รายงานการวิจัย
การศึกษาจำนวนแรมเซย์บางจำนวน
Study of Some Ramsey Numbers

ดร. เดชา สมนะ

(หัวหน้าโครงการ)

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2554

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ชื่อโครงการ การศึกษาจำนวนแรมเซย์บางจำนวน

ชื่อโครงการ) Study of some Ramsey numbers

แหล่งเงิน เงินรายได้คณะวิทยาศาสตร์

ประจำปีงบประมาณ 2554 จำนวนเงินที่ได้รับการสนับสนุน 35,000 บาท

ระยะเวลาทำการวิจัย 1 ปี ตั้งแต่ 1 ตุลาคม 2553 ถึง 30 กันยายน 2554

ชื่อ-สกุล หัวหน้าโครงการ และผู้ร่วมโครงการวิจัย พร้อมระบุ หน่วยงานต้นสังกัดและ อีเมล์

ชื่อ-สกุล นายเดชา สมนะ

ตำแหน่งทางวิชาการ อาจารย์ สาขาวิชา คณิตศาสตร์

คณะ วิทยาศาสตร์ โทรศัพท์ 0-2326-4344 ต่อ 283 และ 0-2737-3000 ต่อ 6187

E-mail dechasamana@hotmail.com or ksdecha@kmitl.ac.th

คำสำคัญ (Keywords) Ramsey numbers, Lower Bounds, Upper Bounds, Multi-Ramsey numbers

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอพระคุณ ศ.ดร. วิเทศ ลงกานี ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ เป็นอย่างสูง ที่ให้คำปรึกษาและแนะนำแนวทางการทำวิจัย พร้อมทั้งให้ความรู้และประสบการณ์ต่าง ๆ มาด้วยตลอด

ขอขอบคุณ คณาจารย์ เจ้าหน้าที่ นักศึกษา ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่ช่วยเหลือในการอำนวยความสะดวกเกี่ยวกับอุปกรณ์ เอกสารต่าง ๆ ที่จำเป็นในการทำงานวิจัย

ขอขอบคุณ ครอบครัวสมนะ ที่ได้ส่งเสริมและสนับสนุน พร้อมทั้งให้กำลังใจในการทำงานวิจัย รวมทั้งนางสาววนิดา แก้วบูรณประเสริฐ และนายนิติภูมิ อัศวธิติสกุล ที่ช่วยในการเขียนโปรแกรมและเป็นผู้ช่วยวิจัยในงานวิจัยนี้

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอขอบคุณ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่สนับสนุนงบประมาณในการทำงานวิจัย

ดร. เดชา สมนะ

บทคัดย่อ

สำหรับจำนวนเต็มบวก s และ t จำนวนแรมเซย์ (Ramsey number) $R(s,t)$ คือ จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด n ซึ่งระบายสีเส้นให้กับ K_n ด้วยสีน้ำเงินหรือสีแดง จะมี K_s สีน้ำเงินเป็นสับกราฟ หรือ K_t สีแดงเป็นสับกราฟ

สำหรับกราฟ G_1 และ G_2 กำหนด จำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์ $br(G_1,G_2)$ คือ จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด n ซึ่งระบายสีเส้นให้กับ $K_{n,n}$ ด้วยสีน้ำเงินหรือสีแดง จะมี G_1 สีน้ำเงินเป็นสับกราฟ หรือ G_2 สีแดงเป็นสับกราฟ

ในปัจจุบันการหาจำนวนแรมเซย์หรือจำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์หายากมาก โครงงานวิจัยนี้จึงได้ทำการศึกษาการหาขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์หรือจำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์บางจำนวน คือ $R(3,10), R(3,11), R(3,12)$ และ $br(K_{p,p};m)$

ABSTRACT

For positive integers s and t, the Ramsey number $R(s,t)$ is the least positive integer n such that for any coloring of the edges of K_n with blue or red, there are blue K_s as a subgraph or red K_t as a subgraph.

For any G_1 and G_2, the bipartite Ramsey number $br(G_1,G_2)$ is the smallest positive integer n such that for any coloring of the edges $K_{n,n}$ with blue or red, there are blue G_1 as a subgraph or red G_2 as a subgraph.

The problem of determining Ramsey numbers or bipartite Ramsey numbers is known to be very difficult. This research study about finding lower bounds of some Ramsey numbers or some bipartite Ramsey numbers are $R(3,10), R(3,11), R(3,12)$ and $br(K_{p,p};m)$.

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

การหาจำนวนแรมเซย์เป็นเรื่องที่ค่อยข้างยาก ค่าจริงของจำนวนแรมเซย์ที่หาได้มีน้อย ส่วนใหญ่จะเป็นขอบเขตบนหรือขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ ซึ่งหาโดยใช้วิธีการหรือเทคนิคที่มีหลากหลายรูปแบบ จึงทำให้ผู้วิจัยต้องการศึกษานิยาม ทฤษฎี คุณสมบัติต่าง ๆ และวิธีการหาขอบเขตของจำนวนแรมเซย์บางจำนวน

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1. เพื่อศึกษานิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับจำนวนแรมเซย์
2. เพื่อศึกษาวิธีการหาจำนวนแรมเซย์
3. เพื่อศึกษาขอบเขตบนหรือขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์บางจำนวน

1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

1. ศึกษานิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับจำนวนแรมเซย์
2. ศึกษาวิธีการหาจำนวนแรมเซย์
3. ศึกษาขอบเขตบนหรือขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์บางจำนวน
4. หาขอบเขตบนหรือขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์บางจำนวน

การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ คือ JAVA

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับของโครงการวิจัย

1. เป็นการสร้างความรู้ ความเข้าใจเกี่ยวกับ ทฤษฎีกราฟ
2. สามารถนำความรู้เกี่ยวกับ ทฤษฎีกราฟ มาประยุกต์ในงานวิจัยได้
3. เป็นองค์ความรู้ใหม่ที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีกราฟ

1.5 ระเบียบวิธีวิจัย

1. ศึกษา ค้นคว้าเกี่ยวกับ ทฤษฎีกราฟ และ จำนวนแรมเซย์
2. ศึกษาวิธีการหาจำนวนแรมเซย์
3. ศึกษาขอบเขตบนหรือขอบเขตล่างของบางจำนวนแรมเซย์
4. สร้างขั้นตอนวิธีในการหาขอบเขตบนหรือขอบเขตล่างของบางจำนวนแรมเซย์
5. วิเคราะห์ผลในการหาขอบเขตบนหรือขอบเขตล่างของบางจำนวนแรมเซย์
6. พัฒนา แก้ไข และปรับปรุงขั้นตอนวิธีในการหาขอบเขตบนหรือขอบเขตล่างของบางจำนวนแรมเซย์
7. สรุปและรายงานผลการวิจัย

บทที่ 2

จำนวนแรมเซย์และจำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์

2.1 นิยามและทฤษฎีของ จำนวนแรมเซย์และจำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์

สำหรับจำนวนเต็มบวก s และ t *จำนวนแรมเซย์ (Ramsey number)* $R(s,t)$ คือ จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด n ซึ่งสำหรับทุกกราฟ G ที่มีจำนวนจุด n จุด กราฟ G บรรจุ K_s เป็นสับกราฟ หรือ คอมพลีเมนของกราฟ G บรรจุ K_t เป็นสับกราฟ

ในงานวิจัยนี้เราจะเรียก จำนวนแรมเซย์ $R(s,t)$ ว่า *จำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์*

(Classical Ramsey number)

สำหรับกราฟ G_1 และ G_2 กำหนด จำนวนแรมเซย์ $R(G_1,G_2)$ คือ จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด n ซึ่งสำหรับทุกกราฟ G ที่มีจำนวนจุด n จุด กราฟ G บรรจุ G_1 เป็นสับกราฟ หรือ คอมพลีเมนของกราฟ G บรรจุ G_2 เป็นสับกราฟ

จากนิยามข้างต้นเราจะเห็นว่า $R(t,s)=R(s,t)=R(K_s,K_t)=R(K_t,K_s)$

การศึกษาเกี่ยวกับจำนวนแรมเซย์มีมาแล้วกว่า 70 ปี โดยแรมเซย์นั้นคือชื่อของนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษนามว่า Frank Ramsey ในปี ค.ศ. 1930 [11] เขาได้แสดงว่าจำนวนแรมเซย์นั้นมีอยู่จริง ต่อมาได้มีการขยายจากการหาจำนวนแรมเซย์ $R(s,t)=R(K_s,K_t)$ ไปสู่การหา จำนวนแรมเซย์ $R(G_1,G_2)$ และ $R(G_1,G_2,\ldots,G_k)$ โดยที่ $G_1,G_2,\ldots,G_k$ เป็นกราฟใดๆ

จากนิยามเราจะเห็นได้ชัดเจนว่า จำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ $R(1,t)=1$ และ $R(2,t)=t$

ในปี ค.ศ. 1935 Erdos และ Szekers [2] ได้แสดงว่า

$$R(s,t)\le\binom{s+t-2}{s-1} \text{ และ } R(s,t)\le R(s-1,t)+R(s,t-1)$$

ต่อมา ในปี ค.ศ. 1955 Greenwood และ Gleason [3] ได้พิสูจน์ว่า $R(3,4)=9$ $R(3,5)=14$ และ $R(4,4)=18$

ค่าจริงของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์มีผู้หาได้เพียง 9 ค่า ดังตารางต่อไปนี้

s \ t	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	29
4		18	25				

ตารางที่ 1 จำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ที่ทราบค่า

ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1930 – ปัจจุบัน จำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ที่ทราบค่ามีน้อยมาก เนื่องจากการหาค่าจริงของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์นั้นค่อนข้างหายาก ดังนั้นจึงมีความพยายามที่หาขอบเขตบน(upper bound) และขอบเขตล่าง(lower bound)ของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์เพื่อหาค่าขอบเขตที่ดีของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ จากนั้นทำการพัฒนาและปรับปรุงเพื่อลดขอบเขตบนและเพิ่มขอบเขตล่างเพื่อจะทำให้ได้ค่าจริงของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ ซึ่งการพัฒนาและปรับปรุงดังกล่าวอาจใช้วิธีการพิสูจน์ หรือวิธีการพิสูจน์ร่วมกับการใช้คอมพิวเตอร์ หรือใช้คอมพิวเตอร์เพียงอย่างเดียว

ในปี ค.ศ. 1999 [8] ได้มีผู้รวบรวมทั้งค่าจริงของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ และขอบเขตบนและขอบเขตล่างของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ดังตารางต่อไปนี้ (การอ่านค่าจากตารางในแต่ละแถวของตารางกำหนดค่าที่อยู่ตรงกลางแถวคือค่าจริงของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ และค่าที่อยู่ข้างบนและล่างคือขอบเขตล่างและขอบเขตบนของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ตามลำดับ)

เช่น จากตารางข้างล่างเราจะได้ว่า $R(3,9)=36$ และ $40 \le R(3,10) \le 43$

จะเห็นว่าในเวลานั้นค่าจริงของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ และ ขอบเขตบนและขอบเขตล่างของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ที่ยังไม่มีผู้หายังมีอยู่มาก สังเกตได้จากช่องที่ว่างไว้

s \ t	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43	46 51	52 60	59 69	66 78	73 89	ขอบเขตล่าง ค่าจริง ขอบเขตบน
4		18	25	35 41	49 61	55 84	69 115	80 149	96 191	128 238	131 291	136 349	145 417	
5			43 49	58 87	80 143	95 216	116 316	141 442	153	181	193	221	237	
6				102 165	109 298	122 495	153 780	167 1171	203	224	242	258	338	
7					205 540	1031	1713	2826						
8						282 1870	3583	6090						
9							565 6588	12677						
10								798 23581						

ตารางที่ 2 ขอบเขตล่างและขอบเขตบนของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ ในปี ค.ศ. 1999 [8]

ต่อมาได้มีผู้หาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์เพิ่มขึ้น และดีขึ้นกว่าค่าเดิมอย่างมาก ใน ปี ค.ศ. 2009 [9] ได้มีผู้รวบรวมค่าจริงของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ และขอบเขตบนและขอบเขตล่างของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ดังตารางต่อไปนี้

s \ t	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43	46 51	52 59	59 69	66 78	73 88	ขอบเขตล่าง ค่าจริง ขอบเขตบน
4		18	25	35 41	49 61	56 84	73 115	92 149	97 191	128 238	133 291	141 349	153 417	
5			43 49	58 87	80 143	101 216	125 316	143 442	159 633	185 848	209 1139	235 1461	265 1878	
6				102 165	113 298	130 495	169 780	179 1171	253 1804	262 2566	317 3705	5033	401 6911	
7					205 540	216 1031	237 1713	289 2826	405 4553	416 6954	511 10581	15263	22116	
8						282 1870	317 3583	6090	10630	16944	817 27490	41525	861 63620	
9							565 6588	580 12677	22325	39025	64871	89203		
10								798 23556		81200			1265	

ตารางที่ 3 ขอบเขตล่างและขอบเขตบนของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ ในปี ค.ศ. 2009 [9]

ในปัจจุบัน ได้มีผู้หาขอบเขตบนและขอบเขตล่างของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ ดังตารางรางที่ 4

s \ t	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
3	6	9	14	18	23	28	36	40 43	46 51	52 59	59 69	66 78	73 88	ขอบเขตล่าง ค่าจริง ขอบเขตบน
4		18	25	35 41	49 61	56 84	73 115	92 149	98 191	128 238	133 291	141 349	153 417	
5			43 49	58 87	80 143	101 216	126 316	144 442	171 633	191 848	213 1139	239 1461	265 1878	
6				102 165	113 298	132 495	169 780	179 1171	253 1804	263 2566	317 3705	5033	401 6911	
7					205 540	217 1031	241 1713	289 2826	405 4553	417 6954	511 10581	15263	22116	
8						282 1870	317 3583	6090	10630	16944	817 27490	41525	861 63620	
9							565 6588	581 12677	22325	39025	64871	89203		
10								798 23556		81200			1265	

ตารางที่ 4 ขอบเขตล่างและขอบเขตบนของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ ในปี ค.ศ. 2011 [10]

จากตารางที่ 1-4 ได้แสดงขอบเขตและค่าจริงของจำนวนแรมเซย์แบบฉบับ $R(s,t)$ ที่ $s \leq 10$ และ $t \leq 15$

นอกจากนั้นได้มีผู้ให้นิยาม*จำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์ (Bipartite Ramsey Number)* และ *นิยามจำนวนไตรพาร์ไทต์แรมเซย์ (Tripartite Ramsey Number)* ซึ่งมีผู้ที่สนใจในการหาจำนวนดังกล่าวเช่นในเอกสารอ้างอิง [1] และ [4]

ในการหาจำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์นั้นเป็นเรื่องค่อนข้างยาก ซึ่งที่ผ่านมาส่วนใหญ่จะหาค่าขอบเขตบน หรือไม่ก็หาค่าขอบเขตล่าง อาทิเช่น

- ในปี ค.ศ. 1978 R.W. Irving [6] ได้แสดงว่า

$$br(K_{p,p},K_{p,p}) < 2^{p-1}(p-1)$$

- ในปี ค.ศ. 1998 J.H. Hattingh และ M.A. Henning [5] ได้แสดงว่า

$$br(K_{p,p},K_{p,p}) > \frac{\sqrt{2}}{e}p2^{\frac{p}{2}}$$

- ในปี ค.ศ. 2002 วิเทศ ลงกานี [7] ได้แสดงว่า

$$br(K_{1,n},K_{1,n}) = 4n-2 \quad n=1,2,...$$

$$br(K_{2,2},K_{2,2}) = 10,$$

$$br(K_{2,3},K_{2,3}) = 18$$

- ในปี ค.ศ. 2003 เดชา สมนะ และ วิเทศ ลงกานี [13] ได้แสดงว่า

ถ้า n,l_1,l_2,k_1,k_2 สอดคล้องกับอสมการ $\binom{n}{l_1}\binom{n}{l_2}2^{1-l_1l_2}+\binom{n}{k_1}\binom{n}{k_2}2^{1-k_1k_2}<1$

แล้ว $br(K_{l_1,l_2},K_{k_1,k_2}) > n$ เป็นต้น

บทที่ 3

ผลงานวิจัย

จากการศึกษานิยาม ทฤษฎี และวิธีการหาของจำนวนแรมเซย์และจำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์ ทางผู้วิจัยได้ผลของงานวิจัย 2 ส่วน คือ ขอบเขตล่างของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์บางจำนวน และ ขอบเขตล่างของจำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์ $K_{p,p}$ ที่ใช้สี m สี ซึ่งผลงานวิจัยแรกได้มาจากการออกแบบขั้นตอนวิธีแล้วนำไปประมวลผลด้วยคอมพิวเตอร์ทำให้ได้ขอบเขตล่างของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ $R(3,10), R(3,11),$ และ $R(3,12)$ ส่วนงานวิจัยที่สอง ผู้วิจัยได้ทำการพิสูจน์ว่า ขอบเขตล่างของจำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์ $K_{p,p}$ ที่ใช้สี m สี คือ $br(K_{p,p};m) \geq \left(p!\sqrt{m^{p^2-1}}\right)^{1/p}$

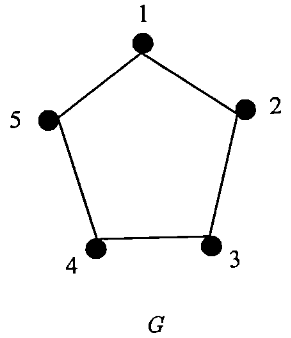
3.1 ขอบเขตล่างของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์

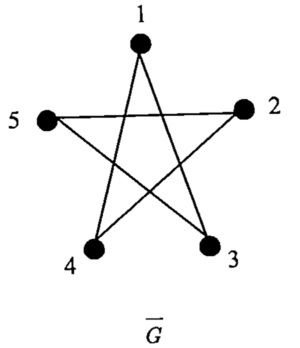
จากที่ทราบแล้วว่าการหาค่าจริงของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์เป็นเรื่องยาก ทำให้นักวิจัยต่าง ๆ ได้ออกแบบวิธีการหาขอบเขตของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ที่ดีเพื่อทำให้เข้าใกล้ค่าจริงของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ หนึ่งในวิธีนั้นคือออกแบบการสร้างกราฟ G ที่ไม่บรรจุ K_s เป็นสับกราฟ และกราฟ $\bar{G}$ ที่ไม่บรรจุ K_t เป็นสับกราฟ เพื่อหาขอบเขตล่างของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ โดยผู้วิจัยได้อาศัย line distance set ในการสร้างกราฟ G และกราฟ $\bar{G}$ ซึ่งจะหาขอบเขตล่างของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ $R(3,t)$

นิยาม 3.1 ให้กราฟ G มีจำนวนจุด n จุด และมีจุด i และจุด j เป็นจุดใด ๆ ในกราฟ G แล้ว เราจะเรียก d_{ij} ว่า line distance ของเส้น $\{i,j\}$ โดยที่

$$d_{ij} = \min\left\{|i-j|, n-|i-j|\right\}$$

เช่น ในรูปที่ 1 แสดงการสร้างกราฟ G และ $\bar{G}$ โดยสร้างจาก line distance sets $\{1\}$ และ $\{2\}$ ตามลำดับ





รูปที่ 1

บทตั้ง 3.2 ให้กราฟ G เป็นกราฟที่มี n จุด และให้ t เป็นจำนวนเต็มบวก และ i, j และ k เป็นจุดใด ๆ ในกราฟ G ซึ่ง d_{ij}, d_{ik} และ d_{jk} ไม่เป็นสมาชิกใน line distance set เดียวกัน และ t จุดใด ๆ ในกราฟ $\bar{G}$ ซึ่งทุก ๆ line distance ไม่เป็นสมาชิกในเซตเดียวกัน แล้ว n คือ จำนวนขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,t)$

พิสูจน์ จะเห็นได้ชัดว่า ถ้ากราฟใด ๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขจะเป็นไปตามบทตั้ง

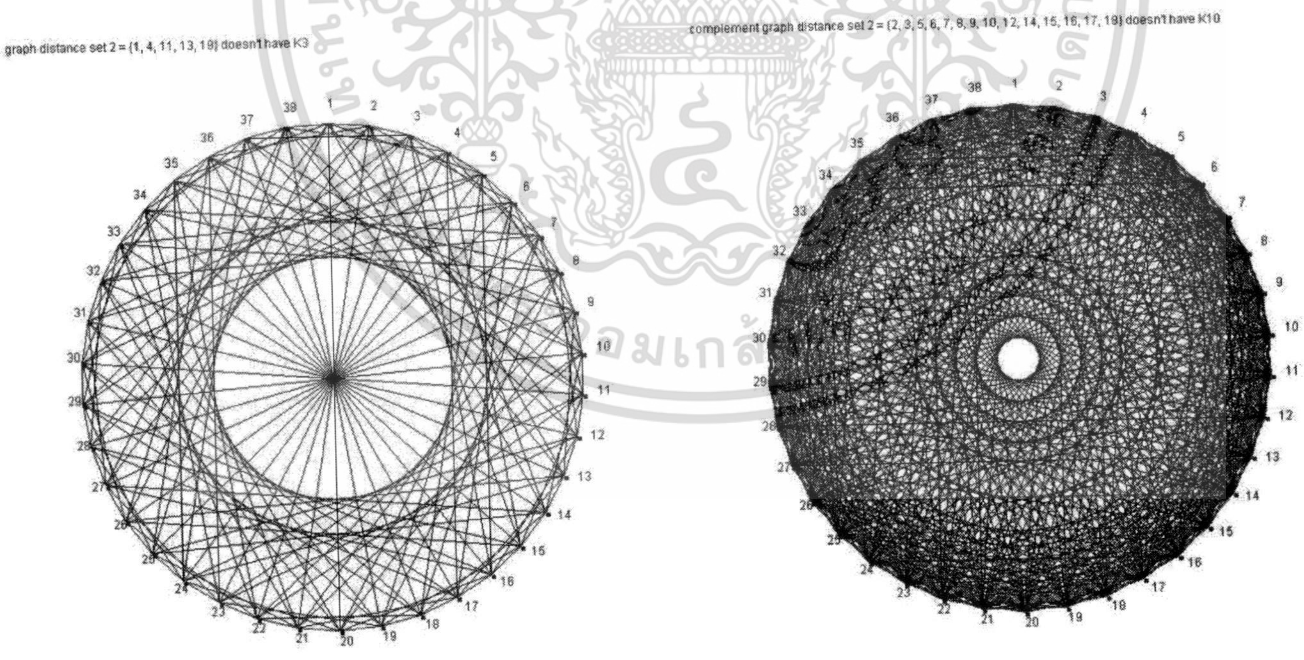
■

ผู้วิจัยได้หา line distance set จากการออกแบบขั้นตอนวิธี และได้ใช้บทตั้ง 3.2 มาตรวจสอบความถูกต้อง ทำให้ได้ขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ดังนี้

ทฤษฎีบท 3.3 $R(3,10) \geq 39$

พิสูจน์ รูปที่ 2a ถูกสร้างจาก line distance set $\{1,4,11,13,19\}$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าเป็นกราฟที่มีจำนวนจุด 38 จุดและเป็นกราฟที่ไม่มีสามเหลี่ยมบรรจุอยู่ และ คอมพลีเมนต์ของกราฟนี้คือ รูปที่ 2b ที่สร้างจาก line distance set $\{2,3,5,6,7,8,9,10,12,14,15,16,17,18\}$ ซึ่งไม่บรรจุกราฟ K_{10} เป็นสับกราฟ ดังนั้น

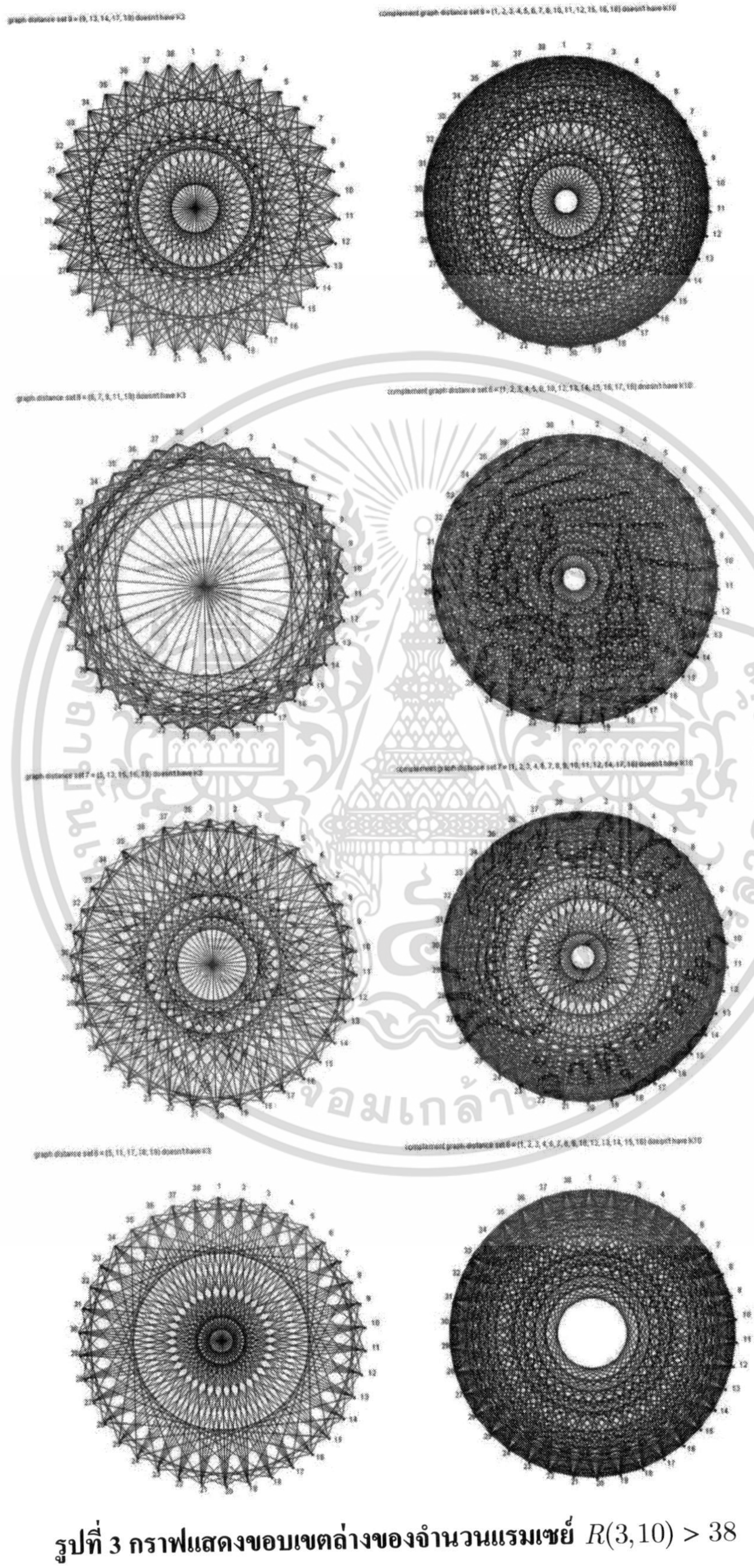
$$R(3,10) \geq 39$$



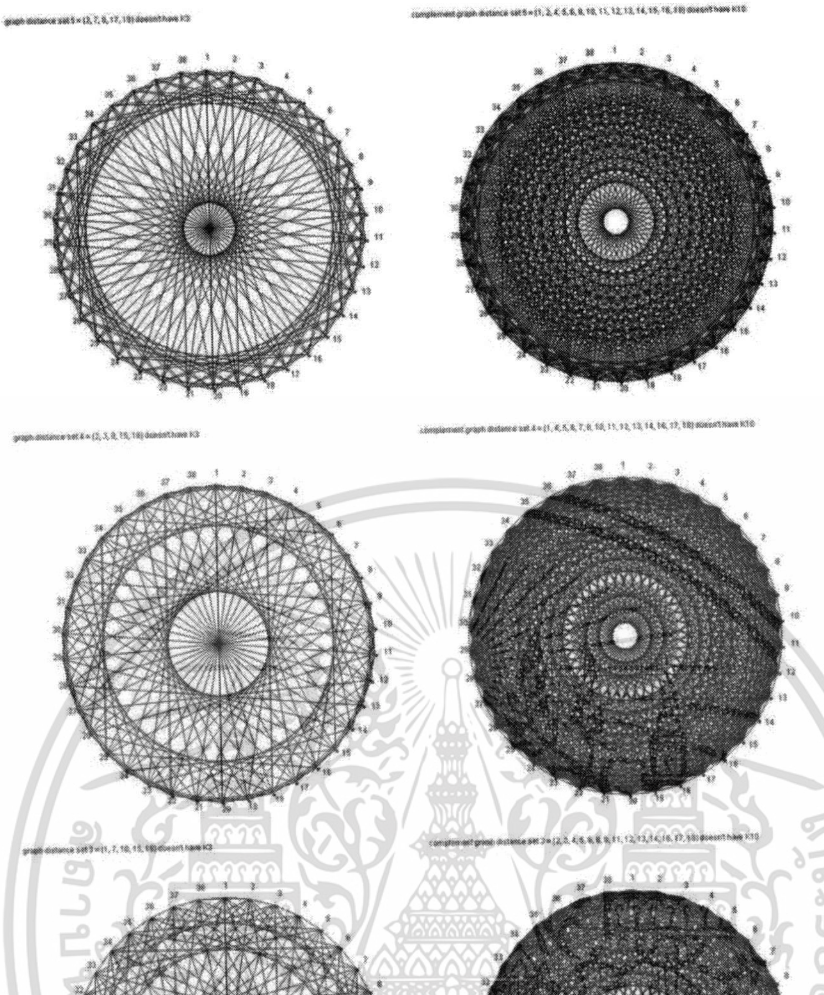
(a) (b)

รูปที่ 2 กราฟแสดงขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,10) > 38$

นอกจากนั้น เรายังได้กราฟ G และกราฟ $\bar{G}$ ที่สร้างจาก line distance อีก 8 เซต ที่สอดคล้องกับบทตั้ง 3.2 ดังรูปที่ 3 และ 4



รูปที่ 3 กราฟแสดงขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,10) > 38$

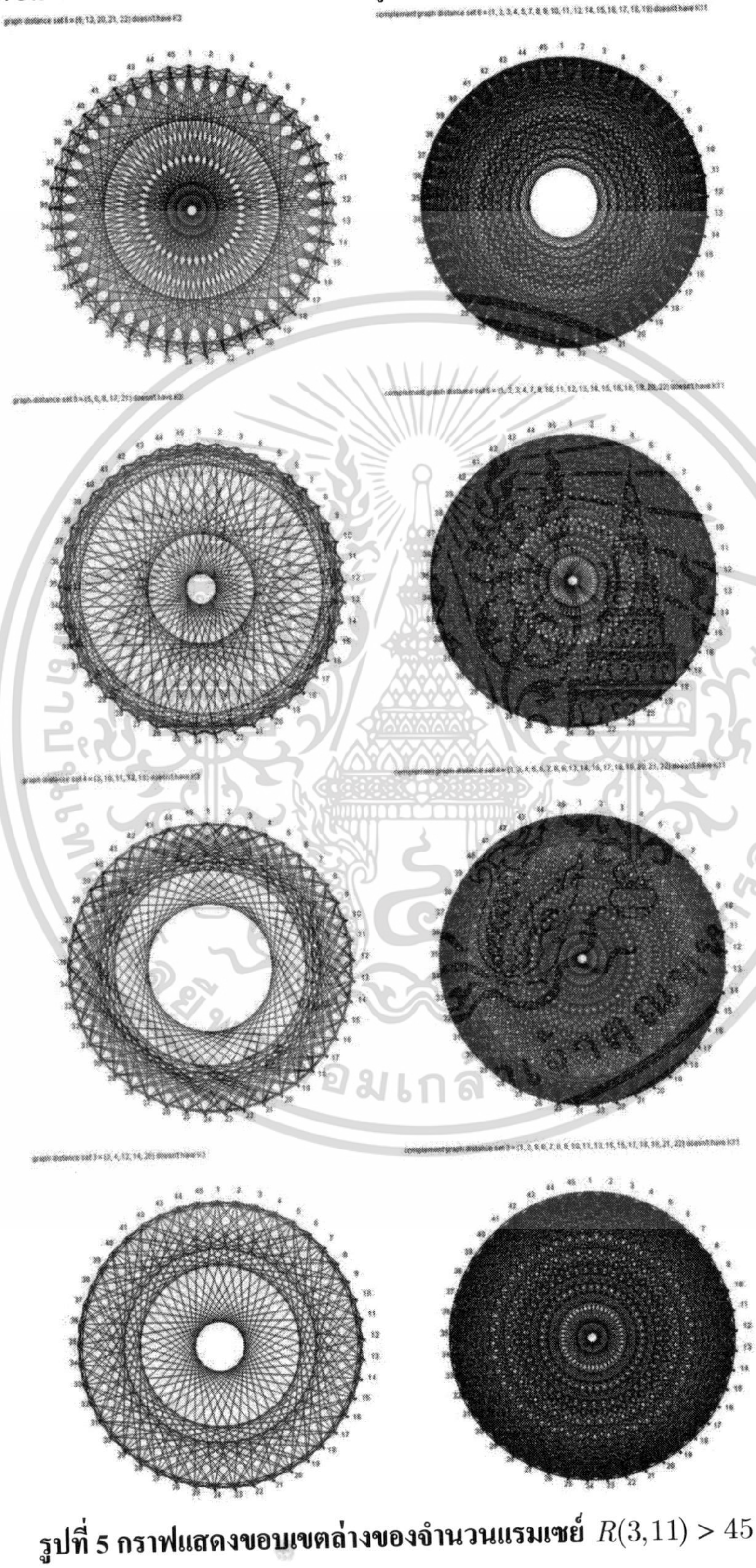


รูปที่ 4 กราฟแสดงขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,10) > 38$

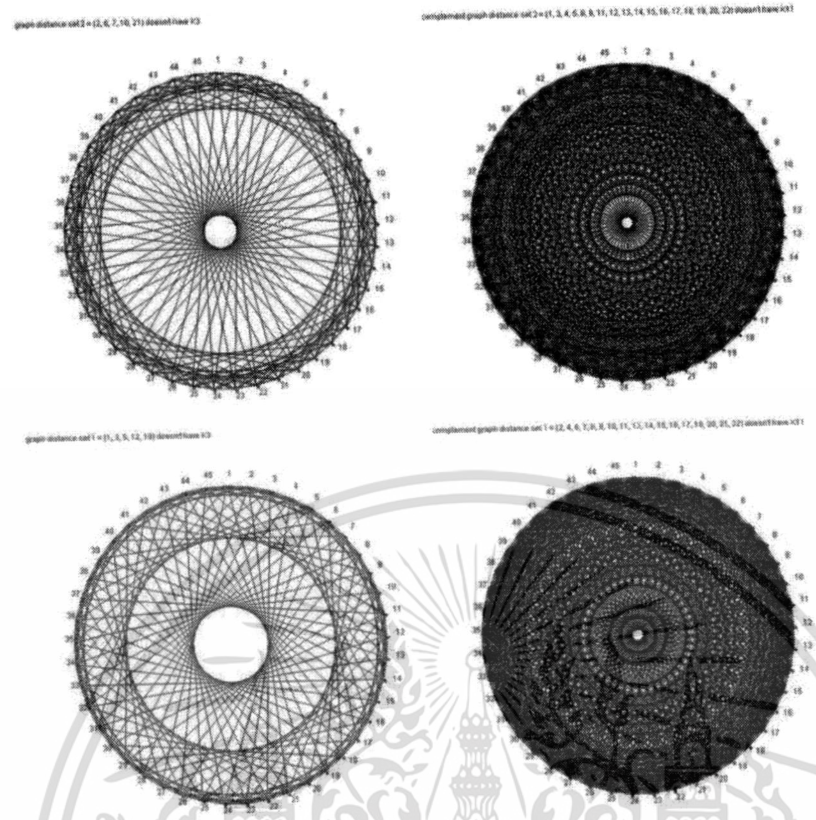
ดังนั้น ขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,10) \geq 39$ ■

ทฤษฎีบท 3.4 $R(3,11) \geq 46$

พิสูจน์ จากขั้นตอนวิธีในการหา line distance sets ในการสร้างกราฟ G และกราฟ $\bar{G}$ ที่สอดคล้องกับบทตั้ง 3.2 จากทฤษฎีบท 3.3 ทำให้ได้ line distance sets ดังรูปที่ 5 และ 6



รูปที่ 5 กราฟแสดงขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,11) > 45$



รูปที่ 6 กราฟแสดงขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,11) > 45$

ดังนั้น ขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,11) \geq 46$ ■

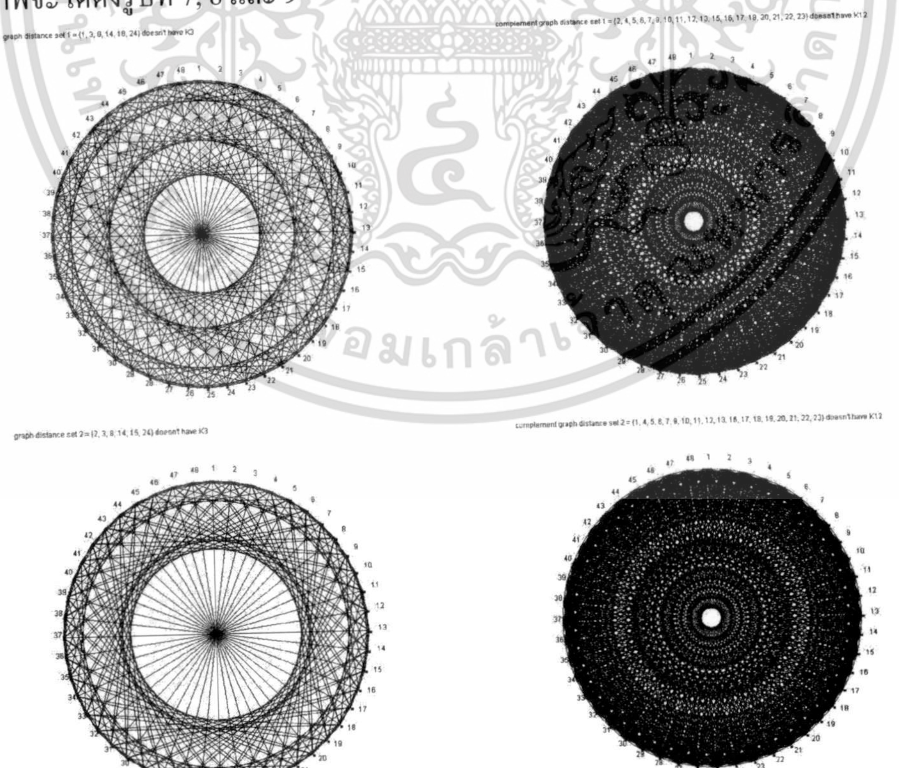
ทฤษฎีบท 3.5 $R(3,12) \geq 49$

พิสูจน์ จากการใช้ขั้นตอนวิธีเพื่อหาขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,10) \geq 39$ และ $R(3,11) \geq 46$ นั้น ก็ยังทำให้ได้ขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,12)$ โดยได้ line distance set ของกราฟ G และกราฟ $\bar{G}$ ที่สอดคล้องกับบทตั้ง 3.1 ทั้งหมด 12 line distance set ดังนี้

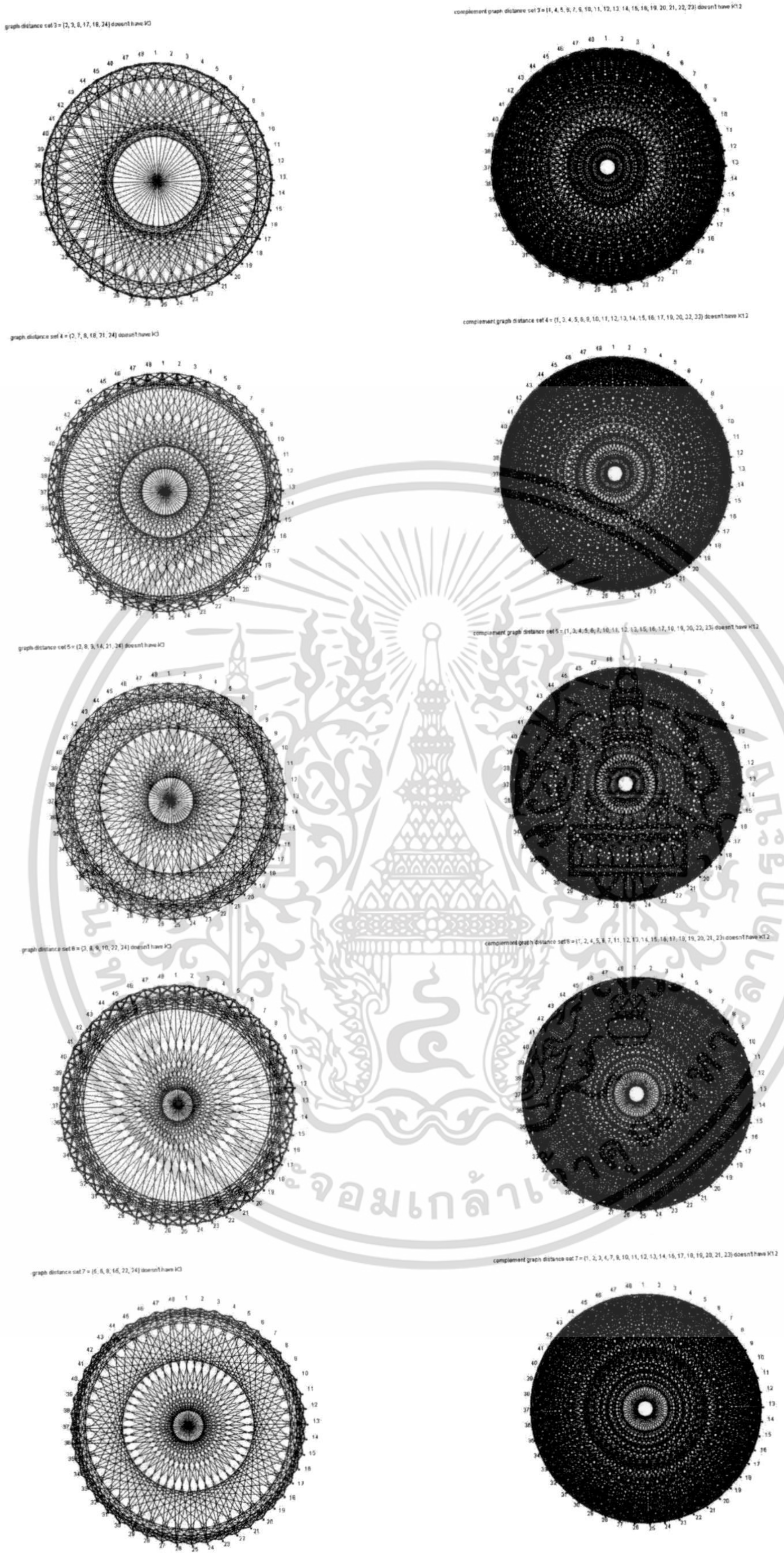
line distance set ของกราฟ G	**line distance set ของกราฟ** $\bar{G}$
{1,3,8,14,18,24}	{2,4,5,6,7,9,10,11,12,13,15,16,17,19,20,21,22,23}
{2,3,8,14,15,24}	{1,4,5,6,7,9,10,11,12,13,16,17,18,19,20,21,22,23}
{2,3,8,17,18,24}	{1,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15,16,19,20,21,22,23}

line distance set ของกราฟ G	line distance set ของกราฟ $\bar{G}$
{2,3,8,14,15,24}	{2,4,5,6,7,9,10,11,12,13,16,17,18,19,20,21,22,23}
{2,8,9,14,21,24}	{1,3,4,5,6,7,10,11,12,13,15,16,17,18,19,20,22,23}
{3,8,9,10,22,24}	{1,2,4,5,6,7,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,23}
{5,6,8,15,22,24}	{1,2,3,4,7,9,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,23}
{6,8,9,10,13,24}	{1,2,3,4,5,7,11,12,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23}
{6,8,9,19,22,24}	{1,2,3,4,5,7,10,11,12,13,14,15,16,17,18,20,21,23}
{6,8,10,11,15,24}	{1,2,3,4,5,7,9,12,13,14,16,17,18,19,20,21,22,23}
{8,10,15,21,22,24}	{1,2,3,4,5,6,7,9,11,12,13,14,16,17,18,19,20,23}
และ {8,14,18,21,23,24}	{1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,15,16,17,19,20,22}

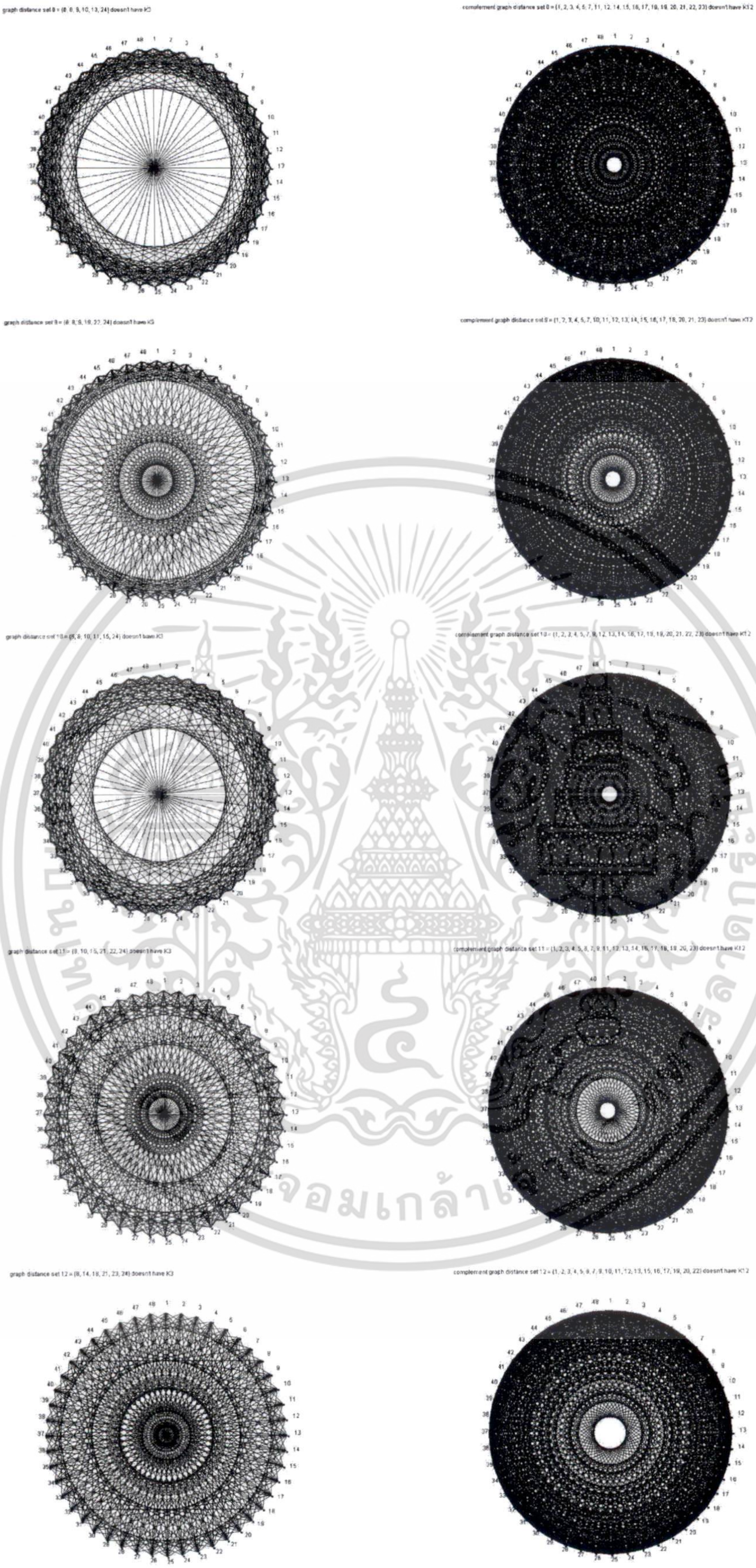
เมื่อนำไปเขียนกราฟจะได้ดังรูปที่ 7, 8 และ 9



รูปที่ 7 กราฟแสดงขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,12) > 48$



รูปที่ 8 กราฟแสดงขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,12) > 48$



รูปที่ 9 กราฟแสดงขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,12) > 48$

ดังนั้น ขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,12) \geq 49$

■

จะเห็นได้ว่า ขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,10), R(3,12)$ ที่ได้มีค่าที่น้อยกว่าขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ในตารางที่ 3 แต่ขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,11)$ ได้ค่าเท่ากับขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ในกับตารางที่ 3

3.2 ขอบเขตล่างของจำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์ $K_{p,p}$ ที่ใช้สี m สี

ในหัวข้อนี้ เราจะหาขอบเขตล่างของจำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์ $K_{p,p}$ ที่ใช้สี m สี ซึ่งได้อาศัยวิธีการของการหาขอบเขตล่างทั่วไป คือ จะแสดงว่า ในการระบายสี m สี ให้กับกราฟที่มีจำนวนจุดเป็นขอบเขตล่างของจำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์แล้วไม่บรรจุ $K_{p,p}$ ในกราฟนั้น

ผู้วิจัยได้ทำการพิสูจน์ ขอบเขตล่างของจำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์ $K_{p,p}$ ที่ใช้สี m สี ไว้ในทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.6 ให้ $K_{p,p}$ เป็นคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ แล้ว

$$br(K_{p,p};m) \geq \left(p!\sqrt{m^{p^2-1}}\right)^{1/p}$$

พิสูจน์ ให้ $K_{p,p}$ เป็นคอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟซึ่งมีการกำหนดจุดยอดในกราฟ คือ $v_1, v_2, \ldots, v_{2p}$ จะสังเกตเห็นว่า คอมพลีทไบพาร์ไทต์กราฟ $K_{n,n}$ จะมี

$$t = \left[\binom{n}{p}\right]^2 \text{ รูปแบบที่ซ้ำกันของ } K_{p,p}$$

นั่นคือ $(K_{p,p})_1, (K_{p,p})_2, \ldots, (K_{p,p})_t$ โดยจะเรียกการระบายสี m สีในกราฟ $K_{n,n}$ ว่า $(K_{p,p})_i$ *-bad coloring* ถ้าทุก ๆ เส้นของกราฟ $K_{p,p}$ ที่เป็นสับกราฟของกราฟ $K_{n,n}$ มีการระบายสีเดียวเหมือนกัน

เนื่องจากในการระบายสี m สีในกราฟ $K_{n,n}$ จะมีวิธีการระบายสีได้ m^{n^2} วิธี และจะมี $(K_{p,p})_i$ *-bad coloring* $m^{n^2-p^2+1}$ วิธี ดังนั้นจะมี $(K_{p,p})_i$ *-bad coloring* ได้อย่างมากที่สุด $tm^{n^2-p^2+1}$ วิธี สำหรับ

บางสี i ดังนั้น ถ้า $tm^{n^2-p^2+1} < m^{n^2}$ เป็นจริงแล้ว การระบายสี m สี โดยที่ ไม่มี monochromatic ของรูปแบบที่ซ้ำกันของ $K_{p,p}$ ใน $K_{n,n}$ จะทำให้ได้ว่า

$$m^{p^2+1} > \left(\frac{n^p}{p!}\right)^2 > \left[\binom{n}{p}\right]^2 = t$$

สมมูลกับ

$$n < \left(p!\sqrt{m^{p^2-1}}\right)^{1/p}$$

สรุปได้ว่า $$br(K_{p,p};m) \geq \left(p!\sqrt{m^{p^2-1}}\right)^{1/p}$$

□

บทที่ 4

สรุป วิจารณ์และข้อเสนอแนะงานวิจัยในอนาคต

4.1 ขอบเขตล่างของจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์

ผลวิจัยในส่วนนี้จากการเขียนขั้นตอนวิธีและประมวลผลทางคอมพิวเตอร์ ทำให้ได้ขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,10), R(3,12)$ ที่ได้มีค่าที่น้อยกว่าขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ในตารางที่ 3 แต่ขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ $R(3,11)$ ได้ค่าเท่ากับขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ในกับตารางที่ 3 ทำให้เห็นได้ว่า การออกแบบขั้นตอนวิธียังมีข้อบกพร่องจึงทำให้ได้ค่าของขอบเขตล่างของจำนวนแรมเซย์ที่มีค่าไม่ดีพอ และจากการประมวลผลยังพบปัญหาในการใช้เวลาประมวลผลนานมาก เนื่องจากทางผู้วิจัยใช้คอมพิวเตอร์ PC ทั่วไปในการประมวลผล

ดังนั้น การจะหาขอบเขตล่างจำนวนคลาสซิเคิลแรมเซย์ให้ได้ผลดีควรมีการออกแบบขั้นตอนวิธีที่เหมาะสมและมีคอมพิวเตอร์ที่ประสิทธิภาพสูงใช้ในการประมวลผล

4.2 ขอบเขตล่างของจำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์ $K_{p,p}$ ที่ใช้สี m สี

จากทฤษฎีบท 3.6 ทำให้ได้ขอบเขตล่างของจำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์ $K_{p,p}$ ที่ใช้สี m สี ที่มีค่าดีกว่าทฤษฎีบทใน [13] ซึ่งได้แสดงไว้ในตารางที่ 5 เปรียบเทียบกับตารางที่ 6

$br(K_{p,p};m)$		m								
		2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	2	>2	>3	>4	>5	>5	>6	>7	>7	>8
	3	>5	>8	>12	>16	>20	>24	>29	>34	>39
	4	>8	>17	>30	>45	>64	>85	>109	>136	>166
	5	>14	>36	>73	>124	>192	>278	>383	>508	>654

ตารางที่ 5 ขอบเขตล่างของจำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์ $K_{p,p}$ ที่ใช้สี m สี ที่ได้จากทฤษฎีบท 3.6

$br(K_{p,p};m)$		m								
		2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	2	>2	>2	>3	>3	>3	>4	>4	>4	>4
	3	>5	>6	>10	>12	>15	>18	>21	>24	>27
	4	>9	>16	>26	>38	>52	>68	>85	>105	>125
	5	>14	>34	>65	>107	>162	>230	>313	>409	>521

ตารางที่ 6 ขอบเขตล่างของจำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์ $K_{p,p}$ ที่ใช้สี m สี ที่ได้จาก [10]

สังเกตจะเห็นได้ว่าค่าขอบเขตล่างของจำนวนไบพาร์ไทต์แรมเซย์ $K_{p,p}$ ที่ใช้สี m สี ที่ได้จาก **ทฤษฎีบท** 3.6 จะมีค่าดีมาก ๆ เมื่อ จำนวนสีมากขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อเปรียบเทียบกับ [13]

โครงงานวิจัยนี้ได้นำเสนอในงานประชุมวิชาการ 2 ครั้ง [12,14] ดังนี้

1. The 8th International Conference on Optimaization: Techniques and Applications (ICOTA8), Fudan University, Shanghai, China, 2010. โดยนำเสนอเรื่อง

   "A Lower Bound of Some Classical Ramsey Numbers R(3,t)"

2. The 16th Annual Meeting in Mathematics, Khon Kean University, Thailand , 2011. โดยนำเสนอเรื่อง

   "Lower Bounds of Multicolor Bipartite Ramsey Numbers"

บรรณานุกรม

[1] J. Bottcher, J. Hladky and D. Piguet, Tripartite Ramsey for trees, Eletronic note in Discrete Math 34(2009), 597-601.

[2] P. Erdos and G. Szekers, A combinatorial problem in geometry, Compositio Math., 2 (1935) 463-470.

[3] R. E. Greenwood and A. M. Gleason, Combinatorial relations and chromatic graphs, Canad. J. Math. 7(1955),1-7.

[4] A. Gyarfas, M. Ruszinko, G. N. Sarkozy and E. Szemeredi, Tripartite Ramsey numbers for paths, J. Graph Theory, 55 (2007) 164-174.

[5] J. H. Hattingh and M. A. Henning, Bipartite Ramsey theory, Utilitas Math. 53(1998), 217-230.

[6] R. W. Irving, A bipartite Ramsey problem and the Zarankiewicz numbers, Glasgow Math. J. (1978), 13-26.

[7] V. Longani, Some bipartite Ramsey numbers, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 26(2002), Number 4, 583-592.

[8] S.P.Radziszowski, Small Ramsey Numbers, Electronic Journal of Combinatorics, Dynamic Survey 1, revision#6, July 1999, http://www.combinatorics.org.

[9] S.P.Radziszowski, Small Ramsey Numbers, Electronic Journal of Combinatorics, Dynamic Survey 1, revision#12, August 2009, http://www.combinatorics.org.

[10] S.P.Radziszowski, Small Ramsey Numbers, Electronic Journal of Combinatorics, Dynamic Survey 1, revision#13, August 2011, http://www.combinatorics.org.

[11] F.P. Ramsey, On a Problem of Formal Logic, Proceedings of the London Mathematical Society, 30(1930), 264-286.

[12] D. Samana and N. Adsawatithisakul, Lower Bounds of Multicolor Bipartite Ramsey Numbers, Proceeding of The 16th Annual Meeting in Mathematics, Khon Kean University, Thailand , 2011.

[13] D. Samana and V. Longani, Finding lower bounds of some bipartite Ramsey numbers using probabilistic method, Thesis for Master of Science, Chiang Mai University, 2003.

[14] D. Samana and V. Longani, A Lower Bound of Some Classical Ramsey Numbers R(3,t), The 8th International Conference on Optimaization: Techniques and Applications (ICOTA8), Fudan University, Shanghai, China, 2010.

ประวัติผู้วิจัย

๑. ชื่อ - นามสกุล (ภาษาไทย) นายเดชา สมนะ
ชื่อ - นามสกุล (ภาษาอังกฤษ) Mr. Decha Samana

๒. หน่วยงานและสถานที่อยู่ที่ติดต่อ

ตึกจุฬาภรณ์ 1 ห้อง 227

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

dechasamana@hotmail.com and ksdecha@kmitl.ac.th

๓. ประวัติการศึกษา

Bachelor of Science (B.S.) (Mathematics), Naresuan University, Phisanulok, Thailand.

Master of Science (M.S.) (Applied Mathematics), Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand.

Doctor of Philosophy (Ph.D.) (Mathematics), Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand.

๔. งานวิจัย

1. D. Samana and V. Longani, Finding Lower Bounds of Some Bipartite Ramsey Numbers Using Probabilistic Method, Proceeding of the 29th Congress on Science and Technology of Thailand 2003, Khon Kean University.

2. M. Podisuk, W. Rattanametawee and D. Samana, Applications of Orthogonal Polynomials, Proceedings of the 7th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Cancun, Mexico, 2005.

3. P. Pongsumpun and D. Samana, Mathematical model for asymptomatic and symptomatic infections of dengue disease, WSEAS Transactions on Biology and Biomedicine, p. 264-269, Issue 3, Volume 3, March 2006.

4. D. Samana and V. Longani, Upper Bounds for Ramsey Numbers R(4,t), Advances and Applications in Discrete Mathematics, Volume 3, Issue 2, April(2009), p.151-154.

5. D. Samana and V. Longani, Lower Bounds of Ramsey Numbers R(k,l), IAENG International Journal of Applied Mathematics, Volume 39, Issue 4, November(2009), http://www.iaeng.org/IJAM.

6. D. Samana and V. Longani, A Lower Bound of Some Classical Ramsey Numbers R(3,t), The 8th International Conference on Optimaization: Techniques and Applications (ICOTA8), Fudan University, Shanghai, China, 2010.

7. D. Samana and N. Adsawatithisakul, Lower Bounds of Multicolor Bipartite Ramsey Numbers, Proceeding of The 16th Annual Meeting in Mathematics, Khon Kean University, Thailand , 2011.

8. Ch. Thaiprayoon, D. Samana and J. Tariboon, Three-point boundary value problems for second-order impulsive integro-differential equations,Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 5, 2011, no. 37-40, 1961-1972.

Proceedings of the 16th Annual Meeting in Mathematics (AMM2011), pp. 167–169
Khon Kaen University, Khon Kaen, Thailand, March 10–11, 2011

Lower Bounds of Multicolor Bipartite Ramsey Numbers of $K_{p,p}$

Decha Samana[1], Nitiphoom Adsawatithisakul[2]

[1]King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand 10520
dechasamana@hotmail.com

[2]King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand 10520
na.adsawatithisakul@gmail.com

Abstract
The multicolor bipartite Ramsey number $br(K_{p,p};m)$ is the smallest positive n such that any coloring of the edges of $K_{n,n}$ with m-coloring, there are a monochromatic subgraph isomorphic to $K_{p,p}$. In this paper, we show that

$$br(K_{p,p};m) \geq \left(p!\sqrt{m^{p^2-1}}\right)^{1/p}.$$

Keywords: bipartite Ramsey numbers, complete bipartite graph, lower bound.

1. Introduction

The *multicolor bipartite Ramsey number* $br(G_1, G_2, ..., G_m)$ is the smallest positive n such that any coloring of edges of $K_{n,n}$ with m colors will result in a isomorphic copy of G_i in the i^{th} color for some i, where $G_1, G_2, ..., G_m$ are bipartite graphs. We will denote $br(K_{l,l}, K_{k,k})$ by $br(l,k)$ and $br(G_1, G_2, ..., G_m)$ where $G_1 = G_2 = ... = G_m = G$ by $br(G;m)$.

In [3] some exact values and some upper bounds of bipartite Ramsey numbers $b(l,k)$ are shown as in Table 1.

$br(l,k)$		k				
		2	3	4	5	6
l	2	5	9	14	≤ 19	≤ 25
	3		17	≤ 29	≤ 41	≤ 56
	4			≤ 48	≤ 72	≤ 101
	5				≤ 115	≤ 168

Table 1. Some exact values and some upper bounds of bipartite Ramsey numbers

The determination of exact values of $br(l,k)$ in general appears to be difficult, even for $br(p,p)$. For $p \geq 21$, R. W. Irving [6] showed that $br(p,p) < 2^{p-1}(p-1)$.

In 1998, J.H. Hattingh and M.A. Henning [5] showed that $br(p,p) > \frac{\sqrt{2}}{e} n 2^{n/2}$ and $br(K_{p,p};m) \leq m^2 + m - 1$ where $m \geq 2$.

In 2003, D. Samana and V. Longani [10] proved that

Theorem 1.1. *Let n, l_i, k_i, m be positive integers where $i = 1,2,3,...,m$ and $2 \le l_i, k_i, m \le n$. If n, l_i, k_i, m satisfy inequality*

$$\binom{n}{l_1}\binom{n}{k_1}m^{1-l_1k_1} + \binom{n}{l_2}\binom{n}{k_2}m^{1-l_2k_2} + \ldots + \binom{n}{l_m}\binom{n}{k_m}m^{1-l_mk_m} < 1$$

then $br(K_{l_1,k_1}, K_{l_2,k_2}, ..., K_{l_m,k_m}) > n$.

In this paper, we focus on the case $br(K_{p,p}; m)$.

2. The main result

Now, we show the theorem for finding the lower bounds of multicolor bipartite Ramsey numbers and compare the results with Theorem 1.

Theorem 2.1. *Let $K_{p,p}$ be a complete bipartite graph, then*

$$br(K_{p,p}; m) \ge \left(p!\sqrt{m^{p^2-1}}\right)^{1/p}.$$

Proof. Let $K_{p,p}$ be a complete bipartite graph with labeled vertices $v_1, v_2, ..., v_{2p}$. It is easily seen that the complete bipartite graph $K_{n,n}$ contains

$$t = \left[\binom{n}{p}\right]^2 \text{ copies of } K_{p,p},$$

says $(K_{p,p})_1, (K_{p,p})_2, ..., (K_{p,p})_t$. Let us say that an m-coloring of $K_{n,n}$ is $(K_{p,p})_i$-bad coloring if all the edges in the subgraph $K_{p,p}$ of $K_{n,n}$ have been assigned the same color. Since, there are m^{n^2} colorings in $K_{n,n}$ and there are $m^{n^2-p^2+1}$ $(K_{p,p})_i$-bad colorings in $K_{n,n}$. Therefore, there are at most $tm^{n^2-p^2+1}$ colorings which are $(K_{p,p})_i$-bad colorings for some i. Hence, if

$$tm^{n^2-p^2+1} < m^{n^2},$$

then some m-coloring has no monochoromatic copy of $K_{p,p}$ in $K_{n,n}$. This condition holds if

$$m^{p^2-1} > \left(\frac{n^p}{p!}\right)^2 > \left[\binom{n}{p}\right]^2 = t,$$

or equivalently

$$n < \left(p!\sqrt{m^{p^2-1}}\right)^{1/p}.$$

Therefore,

$$br(K_{p,p}; m) \ge \left(p!\sqrt{m^{p^2-1}}\right)^{1/p}. \qquad \square$$

The lower bounds of multicolor Ramsey numbers $br(K_{p,p};m)$ of Theorem 2 are better than the lower bounds of multicolor Ramsey numbers $br(K_{p,p};m)$ of Theorem 1 when $m > 2$, as shown in the tables.

$br(K_{p,p};m)$		m								
		2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	2	>2	>2	>3	>3	>3	>4	>4	>4	>4
	3	>5	>6	>10	>12	>15	>18	>21	>24	>27
	4	>9	>16	>26	>38	>52	>68	>85	>105	>125
	5	>14	>34	>65	>107	>162	>230	>313	>409	>521

Table 2. Lower bounds of multicolor bipartite Ramsey numbers from Theorem 1.

$br(K_{p,p};m)$		m								
		2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	2	>2	>3	>4	>5	>5	>6	>7	>7	>8
	3	>5	>8	>12	>16	>20	>24	>29	>34	>39
	4	>8	>17	>30	>45	>64	>85	>109	>136	>166
	5	>14	>36	>73	>124	>192	>278	>383	>508	>654

Table 3. Lower bounds of multicolor bipartite Ramsey numbers from Theorem 2.

References

1. W.A. Carnielli and E.L. Monte Carmelo, *$K_{2,2} - K_{1,n}$ and $K_{2,2} - K_{2,n}$ bipartite Ramsey numbers*, Journal Discrete Mathematics 223(2000), 83-92.
2. V.Chvátal and F. Harary, *Generalized Ramsey Theory for Graphs,III.* Small Off-Diagonal Numbers, Pac.J.Math.41, 335-345.
3. W. Goddard, M. A. Henning and O. R. Oellermann, *Bipartite Ramsey Numbers and Zarankiewicz Numbers*, Journal Discrete Mathematics 219(2000), 85-95.
4. J. H. Hattingh and M. A. Henning, *Bipartite Ramsey theory*, Utilitas Math. 53(1998), 217-230.
5. J. H. Hattingh and M. A. Henning, *Star-path bipartite Ramsey numbers*, Journal Discrete Mathematics 185(1998), 255-258.
6. R. W. Irving, *A bipartite Ramsey problem and the Zarankiewicz numbers*, Glasgow Math. J. (1978), 13-26.
7. E.S. Laber and E.L. Monte Carmelo, *A note on multicolor bipartite Ramsey numbers for $K_{2,n}$*, Ars Comb 69(2003).
8. Q. Lin and Y. Li, *Bipartite Ramsey numbers involving large $K_{n,n}$*, Journal European Journal of Combinatorics 30(2009), 923-928
9. Q. Lin and Y. Li, *Multicolor Bipartite Ramsey Number of C_4 and Large $K_{n,n}$*. Journal of Graph Theory(2010)-http://onlinelibrary.wiley.com/doi10.1002/jgt.20512
10. D. Samana and V. Longani, *Finding lower bounds of some bipartite Ramsey numbers using probabilistic method*, Thesis for Master of Science, Chiang Mai University, 2003.

A Lower Bound of Some Classical Ramsey Numbers $R(3,t)$

Decha Samana
Department of Mathematics, Faculty of Science,
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand
dechasamana@hotmail.com

Vites Longani
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Thailand
vites@chiangmai.ac.th

Abstract

For positive integers s and t, the Ramsey number $R(s,t)$ is the least positive integer n such that for every graph G of order n, either G contains K_s as a subgraph or $\overline{G}$ contains K_t as a subgraph. In this paper, we obtain lower bound of some Ramsey number $R(3,t)$.

Keywords: Lower bound, Ramsey numbers, Graphs, Distance line.