รายงานการวิจัย

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟบางกราฟ

Determinant of Adjacency Matrices of Some Graph

ดร. เดชา สมนะ

(หัวหน้าโครงการ)

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2556

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ชื่อโครงการ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทิรกซ์ประชิดของกราฟบางกราฟ

ชื่อโครงการ) Determinant of Adjacency Matrices of Some Graph

แหล่งเงิน เงินรายได้คณะวิทยาศาสตร์

ประจำปีงบประมาณ 2555 จำนวนเงินที่ได้รับการสนับสนุน 50,000 บาท

ระยะเวลาทำการวิจัย 1 ปี ตั้งแต่ 1 ตุลาคม 2555 ถึง 30 กันยายน 2556

ชื่อ-สกุล หัวหน้าโครงการ และผู้ร่วมโครงการวิจัย พร้อมระบุ หน่วยงานต้นสังกัดและ อีเมล์

ชื่อ-สกุล นายเดชา สมนะ

ตำแหน่งทางวิชาการ อาจารย์ สาขาวิชา คณิตศาสตร์

คณะ วิทยาศาสตร์ โทรศัพท์ 0-2326-4344 ต่อ 283 และ 0-2737-3000 ต่อ 6187

E-mail dechasamana@hotmail.com or ksdecha@kmitl.ac.th

คำสำคัญ (Keywords) Determinant, Adjacency Matrix, Power cycle graph,

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ คณาจารย์ เจ้าหน้าที่ นักศึกษา ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่ช่วยเหลือในการอำนวยความสะดวกเกี่ยวกับอุปกรณ์ เอกสารต่าง ๆ ที่จำเป็นในการทำงานวิจัย

ขอขอบคุณ ครอบครัวสมนะ ที่ได้ส่งเสริมและสนับสนุน พร้อมทั้งให้กำลังใจในการทำงานวิจัย รวมทั้ง นายนิติภูมิ อัศวธิติสกุล ที่เป็นผู้ช่วยนักวิจัยในงานวิจัยนี้

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอขอบคุณ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่สนับสนุนงบประมาณในการทำงานวิจัย

ดร. เดชา สมนะ

บทคัดย่อ

กราฟวงกำลังสี่ C_n^4 คือ กราฟที่มีจำนวนจุดยอด n จุดและจุดยอด u และ v มีเส้นเชื่อมกันก็ต่อเมื่อระยะทางระหว่าง u และ v มีค่าไม่เกิน 4 ซึ่งในงานวิจัยนี้ เราได้หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสอง ได้ดังนี้

$$\det(A(C_n^4)) = \begin{cases} 0 & ;n \equiv 0,2,4,6,8 \pmod{10} \\ 8 & ;n \equiv 1,3,7,9 \pmod{10} \\ 128 & ;n \equiv 5 \pmod{10} \end{cases}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

นอกจากนี้ เราได้หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟที่เกิดจากการดำเนินการการบวกระหว่างกราฟวงกำลังสี่กับกราฟ G $\left(C_n^4 \dotplus G\right)$ และกราฟวงกำลังสอง $C_{n_1}^4$ ประชิดกับวิถี P_{n_2} ที่จุด v_1 $\left(C_{n_1}^4 \cup_{v_1} P_{n_2}\right)$ โดยที่ $v_1 \in V\left(P_{n_2}\right)$

ABSTRACT

Cycle power graph C_n^4 is a graph which has n vertices and two vertices u and v are adjacent if and only if distance between u and v not greater than 4. We show that the determinant of adjacency matrix of cycle power graph C_n^4 are as follows

$$\det(A(C_n^4)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0,2,4,6,8 \pmod{10} \\ 8 & ; n \equiv 1,3,7,9 \pmod{10} \\ 128 & ; n \equiv 5 \pmod{10} \end{cases}$$

where n is a positive integer.

Furthermore, we show that the determinant of adjacency matrix of graph $C_n^4 \dot{+} G$ and the determinant of adjacency matrix of graph $C_{n_1}^4 \cup_{v_1} P_{n_2}$ which is a cycle power graph $C_{n_1}^4$ adjacent a path P_{n_2} at vertex v_1, where $v_1 \in V\left(P_{n_2}\right)$.

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของงานวิจัย

การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟเป็นการนำองค์ความรู้ทางด้านทฤษฎีกราฟและพีชคณิตเชิงเส้นมาประยุกต์รวมกัน ซึ่งมีการศึกษาอย่างกว้างขวาง โดยมีการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ต่าง ๆ เช่น เมทริกซ์ประชิด เมทริกซ์ระยะทาง เป็นต้น ซึ่งผู้วิจัยได้มีความสนใจที่จะหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดโดยการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟที่เป็นที่รู้จักทั่วไป เช่น กราฟแบบบริบูรณ์ (Complete graph) กราฟวง (Cycle graph) กราฟวิถี (Path graph) กราฟวงล้อ (Wheel graph) เป็นต้น แต่การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟนั้นทำได้ยาก เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์ของกราฟต่าง ๆ จะขึ้นอยู่กับจำนวนจุดและจำนวนเส้นของกราฟนั้น ๆ และนอกจากนี้ยังมีกราฟอื่น ๆ ที่น่าสนใจ คือ กราฟวงกำลัง d (d - power cycle graph, C_n^d) โดยที่กราฟวงกำลัง d ที่สนใจ คือ กราฟวงกำลังสี่ (C_n^4)

1.2 วัตถุประสงค์

1.2.1 เพื่อศึกษาบทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับทฤษฎีกราฟและพีชคณิตเชิงเส้นเบื้องต้น

1.2.2 เพื่อศึกษาสมบัติและทฤษฎีบทของดีเทอร์มิแนนต์และการหาค่าเฉพาะ (Eigenvalue) ของเมทริกซ์ต่าง ๆ

1.2.3 เพื่อหาดีเทอร์มิแนนต์และหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสี่

1.3 ขอบเขตงานวิจัย

ขอบเขตของงานวิจัยนี้ เราต้องการหาดีเทอร์มิแนนต์และหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสี่ รวมไปถึงการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟที่เกิดจากการดำเนินการการบวกระหว่างกราฟวงกำลังสี่กับกราฟ G และกราฟวงกำลังสี่ที่ประชิดกับวิถีที่จุด v_1 โดยที่ v_1 เป็นจุดยอดในวิถี

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 สามารถหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสี่ได้

1.4.2 สามารถหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสี่ได้

1.4.3 สามารถหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟอื่น ๆ ที่เกิดจากการดำเนินการของกราฟ C_n^4 ได้

1.4.4 ได้งานวิจัยที่ได้เผยแพร่ในงานประชุมวิชาการระดับชาติได้

1.5 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

1.5.1 ศึกษา ค้นคว้า ตำรา เอกสาร หนังสือเกี่ยวกับทฤษฎีกราฟและพีชคณิตเชิงเส้น

1.5.2 ศึกษาค้นคว้างานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหาดีเทอร์มิแนนต์และกราฟวงกำลังสอง

1.5.3 เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อตรวจสอบค่าดีเทอร์มิแนนต์ของกราฟวงกำลังสอง

1.5.4 ตั้งสมมติฐานและพิสูจน์ทฤษฎีในงานวิจัยนี้

1.5.5 สรุปผลงานวิจัย

1.5.6 นำงานวิจัยไปเผยแพร่ในวารสารระดับชาติหรืองานประชุมวิชาการระดับชาติ

1.5.7 รายงานผลงานวิจัย

บทที่ 2

นิยามและทฤษฎีบทเบื้องต้น

2.1 เมทริกซ์ (Matrix)

บทนิยาม 2.1 เมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ประกอบด้วย จำนวนจริงที่เขียนเรียงเป็นแถว (Row) m แถวและเขียนในแนวดิ่ง n หลัก (Column) โดยปิดล้อมจำนวนจริงเหล่านี้ด้วยเครื่องหมาย [ ] หรือ ( ) จำนวนแต่ละจำนวนในเมทริกซ์ เรียกว่า **สมาชิกของเมทริกซ์**

เราใช้อักษรพิมพ์ใหญ่ภาษาอังกฤษ $A, B, C, \ldots$ แทน เมทริกซ์และอักษรตัวเล็ก $a, b, c, \ldots$ แทน สมาชิกหรือจำนวนในเมทริกซ์ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ จะใช้ a_{ij} แทน สมาชิกที่อยู่ในแถวที่ i และหลักที่ j ของ A และถ้า A มีขนาดเป็น $m \times n$ แล้ว จะเขียน A ด้วย

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ หรือ } A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$$

ตัวอย่างเช่น เมทริกซ์ A ที่มีขนาดเป็น 3×4 จะเขียนแทนด้วย

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

ในกรณีที่เมทริกซ์ A มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลักเท่ากับ n จะเรียกเมทริกซ์ A ว่าเป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ และจะเรียก $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ว่าเป็นสมาชิกในแนวทแยงของ A

2.2 ดีเทอร์มิแนนต์ (Determinants)

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A ใดๆ จะมีสเกลาร์ตัวหนึ่ง ซึ่งถูกกำหนดให้กับเมทริกซ์นั้น ๆสเกลาร์นี้จะเรียกว่า ดีเทอร์มิแนนต์ของ A ซึ่งเขียนแทนด้วย $\det A$ หรือ $|A|$ และดีเทอร์มิแนนต์นี้ ก็คือฟังก์ชันจาก

สับเซตของเซตของเมทริกซ์ ไปยังเซตของจำนวนจริง ดีเทอร์มิแนนต์นี้มีประโยชน์ช่วยในการแก้ระบบสมการเชิง

บทนิยาม 2.2 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n\times n$ **ดีเทอร์มิแนนต์ของ** A เขียนแทนด้วย $\det A$ หรือ $|A|$ กำหนดโดย

$$\det A=\sum_{\alpha}(\operatorname{sgn}\alpha)\,a_{1\alpha(1)}a_{2\alpha(2)}\ldots a_{n\alpha(n)}$$

โดยที่ผลบวกคิดทุกวิธีเรียงสับเปลี่ยน α ของ x_n ซึ่งมีทั้งหมด $n!$ พจน์บวกกัน

ถ้า α เป็นคู่ $\operatorname{sgn}\alpha$ ก็จะเป็นบวก และถ้า α เป็นคี่ $\operatorname{sgn}\alpha$ ก็จะเป็นลบ

ในกรณีที่ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

เราจะเขียน $\det A=|A|$ ในรูป $|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

2.3 ค่าเฉพาะของเมทริกซ์ (Eigenvalue)

บทนิยาม 2.3 ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ เรียกสเกลาร์ λ ที่ทำให้ $Av=\lambda v$ มีคำตอบที่ไม่เป็นทริเวียลว่าเป็น ค่าเฉพาะ (Eigenvalue) ของ A เรียกเวกเตอร์ v ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ซึ่งสอดคล้องกับ λ ว่าเป็น **เวกเตอร์เฉพาะ** (Eigenvector) ของ A

ในการหาค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ขนาด $n\times n$ เราจะเขียน $Av=\lambda v$ ใหม่เป็น $(\lambda I-A)v=\underline{0}$ โดย λ จะเป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A ถ้า สมการ $(\lambda I-A)v=\underline{0}$ มีคำตอบที่ไม่เป็นศูนย์ เรียกสมการ $(\lambda I-A)v=\underline{0}$ นี้ว่า **สมการลักษณะเฉพาะ** (Characteristic equation) ของ A สำหรับสเกลาร์ที่สอดคล้องกับสมการนี้ เป็นค่าเฉพาะของ A และเมื่อกระจาย $|\lambda I-A|$ ออกจะได้พหุนาม (Polynomial) ใน λ ซึ่งเรียกว่า **พหุนามลักษณะเฉพาะ** (Characteristic polynomial) ของ A จะได้ว่า

$$|\lambda I-A|=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\ldots+c_n$$

บทนิยาม 2.4 [6] กำหนดให้ $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ เป็นค่าเฉพาะของเมทริกซ์ A แล้ว

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

2.4 ทฤษฎีกราฟ

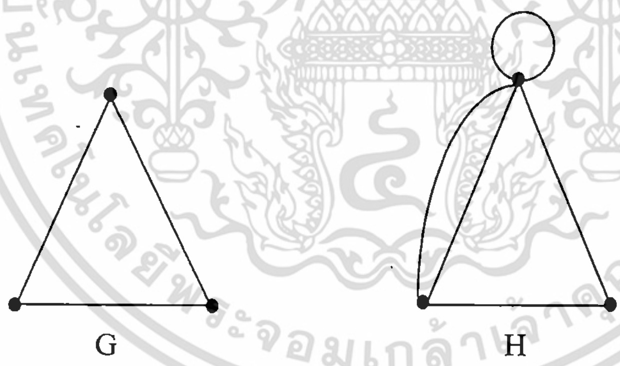
บทนิยาม 2.5 กราฟ G ประกอบด้วยคู่อันดับของเซต $(V(G), E(G))$ โดย $V(G)$ คือเซตของ**จุด (Vertex)** และ $E(G)$ คือเซตของ**เส้นเชื่อม (Edge)** ระหว่างคู่ของจุดในกราฟ จำนวนสมาชิกใน V เรียกว่า **อันดับ (Order)** ของ G

บทนิยาม 2.6 วงวน (Loop) คือ เส้นที่มีจุดปลายทั้งสองเป็นจุดเดียวกัน

บทนิยาม 2.7 เส้นเชื่อมขนาน (Multiple edges) คือ เส้นเชื่อมตั้งแต่สองเส้นขึ้นไปที่เชื่อมคู่ของจุดคู่เดียวกัน

บทนิยาม 2.8 กราฟเชิงเดียว (Simple graph) คือกราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมขนานและไม่มีวงวน

ตัวอย่าง เช่น



รูปที่ 2.1 G **เป็นกราฟเชิงเดียว และ** H **เป็นกราฟที่มีวงวนและเส้นเชื่อมขนาน**

หมายเหตุ ในรายงานนี้เราจะกล่าวถึงกราฟเชิงเดียวเท่านั้น

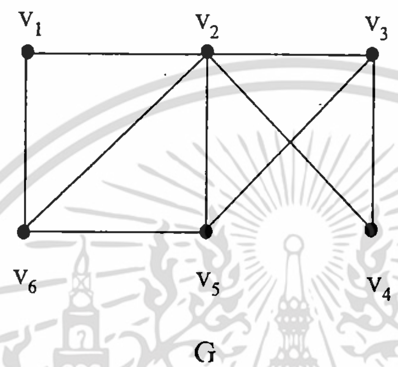
บทนิยาม 2.9 ให้ u และ v เป็นจุดในกราฟ G จะกล่าวว่า u **ประชิด (Adjacent)** กับ v เมื่อเส้นเชื่อมใน G เชื่อมระหว่างจุด u และ v และเขียนแทนเส้นเชื่อมดังกล่าวด้วย uv และจะเรียก u และ v ว่า**จุดปลาย**ของเส้นเชื่อม uv

บทนิยาม 2.10 เมทริกซ์ประชิด (Adjacency Matrices) การเขียนเมทริกซ์ประชิด พิจารณาจากความหมายของคำว่าประชิด คือ การระบุว่าจุดยอดใดกับจุดยอดใดประชิดกันบ้าง เขียนแทนด้วย $A(G)$ โดยนิยามค่าในเมตริกซ์ประชิดดังนี้

ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ซึ่งกำหนดให้ n คือจุดทั้งหมดในกราฟและสมาชิกในเมทริกซ์ A โดยที่

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; v_i v_j \in E(G) \\ 0 & ; v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

ตัวอย่างเช่น



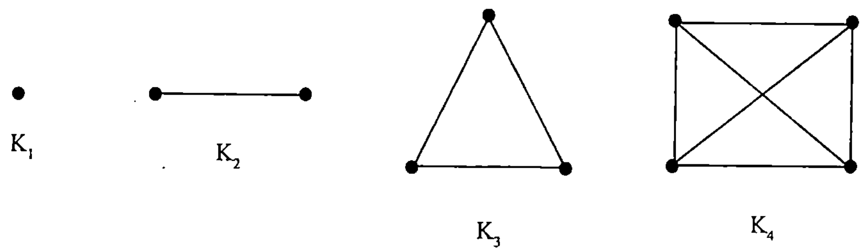
รูปที่ 2.2 กราฟ G

จากกราฟ G เขียนเป็นเมทริกซ์ประชิดได้เป็น

$$A(G) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

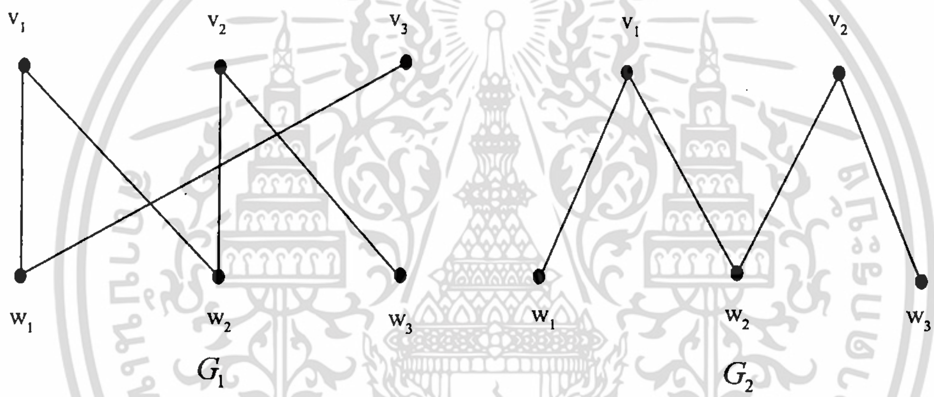
ต่อไปเราจะยกตัวอย่างกราฟต่าง ๆ ที่เป็นที่รู้จักทั่วไปบ้างแล้ว

บทนิยาม 2.11 กราฟบริบูรณ์ (Complete graph) คือ กราฟที่มีจุดยอด n จุด แทนด้วย K_n โดยที่ถ้า v_i และ v_j เป็นจุดยอดที่ต่างต่างกัน ใน K_n จะต้องมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอด v_i และ v_j เสมอ



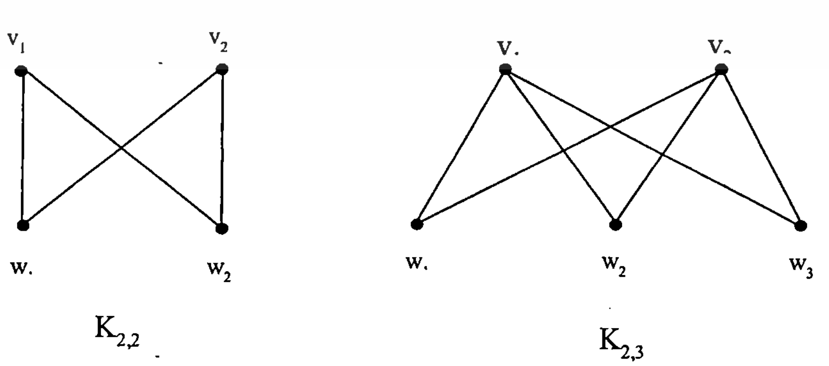
รูปที่ 2.3 กราฟบริบูรณ์

บทนิยาม 2.12 กราฟสองส่วน (Bipartite graph) คือ กราฟที่จุดยอดทั้งหมดสามารถแบ่งส่วนได้ 2 กลุ่ม และไม่มีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดในกลุ่มเดียวกัน



รูปที่ 2.4 กราฟ G_1 และ G_2 เป็นกราฟสองส่วน

บทนิยาม 2.13 กราฟสองส่วนบริบูรณ์ (Complete bipartite graph) คือ กราฟสองส่วนที่มีจุดยอด $m+n$ จุด ซึ่งแบ่งเป็น 2 กลุ่ม ๆ ละ m จุด และ n จุด โดยมีเส้นเชื่อมระหว่างจุดยอดที่อยู่ต่างกลุ่มกันครบทุกคู่ เขียนแทนด้วย $K_{n,m}$

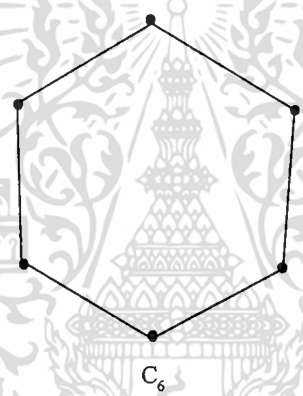


รูปที่ 2.5 กราฟสองส่วนบริบูรณ์

บทนิยาม 2.14 วิถี **(Path)** คือ วิถีที่มี $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ โดยที่ $n \geq 1$ ซึ่งสามารถลำดับจุดยอดเป็น $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ซึ่งจุด v_i จะเชื่อมกับ v_j ก็ต่อเมื่อ $|i-j| = 1$ เขียนแทนวิถีที่มีจุดยอด n จุดด้วย P_n

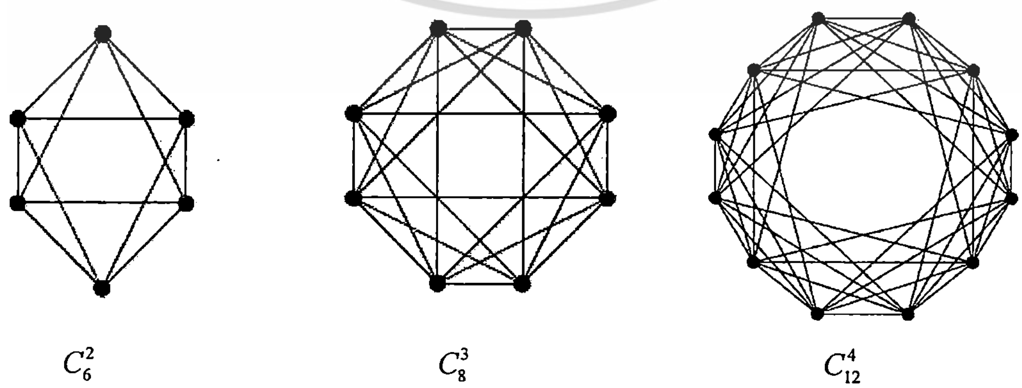
รูปที่ 2.6 กราฟวิถี

บทนิยาม 2.15 กราฟวัฏจักร **(Cycle graph)** คือ กราฟที่มีจุดยอดตั้งแต่ 3 จุดซึ่งสามารถวาดให้จุดยอดทั้งหมดเรียงอยู่บนวงกลม โดย ที่จุดยอดสองจุดประชิดกัน ก็ต่อเมื่อ จุดยอดสองจุดนั้นอยู่ติดกันบนวงกลม เขียนแทนวัฏจักรที่มีจุดยอด n จุดด้วย C_n



รูปที่ 2.7 กราฟวัฏจักร

บทนิยาม 2.16 กราฟวัฏจักรกำลัง **(Cycle power graph)** คือ กราฟที่มีจำนวนจุด n จุดและระยะห่างระหว่าง 2 จุดใด ๆ มีระยะห่างอย่างน้อยหรือเท่ากับ d เขียนแทนด้วย C_n^d เช่น



รูปที่2.8 กราฟวัฏจักรกำลัง

บทนิยาม 2.18 เซอร์คูแลนท์เมทริกซ์ (Circulant matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกในแถวแนวทแยงมุมเป็นศูนย์และสมาชิกตำแหน่งอื่น ในแถวแรกเป็น $a_i = a_{n-i+2}$ สำหรับ $i = 2,\dots,n$

บทนิยาม 2.19 เซอร์คูแลนท์กราฟ (Circulant graph) คือ กราฟที่สามารถเขียนเมทริกซ์ประชิดของกราฟนั้นให้อยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์เซอร์คูแลนท์

จากรูปด้านบนสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ประชิดได้ดังนี้

$$A(C_6^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A(C_8^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(C_{12}^4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่างด้านบน จะเป็นได้ว่าเมทริกซ์ประชิดของ C_n^d เป็นเซอร์คูแลนท์เมทริกซ์ทำให้กราฟนี้เป็นเซอร์คูแลนท์กราฟด้วย

นอกจากนี้ยังมีการรวบรวมการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของต่าง ๆ ดังนี้ [4]

$$\det(A(K_n)) = (-1)^{n-1}(n-1)$$

$$\det(A(P_n)) = \begin{cases} (-1)^k & ; n = 2k \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$\det(A(C_n)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0 (\bmod 4) \\ -4 & ; n \equiv 2 (\bmod 4) \\ 2 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$\det(A(W_n)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0 (\bmod 4) \\ -n & ; n \equiv 1 (\bmod 4) \\ 2n & ; n \equiv 2 (\bmod 4) \\ -n & ; n \equiv 3 (\bmod 4) \end{cases}$$

บทที่ 3

ผลงานวิจัย

จากการศึกษาบทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับการหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสี่

3.1 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสี่

ในบทที่ 2 ได้กล่าวว่าเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสี่เป็นเซอร์คูแรนเมทริกซ์ ดังนั้นเราจะหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสี่โดยใช้สมบัติของการเป็นเซอร์คูแรนกราฟดังประพจน์ต่อไปนี้

ประพจน์ 3.1 [2] ถ้าสมาชิกแถวแรกของเซอร์คูแรนเมทริกซ์มีสมาชิกเป็น $[0, a_2, ..., a_n]$ โดยที่ $a_i = a_{n-i+2}$ สำหรับ $i = 2, ..., n$ ดังนั้น ค่าเฉพาะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $E(G;k)$ ซึ่ง

$$E(G;k) = \sum_{j=1}^{n} a_j z^{j-1}$$

โดยที่ $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, $k = 1, 2, ..., n$

เนื่องจากกราฟวงกำลังสี่เป็นเซอร์คูแรนกราฟดังนั้น

$$E(C_n^4;k) = \sum_{j=1}^{n} a_j z^{j-1} \qquad (3.1)$$

โดยที่ $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, $k = 1, 2, ..., n$ ดังนั้นเมื่อพิจารณาแถวแรกของเมทริกซ์ประชิดของเซอร์คูแรนกราฟ จะเห็นว่า $a_j = 1$ สำหรับ $j = 2, 3, 4, 5, n-3, n-2, n-1$ และ n ดังนั้น

$$E(C_n^4;k) = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^{n-4} + z^{n-3} + z^{n-2} + z^{n-1} \qquad (3.2)$$

จาก (3.2) จะได้ว่า

$$E(C_n^4;k) = e^{\frac{2k\pi i}{n}} + e^{\frac{4k\pi i}{n}} + e^{\frac{6k\pi i}{n}} + e^{\frac{8k\pi i}{n}} + e^{\frac{2k(n-4)\pi i}{n}} + e^{\frac{2k(n-3)\pi i}{n}} + e^{\frac{2k(n-2)\pi i}{n}} + e^{\frac{2k(n-1)\pi i}{n}}$$

$$= e^{\frac{2k\pi i}{n}} + e^{\frac{4k\pi i}{n}} + e^{\frac{6\pi i}{n}} + e^{\frac{8\pi i}{n}} + e^{\frac{2kn\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{-8k\pi i}{n}} + e^{\frac{2kn\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{-6k\pi i}{n}} + e^{\frac{2kn\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{-4k\pi i}{n}} + e^{\frac{2kn\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{-2k\pi i}{n}}$$

โดยที่สูตรของออยเลอร์ คือ $e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$ และ $\cos(-\theta) = \cos\theta$ กับ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ทำให้ได้ว่า

$$E(C_n^4;k) = \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) + \left(\cos\frac{4k\pi}{n} + i\sin\frac{4k\pi}{n}\right)$$

$$+\left(\cos\frac{6k\pi}{n} + i\sin\frac{6k\pi}{n}\right) + \left(\cos\frac{8k\pi}{n} + i\sin\frac{8k\pi}{n}\right)$$

$$+\left(\cos\frac{-2k\pi}{n} + i\sin\frac{-2k\pi}{n}\right) + \left(\cos\frac{-4k\pi}{n} + i\sin\frac{-4k\pi}{n}\right)$$

$$+\left(\cos\frac{-6k\pi}{n} + i\sin\frac{-6k\pi}{n}\right) + \left(\cos\frac{-8k\pi}{n} + i\sin\frac{-8k\pi}{n}\right)$$

$$= \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) + \left(\cos\frac{4k\pi}{n} + i\sin\frac{4k\pi}{n}\right)$$

$$+\left(\cos\frac{6k\pi}{n} + i\sin\frac{6k\pi}{n}\right) + \left(\cos\frac{8k\pi}{n} + i\sin\frac{8k\pi}{n}\right)$$

$$+\left(\cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) + \left(\cos\frac{4k\pi}{n} - i\sin\frac{4k\pi}{n}\right)$$

$$+\left(\cos\frac{6k\pi}{n} - i\sin\frac{6k\pi}{n}\right) + \left(\cos\frac{8k\pi}{n} - i\sin\frac{8k\pi}{n}\right)$$

$$E(C_n^4;k) = 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 2\cos\frac{4k\pi}{n} + 2\cos\frac{6k\pi}{n} + 2\cos\frac{8k\pi}{n}$$

จาก $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{1}{2}\right)(\alpha+\beta)\cos\left(\frac{1}{2}\right)(\alpha+\beta)$ จะได้ว่า

$$E(C_n^4;k) = 2\left[2\cos\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4k\pi+2k\pi}{n}\right) + 2\cos\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4k\pi-2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$+2\left[2\cos\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{8k\pi+6k\pi}{n}\right) + 2\cos\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{8k\pi-6k\pi}{n}\right)\right]$$

$$= 4\left(\cos\frac{3k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right) + 4\left(\cos\frac{7k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$= 4\cos\frac{k\pi}{n}\left[2\cos\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{7k\pi+3k\pi}{n}\right)+2\cos\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{7k\pi-3k\pi}{n}\right)\right]$$

$$E(C_n^4;k) = 8\left(\cos\frac{k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{5k\pi}{n}\right) \tag{3.3}$$

ต่อไป เราจะแสดงบทตั้งที่จะนำมาใช้ในการพิสูจน์การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสี่

บทตั้ง 3.2 ให้ n เป็นจำนวนเต็มคี่ โดยที่ $n \geq 10$ และ $n \not\equiv 5 \bmod 10$ แล้ว

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{5k\pi}{n}\right) = 8^{-(n-1)}$$

พิสูจน์

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{5k\pi}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)2\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)2\sin\left(\frac{5k\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{5k\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)2\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)2\sin\left(\frac{5k\pi}{n}\right)}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{10k\pi}{n}\right)}{2\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)2\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)2\sin\left(\frac{5k\pi}{n}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{8^{n-1}}\left(\frac{\prod_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{10k\pi}{n}\right)}{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{(4k-2)\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{(10k-5)\pi}{n}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{8^{n-1}}\left(\frac{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{(4k-2)\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{(10k-5)\pi}{n}\right)}{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{(4k-2)\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{(10k-5)\pi}{n}\right)}\right)$$

$$= 8^{-(n-1)}$$

□

บทตั้ง 3.3 ให้ q เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\prod_{k=1}^{2q}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)\prod_{k=2q+2}^{4q+1}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)$$

$$\prod_{k=4q+3}^{6q+2}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)\prod_{k=6q+4}^{8q+3}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)$$

$$\prod_{k=8q+5}^{10q+4}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)=8^{-10q} \tag{3.4}$$

พิสูจน์ จากทางซ้ายมือของสมการ (3.4) จะได้

$$=\prod_{k=1}^{2q}\left(\frac{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}}{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}}\right)$$

$$\prod_{k=2q+2}^{4q+1}\left(\frac{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}}{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}}\right)$$

$$\prod_{k=4q+3}^{6q+2}\left(\frac{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}}{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}}\right)$$

$$\prod_{k=6q+4}^{8q+3}\left(\frac{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}}{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}}\right)$$

$$\prod_{k=8q+5}^{10q+4}\left(\frac{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}}{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}}\right)$$

$$=\prod_{k=1}^{2q}\left(\frac{\sin\frac{2k\pi}{10q+5}\sin\frac{4k\pi}{10q+5}\sin\frac{10k\pi}{10q+5}}{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}}\right)$$

$$\prod_{k=2q+2}^{4q+1}\left(\frac{\sin\frac{2k\pi}{10q+5}\sin\frac{4k\pi}{10q+5}\sin\frac{10k\pi}{10q+5}}{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}}\right)$$

$$\prod_{k=4q+3}^{6q+2}\left(\frac{\sin\frac{2k\pi}{10q+5}\sin\frac{4k\pi}{10q+5}\sin\frac{10k\pi}{10q+5}}{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}}\right)$$

$$\prod_{k=6q+4}^{8q+3}\left(\frac{\sin\frac{2k\pi}{10q+5}\sin\frac{4k\pi}{10q+5}\sin\frac{10k\pi}{10q+5}}{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}}\right)$$

$$\prod_{k=8q+5}^{10q+4}\left(\frac{\sin\frac{2k\pi}{10q+5}\sin\frac{4k\pi}{10q+5}\sin\frac{10k\pi}{10q+5}}{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}}\right)$$

$$=\frac{1}{8^{10q}}\frac{\prod_{k=1}^{q}\left(\sin\frac{(2k-1)\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-2)\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-5)\pi}{10q+5}\right)}{\prod_{k=1}^{q}\left(\sin\frac{(2k-1)\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-2)\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-5)\pi}{10q+5}\right)}$$

$$\frac{\prod_{k=2q+2}^{3q+1}\left(\sin\frac{(2k-(2q+1))\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-(4q+2))\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-(10q+5))\pi}{10q+5}\right)}{\prod_{k=2q+2}^{3q+1}\left(\sin\frac{(2k-(2q+1))\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-(4q+2))\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-(10q+5))\pi}{10q+5}\right)}$$

$$\frac{\prod_{k=4q+3}^{5q+2}\left(\sin\frac{(2k-(4q+3))\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-(8q+6))\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-(20q+15))\pi}{10q+5}\right)}{\prod_{k=4q+3}^{5q+2}\left(\sin\frac{(2k-(4q+3))\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-(8q+6))\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-(20q+15))\pi}{10q+5}\right)}$$

$$\frac{\prod_{k=6q+4}^{7q+3}\left(\sin\frac{(2k-(6q+3))\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-(12q+6))\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-(30q+15))\pi}{10q+5}\right)}{\prod_{k=6q+4}^{7q+3}\left(\sin\frac{(2k-(6q+3))\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-(12q+6))\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-(30q+15))\pi}{10q+5}\right)}$$

$$\frac{\prod_{k=8q+5}^{9q+4}\left(\sin\frac{(2k-(8q+5))\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-(16q+10))\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-(40q+25))\pi}{10q+5}\right)}{\prod_{k=8q+5}^{9q+4}\left(\sin\frac{(2k-(8q+5))\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-(16q+10))\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-(40q+25))\pi}{10q+5}\right)}$$

$$=8^{-10q}$$ □

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ C_n^4 เป็นกราฟวงกำลังสี่ที่จำนวนจุดยอด n จุดและ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 10 แล้ว

$$\det(A(C_n^4))=\begin{cases}0 & ;n\equiv 0,2,4,6,8 \pmod{10}\\ 8 & ;n\equiv 1,3,7,9 \pmod{10}\\ 128 & ;n\equiv 5 \pmod{10}\end{cases}$$

พิสูจน์ ให้ $E(C_n^4;k)$ เป็นค่าเฉพาะลำดับที่ k^{th} ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสี่ C_n^4

จากสมการ (3.3) จะได้

$$\det(A(C_n^4))=\prod_{k=1}^{n}E(C_n^4;k)$$

$$=\prod_{k=1}^{n}8\left(\cos\frac{k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{5k\pi}{n}\right) \tag{3.5}$$

เราแบ่งการพิจารณาเป็น 3 กรณี คือ

กรณีที่ 1 $n\equiv 0,2,4,6,8 \pmod{10}$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนคู่ และ $1\le k\le n$ และพิจารณาในกรณีที่ $k=\frac{n}{2}$ จะได้ว่า

$$E\left(C_n^2;\frac{n}{2}\right)=8\left(\cos\frac{\left(\frac{n}{2}\right)\pi}{n}\cos\frac{2\left(\frac{n}{2}\right)\pi}{n}\cos\frac{5\left(\frac{n}{2}\right)\pi}{n}\right)$$

$$=0$$

จากสมการ (3.5) เราได้ว่า

$$\det(A(C_n^4)) = \prod_{k=1}^{n} E(C_n^4;k)$$

$$= 0$$

กรณีที่ 2 $n \equiv 1,3,7,9 (\bmod 10)$ เนื่องจาก n เป็นจำนวนคี่ และ $n \not\equiv 5 (\bmod 10)$ ดังนั้น

จากสมการ (3.5) เราจะได้ว่า

$$\det(A(C_n^4)) = \prod_{k=1}^{n} E(C_n^4;k)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} 8\left(\cos\frac{k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{5k\pi}{n}\right)$$

$$= 8\left(\cos\frac{n\pi}{n}\cos\frac{2n\pi}{n}\cos\frac{5n\pi}{n}\right)8^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{5k\pi}{n}\right)$$

โดยบทตั้ง 3.2 เราจะได้ว่า

$$= 8 \cdot 8^{n-1} \cdot 8^{-(n-1)}$$

$$= 8$$

ดังนั้น $\det(A(C_n^4)) = 8$ เมื่อ $n \equiv 1,3,7,9 (\bmod 10)$

กรณีที่ 3 $n \equiv 5 (\bmod 10)$ นั้นก็คือ $n = 10q+5, q \in \mathbb{Z}^+$

และจากสมการ (3.5) ทำให้ได้ว่า

$$\det(A(C_n^4)) = \prod_{k=1}^{n} E(C_n^4;k)$$

$$= \prod_{k=1}^{10q+5} 8\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)$$

$$=8\left(\cos\frac{(2q+1)\pi}{10q+5}\cos\frac{2(2q+1)\pi}{10q+5}\cos\frac{5(2q+1)\pi}{10q+5}\right)$$

$$8\left(\cos\frac{(4q+2)\pi}{10q+5}\cos\frac{2(4q+2)\pi}{10q+5}\cos\frac{5(4q+2)\pi}{10q+5}\right)$$

$$8\left(\cos\frac{(6q+3)\pi}{10q+5}\cos\frac{2(6q+3)\pi}{10q+5}\cos\frac{5(6q+3)\pi}{10q+5}\right)$$

$$8\left(\cos\frac{(8q+4)\pi}{10q+5}\cos\frac{2(8q+4)\pi}{10q+5}\cos\frac{5(8q+4)\pi}{10q+5}\right)$$

$$8\left(\cos\frac{(10q+5)\pi}{10q+5}\cos\frac{2(10q+5)\pi}{10q+5}\cos\frac{5(10q+5)\pi}{10q+5}\right)$$

$$8^{10q}\prod_{k=1}^{2q}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)$$

$$\prod_{k=2q+2}^{4q+1}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)$$

$$\prod_{k=4q+3}^{6q+2}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)$$

$$\prod_{k=6q+4}^{8q+3}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)$$

$$\prod_{k=8q+5}^{10q+4}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)$$

$$=(-2)(-2)(-2)(-2)(8)(8^{10q})\prod_{k=1}^{2q}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)$$

$$\prod_{k=2q+2}^{4q+1}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)$$

$$\prod_{k=4q+3}^{6q+2}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)$$

$$\prod_{k=6q+4}^{8q+3}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)$$

$$\prod_{k=8q+5}^{10q+4}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)$$

โดยบทตั้ง 3.3 ทำให้ได้

$$\det(A(C_n^4))=128$$

ทำให้ได้ $\det(A(C_n^4))=128$ สำหรับ $n\equiv 5(\bmod 10)$

จากกรณีที่ 1 2 และ 3 สรุปได้ว่า

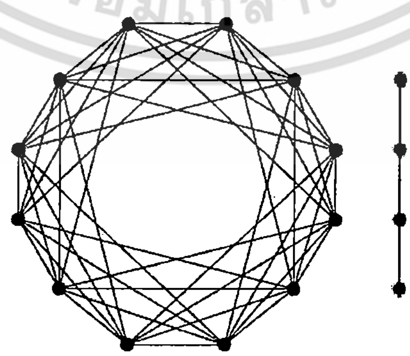
$$\det(A(C_n^4))=\begin{cases}0 & ;n\equiv 0,2,4,6,8(\bmod 10)\\ 8 & ;n\equiv 1,3,7,9(\bmod 10)\\ 128 & ;n\equiv 5(\bmod 10)\end{cases}$$

□

3.2 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟต่าง ๆ

ในส่วนนี้ เราจะกล่าวถึงการนำกราฟวงกำลังสี่มาดำเนินการกับกราฟอื่น ๆ ทำให้เกิดกราฟใหม่นั่นคือ

บทนิยาม 3.6 การดำเนินการบวกเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $G_1\dot{+}G_2$ คือ ให้ $G_1=(V_1,E_1)$ และ $G_2=(V_2,E_2)$ $(V_1\cap V_2=\varnothing)$ ดังนั้นกราฟที่เกิดจากการดำเนินการบวก คือกราฟ $G=(V,E)$ โดยที่ $V=V_1\cup V_2$ และ $E=E_1\cup E_2$



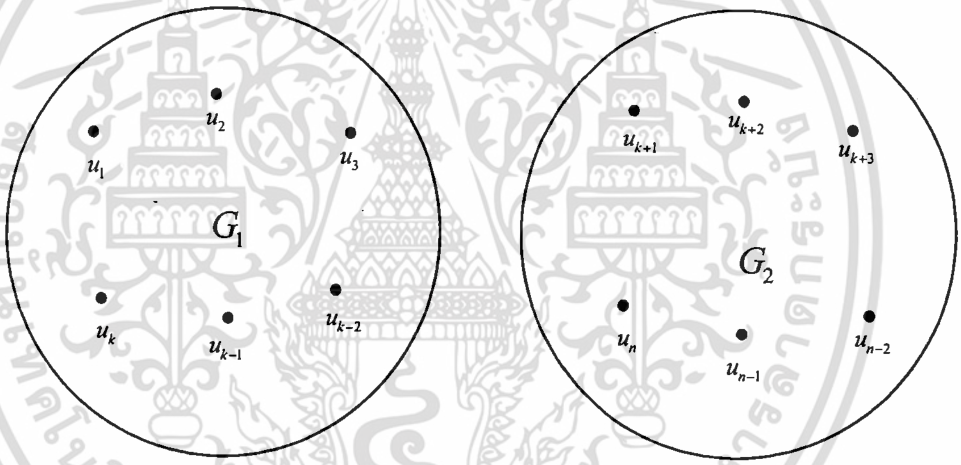
รูปที่ 3.1 กราฟ $C_{12}^4\dot{+}P_4$

ทฤษฎีบท 3.7 [8] ให้ A, B, C และ D เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ และ $m \times m$ ตามลำดับ แล้ว

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ \underline{0} & D \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & \underline{0} \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D)$$ โดยที่ $\underline{0}$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์

ทฤษฎีบท 3.8 ให้ G_1 และ G_2 เป็นกราฟเชิงเดียว แล้ว $\det(A(G_1 \dot{+} G_2)) = \det(A(G_1))\det(A(G_2))$

พิสูจน์ กำหนดให้กราฟ G_1 ประกอบด้วยจุดยอด $u_1, u_2, \ldots, u_k$ และให้กราฟ G_2 ประกอบด้วยจุดยอด $u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_n$ และเมื่อนำกราฟทั้งสองมาดำเนินการการบวก จะเป็นดังรูปข้างล่าง



รูปที่ 3.3 กราฟ $G_1 \dot{+} G_2$

จะเห็นได้ว่าจุดยอดของกราฟ G_1 และกราฟ G_2 ไม่ประชิดกันเลยและเมื่อเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ประชิดจะได้

$$A(G_1 \dot{+} G_2) = \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{k\text{ สมาชิก}} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{n-k\text{ สมาชิก}} \\ \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{c:c} A(G_1) & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & A(G_2) \end{array}\right]} \end{array}$$

สามารถเขียนใหม่ได้

$$A(G_1 \dot{+} G_2) = \begin{bmatrix} A(G_1) & \underline{0} \\ \underline{0} & A(G_2) \end{bmatrix}$$ โดยที่ $\underline{0}$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์

จากทฤษฎีบท 3.8 ทำให้ได้ว่า

$$\det(A(G_1 \dot{+} G_2)) = \det(A(G_1))\det(A(G_2))$$ □

กำหนดให้ G_1 แทนด้วยกราฟ $C_{n_1}^4$ และกราฟ G_2 แทนด้วยกราฟ P_{n_2} จะได้

$$\det(A(C_{n_1}^4 \dot{+} P_{n_2})) = \begin{cases} 0 & ; n_1 \equiv 0,2,4,6,8 \pmod{10} \ \text{ หรือ } \ n_2 = 2q_1 - 1 \\ 8 & ; n_1 \equiv 1,3,7,9 \pmod{10} \ \text{ และ } \ n_2 = 4q_1 \\ -8 & ; n_1 \equiv 1,3,7,9 \pmod{10} \ \text{ และ } \ n_2 = 4q_1 - 2 \\ 128 & ; n_1 \equiv 5 \pmod{10} \ \text{ และ } \ n_2 = 4q_1 \\ -128 & ; n_1 \equiv 5 \pmod{10} \ \text{ และ } \ n_2 = 4q_1 - 2 \end{cases}$$

โดยที่ q_1 เป็นจำนวนเต็มบวก

บทที่ 4

สรุป วิจารณ์และข้อเสนอแนะงานวิจัยในอนาคต

จากที่เราได้หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ประชิดของกราฟวงกำลังสองทำให้ได้ทั้งบทตั้งและทฤษฎีบทออกมาเป็นดังนี้

(1) ให้ n เป็นจำนวนเต็มคี่ โดยที่ $n \geq 10$ และ $n \not\equiv 5 \bmod 10$ แล้ว

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{5k\pi}{n}\right)=8^{-(n-1)}$$

(2) ให้ q เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\prod_{k=1}^{2q}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)\prod_{k=2q+2}^{4q+1}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)$$

$$\prod_{k=4q+3}^{6q+2}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)\prod_{k=6q+4}^{8q+3}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)$$

$$\prod_{k=8q+5}^{10q+4}\left(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}\right)=8^{-10q}$$

(3) ให้ C_n^4 เป็นกราฟวงกำลังสี่โดยมีจุดยอด n จุด ซึ่ง n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 10 แล้ว

$$\det(A(C_n^4))=\begin{cases}0 & ;n\equiv 0,2,4,6,8(\bmod 10)\\ 8 & ;n\equiv 1,3,7,9(\bmod 10)\\ 128 & ;n\equiv 5(\bmod 10)\end{cases}$$

(4) กำหนดให้ G_1 แทนด้วยกราฟ $C_{n_1}^4$ และกราฟ G_2 แทนด้วยกราฟ P_{n_2} จะได้

$$\det(A(C_{n_1}^4 \dot{+} P_{n_2}))=\begin{cases}0 & ;n_1\equiv 0,2,4,6,8(\bmod 10) \text{ หรือ } n_2=2q_1-1\\ 8 & ;n_1\equiv 1,3,7,9(\bmod 10) \text{ และ } n_2=4q_1\\ -8 & ;n_1\equiv 1,3,7,9(\bmod 10) \text{ และ } n_2=4q_1-2\\ 128 & ;n_1\equiv 5(\bmod 10) \text{ และ } n_2=4q_1\\ -128 & ;n_1\equiv 5(\bmod 10) \text{ และ } n_2=4q_1-2\end{cases}$$

โดยที่ q_1 เป็นจำนวนเต็มบวก

โครงงานวิจัยนี้ได้นำเสนอในงานประชุมวิชาการระดับนานาชาติชาติ คือ

การประชุมวิชาการนานาชาติ The Asian Mathematical Conference 2013 ณ เมืองปูซาน ประเทศสาธารณรัฐเกาหลี โดยนำเสนอเรื่อง "Determinant of Adjacency Matrix of C_n^4 "

และงานวิจัยที่อยู่ในระหว่างการส่งตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติ คือ

N. Adsawatithisakul and D. Samana, "Determinant of Adjacency Matrix of C_n^4."

บรรณานุกรม

[1] A.Abdollahi. "Determinant of adjacency matrices of graph." http://arxiv.org/abs/0908.3324, Cornell University.

[2] N.Biggs. **Algebraic Graph Theory**. Cambridge University Press, Cambridge, 1974.

[3] C.N. Campos and C.P.de Mello. "A result on the total colouring of powers of cycles." **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, 2004, 18, 47-52.

[4] D.M. Cvetkovic, M.Doob, and H. Sachs. **Spectra of Graphs: Theory and Application**. Academic Press, New York, 1980.

[5] M.Doob. "Circulant graphs with $\det(-A(G)) = -\deg(G)$:codeterminants with K_n." **Linear Algebra Appl**., 2002, 340, 87-96.

[6] L. Goldberg. **Matrix Theory with Applications**. McGraw – Hill International Editions, Mathematics and Statistics Series, 1991.

[7] B. Gyurov and J. Cloud. **On the algebraic properties of Pin-Wheel graphs and Applications.**, 73^{rd} annual meeting of the Oklahoma Arkansas section, 2011 University of central Oklahoma.

[8] I.N.Herstein and J.D.Winter. **Matrix Theory and Linear Algebra**. Maccmillan Publishing Company, a division of Macmillan, 1988.

[9] Y. Hoa, C. Woo and P. Chen. "On the sandpile group of the square cycle C_n^2.", **Linear Algebra Appl.**, 2006, 418, 457-467.

[10] S. Hu. "The Classification and maximum determinants of the adjacency matrices of graphs with one cycle." **J. Math. Study**, 2003, 36, no.1, 102-104.

[11] M. Krivelevich and A. Nachmias. "Colouring powers of cycles from random lists." **European Journal of Combinatorics**, 2004, 25, 961-968.

[12] D.Li and M.Liu. "Hadwiger's conjecture for powers of cycles and their complements." **European Journal of Combinatorics**, 2007, 28, 1152-1155.

[13] H.M.Rara. "Reduction procedures for calculating the determinant of the adjacency matrix of some graphs and the singularity of square planar grids." **Discrete Mathematics** 151, 1996, 213-219.

[14] D.B.West. **Introduction to Graph Theory**. Prentice – Hall, Inc, 1996.

[15] G.Williams. **Linear Algebra with Application**. Jones and Bartlett Publishers, LLC, 2011.

ประวัติผู้วิจัย

๑. ชื่อ - นามสกุล (ภาษาไทย) นายเดชา สมนะ

ชื่อ - นามสกุล (ภาษาอังกฤษ) Mr. Decha Samana

๒. เลขหมายบัตรประจำตัวประชาชน 3-5014-00695-37-6

๓. หน่วยงานและสถานที่อยู่ที่ติดต่อได้สะดวก พร้อมหมายเลขโทรศัพท์ โทรสาร และไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์ (e-mail)

ตึกจุฬาภรณ์ 1 ห้อง 227

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

dechasamana@hotmail.com and ksdecha@kmitl.ac.th

๔. ประวัติการศึกษา

Bachelor of Science (B.S.) (Mathematics), Naresuan University, Phisanulok, Thailand.

Master of Science (M.S.) (Applied Mathematics), Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand

Doctor of Philosophy (Ph.D.) (Mathematics), Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand

๕. ประสบการณ์งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และ/หรือที่ผ่านมา ทั้งภายในและภายนอกประเทศ โดยระบุสถานภาพในการทำวิจัยว่าเป็นผู้อำนวยการแผนงานวิจัย หัวหน้าโครงการวิจัย หรือผู้ร่วมวิจัยในแต่ละข้อเสนอการวิจัย

1. D. Samana and V. Longani, Finding Lower Bounds of Some Bipartite Ramsey Numbers Using Probabilistic Method, Proceeding of the 29th Congress on Science and Technology of Thailand 2003, Khon Kean University.

2. M. Podisuk, W. Rattanametawee and D. Samana, Applications of Orthogonal Polynomials, Proceedings of the 7th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Cancun, Mexico, 2005.

3. P. Pongsumpun and D. Samana, Mathematical model for asymptomatic and symptomatic infections of dengue disease, WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine, p. 264-269, Issue 3, Volume 3, March 2006.

4. D. Samana and V. Longani, Upper Bounds for Ramsey Numbers R(4,t), Advances and Applications in Discrete Mathematics, Volume 3, Issue 2, April(2009), p.151-154.

5. D. Samana and V. Longani, Lower Bounds of Ramsey Numbers R(k,l), IAENG International Journal of Applied Mathematics, Volume 39, Issue 4, November(2009), http://www.iaeng.org/IJAM.

6. D. Samana and V. Longani, A Lower Bound of Some Classical Ramsey Numbers R(3,t), The 8th International Conference on Optimaization: Techniques and Applications (ICOTA8), Fudan University, Shanghai, China, 2010.

7. D. Samana and N. Adsawatithisakul, Lower Bounds of Multicolor Bipartite Ramsey Numbers of $K_{p,p}$, Proceeding of The 16th Annual Meeting in Mathematics, Khon Kean University, Thailand , 2011.

8. Ch. Thaiprayoon, D. Samana and J. Tariboon, Three-point boundary value problems for second-order impulsive integro-differential equations,Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 5, 2011, no. 37-40, 1961-1972.

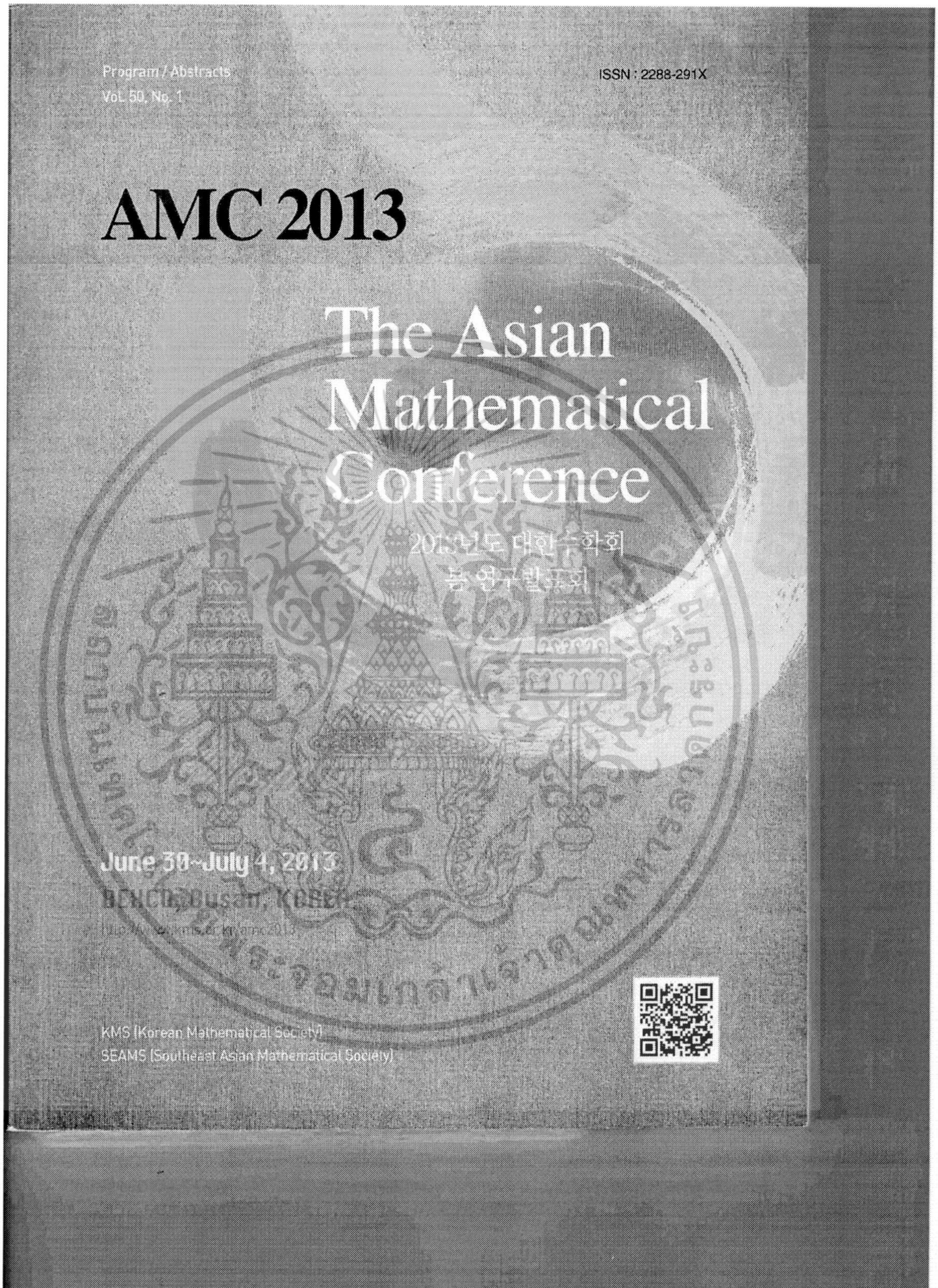
9. Ch. Thaiprayoon, D. Samana and J. Tariboon, Multi-point boundary value problem for first order impulsive integro-differential equations with multi-point jump conditions, Boundary Value Problems, Volume 2012, April (2012).

10. D. Samana and V. Longani, Upper Bounds of Ramsey Numbers, Applied Mathematical Sciences, Vol.6, 2012, no.98, 4857-4861.

11. D. Samana, Lower Bounds of Multicolor Bipartite Ramsey Numbers $br(K_{p,q};m)$, Applied Mathematical Science, Vol.6, 2012, no.98, 4863-4867.

12. D. Samana and V. Longani, Lower Bounds of Some Small Ramsey Numbers, Proceeding of the 33rd International Conference on Mathematical, Computational and Statistical Science, and Engineering, World Academy of Science, Engineering and Technology, Issue 69, Singapore 2012.

การเผยแพร่งานวิจัย


Program / Abstracts
Vol. 50, No. 1
ISSN : 2288-291X
AMC 2013
The Asian
Mathematical
Conference
June 30~July 4, 2013
KMS (Korean Mathematical Society)
SEAMS (Southeast Asian Mathematical Society)

e.g. Landau biological, Hakimi chemical, Kim et. al. and Newman et. al. network modeling. Bozoki, Fulop, Keri, Poesz, Ronyai et. al. economical, Liljeros et. al. human relation modeling, while Ivanyi et. al. and Pirzada et. al. sport applications.

Consider the result of a soccer league competition where n teams play each other exactly once. A team gets three points for each win and one point for each draw. The total score obtained by each team v_i is called the f-score of v_i and is denoted by f_i. The sequences of all f-scores $[f_i]_{i=1}^{n}$ arranged in non-decreasing order is called the f-score sequence of the competition. We raise the following problem: Which sequences of non-negative integers in non-decreasing order is a football sequence, that is the outcome of a soccer league competition.

We model such a competition by an oriented graph with teams represented by vertices in which the teams play each other once, with an arc from team u to team v if and only if u defeats v. An oriented graph is a digraph with no symmetric pairs of directed arcs and without loops. If D is an oriented graph with vertex set $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ and if $d^+(v_i)$ and $d^-(v_i)$ are respectively the out degree and in degree of a vertex v_i, define f_{v_i} (or briefly f_i) as $f_i = n - 1 + 2d^+(v_i) - d^-(v_i)$, and we note that this f_i is the football score(or briefly f-score) of v_i, as can be seen as follows. If $d^*(v)$ is the number of those vertices u in D for which we have $v(0--0)u$ (where $v(0--0)u$ means there is no arc between u and v), then $d^+(v) - d^-(v) + d^*(v) = n - 1$, so that $f_v = d^+(v) - d^-(v) + d^*(v) + 2d^+(v) - d^-(v) = 3d^+(v) + d^*(v)$. This implies that each vertex u with $v(1--0)u$ contributes three to the f-score of v, and each vertex u with $v(0--0)u$ contributes one to the f-score of v. We discuss several necessary conditions for football sequences and some characterizations under restrictions.

2010 Mathematics Subject Classification: 05C20, 05C30.
Key Words and Phrases: football sequence, oriented graph, football score.

Time: July 2 (Tue.) 17:20 – 17:40, Room: 106

CT-13. A characterization of connected 3-*i*-critical graphs containing a cutset of small order

Nawarat Ananchuen*, Department of Mathematics, Faculty of Science, Silpakorn University, Nakorn Pathom, Thailand
Watcharaphong Ananchuen, School of Liberal Arts, Sukhothai Thammathirat Open University, Pakkred, Nonthaburi 11120, Thailand
Louis Caccetta, Western Australian Centre of Excellence in Industrial Optimisation, Department of Mathematics and Statistics, Curtin University of Technology, GPO Box U1987, Perth 6845, Western Australia

A subset S of $V(G)$ is a dominating set for G if each vertex of $V(G)$ is either in S or adjacent to some vertex of S. Further, if $G[S]$ is independent, then S is called an *independent dominating set*. The *independent domination number* of$G$ denoted by $i(G)$ is the minimum cardinality of an independent dominating set for G. A graph G is k-i-critical if $i(G) = k$, but $i(G + uv) < k$ for any pair of non-adjacent vertices u and v of G. In this talk, we present a characterization of connected 3-i-critical graph G where the number of components of $G - S$ equals $|S|$ when S is a minimum cutset of small order.

2010 Mathematics Subject Classification: 05C69.
Key Words and Phrases: independent domination, critical, cutset.

Time: July 2 (Tue.) 17:40 – 18:00, Room: 106

CT-14. Determinant of adjacency matrix of C_n^4

Nitiphoom Adsawatithisakul*, Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalongkrung Road, Ladkrabang, Bangkok,

10520
Decha Samana, Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Chalongkrung Road, Ladkrabang, Bangkok, 10520

Cycle power, C_n^4 is a graph has n vertices and two vertices u and v are adjacent if and only if distance between u and v not greater than 4. In this paper, we show that the determinant of adjacency matrix of cycle power C_n^4 are as follows $det(A(C_n^4)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0,2,4,6,8 \bmod 10 \\ 8 & ; n \equiv 1,3,7,9 \bmod 10 \\ 128 & ; n \equiv 5 \bmod 10. \end{cases}$

2010 Mathematics Subject Classification: 05C50.
Key Words and Phrases: determinant, adjacency matrix, cycle power.

Time: July 2 (Tue.) 18:00 – 18:20, Room: 106

CT-15. Graphs of inversions in the symmetric and dihedral group

Severino V. Gervacio, Department of Mathematics, De La Salle University, 1004 Manila, Philippines
Teofina A. Rapanut, Department of Mathematics and Computer Science, University of the Philippines Baguio, 2600 Baguio City, Philippines
Phoebe Chloe F. Ramos*, Department of Mathematics and Computer Science, University of the Philippines Baguio, 2600 Baguio City, Philippines

Let $\sigma = x_1x_2x_3 \cdots x_n \in \mathbf{S_n}$. The graph G_σ of inversions of σ is the graph with vertex set $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ and edge set $E(G_\sigma) = \{x_ix_j : x_i > x_j, 1 \leq i < j \leq n\}$. We prove that a simple graph G is isomorphic to some graph of inversions G_σ, where σ is a permutation in the symmetric group $\mathbf{S_n}$, if G has a transitive orientation and if G does not contain an induced cycle of length greater than four. We then prove two theorems for isomorphism of graphs of inversions of permutations in $\mathbf{S_n}$. Next, we focus on the graphs of inversions of permutations in the dihedral group $\mathbf{D_n}$ and show that the types of graphs are complete bipartite graphs and disjoint union graphs. Finally a formula is given to determine the number of graphs in $\mathbf{D_n}$ up to isomorphism.

2010 Mathematics Subject Classification: 05C25, 20B30, 05C38.
Key Words and Phrases: symmetric group, dihedral group, inversions of permutations, graph of inversions, backward permutations, graph isomorphism, cycle, disjoint union graph, complete bipartite graph.

Time: July 3 (Wed.) 08:30 – 08:50, Room: 106

CT-16. Classification of combinatorially homogeneous digraphs

Wai-Keong Kok*, Tunku Abdul Rahman College
Lai-Chin Chin, Tunku Abdul Rahman College

A graph is *homogeneous* if whenever two induced subgraphs are isomorphic, then every isomorphism of one of the induced subgraph onto another induced subgraph can be extended to an automorphism of the graph. The homogeneity condition on graphs was first studied by Sheehan and then Enomoto completed the classification of homogeneous graphs elegantly. In this talk, we introduce the combinatorial approximation of the above concepts on digraph, namely, *combinatorially homogeneous digraphs* and present partial results on the classification of all the combinatorially homogeneous digraphs. We also demonstrate the relationship between combinatorially homogeneous digraphs and non-symmetric commutative association schemes since our investigation was heavily relied on the construction of certain classes of non-symmetric commutative association schemes.

Discussiones Mathematicae
Graph Theory xx (xxxx) 1–9

DETERMINANT OF ADJACENCY MATRIX OF C_N^4

NITIPHOOM ADSAWATITHISAKUL

Mathematics and Applied Statistics Program,
Faculty of Science and Technology, Nakhon Ratchasima Rajabhat University,
Nakhon Ratchasima, Thailand 30000

e-mail: na.adsawatithisakul@gmail.com

AND

DECHA SAMANA

Department of Mathematics,
Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang,
Bangkok, Thailand 10520

e-mail: dechasamana@hotmail.com

Abstract

Cycle power, C_n^4 is a graph has n vertices and two vertices u and v are adjacent if and only if distance between u and v not greater than 4. In this paper, we show that the determinant of adjacency matrix of cycle power C_n^4 are as follows

$$det(A(C_n^4)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0, 2, 4, 6, 8 \bmod 10 \\ 8 & ; n \equiv 1, 3, 7, 9 \bmod 10 \\ 128 & ; n \equiv 5 \bmod 10. \end{cases}$$

Keywords: Determinant, Adjacency matrix, Cycle power.
2010 Mathematics Subject Classification: 05C55.

1. INTRODUCTION

Let G be a simple undirected graph with n vertices and m edges. Let $V(G)$ and $E(G)$ denote the vertex set and edge set of G, respectively. The adjacency matrix $A(G)$ of G is the matrix $[a_{ij}]_{n\times n}$ where

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \text{if } v_i \text{ and } v_j \text{ are adjacent} \\ 0 & ; \text{othewise.} \end{cases}$$

We denote $det(A(G))$ is the determinant of adjacency matrix of G and $E(G;k)$ is k^{th} eigenvalues of the adjacency matrix which $det(A(G))$ and $E(G;k)$ are independent of the choice of vertices in adjacency matrix and are an invariant of G.

In [3] and [5] , they determined the determinant of adjacency matrix of some graphs, such as K_n, C_n, P_n and W_n. B. Gyurov and J. Cloud [7] has determined determinant of Pin-wheel graph. N. Adsawatithisakul and D. Samana [2] had found determinant of Square cycle graph. Moreover, there are studies of graph which satisfy some properties of determinant for example, M. Doob [6] construct circulant graph with $det(A(G)) = -deg(G)$, S. Hu [10] and A. Abdollahi [1] have found that the determinant of graphs with exactly one cycle and exactly two cycles, respectively.

Cycle power, C_n^d is a graph that has n vertices and distance each pair of vertex is less or equal d . For example,

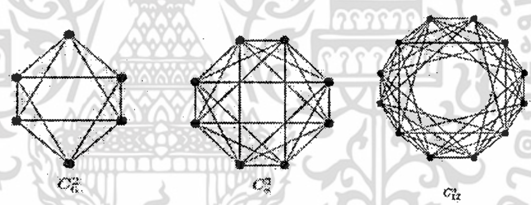


Figure 1. d-th power of cycle graph

Furthermore, there are studies of cycle power such as, C.N.Campos and C.P.de Mello [4] , M.Krivelevich and A.Nachmias [11] studied about the colouring in cycle power, Y.Hoa, C.Woo and P.Chen [9] investigate the sandpile group in cycle power , D.Li and M.Liu [12] consider cycle power and their complements which satisfy Hadwiger's conjecture.

Proposition 1. *[3] Suppose that $[0, a_2, ..., a_n]$ is the first row of the adjacency matrix of a circulant graph G. Then the eigenvalues of graph G is denoted $E(G;k)$,*

$$E(G;k) = \sum_{j=1}^{n} a_j z^{j-1}$$

where $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, k = 1, 2, ..., n$.

Cycle power C_n^4 is a circulant graph then eigenvalues of cycle power C_n^4 is

$$E(C_n^4;k) = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^{n-4} + z^{n-3} + z^{n-2} + z^{n-1}. \qquad (1)$$

Determinant of a square matrix can be find by eigenvalue its as below

Theorem 2. *[7] Let $\lambda_1, ..., \lambda_n$ be a eigenvalues of a square matrix A. Then*

$$det(A) = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n.$$

Next, we present lemma that will be used in the proof of determinant of adjacency matrix of cycle power C_n^4.

2. MAIN RESULTS

Lemma 3. *Let n be an odd integer when $n \geq 10$ and $n \not\equiv 5 \bmod 10$. Then*

$$\prod_{k=1}^{n-1}(\cos\frac{k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{5k\pi}{n}) = 8^{-(n-1)}.$$

Proof. It can be proved by

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n-1}(\cos\frac{k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{5k\pi}{n}) &= \prod_{k=1}^{n-1}\frac{\sin\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{4k\pi}{n}\sin\frac{10k\pi}{n}}{2\sin\frac{k\pi}{n}2\sin\frac{2k\pi}{n}2\sin\frac{5k\pi}{n}} \\
&= \frac{1}{8^{n-1}}\left(\frac{\prod_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n}\sin\frac{4k\pi}{n}\sin\frac{10k\pi}{n}}{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sin\frac{(4k-2)\pi}{n}\sin\frac{(10k-5)\pi}{n}}\right) \\
&= \frac{1}{8^{n-1}}\left(\frac{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sin\frac{(4k-2)\pi}{n}\sin\frac{(10k-5)\pi}{n}}{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{(2k-1)\pi}{n}\sin\frac{(4k-2)\pi}{n}\sin\frac{(10k-5)\pi}{n}}\right) \\
&= 8^{-(n-1)}.
\end{aligned}$$

■

Lemma 4. *Let q be a positive number. Then*

$$\prod_{k=1}^{2q}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5})\prod_{k=2q+2}^{4q+1}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}) \qquad (2)$$

$$\prod_{k=4q+3}^{6q+2}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5})\prod_{k=6q+4}^{8q+3}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5})$$

$$\prod_{k=8q+5}^{10q+4}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}) = 8^{-10q}$$

Proof. The left hand side of (2) is

$$\prod_{k=1}^{2q}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5})\prod_{k=2q+2}^{4q+1}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5})$$
$$\prod_{k=4q+3}^{6q+2}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5})\prod_{k=6q+4}^{8q+3}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5})$$
$$\prod_{k=8q+5}^{10q+4}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5})$$
$$=\left(\prod_{k=1}^{2q}\frac{\sin\frac{2k\pi}{10q+5}\sin\frac{4k\pi}{10q+5}\sin\frac{10k\pi}{10q+5}}{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}}\right)\left(\prod_{k=2q+2}^{4q+1}\frac{\sin\frac{2k\pi}{10q+5}\sin\frac{4k\pi}{10q+5}\sin\frac{10k\pi}{10q+5}}{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}}\right)$$
$$\left(\prod_{k=4q+3}^{6q+2}\frac{\sin\frac{2k\pi}{10q+5}\sin\frac{4k\pi}{10q+5}\sin\frac{10k\pi}{10q+5}}{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}}\right)\left(\prod_{k=6q+4}^{8q+3}\frac{\sin\frac{2k\pi}{10q+5}\sin\frac{4k\pi}{10q+5}\sin\frac{10k\pi}{10q+5}}{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}}\right)$$
$$\left(\prod_{k=8q+5}^{10q+4}\frac{\sin\frac{2k\pi}{10q+5}\sin\frac{4k\pi}{10q+5}\sin\frac{10k\pi}{10q+5}}{2\sin\frac{k\pi}{10q+5}2\sin\frac{2k\pi}{10q+5}2\sin\frac{5k\pi}{10q+5}}\right)$$
$$=\frac{1}{8^{10q}}\left(\frac{\prod_{k=1}^{q}\sin\frac{(2k-1)\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-2)\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-5)\pi}{10q+5}}{\prod_{k=1}^{q}\sin\frac{(2k-1)\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-2)\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-5)\pi}{10q+5}}\right)$$
$$\left(\frac{\prod_{k=2q+2}^{3q+1}\sin\frac{(2k-(2q+1))\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-(4q+2))\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-(10q+5))\pi}{10q+5}}{\prod_{k=2q+2}^{3q+1}\sin\frac{(2k-(2q+1))\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-(4q+2))\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-(10q+5))\pi}{10q+5}}\right)$$
$$\left(\frac{\prod_{k=4q+3}^{5q+2}\sin\frac{(2k-(4q+3))\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-(8q+6))\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-(20q+15))\pi}{10q+5}}{\prod_{k=4q+3}^{5q+2}\sin\frac{(2k-(4q+3))\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-(8q+6))\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-(20q+15))\pi}{10q+5}}\right)$$
$$\left(\frac{\prod_{k=6q+4}^{7q+3}\sin\frac{(2k-(6q+3))\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-(12q+6))\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-(30q+15))\pi}{10q+5}}{\prod_{k=6q+4}^{7q+3}\sin\frac{(2k-(6q+3))\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-(12q+6))\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-(30q+15))\pi}{10q+5}}\right)$$
$$\left(\frac{\prod_{k=8q+5}^{9q+4}\sin\frac{(2k-(8q+5))\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-(16q+10))\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-(40q+25))\pi}{10q+5}}{\prod_{k=8q+5}^{9q+4}\sin\frac{(2k-(8q+5))\pi}{10q+5}\sin\frac{(4k-(16q+10))\pi}{10q+5}\sin\frac{(10k-(40q+25))\pi}{10q+5}}\right)$$
$$=8^{-10q}$$

■

Next, we use Lemma 3 and 4 to find determinant of adjacency matrix of cycle power C_n^4.

Theorem 5. *Let C_n^4 be a cycle power with n vertices and n be a positive integer. Then*

$$det(A(C_n^4)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0, 2, 4, 6, 8 \bmod 10 \\ 8 & ; n \equiv 1, 3, 7, 9 \bmod 10 \\ 128 & ; n \equiv 5 \bmod 10. \end{cases}$$

Proof. Let $E(C_n^4; k)$ be a k^{th} eigenvalue of adjacency matrix of cycle power graph C_n^4. From (1), We get

$$\begin{aligned} E(C_n^4; k) &= e^{\frac{2k\pi i}{n}} + e^{\frac{4k\pi i}{n}} + e^{\frac{6k\pi i}{n}} + e^{\frac{8k\pi i}{n}} + e^{\frac{2k(n-4)\pi i}{n}} + e^{\frac{2k(n-3)\pi i}{n}} + e^{\frac{2k(n-2)\pi i}{n}} + e^{\frac{2k(n-1)\pi i}{n}} \\ &= e^{\frac{2k\pi i}{n}} + e^{\frac{4k\pi i}{n}} + e^{\frac{6k\pi i}{n}} + e^{\frac{8k\pi i}{n}} + e^{\frac{2kn\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{-8k\pi i}{n}} + e^{\frac{2kn\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{-6k\pi i}{n}} + e^{\frac{2kn\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{-4k\pi i}{n}} \\ &\quad + e^{\frac{2kn\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{-2k\pi i}{n}}. \end{aligned}$$

By Euler's formula, we obtain

$$\begin{aligned} E(C_n^4; k) &= (\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}) + (\cos\frac{4k\pi}{n} + i\sin\frac{4k\pi}{n}) \\ &\quad + (\cos\frac{6k\pi}{n} + i\sin\frac{6k\pi}{n}) + (\cos\frac{8k\pi}{n} + i\sin\frac{8k\pi}{n}) \\ &\quad + (\cos\frac{-8k\pi}{n} + i\sin\frac{-8k\pi}{n}) + (\cos\frac{-6k\pi}{n} + i\sin\frac{-6k\pi}{n}) \\ &\quad + (\cos\frac{-4k\pi}{n} + i\sin\frac{-4k\pi}{n}) + (\cos\frac{-2k\pi}{n} + i\sin\frac{-2k\pi}{n}) \\ &= 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 2\cos\frac{4k\pi}{n} + 2\cos\frac{6k\pi}{n} + 2\cos\frac{8k\pi}{n}. \end{aligned}$$

We can rewrite

$$E(C_n^4; k) = 8(\cos\frac{k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{5k\pi}{n}). \tag{3}$$

From (3) We have

$$\begin{aligned} det(A(C_n^4)) &= \prod_{k=1}^{n} E(C_n^4; k) \\ &= \prod_{k=1}^{n} 8(\cos\frac{k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{5k\pi}{n}). \end{aligned} \tag{4}$$

Consider n as follows

Case I, $n \equiv 0, 2, 4, 6, 8 \bmod 10$

Since n is even and $1 \leq k \leq n$, consider (3) when $k = \frac{n}{2}$. Then

$$
\begin{aligned}
E(C_n^4; \frac{n}{2}) &= 8(\cos\frac{\pi}{2}\cos\pi\cos\frac{5\pi}{2}) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

From (4), we obtain

$$
\begin{aligned}
det(A(C_n^4)) &= \prod_{k=1}^{n} E(C_n^4; k) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Therefore, $det(A(C_n^4)) = 0$ when $n \equiv 0, 2, 4, 6, 8 \bmod 10$.

Case II, $n \equiv 1, 3, 7, 9 \bmod 10$. Since n is odd and $n \not\equiv 5 \bmod 10$. Then

$$
\begin{aligned}
det(A(C_n^4)) &= \prod_{k=1}^{n} E(C_n^4; k) \\
&= \prod_{k=1}^{n} 8(\cos\frac{k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{5k\pi}{n}) \\
&= 8(\cos\frac{n\pi}{n}\cos\frac{2n\pi}{n}\cos\frac{5n\pi}{n}) \\
&\quad 8^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(\cos\frac{k\pi}{n}\cos\frac{2k\pi}{n}\cos\frac{5k\pi}{n})
\end{aligned}
$$

Using Lemma 3, we have

$$
\begin{aligned}
det(A(C_n^4)) &= \prod_{k=1}^{n} E(C_n^4; k) \\
&= 8 \cdot (8^{n-1}) \cdot (8^{-(n-1)}) \\
&= 8
\end{aligned}
$$

Therefore, $det(A(C_n^4)) = 8$ when n is odd and $n \not\equiv 5 \bmod 10$.

Case III, $n \equiv 5 \bmod 10$. Then $n = 10q + 5$, $\exists q \in \mathbb{Z}^+$.

From (4), we obtain

$$
\begin{aligned}
det(A(C_n^4)) &= \prod_{k=1}^{n} E(C_n^4;k) \\
&= \prod_{k=1}^{10q+5} 8(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}) \\
&= 8(\cos\frac{(2q+1)\pi}{10q+5}\cos\frac{2(2q+1)\pi}{10q+5}\cos\frac{5(2q+1)\pi}{10q+5}) \\
&\quad 8(\cos\frac{(4q+2)\pi}{10q+5}\cos\frac{2(4q+2)\pi}{10q+5}\cos\frac{5(4q+2)\pi}{10q+5}) \\
&\quad 8(\cos\frac{(6q+3)\pi}{10q+5}\cos\frac{2(6q+3)\pi}{10q+5}\cos\frac{5(6q+3)\pi}{10q+5}) \\
&\quad 8(\cos\frac{(8q+4)\pi}{10q+5}\cos\frac{2(8q+4)\pi}{10q+5}\cos\frac{5(8q+4)\pi}{10q+5}) \\
&\quad 8(\cos\frac{(10q+5)\pi}{10q+5}\cos\frac{2(10q+5)\pi}{10q+5}\cos\frac{5(10q+5)\pi}{10q+5}) \\
&\quad 8^{10q}\prod_{k=1}^{2q}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}) \\
&\quad \prod_{k=2q+2}^{4q+1}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}) \\
&\quad \prod_{k=4q+3}^{6q+2}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}) \\
&\quad \prod_{k=6q+4}^{8q+3}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}) \\
&\quad \prod_{k=8q+5}^{10q+4}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}) \\
&= (-2)(-2)(-2)(-2)(8)(8^{10q})\prod_{k=1}^{2q}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}) \\
&\quad \prod_{k=2q+2}^{4q+1}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}) \\
&\quad \prod_{k=4q+3}^{6q+2}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}) \\
&\quad \prod_{k=6q+4}^{8q+3}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}) \\
&\quad \prod_{k=8q+5}^{10q+4}(\cos\frac{k\pi}{10q+5}\cos\frac{2k\pi}{10q+5}\cos\frac{5k\pi}{10q+5}).
\end{aligned}
$$

Using Lemma 4, we have

$$\begin{aligned} det(A(C_n^4)) &= (-2)(-2)(-2)(-2)(8)(8^{10q})(8^{-10q}) \\ &= 128 \end{aligned}$$

Therefore $det(A(C_n^4)) = 128$ when $n \equiv 5 \bmod 10$
From case I, II and III, then

$$det(A(C_n^4)) = \begin{cases} 0 & ; n \equiv 0, 2, 4, 6, 8 \bmod 10 \\ 8 & ; n \equiv 1, 3, 7, 9 \bmod 10 \\ 128 & ; n \equiv 5 \bmod 10. \end{cases}$$

■

Observe that $det(A(C_n^d)) = 0$ where n and d are even and $n = 2 + 2d$, we have Corollary 6.

Corollary 6. *Determinant of the adjacency matrix of cycle power C_n^d is singular if and only if n and d are even and $n = 2 + 2d$.*

Proof. Let n and d be even. From proposition 1, we get

$$\begin{aligned} E(C_n^d; k) &= z + z^2 + \ldots + z^d + z^{n-d} + \ldots + z^{n-2} + z^{n-1} \\ &= 2\cos\frac{2k\pi}{n} + 2\cos\frac{4k\pi}{n} + \ldots + 2\cos\frac{2kd\pi}{n} \\ &= 2\sum_{j=1}^{d}\cos\frac{2jk\pi}{n} \end{aligned} \tag{5}$$

Since n is even and $1 \leq k \leq n$. Consider (5) when $k = \frac{n}{2}$. Then

$$\begin{aligned} E(C_n^d; \frac{n}{2}) &= 2\cos\frac{2(\frac{n}{2})\pi}{n} + 2\cos\frac{4(\frac{n}{2})\pi}{n} + \ldots + 2\cos\frac{2(\frac{n}{2})d\pi}{n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned} det(A(C_n^d)) &= \prod_{k=1}^{n} E(C_n^d; k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Therefore $det(C_n^d)$ is equal zero when n and d are even and $n = 2 + 2d$. ■

REFERENCES

[1] A. Abdollahi, *Determinant of adjacency matrices of graph*, http://arxiv.org/abs/0908.3324, Cornell University.

[2] N. Adsawatithisakul and D. Samana, *Determinant of adjacency matrix of square cycle graph*, International Journal of Pure and Applied Mathematics [(To appear)].

[3] N. Biggs, Algebraic Graph Theory (Cambridge University Press, Cambridge, 1974).

[4] C.N. Campos and C.P. De Mello, *A result on the total colouring of powers of cycles*, Electronic Notes in Discrete Mathematics 18 (2004) 47-52.

[5] D.M. Cvetkovic, M. Doob and H. Sachs, Spectra of Graphs: Theory and Application (Academic Press, New York, 1980).

[6] M. Doob, *Circulant graphs with* $det(-A(G)) = -deg(G)$ *:codeterminants with* K_n, Linear Algebra Appl **340** (2002) 87-96.

[7] L. Goldberg, Matrix Theory with Applications (McGraw - Hill International Editions, Mathematics and Statistics Series, 1991).

[8] B. Gyurov and J. Cloud, *On the algebraic properties of Pin-Wheel graphs and Applications*, 73^{rd} annual meeting of the Oklahoma Arkansas section 2011, University of central Oklahoma.

[9] Y. Hoa, C. Woo and P. Chen, *On the sandpile group of the square cycle* C_n^2, Linear Algebra Appl 418 (2006) 457-467.

[10] S. Hu, *The Classification and maximum determinants of the adjacency matrices of graphs with one cycle*, J. Math. Study **36** (2003) 102-104.

[11] M. Krivelevich and A. Nachmias, *Colouring powers of cycles from random lists*, European Journal of Combinatorics **25** (2004) 961-968.

[12] D.Li and M.Liu, *Hadwiger's conjecture for powers of cycles and their complements*, European Journal of Combinatorics **28** (2007) 1152-1155.