the determinant of adjacency matrix of square cycle C_n^2 are as follows

$$\det(A(C_n^2)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0, 2, 4 \pmod{6} \\ 16 & ; n \equiv 3 \pmod{6} \\ 4 & ; n \equiv 1, 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

Index Terms—Determinant, Square cycle graph, Adjacency matrix.

I. INTRODUCTION

Let G be a simple graph with n vertices. We denote $\det(A(G))$ is the determinant of adjacency matrix of G and $E(G; k)$ is k^{th} eigenvalues of the adjacency matrix which $\det(A(G))$ and $E(G; k)$ are independent of the choice of vertices in adjacency matrix and are an invariant of G .

In [2] and [4], they determined the determinant of adjacency matrix of some graphs, such as K_n, C_n, P_n and W_n . B. Gyurov and J. Cloud [7] has determined determinant of Pin-wheel graph. Moreover, there are studies of graph which satisfy some properties of determinant for example, M. Doob [5] construct circulant graph with $\det(A(G)) = -\deg(G)$, S. Hu [9] and A. Abdollahi [1] have found that the determinant of graphs with exactly one cycle and exactly two cycles, respectively.

Cycle power, C_n^d is a graph that has n vertices and distance each pair of vertex is less or equal d . For example,

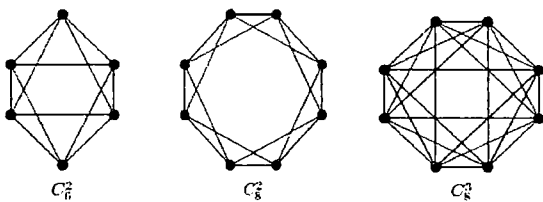


Figure 1. d -th power of cycle graph

If $d = 2, n \geq 6$, it is called square cycle graph.

Furthermore, there are studies of cycle power such as, C.N.Campos and C.P.de Mello [3], M.Krivelevich and A.Nachmias [10] studied about the colouring in cycle power, Y.Hoa, C.Woo and P.Chen [8] investigate the sandpile group

in cycle power, D.Li and M.Liu [11] consider cycle power and their complements which satisfy Hadwiger's conjecture.

From figure 1 graph C_6^2 and graph C_8^2 , we write to adjacency matrix

$$A(C_6^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(C_8^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

We see adjacency matrix of C_6^2 and C_8^2 is a circulant matrix because a main diagonal of matrix is equal to zero and entries in first row satisfy $a_{1j} = a_{1,(n-j+2)}$ for $j = 2, \dots, n$ and $a_{ij} = a_{i+1,j+1}$, then a square cycle graph is a circulant graph. It is interesting to study determinant of adjacency matrix of square cycle graph.

Proposition 1. [2] Suppose that $[0, a_2, \dots, a_n]$ is the first row of the adjacency matrix of a circulant graph G . Then the eigenvalues of graph G is denoted $E(G; k)$,

$$E(G; k) = \sum_{j=1}^n a_j z^{j-1}$$

where $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, k = 1, 2, \dots, n$

square cycle graph is a circulant graph then eigenvalues of square cycle graph is

$$E(C_n^2; k) = \sum_{j=1}^n a_j z^{j-1} \quad (1)$$

where $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, k = 1, 2, 3, \dots$ Thus

$$E(C_n^2; k) = z + z^2 + z^{n-2} + z^{n-1}. \quad (2)$$

Theorem 2. [6] Let $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ be a eigenvalues of a square matrix A . Then

$$\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$$

Next, we present lemma that will be used in the proof of determinant of adjacency matrix of square cycle graph.

N. Adsawatithisakul is with the Department of Mathematics, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand 10520 Email: na.adsawatithisakul@gmail.com.

D. Samana is with the Department of Mathematics, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand 10520 Email: dechasamana@hotmail.com.

II. MAIN RESULTS

Lemma 3. Let q be a positive number. Then

$$\prod_{k=1}^{2q} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right) \prod_{k=2q+2}^{4q+1} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right) \prod_{k=4q+3}^{6q+2} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3} \right) = 2^{-12q}. \quad (3)$$

Proof: The left hand side of (3) is

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^{2q} \frac{\sin \frac{6k\pi}{6q+3} \sin \frac{2k\pi}{6q+3}}{2 \sin \frac{3k\pi}{6q+3} 2 \sin \frac{k\pi}{6q+3}} \prod_{k=2q+2}^{4q+1} \frac{\sin \frac{6k\pi}{6q+3} \sin \frac{2k\pi}{6q+3}}{2 \sin \frac{3k\pi}{6q+3} 2 \sin \frac{k\pi}{6q+3}} \\ & \prod_{k=4q+3}^{6q+2} \frac{\sin \frac{6k\pi}{6q+3} \sin \frac{2k\pi}{6q+3}}{2 \sin \frac{3k\pi}{6q+3} 2 \sin \frac{k\pi}{6q+3}} \\ &= \frac{1}{2^{12q}} \left(\prod_{k=q+1}^{2q} \frac{\sin \frac{6k\pi}{6q+3} \sin \frac{2k\pi}{6q+3}}{\sin \frac{(6k-3)\pi}{6q+3} \sin \frac{(2k-1)\pi}{6q+3}} \right) \\ & \left(\prod_{k=2q+2}^{4q+1} \frac{\sin \frac{6k\pi}{6q+3} \sin \frac{2k\pi}{6q+3}}{\sin \frac{3k\pi}{6q+3} \sin \frac{k\pi}{6q+3}} \right) \\ & \left(\prod_{k=4q+3}^{6q+2} \frac{\sin \frac{6k\pi}{6q+3} \sin \frac{2k\pi}{6q+3}}{\sin \frac{3k\pi}{6q+3} \sin \frac{k\pi}{6q+3}} \right) \\ &= \frac{1}{2^{12q}} \left(\prod_{k=1}^q \frac{\sin \frac{(6k-3)\pi}{6q+3} \sin \frac{(2k-1)\pi}{6q+3}}{\sin \frac{(6k-3)\pi}{6q+3} \sin \frac{(2k-1)\pi}{6q+3}} \right) \\ & \left(\prod_{k=2q+2}^{3q+1} \frac{\sin \frac{(6k-(6q+3))\pi}{6q+3} \sin \frac{(2k-(2q+1))\pi}{6q+3}}{\sin \frac{(6k-(6q+3))\pi}{6q+3} \sin \frac{(2k-(2q+1))\pi}{6q+3}} \right) \\ & \left(\prod_{k=4q+3}^{5q+2} \frac{\sin \frac{(6k-(12q+9))\pi}{6q+3} \sin \frac{(2k-(4q+3))\pi}{6q+3}}{\sin \frac{(6k-(12q+9))\pi}{6q+3} \sin \frac{(2k-(4q+3))\pi}{6q+3}} \right) \\ &= 2^{-12q}. \end{aligned}$$

Lemma 4. Let q be a positive integer. Then

$$\prod_{k=1}^{6q} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+1} \cos \frac{k\pi}{6q+1} \right) = 2^{-12q}.$$

Proof: It can be proved by

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^{6q} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+1} \cos \frac{k\pi}{6q+1} \right) = \prod_{k=1}^{6q} \frac{\sin \frac{6k\pi}{6q+1} \sin \frac{2k\pi}{6q+1}}{2 \sin \frac{3k\pi}{6q+1} 2 \sin \frac{k\pi}{6q+1}} \\ &= \frac{1}{2^{12q}} \left(\prod_{k=3q+1}^{6q} \frac{\sin \frac{6k\pi}{6q+1} \sin \frac{2k\pi}{6q+1}}{\sin \frac{(6k-3)\pi}{6q+1} \sin \frac{(2k-1)\pi}{6q+1}} \right) \\ &= \frac{1}{2^{12q}} \left(\prod_{k=1}^{3q} \frac{\sin \frac{(6k-3)\pi}{6q+1} \sin \frac{(2k-1)\pi}{6q+1}}{\sin \frac{(6k-3)\pi}{6q+1} \sin \frac{(2k-1)\pi}{6q+1}} \right) \\ &= 2^{-12q}. \end{aligned}$$

Lemma 5. Let q be a positive integer. Then

$$\prod_{k=1}^{6q+4} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+5} \cos \frac{k\pi}{6q+5} \right) = 2^{-2(6q+4)}.$$

Proof: It can be proved by

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^{6q+4} \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+5} \cos \frac{k\pi}{6q+5} \right) = \prod_{k=1}^{6q+4} \frac{\sin \frac{6k\pi}{6q+5} \sin \frac{2k\pi}{6q+5}}{2 \sin \frac{3k\pi}{6q+5} 2 \sin \frac{k\pi}{6q+5}} \\ &= \frac{1}{2^{2(6q+4)}} \left(\prod_{k=3q+3}^{6q+4} \frac{\sin \frac{6k\pi}{6q+5} \sin \frac{2k\pi}{6q+5}}{\sin \frac{(6k-3)\pi}{6q+5} \sin \frac{(2k-1)\pi}{6q+5}} \right) \\ &= \frac{1}{2^{2(6q+4)}} \left(\prod_{k=1}^{3q+2} \frac{\sin \frac{(6k-3)\pi}{6q+5} \sin \frac{(2k-1)\pi}{6q+5}}{\sin \frac{(6k-3)\pi}{6q+5} \sin \frac{(2k-1)\pi}{6q+5}} \right) \\ &= 2^{-2(6q+4)}. \end{aligned}$$

Theorem 6. Let C_n^2 be a square cycle graph with n vertices and n be a positive integer where $n \geq 6$. Then

$$\det(A(C_n^2)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0, 2, 4 \pmod{6} \\ 16 & ; n \equiv 3 \pmod{6} \\ 4 & ; n \equiv 1, 5 \pmod{6} \end{cases}$$

Proof: Let $E(C_n^2; k)$ be a k^{th} eigenvalue of adjacency matrix of square cycle graph C_n^2 . From (2) We get

$$\begin{aligned} E(C_n^2; k) &= e^{\frac{2k\pi i}{n}} + e^{\frac{4k\pi i}{n}} + e^{\frac{2k(n-2)\pi i}{n}} + e^{\frac{2k(n-1)\pi i}{n}} \\ &= e^{\frac{2k\pi i}{n}} + e^{\frac{4k\pi i}{n}} + e^{\frac{2k\pi i}{n}} \cdot e^{-\frac{4k\pi i}{n}} + e^{\frac{2k\pi i}{n}} \cdot e^{-\frac{2k\pi i}{n}} \end{aligned}$$

By Euler's formula, we obtain

$$\begin{aligned} E(C_n^2; k) &= \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) + \left(\cos \frac{4k\pi}{n} + i \sin \frac{4k\pi}{n} \right) + \\ & \left(\cos \frac{-4k\pi}{n} + i \sin \frac{-4k\pi}{n} \right) + \left(\cos \frac{-2k\pi}{n} + i \sin \frac{-2k\pi}{n} \right) \\ &= 2 \cos \frac{2k\pi}{n} + 2 \cos \frac{4k\pi}{n} \end{aligned}$$

We can rewrite

$$E(C_n^2; k) = 4 \left(\cos \frac{3k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n} \right) \quad (4)$$

From (4) We have

$$\begin{aligned} \det(A(C_n^2)) &= \prod_{k=1}^n E(C_n^2; k) \\ &= \prod_{k=1}^n 4 \left(\cos \frac{3k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Consider n as follows

Case I, $n \equiv 0, 2, 4 \pmod{6}$

Since n is even and $1 \leq k \leq n$, consider (4) when $k = \frac{n}{2}$. Then

$$\begin{aligned} E(C_n^2; \frac{n}{2}) &= 4 \left(\cos \frac{3\frac{n}{2}\pi}{n} \cos \frac{\frac{n}{2}\pi}{n} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

From (5), we obtain

$$\begin{aligned} \det(A(C_n^2)) &= \prod_{k=1}^n E(C_n^2; k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Therefore, $\det(A(C_n^2)) = 0$ when $n \equiv 0, 2, 4 \pmod{6}$.

Case II, $n \equiv 3 \pmod{6}$ Then $n = 6q + 3, \exists q \in \mathbb{Z}^+$.

From (5), we obtain

$$\begin{aligned}
\det(A(C_n^2)) &= \prod_{k=1}^n E(C_n^2; k) \\
&= \prod_{k=1}^{6q+3} 4\left(\cos \frac{3k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n}\right) \\
&= 4\left(\cos \frac{3k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n}\right) 4\left(\cos \frac{3k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n}\right) \\
&\quad 4\left(\cos \frac{3k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n}\right) 2^{12q} \\
&\quad \prod_{k=1}^{2q} 4\left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3}\right) \\
&\quad \prod_{k=2q+2}^{4q+1} 4\left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3}\right) \\
&\quad \prod_{k=4q+3}^{6q+2} 4\left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3}\right) \\
&= (-2)(-2)(4)2^{12q} \prod_{k=1}^{2q} 4\left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3}\right) \\
&\quad \prod_{k=2q+2}^{4q+1} 4\left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3}\right) \\
&\quad \prod_{k=4q+3}^{6q+2} 4\left(\cos \frac{3k\pi}{6q+3} \cos \frac{k\pi}{6q+3}\right).
\end{aligned}$$

Using Lemma 3, we have

$$\begin{aligned}
\det(A(C_n^2)) &= (-2)(-2)(4)(2^{12q})(2^{-12q}) \\
&= 16.
\end{aligned}$$

Therefore $\det(A(C_n^2)) = 16$ when $n \equiv 3 \pmod{6}$.

Case III, $n \equiv 1 \pmod{6}$ and $n \equiv 5 \pmod{6}$. We consider 2 subcases.

Subcase 3.1, $n \equiv 1 \pmod{6}$, by (5), we obtain

$$\begin{aligned}
\det(A(C_n^2)) &= \prod_{k=1}^n E(C_n^2; k) \\
&= \prod_{k=1}^{6q+1} 2^2 \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+1} \cos \frac{k\pi}{6q+1}\right) \\
&= 4\left(\cos \frac{3(6q+1)\pi}{6q+1} \cos \frac{(6q+1)\pi}{6q+1}\right) 2^{12q} \\
&\quad \left(\prod_{k=1}^{6q} 4\left(\cos \frac{3k\pi}{6q+1} \cos \frac{k\pi}{6q+1}\right)\right).
\end{aligned}$$

Using Lemma 4, we have

$$\begin{aligned}
\det(A(C_n^2)) &= 4(2^{12q})(2^{-12q}) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Subcase 3.2, $n \equiv 5 \pmod{6}$, by (5), we obtain

$$\begin{aligned}
\det(A(C_n^2)) &= \prod_{k=1}^n E(C_n^2; k) \\
&= \prod_{k=1}^{6q+5} 2^2 \left(\cos \frac{3k\pi}{6q+5} \cos \frac{k\pi}{6q+5}\right) \\
&= 4\left(\cos \frac{3(6q+5)\pi}{6q+5} \cos \frac{(6q+5)\pi}{6q+5}\right) 2^{2(6q+4)} \\
&\quad \left(\prod_{k=1}^{6q+4} 4\left(\cos \frac{3k\pi}{6q+5} \cos \frac{k\pi}{6q+5}\right)\right).
\end{aligned}$$

Using Lemma 5, we have

$$\begin{aligned}
\det(A(C_n^2)) &= 4(2^{2(6q+4)})(2^{-2(6q+4)}) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

From subcase 3.1 and 3.2, we obtain

$$\det(A(C_n^2)) = 4 \text{ for } n \equiv 1, 5 \pmod{6}.$$

From case I, II and III,

$$\det(A(C_n^2)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0, 2, 4 \pmod{6} \\ 16 & ; n \equiv 3 \pmod{6} \\ 4 & ; n \equiv 1, 5 \pmod{6} \end{cases}$$

where $n \geq 6$. ■

REFERENCES

- [1] Abdollahi, A., "Determinant of adjacency matrices of graph", <http://arxiv.org/abs/0908.3324>, Cornell University.
- [2] Biggs, N., *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1974
- [3] Campos, C.N. and De Mello, C.P., "A result on the total colouring of powers of cycles", *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 2004, 18, 47-52.
- [4] Cvetkovic, D.M., Doob, M. and Sachs, H., *Spectra of Graphs: Theory and Application*, Academic Press, New York, 1980.
- [5] Doob, M., "Circulant graphs with $\det(-A(G)) = -\deg(G)$: codeterminants with K_n ", *Linear Algebra Appl.*, 2002, 340, 87-96.
- [6] Goldberg, L., *Matrix Theory with Applications*. McGraw - Hill International Editions, Mathematics and Statistics Series, 1991.
- [7] Gyurov, B. and Cloud, J., "On the algebraic properties of Pin-Wheel graphs and Applications", *73rd annual meeting of the Oklahoma Arkansas section 2011*, University of central Oklahoma.
- [8] Hoa Y., Woo, C. and Chen, P., "On the sandpile group of the square cycle C_n^2 ", *Linear Algebra Appl.*, 2006, 418, 457-467.
- [9] Hu, S., "The Classification and maximum determinants of the adjacency matrices of graphs with one cycle", *J. Math. Study*, 2003, 36, no.1, 102-104.
- [10] Krivelevich, M. and Nachmias, A., "Colouring powers of cycles from random lists", *European Journal of Combinatorics*, 2004, 25, 961-968.
- [11] D.Li and M.Liu, "Hadwiger's conjecture for powers of cycles and their complements", *European Journal of Combinatorics*, 2007, 28, 1152-1155.

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟบางกราฟ

Determinant of Adjacency Matrix of Some Graphs

นิติภูมิ อัสวธิติสกุล¹ และ เดชา สมณะ²

Nitiphoom Adsawatithisakul¹ and Decha Samana²

¹ นักศึกษาปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520

² อาจารย์ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520

Abstract

Square cycle power, C_n^2 is a graph having n vertices and the distance between each vertex pair is less than or equal to 2 and $GU_{v_1} P_{n_2}$ is a graph G adjacent v_1 where $v_1 \in V(P_{n_2})$. In this paper, we show that the determinant of the adjacency matrix $C_n^2 \cup_{v_1} P_{n_2}$.

Keywords: Determinant, Square cycle graph, Adjacency matrix, Sum operation

บทคัดย่อ

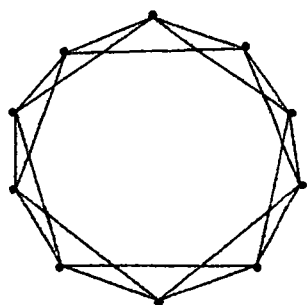
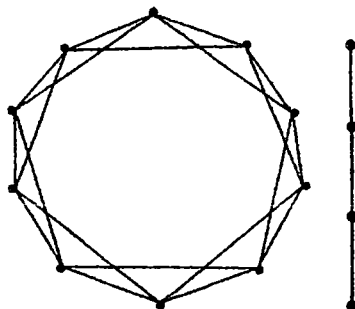
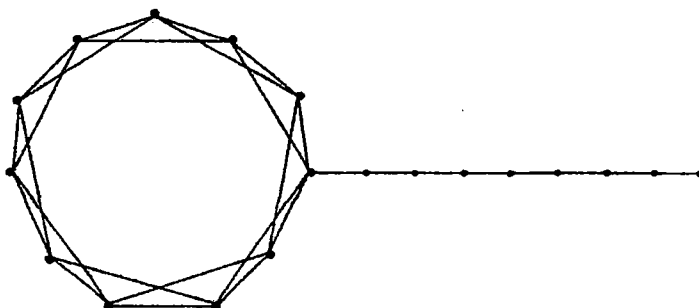
กราฟวงกำลังสอง C_n^2 คือ กราฟที่มีจำนวนจุดยอด n จุดและจุดยอดสองจุดที่แตกต่างกันในกราฟมีเส้นเชื่อมกันก็ต่อเมื่อระยะทางระหว่างจุดยอดสองจุดที่แตกต่างกันมีค่าไม่เกิน 2 และ $GU_{v_1} P_{n_2}$ คือ กราฟที่เกิดจากกราฟ G ประชิดกับจุด v_1 โดยที่ $v_1 \in V(P_{n_2})$ โดยงานวิจัยนี้ เราได้ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $C_n^2 \cup_{v_1} P_{n_2}$

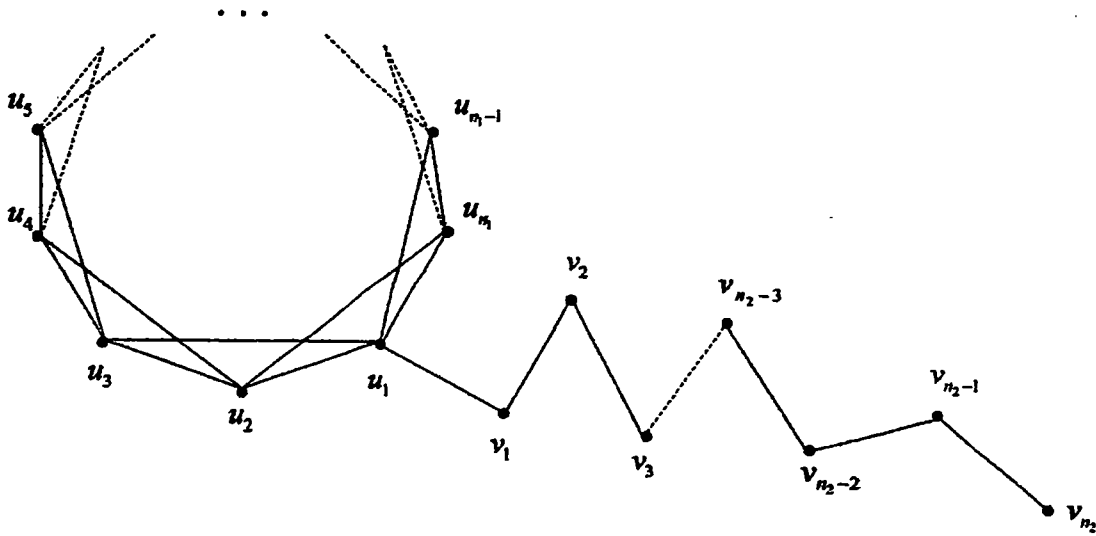
คำสำคัญ: ดีเทอร์มิแนนต์, กราฟวงกำลังสอง, เมทริกซ์ประชิด, การดำเนินการการบวก

บทนำ

ให้กราฟ G เป็นกราฟเชิงเดียวและเป็นกราฟที่ไม่มีทิศทาง เราจะกำหนดให้ $V(G)$ เป็นเซตของจุดยอดในกราฟ G และ $E(G)$ เป็นเซตของเส้นเชื่อมในกราฟ G สำหรับจุดยอด $u, v \in V(G)$ เรากำหนดให้ $d(u, v)$ จะเป็นระยะทางระหว่างจุดยอด u และจุดยอด v และให้ $A(G)$ แทนเมทริกซ์ประชิดของกราฟ G และกำหนดให้ $\det(A(G))$ เป็นการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ G

กราฟวงกำลังสอง C_n^2 คือ กราฟที่มีจำนวนจุดยอด n จุดและจุดยอดสองจุด u และ v มีเส้นเชื่อมกันก็ต่อเมื่อระยะทางระหว่าง u และ v มีค่าไม่เกิน 2 เราจะนำกราฟ C_n^2 และกราฟ G มาดำเนินการการบวก ซึ่งนิยามของการดำเนินการการบวก คือ กราฟทั้งสองจะต้องมีจุดยอดแตกต่างกันทั้งหมด คือ $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ และผลของการดำเนินการการบวก คือ $V(G_1) \cup V(G_2)$ และ $E(G_1) \cup E(G_2)$ เขียนแทนด้วย $G_1 + G_2$ และเราจะนำกราฟวงกำลังสอง C_n^2 ประชิดกับกราฟวิถี P_n ที่จุด v_1 โดยที่ $v_1 \in V(P_n)$ เขียนแทนด้วย $C_n^2 \cup_{v_1} P_n$ ตัวอย่างเช่น

รูปที่ 1 กราฟ C_{10}^2 รูปที่ 2 กราฟ $C_{10}^2 + P_4$ รูปที่ 3 กราฟ $C_{11}^2 \cup_{v_1} P_8$



รูปที่ 4 กราฟวงกำลังสอง ประชิดกับกราฟวิถีที่จุด v_1 หรือกราฟ $C_n^2 U_1 P_{n_2}$

การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟต่างๆ ได้มีการศึกษาอย่างกว้างขวาง เช่น N.Biggs

[2] และ D.Cvetkovic [3] ได้มีการเผยแพร่การหาดีเทอร์มิแนนต์ของกราฟต่าง ๆ เช่น K_n, C_n, P_n ดังนี้

$$\det(A(K_n)) = (-1)^{n-1}(n-1)$$

$$\det(A(C_n)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0(\text{mod } 4) \\ -4 & ; n \equiv 2(\text{mod } 4) \\ 2 & ; \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$\det(A(P_n)) = \begin{cases} (-1)^k; n = 2k \\ 0 & ; \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

นอกจากนี้ J.Cloud [4] ได้หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ pin-wheel $W'_n U_1 P_m$

และ N.Adsawatithisakul and D.Samana [1] ได้หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ C_n^2 ได้ดังนี้

$$\det(A(C_n^2)) = \begin{cases} 0 & ; n = 2q + 4 \\ 16 & ; n = 6q + 3 \\ 4 & ; \text{อื่น ๆ} \end{cases} \quad \text{โดยที่ } q \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}$$

ในงานวิจัยนี้ คณะผู้วิจัยได้หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $G_1 + G_2$ โดยที่ G_1 และ G_2 เป็นกราฟเชิงเดียวใดๆ เพื่อใช้ในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $C_n^2 U_1 P_{n_2}$

วัตถุประสงค์

1. เพื่อหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $G_1 + G_2$
2. เพื่อหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $C_n^2 U_n P_n$

วิธีการวิจัย

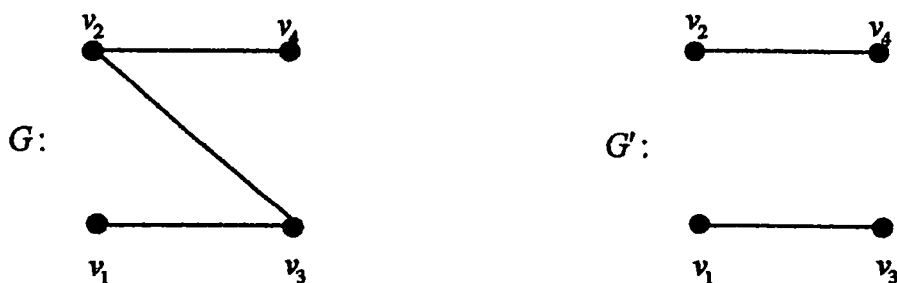
ทฤษฎีบทที่จำเป็นในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $G_1 + G_2$ และกราฟ $C_n^2 U_n P_n$ มีดังนี้

ทฤษฎีบท 1 [5] ให้ A, B, C และ D เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n, n \times m, m \times n$ และ $m \times m$ ตามลำดับ แล้ว

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A) \det(D) \text{ โดยที่ } 0 \text{ เป็นเมทริกซ์ศูนย์}$$

ทฤษฎีบท 2 [6] ให้กราฟ G เป็นกราฟที่มีจำนวนจุดยอดมากกว่า 2 จุด และจุดยอด v_1, v_2 เป็นจุดยอดที่แตกต่างกันในกราฟ G โดยที่ $N(v_1) \subseteq N(v_2)$ และให้ G' เป็นกราฟที่ได้จากกราฟ G โดยการนำเส้นออกทุกเส้นของ v_2, y โดยที่ $y \in N(v_1)$ ดังนั้น $\det(A(G)) = \det(A(G'))$

เช่น กำหนดให้กราฟ G และกราฟ G' ดังรูปที่ 4



รูปที่ 5 กราฟ G และกราฟ G'

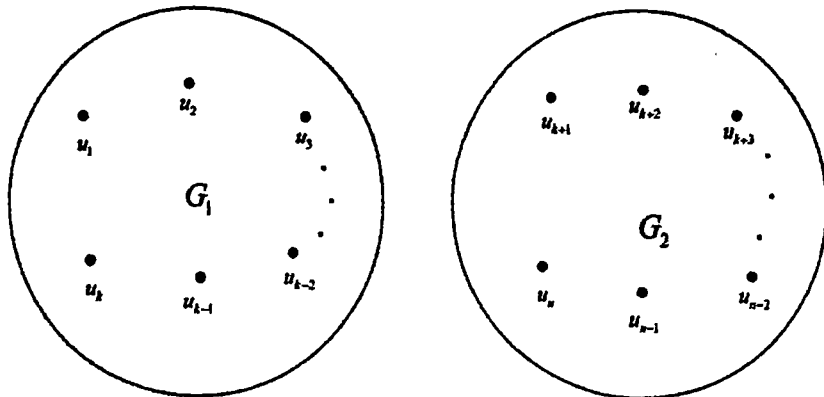
เมื่อพิจารณา G จะเห็นได้ว่า $N(v_1) = \{v_3\}$ และ $N(v_2) = \{v_3, v_4\}$ ซึ่ง $N(v_1) \subseteq N(v_2)$ จะนำเส้น v_2, y ออกทุกเส้น โดยที่ $y \in N(v_1)$ นั่นคือ ลบเส้น v_2, v_3 จะได้กราฟ G' และ $\det(A(G)) = \det(A(G')) = 1$

ในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $C_n^2 \cup_n P_n$ จะเริ่มต้นโดยการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $G_1 + G_2$ แล้วจะใช้ทฤษฎีบท 1 และ 2 ช่วยในการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟดังกล่าว

ผลการวิจัย

ทฤษฎีบท 3 ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟเชิงเดียว แล้ว $\det(A(G_1 + G_2)) = \det(A(G_1))\det(A(G_2))$

พิสูจน์ กำหนดให้กราฟ G_1 ประกอบด้วยจุดยอด u_1, u_2, \dots, u_k และให้กราฟ G_2 ประกอบด้วยจุดยอด $u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n$ และเมื่อนำกราฟทั้งสองมาดำเนินการการบวก จะเป็นดังรูปข้างล่าง



รูปที่ 6 กราฟ $G_1 + G_2$

จะเห็นได้ว่าจุดยอดของกราฟ G_1 และกราฟ G_2 ไม่ประชิดกันเลยและเมื่อเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ประชิดจะได้

$$A(G_1 + G_2) = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} \overbrace{\hspace{2cm}}^{k \text{ แถว}} & & & \\ \hline & A(G_1) & & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{cccc} \overbrace{\hspace{2cm}}^{n-k \text{ แถว}} & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & \ddots & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} & \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & A(G_2) \\ & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \end{array}$$

สามารถเขียนใหม่ได้

$$A(G_1 + G_2) = \begin{bmatrix} A(G_1) & \underline{0} \\ \underline{0} & A(G_2) \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } \underline{0} \text{ เป็นเมทริกซ์ศูนย์}$$

จากทฤษฎีบท 1 ทำให้ได้ว่า

$$\det(A(G_1 + G_2)) = \det(A(G_1))\det(A(G_2))$$

□

กำหนดให้ G_1 แทนด้วยกราฟ C_n^2 และกราฟ G_2 แทนด้วยกราฟ P_{n_2} จะได้ว่า

$$\det(A(C_n^2 + P_{n_2})) = \begin{cases} 0 & ; n_1 \text{ เป็นเลขคู่ หรือ } n_2 \text{ เป็นเลขคี่} \\ 16 & ; n_1 = 6q_1 + 3 \text{ และ } n_2 = 4q_2 \\ -16 & ; n_1 = 6q_1 + 3 \text{ และ } n_2 = 4q_2 - 2 \\ 4 & ; n_1 = 6q_1 + 1 \text{ หรือ } n_1 = 6q_1 + 5 \text{ และ } n_2 = 4q_2 \\ -4 & ; n_1 = 6q_1 + 1 \text{ หรือ } n_1 = 6q_1 + 5 \text{ และ } n_2 = 4q_2 - 2 \end{cases} \quad (1)$$

โดยที่ q_1 และ q_2 เป็นจำนวนเต็มบวก

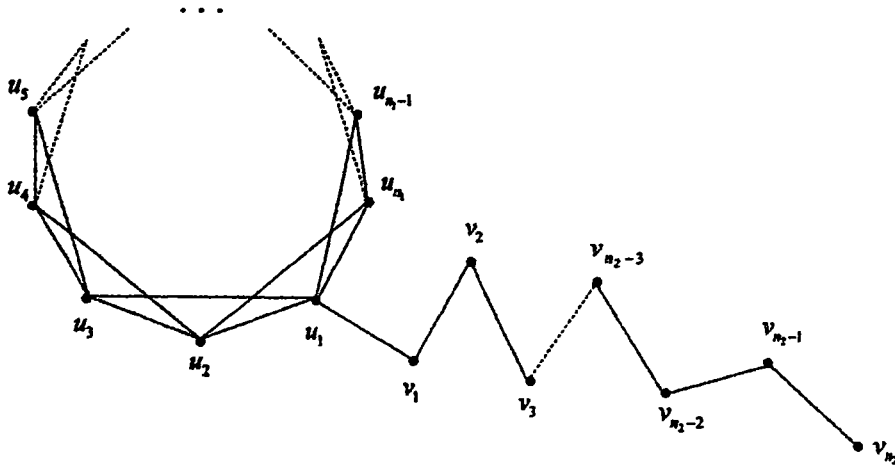
ถ้าสืบถัดไป เราจะหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสอง C_n^2 ประชิดกับกราฟวิถี P_{n_2} ที่จุด v_1 โดยที่ $v_1 \in V(P_{n_2})$ นั่นก็คือ $\det(A(C_n^2 \cup_{v_1} P_{n_2}))$

บทแทรก 4 ให้ C_n^2 เป็นกราฟวงกำลังสองที่มีจุดยอด n_1 จุด และ P_{n_2} เป็นกราฟวิถีที่มีจุดยอด n_2 จุด โดยที่ n_2 เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ ถ้า $C_n^2 \cup_{v_1} P_{n_2}$ คือกราฟวงกำลังสอง C_n^2 ประชิดกับกราฟวิถี P_{n_2} ที่จุด v_1 ซึ่ง $v_1 \in V(P_{n_2})$ แล้ว

$$\det(A(C_n^2 \cup_{v_1} P_{n_2})) = \begin{cases} 0 & ; n_1 \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \\ 16 & ; n_1 = 6q_1 + 3 \text{ และ } n_2 = 4q_2 \\ -16 & ; n_1 = 6q_1 + 3 \text{ และ } n_2 = 4q_2 - 2 \\ 4 & ; n_1 = 6q_1 + 1 \text{ หรือ } n_1 = 6q_1 + 5 \text{ และ } n_2 = 4q_2 \\ -4 & ; n_1 = 6q_1 + 1 \text{ หรือ } n_1 = 6q_1 + 5 \text{ และ } n_2 = 4q_2 - 2 \end{cases} \quad (2)$$

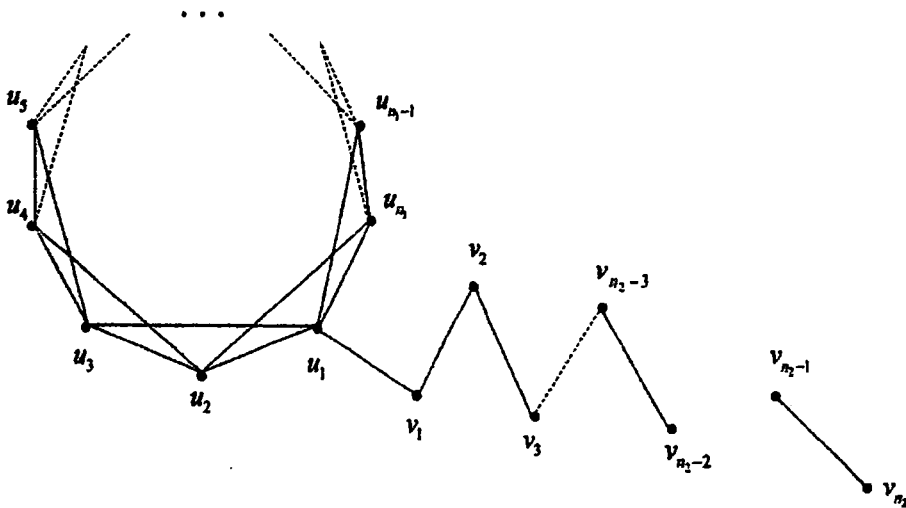
โดยที่ q_1 และ q_2 เป็นจำนวนเต็มบวก

พิสูจน์ กำหนดให้กราฟ C_n^2 ประกอบด้วยจุดยอด u_1, u_2, \dots, u_{n_1} และกราฟ P_{n_2} ประกอบด้วยจุดยอด v_1, v_2, \dots, v_{n_2} และเมื่อนำกราฟทั้งสองมาประชิดกันที่จุด v_1 โดยที่ $v_1 \in V(P_{n_2})$ เป็นดังรูปข้างล่าง



รูปที่ 7 กราฟวงกำลังสอง ประชิดกับกราฟวิถีที่จุด v_1 หรือกราฟ $C_n^2 \cup_n P_{n_2}$

พิจารณาจุดยอด v_{n_2} และจุดยอด v_{n_2-2} ของกราฟ $C_n^2 \cup_n P_{n_2}$ ซึ่งจะเห็นว่า $N(v_{n_2}) \subseteq N(v_{n_2-2})$ และเมื่อนำเส้น $v_{n_2} v_{n_2-2}$ ออก ทำให้ได้ดังรูปด้านล่าง



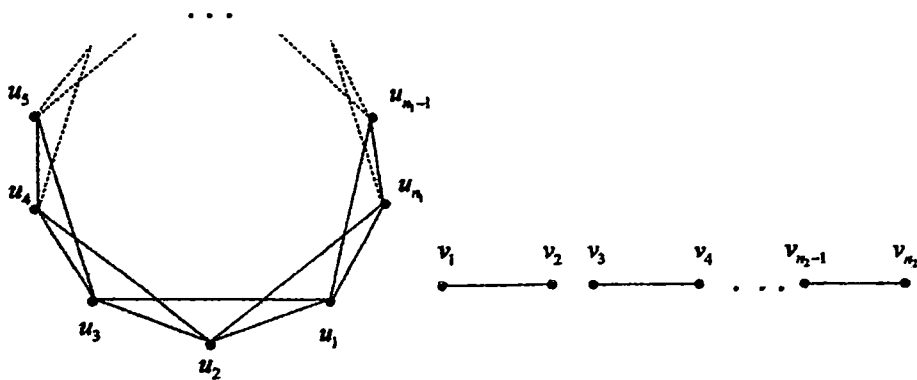
รูปที่ 8 รูปที่เกิดจากการตัดเส้นออกด้วยทฤษฎีบท 2

นั่นคือกราฟ $C_n^2 \cup_n P_{n_2-2} + P_2$ ต่อไปจะพิจารณาจุด v_{n_2-2} และ v_{n_2-4} ซึ่ง $N(v_{n_2-2}) \subseteq N(v_{n_2-4})$ และนำเส้น $v_{n_2-2} v_{n_2-4}$ ออก จะได้กราฟ $C_n^2 \cup_n P_{n_2-4} + P_2 + P_2$ ทำต่อไปเรื่อย ๆ จะทำให้ได้กราฟ $C_n^2 + \underbrace{P_2 + P_2 + \dots + P_2}_{n/2}$ ดังรูปที่ 9 เมื่อใช้ทฤษฎีบท 2 และสมการ (1) จะได้ว่า

$$\det(A(C_n^2 \cup_n P_{n_2})) = \det(A(C_n^2 + \underbrace{P_2 + P_2 + \dots + P_2}_{n/2}))$$

นั่นคือ

$$\det(A(C_n^2 U_n P_{n_2})) = \begin{cases} 0 & ; n_1 \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \\ 16 & ; n_1 = 6q_1 + 3 \text{ และ } n_2 = 4q_2 \\ -16 & ; n_1 = 6q_1 + 3 \text{ และ } n_2 = 4q_2 - 2 \\ 4 & ; n_1 = 6q_1 + 1 \text{ หรือ } n_1 = 6q_1 + 5 \text{ และ } n_2 = 4q_2 \\ -4 & ; n_1 = 6q_1 + 1 \text{ หรือ } n_1 = 6q_1 + 5 \text{ และ } n_2 = 4q_2 - 2 \end{cases}$$



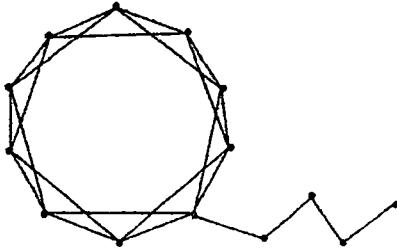
รูปที่ 9 กราฟ $C_n^2 + \underbrace{P_2 + P_2 + \dots + P_2}_{n/2}$

สรุป

การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $C_n^2 U_n P_{n_2}$ หาได้ค่อนข้างยุ่งยากและซับซ้อน เนื่องจากเมทริกซ์ประชิดของกราฟ $C_n^2 U_n P_{n_2}$ มีขนาดใหญ่ เมื่อ n_1 และ n_2 เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามาก ดังเมทริกซ์ข้างล่าง

$$A(C_n^2 U_n P_{n_2}) = \begin{bmatrix} & & & & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 0 & & & & 0 \\ & & A(C_n^2) & & 0 & & \ddots & & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \\ 0 & & & & 0 & & & & \\ 0 & & \ddots & & 0 & & & A(P_{n_2}) & \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & & & & \end{bmatrix}$$

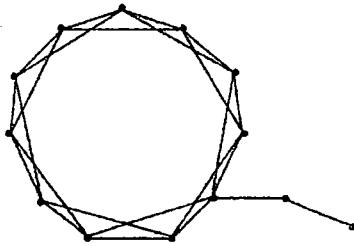
เมื่อใช้บทแทรก 4 จะสะดวกและรวดเร็ว เช่น กราฟ $C_{10}^2 U_n P_4$



รูปที่ 10 กราฟ $C_{10}^2 U_n P_4$

$$A(C_{10}^2 U_n P_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $n_1 = 10$ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ จะได้ว่า $\det(A(C_{10}^2 U_n P_4)) = 0$



รูปที่ 11 กราฟ $C_{11}^2 U_n P_2$

$$A(C_{11}^2 U_n P_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

และเมื่อพิจารณากราฟ $C_{11}^2 U_n P_2$ จะได้ว่า $\det(A(C_{11}^2 U_n P_2)) = -4$ เนื่องจาก $n_1 = 11$ และ $n_2 = 2$

เอกสารอ้างอิง

1. Adsawatthisakul, N. and Samana, D., "Determinant of Adjacency Matrix of Squared Cycle Graph" Maejo International Journal of Science and Technology. (To appear)
2. Biggs, N., "Algebraic Graph Theory", Cambridge University Press, Cambridge, 1974.
3. Cvetkovic, D.M., Doob M. and Sachs, H., "Spectra of Graphs: Theory and Application", Academic Press, New York, 1980.

4. Gyurov, B. and Cloud, J., "On the algebraic properties of Pin-Wheel graphs and Applications", 73rd annual meeting of the Oklahoma – Arkansas section, 2011 University of central Oklahoma.
5. Herstein, I. N. and Winter, D. J., "Matrix Theory and Linear Algebra" Macmillan Publishing Company, a division of Macmillan, 1988.
6. Rara, H.M., "Reduction procedures for calculating the determinant of the adjacency matrix of some graphs and the singularity of square planar grids", Discrete Mathematics 151 (1996), 213-219.
7. Szidarovszky, F. and Molnar, S., "Introduction to Matrix Theory with Applications to Business and Economics" Series on Concrete and Applicable Mathematics Vol 3, 2001.