# รายงานการวิจัย

เรื่อง ตัวหารของฟังก์ชันเลขคณิต (Divisors of arithmetic functions)

ชื่อผู้วิจัย นายวิเชียร เลาหโกศล
นางสาวกรรณิกา คงสาคร
นางสาวอุษณีย์ ลีรวัฒน์

ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากสำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ ประเภท ทั่วไป
ประจำปี 2534

ปีที่พิมพ์ 2538

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

S015680

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

บทคัดย่อ

เซตของฟังก์ชันเลขคณิต เมื่อเทียบกับการบวกและการคูณดีริคเลต (หรือการประสาน) ประกอบกันเป็นโดเมนที่แยกตัวประกอบได้หนึ่งเดียว แต่ไม่เป็นโดเมนยุคลิด การหาตัวหารในโดเมนนี้เป็นสิ่งไม่ง่าย เพราะขั้นตอนวิธีของยุคลิดไม่สามารถนำมาใช้ได้ โครงการวิจัยนี้มีผลสรุปดังนี้

(1) ปรับปรุงแนวคิดของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปมาตรฐาน และตัวดำเนินการคล้ายอนุพันธ์ ให้ชัดเจนและเหมาะสม

(2) สร้างเทคนิคใหม่โดยใช้การหาอนุพันธ์ทดแทนวิธีการเดิมของเรียริคที่ใช้ตัวดำเนินการคล้ายอนุพันธ์ในการหาตัวหาร และ/หรือตัวหารร่วมมากของฟังก์ชันที่มีค่าประจำเป็นกำลังของจำนวนเฉพาะ

Abstract.

The set of arithmetic functions with respect to addition and Dirichlet multiplication (or convolution) is a unique factorization domain but not an Euclidean domain. To find divisors in this domain is not easy because the Euclidean algorithm is not applicable. This research project is to

(1) improve the concepts of functions in standard form and derivative-like operator and

(2) to propose the use of derivation replacing that of Rearick's derivative-like operator in finding divisors and/or common divisors of functions with prime power norms.

RCH
QA
115
.T361ค

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน 117608
วันเดือนปี 10 ส.ค. 2554

b.10349935
i.....

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญเรื่อง


บทนำ 1

เนื้อเรื่อง 4

-รูปมาตรฐานและอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขคณิต 5

-Divisors of some arithmetic functions 8

บรรณานุกรม

ประวัตินักวิจัยและคณะ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทนำ

### ความสำคัญ และที่มาของหัวข้อการวิจัย

ฟังก์ชันเลขคณิต (*Arithmetic functions*) คือฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก ผลบวก ผลต่าง ผลคูณ(สามัญ) ผลคูณดีริคเลต (*Dirichlet*) หรือผลคูณเลขคณิต หรือผลการประสาน (*convolution*) ของฟังก์ชันเลขคณิต f และ g มีนิยามเป็นฟังก์ชันเลขคณิต ที่มีคุณสมบัติต่อไปนี้

$$(f \pm g)(n) := f(n) \pm g(n)$$

$$(fg)(n) := f(n)\, g(n)$$

$$(f*g)(n) := \sum_{ij=n} f(i)\, g(j)$$

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก นิยาม

$$f^{*k} := f*f* \ldots *f \quad (k \text{ ครั้ง})$$

เมื่อ c เป็นจำนวนเชิงซ้อน นิยามฟังก์ชันเลขคณิต cf โดย

$$(cf)(n) := cf(n)$$

ให้ A เป็นเซตของฟังก์ชันเลขคณิต เป็นที่ทราบกันว่า [1,4] A เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม (integral domain) เทียบกับการบวก และการประสาน โดเมน A มีตัวแทนอื่นอีก 2 แบบ คือ เป็นโดเมนของอนุกรมกำลังนัยนิยม (formal power series) ในตัวไม่กำหนดจำนวนนับได้ และเป็นโดเมนของอนุกรมดีริคเลตนัยนิยม [4]

นิยามฟังก์ชันเอกลักษณ์ u โดย

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } n = 1 \\ n & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

เซตของฟังก์ชันเลขคณิต cu (เมื่อ c แปรไปเหนือจำนวนเชิงซ้อน) ประกอบกันเป็นวงย่อยของ A ที่ถอดแบบ (isormorphic) กับสนามเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ฟังก์ชัน u เป็นเอกลักษณ์เทียบกับการประสานใน A ดังนั้น ตัวผกผันดีริคเลต $f^{-1}$ ของ f เป็นฟังก์ชันเลขคณิตหนึ่งเดียว (unique) ที่ว่า $f*f^{-1} = u$ เราสามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่า $f^{-1}$ มีจริง เมื่อและต่อเมื่อ $f(1) \neq 0$ [1]

โครงการวิจัยที่เสนอนี้มีที่มาจากความจริงที่ว่า แม้น A จะไม่เป็นโดเมนกลุ่มอุดมคติมุขสำคัญ (principal ideal domain) ดังนั้นจึงไม่เป็นโดเมนยุคลิด (Euclidean domain) แต่มันเป็นโดเมนที่มีการแยกตัวประกอบหนึ่งเดียว (unique factorization domain) [4] ที่ว่า A ไม่ใช่โดเมนกลุ่ม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อุดมคติมุขสำคัญ สามารถเห็นจริงได้โดยใช้แนวคิดของค่าประจำ (norm) ค่าประจำ Nf ของฟังก์ชันเลขคณิต f มีนิยามเป็นจำนวนเต็มบวกค่าต่ำสุด n ที่ว่า $f(n) \neq 0$ เห็นได้ชัดเจนว่า $N(f*g) = Nf.Ng$ และตัวหนึ่งหน่วย (units) ของ A คือฟังก์ชันเลขคณิตที่มีค่าประจำเป็น 1 เนื่องจากเซตของฟังก์ชันที่ไม่ใช่ตัวหนึ่งหน่วยใน A ประกอบกันเป็นกลุ่มอุดมคติที่ไม่เป็นมุขสำคัญ ดังนั้น A เป็นโดเมนกลุ่มอุดมคติมุขสำคัญไม่ได้ [2,5,12] ส่วนความจริงที่ว่า A เป็นโดเมนที่มีการแยกตัวประกอบหนึ่งเดียวพิสูจน์ได้ไม่ง่ายนัก ในหลักการแล้ว การพิสูจน์ทำผ่านตัวแทนของ A ที่เป็นโดเมนของอนุกรมกำลังนัยนิยมในตัวไม่กำหนดจำนวนนับได้ ขั้นตอนสำคัญในการพิสูจน์ คือใช้ผลที่ว่าการแยกตัวประกอบหนึ่งเดียวเป็นจริงในวงของทุกอนุกรมกำลังใน n ตัวไม่กำหนด สำหรับค่า $n = 1,2,3,\ldots$ ([2,5,12])

โดยเหตุที่เป็นโดเมนที่มีการแยกตัวประกอบหนึ่งเดียวซึ่งมีลักษณะเฉพาะผิดปรกติเช่นนี้ ปัญหาแรกที่สำคัญ คือ การหาขั้นตอนและผลที่เกี่ยวกับตัวหาร (divisors) โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ตัวหารร่วมมากจากลักษณะเฉพาะของมัน เราเห็นว่า ขั้นตอนวิธีของยุคลิด (Euclidean algorithm) ที่ใช้กันโดยทั่วไปใช้ไม่ได้โดยตรงในกรณีนี้ ทำให้ต้องแสวงหาขั้นตอนวิธีแบบใหม่ เท่าที่ทราบจนถึงปัจจุบันนี้ มีเพียงงานวิจัยที่พิมพ์เผยแพร่เพียงชิ้นเดียวเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีใหม่ดังกล่าว ซึ่งคืองานของ D. Rearick (1984)

นอกจากแนวคิดของค่าประจำแล้ว เรียริค ใช้แนวคิดอื่น ๆ อีกหลายแนวคิด ดังต่อไปนี้

ให้ f เป็นฟังก์ชันเลขคณิตที่มีค่าประจำ a เรียริคแสดงว่า มีตัวหนึ่งหน่วย v ใน A เพียงตัวเดียวที่ว่า

$$S_f(na) := (v*f)(na) = u(n)$$

สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n $S_f$ มีชื่อเรียกว่ารูปมาตรฐาน (standard form) ของ f และเรากล่าวว่า f อยู่ในรูปมาตรฐาน เมื่อและต่อเมื่อ $f = S_f$

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ นิยาม

$$r(n) := \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } n = p \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

นิยามการส่ง $f \to f'$ ของ A ไปใน A โดย $f'(n) := f(np)$

โดยใช้แนวคิดของโครงสร้างนี้ เรียริค พัฒนาระเบียบวิธีในการหาสูตรสำหรับตัวหารร่วมมากในรูปมาตรฐานที่มีค่าประจำสูงสุดใน A สิ่งที่ได้เป็นแคลคูลัสเชิงอนุพันธ์ที่นำไปสู่การประยุกต์ใช้สร้างสมการพหุนามที่มีตัวหารร่วมมากของฟังก์ชันเลขคณิตคู่หนึ่ง ๆ เป็นราก ข้อบกพร่องข้อหนึ่งของงานของเรียริค คือข้อจำกัดที่ว่าฟังก์ชันเลขคณิตที่ใช้ระเบียบวิธีนี้ได้จะต้องมีค่าประจำเป็นกำลังของจำนวนเฉพาะจำนวนเดียวกัน

ก่อนหน้านี้ผู้วิจัยได้ดำเนินการตรวจสอบงานของเรียริค พบว่าการใช้ตัวดำเนินการคล้ายอนุพันธ์ f' และ r ค่อนข้างไม่สะดวก และแลดูผิดธรรมชาติ น่าจะเป็นการเหมาะสมกว่าที่จะใช้แนวคิดของอนุพันธ์ p-มูลฐาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(p-basic derivation) ([13]) ซึ่งนิยามโดย

$$df(n) := f(np)v(np)$$

เมื่อ $v(m)$ เป็นกำลังสูงสุดของ $p$ ที่หาร $m$ ลงตัว

หัวใจหลักของโครงการวิจัยนี้ เพื่อสร้างระเบียบวิธีในการหาตัวหารในวงของฟังก์ชันเลขคณิตที่ดีกว่าของเรียริค ตลอดจนดัดแปลงแก้ไขวิธีการของเรียริค ให้ทันสมัย ชัดเจน รัดกุม

<u>วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย</u>

(1) เพื่อปรับปรุงผลงานของเรียริค เกี่ยวกับฟังก์ชันในรูปมาตรฐาน และตัวดำเนินการคล้ายอนุพันธ์

(2) เพื่อสร้างระเบียบวิธี และ/หรือ เทคนิคใหม่โดยใช้การหาอนุพันธ์

<u>ขอบเขตการวิจัย</u>

(1) ฟังก์ชันที่พิจารณาคือ ฟังก์ชันเลขคณิต

(2) ปฏิบัติการของฟังก์ชันเลขคณิตที่พิจารณา คือ การบวก และการประสาน

(3) ตัวหารของฟังก์ชันเลขคณิต คือตัวหารเทียบกับการประสาน

(4) วิธีการที่ใช้คือการอนุพันธ์ และค่าอนุวัติ

<u>วิธีดำเนินการวิจัย</u>

(1) สำรวจเอกสาร ข้อมูล และผลงานที่เกี่ยวข้องทั้งในและนอกประเทศ

(2) ปรับปรุงผลงานของเรียริค โดยวิธีการทำให้ฟังก์ชันในรูปมาตรฐาน ชัดเจน รัดกุม

(3) สร้างระเบียบวิธี และ/หรือ เทคนิคใหม่ในการหาตัวหารโดยใช้แนวคิดของการหาอนุพันธ์

(4) ติดต่อ สอบถาม แลกเปลี่ยน สิ่งที่ค้นพบกับผู้ทรงคุณวุฒิทั้งในและนอกประเทศ

(5) รวบรวมผล และพิมพ์เผยแพร่

<u>ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ</u>

(1) ได้ปรับปรุงฟังก์ชันในรูปมาตรฐานให้ชัดเจน รัดกุม ทำให้ผลของเรียริคเป็นที่ยอมรับ ยืนยันอีกครั้งหนึ่ง

(2) ได้ระเบียบวิธี และ/หรือ เทคนิคโดยใช้การหาอนุพันธ์ทดแทนวิธีการเดิมที่ใช้ตัวดำเนินการคล้ายอนุพันธ์ในการหาตัวหาร



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## เนื้อเรื่อง

รายละเอียดเกี่ยวกับวิธีดำเนินการวิจัย และผลการวิจัย ในโครงการวิจัยนี้ ได้เสร็จเรียบร้อย และนำเสนอในวารสาร และการประชุมทางวิชาการ

1. เรื่อง รูปมาตรฐานและอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขคณิต

   ปรากฏใน ว. เกษตรศาสตร์(วิทย.) 26:307-309 (2535)

2. เรื่อง Divisors of some arithmetic functions

   นำเสนอในการประชุม The Second Asian Mathematical Conference

   October 17-20, 1995

   Suranaree University Of Technology, Nakhon Ratchasima, Thailand

รายละเอียดในสิ่งที่นำเสนอทั้งสองแห่ง ปรากฏเป็นผลงานที่ได้รวบรวมมาพร้อมรายงานฉบับนี้ ในหน้าถัดไป



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ว.เกษตรศาสตร์ (วิทย.) 26 : 307 - 309 (2535)

# รูปมาตรฐานและอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขคณิต

# Standard Forms and Derivatives of Arithmetic Functions

วิเชียร เลาหโกศล และ กรรณิกา คงสาคร[1]

Vichian Laohakosol and Kannika Kongsakorn

## ABSTRACT

The set of arithmetic functions with respect to addition and Dirichlet multiplication is a unique factorization domain but not an Euclidean domain.. To find divisors in this domain is not easy. The concepts of functions in standard form and derivative-like operator due to Rearick are neither clear nor appropriate. A modification of these concepts are carried out.

**Key words :** arithmetic function, Dirichlet multiplication, divisors, standard form, derivative.

## บทคัดย่อ

เซตของฟังก์ชันเลขคณิตเมื่อเทียบกับการบวกและการคูณดีริคเลต ประกอบกันเป็นโดเมนที่แยกตัวประกอบได้หนึ่งเดียวแต่ไม่เป็นโดเมนยุคลิด การหาตัวหารในโดเมนนี้เป็นสิ่งไม่ง่าย แนวคิดของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปมาตรฐานและตัวดำเนินการคล้ายอนุพันธ์ซึ่งเป็นของเรียริค ไม่ชัดเจนและไม่เหมาะสม งานนี้เป็นการปรับปรุงแนวคิดทั้งสองให้รัดกุมและชัดเจน เหมาะสม

## คำนำ

ฟังก์ชันเลขคณิตพร้อมด้วยปฏิบัติการบวก (+) และการคูณดีริคเลต (*) ประกอบกันเป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม A ที่มีตัวแทนได้อีกสองแบบ คือ โดเมนของอนุกรมกำลังนัยนิยมในตัวไม่กำหนดจำนวนนับได้ และโดเมนของอนุกรมดีริคเลตนัยนิยม เมื่อปี พ.ศ. 2531 ผู้วิจัยได้เสนองานวิจัยว่าด้วยความเป็นอิสระต่อกันเชิงเลขคณิตโดยการพิสูจน์ความเป็นอิสระของฟังก์ชันเลขคณิตจำนวนหนึ่ง (กรรณิกา และคณะ 2531; Laohakosol et al., 1989 a,b) นอกจากความเป็นอิสระเชิงพีชคณิตแล้ว ปัญหาพื้นฐานอีกปัญหาหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับโครงสร้างของ A คือ ปัญหาว่าด้วยการแยกตัวประกอบของสมาชิกใน A เนื่องจาก A เป็นโดเมนที่แยกตัวประกอบได้หนึ่งเดียว แต่ไม่เป็นโดเมนยุคลิด (Buchsbaum, 1961; Cashwell and Everett, 1959; Krull, 1937; Ruckert, 1933; Samuel, 1961) การแยกตัวประกอบหรือการหาตัวหารของสมาชิกใน A จึงเป็นสิ่งยากมาก เท่าที่ทราบจนถึงปัจจุบันนี้ มีงานวิจัยเผยแพร่เพียงงานของ Rearick (1984) ซึ่งแสดงการหาตัวหารเพียงของสมาชิกบางประเภท จากการศึกษางานดังกล่าว พบปัญหาสำคัญ 2 ข้อคือ ปัญหาข้อที่ 1 มีความไม่ชัดเจนในนิยามว่าด้วยฟังก์ชันอยู่ในรูปมาตรฐาน และ ปัญหาข้อที่ 2 ว่าด้วยความไม่เหมาะสมในการใช้ตัวดำเนินการคล้ายอนุพันธ์ ทั้งสองปัญหาขยายความได้ดังนี้

1 ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kasetsart University, Bangkok 10900, Thailand.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ f เป็นฟังก์ชันเลขคณิตที่ไม่ใช่ศูนย์ นิยามค่าประจำของ f (เขียนแทนว่า Nf) เป็นจำนวนเต็มบวก a ค่าต่ำสุด ที่ว่า $f(a) \neq 0$ Rearick เรียกฟังก์ชัน f ว่าอยู่ในรูปมาตรฐาน เมื่อ

$$f(an) = u(n) \qquad (n = 1, 2, 3...)$$

โดยที่ $u(n) = 1$ เมื่อ $n = 1$ และ $u(n) = 0$ เมื่อ n มีค่าอื่นๆ กล่าวคือเป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์เทียบกับการคูณดีริคเลต นิยามนี้ไม่ชัดเจน เพราะขาดความเป็นหนึ่งเดียว กล่าวคือฟังก์ชันที่อยู่ในรูปมาตรฐานเดียวกัน (เช่นมีค่าประจำเท่ากัน) มีเป็นจำนวนมาก และไม่ทราบอีกด้วยว่าสำหรับฟังก์ชันที่ไม่ทราบว่าอยู่ในรูปมาตรฐานหรือไม่ สามารถนำแนวคิดนี้มาใช้ได้อย่างไร

ในกรณีของตัวดำเนินการคล้ายอนุพันธ์ Rearick นิยามสิ่งนี้เป็น

$$f'(n) = f(np) \qquad (n = 1, 2, 3...)$$

เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะที่ตรึงไว้ค่าหนึ่ง ความไม่เหมาะสมของตัวดำเนินการนี้ คือสูตรการหาอนุพันธ์ของการคูณล้มเหลว กล่าวคือ $(f*g)' \neq f'*g + f*g'$

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้คือ ขจัดความไม่ชัดเจนของนิยามฟังก์ชันที่อยู่ในรูปมาตรฐาน และปรับปรุงตัวดำเนินการคล้ายอนุพันธ์ให้เป็นตัวดำเนินการอนุพันธ์

## อุปกรณ์และวิธีการ

อุปกรณ์และวิธีการหลักที่ใช้ประกอบด้วย

ก. นิยามและคุณสมบัติพื้นฐานของฟังก์ชันเลขคณิต ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ยึดสิ่งที่ใช้ใน กรรณิกา และคณะ (2531) Laohakosol et al. (1989 a,b) เป็นหลัก

ข. วิธีการหาอนุพันธ์ยึดวิธีการของ Shapiro (1972) โดยพิจารณาตัวดำเนินการอนุพันธ์-p (เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะที่ตรึงจำนวนหนึ่ง) ของฟังก์ชันเลขคณิตที่ไม่เป็นศูนย์ f ให้เป็น

$$df(n) = f(np)v(np)$$

เมื่อ v(n) เป็นกำลังสูงสุดของ p ที่หาร n ลงตัว โปรดสังเกตว่า df มีคุณสมบัติของตัวดำเนินการอนุพันธ์ทุกประการ

ค. ทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้ของ Rearick (1984)

ทฤษฎีบทประกอบ ให้ $f \in A-\{0\}$, $Nf = a$ ดังนั้นมีฟังก์ชันหนึ่งหน่วย (ฟังก์ชันที่มีค่าประจำเป็น 1) $w_f$ เพียงฟังก์ชันเดียวพอดี ที่มีคุณสมบัติว่า $(w_f*f)(na) = u(n)$ $(n = 1, 2, 3,...)$

## ผลและวิจารณ์

การขจัดความไม่ชัดเจนของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปมาตรฐานดังในปัญหาข้อที่ 1 ทำได้โดยใช้ผลจากทฤษฎีบทประกอบ สร้างนิยามต่อไปนี้

นิยาม (1) ให้ $f \in A-\{0\}$, $Nf = a$ นิยามรูปมาตรฐานของ f เป็นฟังก์ชัน $S_f = w_f*f$ เมื่อ $w_f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งเดียว (เมื่อเทียบกับ f) ที่ยืนยันการมีอยู่จริงได้จากทฤษฎีบทประกอบ

(2) นิยามว่าฟังก์ชัน f อยู่ในรูปมาตรฐาน ถ้า $f(na) = u(n)$

ข้อดีของนิยามข้างต้นต่อของ Rearick คือ (1) ชัดเจนเพราะแต่ละฟังก์ชันมีรูปมาตรฐานได้หนึ่งเดียว ส่วนความถูกต้องชัดเจนของ (2) นั้น เป็นผลมาจากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ให้ $h \in A - \{0\}$ ดังนั้น h อยู่ในรูปมาตรฐานเมื่อและต่อเมื่อ $h = S_h$

พิสูจน์ (ความเพียงพอของเงื่อนไข) ให้ $h = S_h$ ดังนั้นโดยนิยาม (1) , (2) และทฤษฎีบทประกอบ จะได้ว่า h อยู่ในรูปมาตรฐานทันที

(ความจำเป็นของเงื่อนไข) ให้ $Nh = b$ เพราะว่า h เป็นฟังก์ชันเลขคณิตที่ไม่เป็นศูนย์ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทประกอบ จะมีฟังชันหนึ่งหน่วย $w_h$ เพียงหนึ่งเดียวที่ว่า

$$S_n(nb) = (w_h*h)(nb) = u(n) \qquad (n = 1, 2, 3...)$$

การพิสูจน์จะเสร็จสิ้นถ้าสามารถแสดงได้ว่า $w_h = u$ (เอกลักษณ์ของการคูณดีริคเลต) เมื่อ $n = 1$

$$1 = u(1) = (w_h*h)(1.b) = w_h(1)h(b) = w_h(1).1 = w_h(1)$$

เมื่อ $n \geq 2$ เรามีว่า

$$0 = u(n) = (w_h*h)(nb) = \sum_{d \mid nb} w_h(d)h(nb/d)$$

$$= w_h(n)h(b) = w_h(n).$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $w_h = u$ ตามต้องการ

ในส่วนของการแก้ปัญหาที่ 2 ทำโดยการใช้ตัวดำเนินการอนุพันธ์ -p df ดังที่ได้กล่าวถึงในหัวข้อ "อุปกรณ์และวิธีการ" แทนตัวดำเนินการคล้ายอนุพันธ์ f' ความเหมาะสมในการใช้ df นอกจากการคงไว้ซึ่งกฎการหาอนุพันธ์ของผลคูณที่ว่า

$$d(f*g) = df*g + g*df$$

แล้ว เพื่อเป็นการยืนยันความเหมาะสม จึงควรจะแสดงว่าคุณสมบัติที่เรียกได้ว่าเป็นการหาอินทิกรัลของ f เทียบกับตัวดำเนินการคล้ายอนุพันธ์ สามารถแสดงให้เห็นจริงได้โดยง่ายจากการใช้ df ดังต่อไปนี้

ให้ $r(n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } n = p \\ 0 & \text{เมื่อ } n \neq p \end{cases}$

ดังนั้น $(r*f)' = f$ กล่าวคือ อินทิกรัลของ f เทียบกับ ' คือ r*f)

พิสูจน์ ก่อนอื่นขอให้สังเกตว่า

$$df(n) = f(np)v(np) = f'(n)v(np)$$

$$dr(n) = r(np)v(np) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } n = 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } n \neq 1 \end{cases}$$

$$v(np) = v(n) + v(p) = v(n) + 1$$

พิจารณา

$$(r*f')(n).v(np) = d(r*f)(n) = dr*f(n) + r*df(n)$$

$$= dr(1)f(n) + \begin{cases} r(p)df(n/p) & \text{เมื่อ } p|n \\ 0 & \text{เมื่อ } p\nmid n \end{cases}$$

$$= f(n) + \begin{cases} f(n)v(n) & \text{เมื่อ } p|n \\ 0 & \text{เมื่อ } p\nmid n \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $p|n$ ได้ว่า $(r*f)'(n)\,(v(n)+1) = f(n)\,(1+v(n))$

ซึ่งให้ว่า $(r*f)'(n) = f(n)$

และเมื่อ $p\nmid n$ ได้ว่า $(r*f)'(n)\,(0+1) = f(n)$

ซึ่งให้เช่นกันว่า $(r*f)'(n) = f(n)$

## คำขอบคุณ

งานวิจัยนี้เป็นส่วนหนึ่งของโครงการวิจัยเรื่อง ตัวหารของฟังก์ชันเลขคณิต ซึ่งได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยประเภททั่วไป ประจำปีงบประมาณ 2534 จากสำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ

## เอกสารอ้างอิง

กรรณิกา คงสาคร วิเชียร เลาหโกศล และอุษณีย์ ลีรวัฒน์. 2531. ความเป็นอิสระต่อกันของฟังก์ชันเลขคณิต. ว. เกษตรศาสตร์ (วิทย.). 22(3) : 213-220.

Buchsbaum, D.A. 1961. Some remarks on factorization in power series rings. J. Math. Mech. 10(5) : 749-753.

Cashwell, E.D. and C.J. Everett. 1959. The ring of number-theoretic functions. Pacific J. Math. 9 : 975- 985.

Krull, W. 1937. Beitrage zur Arithmetik Kommutativer Integritatsbereiche. III Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie. Math. Z. 42 : 745-766.

Laohakosol, V. K. Kongsakorn and U. Leerawat. 1989 a. Some arithmetic functions algebraically independent with respect to convolution. Soochow J. Math. 15(2) : 171-178.

Laohakosol, V., K. Kongsakorn and U. Leerawat. 1989b. Algebraic independence test of arithmetic functions using Jacobians. J. Sci. Soc. Thailand. 15 : 133-138.

Rearick, D. 1984. Divisibility of arithmetic functions. Pacific J. Math. 112(1) : 237-248.

Ruckert, W. 1933. Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale. Math. Ann.. 107 : 259-281.

Samuel, P. 1961. On unique factiorization domains. Ill. J. Math. 5 : 1-17.

Shapiro, H.N. 1972. On the convolution ring of arithmetic functions. Comm. Pure Appl. Math. 25 : 287-336.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สถาบันวิทยบริการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ห้องสมุดคณะวิทยาศาสตร์ สจล.

Proceedings of the Second Asian Mathematical Conference, 1995

# DIVISORS OF SOME ARITHMETIC FUNCTIONS

VICHIAN LAOHAKOSOL
*Department of Mathematics*
*Kasetsart University*
*Bangkok 10900, Thailand*

It is well-known that the set of arithmetic functions equipped with addition and Dirichlet multiplication (or convolution) is a unique factorization domain but not a Euclidean domain. With the powerful Euclidean algorithm not being directly applicable, it is not easy to find divisors of two arithmetic functions in this domain. The existing technique of using a derivative-like operator due to D. Rearick is rather awkward. A slightly different technique based on the use of a derivation is proposed and generally proceeds along similar line.

## 1. Introduction

An *arithmetic function* is a complex-valued function whose domain is the set of positive integers, N. The sum, difference, (ordinary) product and Dirichlet product (or *convolution*) of two arithmetic functions are arithmetic functions defined, respectively, by

$$(f \pm g)(n) = f(n) \pm (n)$$
$$(fg)(n) = f(n)g(n)$$
$$(f * g)(n) = \sum_{ij=n} f(i)g(j).$$

For brevity, when $k$ is a positive integer, write $f^k$ for $f * f * \cdots * f$ ($k$ times). For each complex number $c$, the arithmetic function $cf$ is defined by

$$(cf)(n) = cf(n).$$

Denote by $\Lambda$ the set of all arithmetic functions. It is well-known that $\Lambda$ is an integral domain with respect to addition and convolution ([1],[2]). The domain $\Lambda$ has two other representations, one as the domain of (formal) Dirichlet series and the other as the domain of (formal) power series in a countable set of indeterminates ([2],[5]). Define the *identity function* by

$$I(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



117608
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Clearly, the set of arithmetic functions $cI$, where $c$ runs through the complex numbers, forms a subring of $\Lambda$ isomorphic to the complex field. The function $I$ plays the role of the identity with respect to convolution and so the (Dirichlet) inverse $f^{-1}$ of $f$ is the (unique) arithmetic function for which $f * f^{-1} = I$. It is easily verified that $f^{-1}$ is in $\Lambda$ if and only if $f(1) \neq 0$ ([1]).

Our interests germinate from the fact that even through $\Lambda$ is not a principal ideal domain, and so not an Euclidean domain, it is a unique factorization domain ([2]). That $\Lambda$ is not a principal ideal domain can be seen by making use of the concept of "norm". For each $f$ in $\Lambda - \{0\}$, define its *norm*, $Nf$, to be the smallest positive integer $n$ such that $f(n) \neq 0$. The norm has a multiplicative property, i.e. $N(f * g) = Nf.Ng$, and the *units* of $\Lambda$ are those arithmetic functions whose norms are equal to 1. Since the set of non-units in $\Lambda$ forms an ideal which is not principal, then $\Lambda$ cannot be a principal ideal domain. That $\Lambda$ is a unique factorization domain is difficult to prove. Indeed, this was established through the representation of formal power series in a countable set of indeterminates. A major step of the proof is to appeal to the fact that unique factorization holds in the ring of all formal power series in $n$ indeterminates for each positive integer $n$. Being a unique factorization domain of quite an unusual character, one natural question is to ask for procedures and results about divisors, in particular, greatest common divisors. Evidently, the familiar Euclidean algorithm is not directly applicable, and we have to resort to different means. There has been only one published work known to us, that of D. Rearick ([4]). Besides the concept of norm, Rearick used certain other notions, which we now elaborate.

For an arithmetic function $f$ with $Nf = s$, Rearick showed that there exists a unique unit function $u_f$ such that

$$S_f(ns) := (u_f * f)(ns) = I(n) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

The function $S_f := u_f * f$ is called the *standard form* of $f$, and $f$ is said to be *in standard form* if and only if $f(ns) = I(n)$. For a prime number $p$, define the (derivative-like) function $f'(= f'_p)$ by $f'(n) = f(np)$. Based upon such a setting, Rearick developed a method of obtaining formulae for certain common divisors. There are several awkwardnesses in Rearick's presentation, e.g. (i) a slight ambiguity in the meaning of functions in standard form, that we quickly clarify in our first lemma, (ii) the use of a derivative-like operator $f'$ is rather unnatural as witnessed via the failure of identities like $(f * g)' \neq f' * g + g' * f$. We propose here to employ the $p$-basic derivation ([6], [7]), which is a truly legitimate derivation. Further, the concept of norm, convenient in the entire discussion, could also be related and replaced by the valuation $|f| := 1/(Nf)$, which is a truly legitimate nonarchimedian valuation.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2. Standard Form and Derivation

We record for completeness a lemma of Rearick alluded to in Section 1, which will be frequently quoted. The proof of this lemma is straight-forward.

REARICK'S LEMMA. *Let $f$ be in $\Lambda$ with norm $Nf = s$. Then there exists a unique unit function $u_f$ in $\Lambda$ such that $S_f := u_f * f$ is in standard form.*

Our next lemma confirms the uniqueness of the standard form.

LEMMA 1. *Let $f$ be in $\Lambda - \{0\}$, and let $S_f$ be its standard form. Then $f$ is in standard form if and only if $f = S_f$.*

PROOF. if $f = S_f$, then the fact that $f$ is in standard form follows immediately from the definition of $S_f$. Now assume that $f$ is in standard form, i.e.

$$f(ns) = I(n) \qquad (n \in \mathbb{N},\ s = Nf)$$

From the definition of $S_f$, there exists a unique unit function $u_f$ such that $S_f = u_f * f$. It remains to show that $u_f = I$, which follows readily from

$$1 = I(1) \ = S_f(s) = (u_f * f)(s) \ = u_f(1),$$

and for $n \geq 2$,

$$0 = I(n) = S_f(ns) = (u_f * f)(ns) = u_f(n).$$

□

Next, we recall the definition of derivation and establish certain preliminary results.

DEFINITION ([5]). A *derivation* $d$ over $\Lambda$ is a mapping of $\Lambda$ into itself satisfying $d(f * g) = df * g + f * dg$, $d(c_1 f + c_2 g) = c_1 df + c_2 dg$, where $f, g$ are in $\Lambda$, and $c_1, c_2$ are complex numbers. Two typical examples of derivation are

(i) the *p-basic derivation*, $p$ prime, defined by

$$(d_p f)(n) = f(np)v(np) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

where $v(m)(= v_p(m))$ denotes the exponent of the highest power of $p$ dividing $m$,

(ii) the *log-derivation* defined by

$$(d_L f)(n) = f(n) \log n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

REMARK. Each derivation annihilates all constant functions, and all usual rules of differentiation hold for a derivation.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

LEMMA 2. *Let $f$, $e_0, e_1, \ldots, e_m$ be in $\Lambda$, with $e_m \neq 0$. Let $d$ be a derivation on $\Lambda$. If*

$$\sum_{i=0}^{m} e_i * f^i = 0$$

*and $de_i = 0 \quad (i = 0, ..., m)$, then $df = 0$.*

PROOF. Taking the derivation of the equation, we obtain

$$df * \sum_{i=0}^{m} e_i * i f^{i-1} = 0.$$

If $df \neq 0$, then $\sum e_i * i f^{i-1} = 0$, and by taking successive derivations, the order of the resulting equations are reduced by 1 each time. Finally, we arrive at $m! e_m = 0$, which is absurd. □

LEMMA 3. *Let $p_1, \ldots p_r$ be distinct primes, and $d_1, \ldots d_r$ be their corresponding $p_i$-basic derivations. Let $f$ be in $\Lambda$, having norm $Nf = p_1^{a_1} \ldots p_r^{a_r}$, with $a_1, \ldots, a_r$ positive integers. Then $f$ is in standard form if and only if*

$$d_1^{a_1} \ldots d_r^{a_r} f(n) = a_1! \ldots a_r! I(n) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

PROOF. The result follows directly from the identity

$$d_1^{k_1} \ldots d_r^{k_r} f(n) = f\left(n p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}\right) \prod_{i_1=1}^{k_1} v_1(n p_1^{i_1}) \ldots \prod_{i_r=1}^{k_r} v_r(n p_r^{i_r})$$

where $v_i = v_{p_i}$. □

LEMMA 4. *Let $h, f, g \in \Lambda$ be such that*

$$h = f * g, \quad Nf = p^a, \quad Ng = p^b,$$

*where $p$ is a prime, and $a$ and $b$ are nonnegative integers. If among $h, f, g$ two are in standard form, then so is the third.*

PROOF. Suppose that $f$ and $g$ are in standard form, then by Lemma 3,

$$d^a f(n) = a! I(n), \qquad d^b g(n) = b! I(n) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

where $d$ is the $p$-basic derivation. Since $d^i f = 0$ if $i > a$, $d^j g = 0$ if $j > b$, then

$$\begin{aligned} d^{a+b} h(n) &= \sum_{i=0}^{a+b} \binom{a+b}{i} d^i f * d^{a+b-i} g(n) \\ &= \binom{a+b}{a} d^a f * d^b g(n) = (a+b)! I(n), \end{aligned}$$

and so by Lemma 3, $h$ is in standard form with $Nh = p^{a+b}$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Suppose that $g$ and $h$ are in standard form with $h = f * g$. By Rearick's lemma, there exists a unique unit function $u_f$ such that $u_f * f$ is in standard form. Now

$$u_f * h = (u_f * f) * g$$

and so by the first part of the lemma, the right-hand side being a product of two functions in standard form must be in standard form and so is $u_f * h$. But $h$ is already in standard form and by the uniqueness of $u_f$, we must have $u_f = I$. □

REMARK. (i) If $h$ is in standard form where $Nh$ is a power of a prime $p$ and $h$ can be factored as $h = f * g$, let $u_f$ be the unique unit function for which $u_f * f$ is in standard form. Then we can write $h = (u_f * f) * (u_f^{-1} * g)$, which by Lemma 4 implies that $u_f^{-1} * g$ is in standard form. It follows that in the (unique) prime factorization of an arithmetic function in standard form, each prime factor can be taken as in standard form.

(ii) The result of Lemma 4 does not hold if the norms involved are not a power of the same prime.

LEMMA 5. *Let $p$ be a prime with $p$-basic derivation $d$. If $f$ and $g$ are arithmetic functions in standard form with $Nf = p$, $Ng = p^b$, $b \in \mathbb{N}$, then*

$$\sum_{k=0}^{b+1} \frac{(-1)^k}{k!} f^k * d^k(f * g) = 0.$$

PROOF. Put $h = f * g$. Since $f$ is in standard form with norm $p$, then

$$d^k h = f * d^k g + k d^{k-1} g.$$

Multiplying by $f^k$, and letting $k$ be $b+1$ and $b$, we get

$$f^{b+1} * d^{b+1} h = (b+1) f^{b+1} * d^b g.$$

$$f^b * d^b h = f^{b+1} * d^b g + b f^b * d^{b-1} g,$$

and so after subtraction,

$$f^{b+1} * d^{b+1} h - (b+1) f^b * d^b h = -(b+1) b f^b * d^{b-1} g.$$

Continuing in this manner, we have the required result. □

LEMMA 6. *Let $h \in \Lambda$ be in standard form, with $Nh = p^4$, $p$ a fixed prime. Then there is a sixth degree polynomial*

$$T(f) := f^6 + A * f^5 + B * f^4 + C * f^3 + B * h * f^2 + A * h^2 * f + h^3,$$

*where $A = -\frac{1}{2} d^2 h$, $B = \frac{1}{6} dh * d^3 h - h$, $C = -(dh)^2 - \frac{1}{36} h * (d^3 h)^2 + h * d^2 h$ are differential polynomials in $h$, of norms $p^2, p^4, p^6$, respectively, such that every*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

*divisor $f$ of $h$ of norm $p^2$, in standard form, is a root of $T$. Furthermore, every root of $T$ lying in $\Lambda$ is a divisor of $h$, of norm $p^2$.*

PROOF. Suppose $h = f*g$, with $f, g$ in standard form with $Nf = Ng = p^2$. By taking repeated derivations, we get

$$dh = df * g + f * dg, \qquad d^2h = 2!f + 2df * dg + 2!g, \qquad d^3f = 3!df + 3!dg.$$

Eliminating $df, dg$ and $g$ among these four equations, we obtain the form $T(f) = 0$ satisfied by $f$.

Conversely, assume $f$ is a root of $T$ lying in $\Lambda$. If $Nf < p^2$, then the term $f^6$ in $T(f)$ would be the unique term of the smallest norm, so $T(f) \neq 0$. Similarly, we cannot have $Nf > p^2$, and so $Nf = p^2$. Next, we show that $f|h$. By unique factorization, if $f \nmid h$, then there is a prime $q$ in $\Lambda$ which divides $f$ to a power higher than that to which it divides $h$, say $q^m \mid f$, $q^{m-1} \mid h$ but $q^m \nmid h$. Every term of $T$ is then divisible by $q^{3m-2}$ except for the last, so $T(f) \neq 0$, which is impossible. □

LEMMA 7. *Let $h_0, h_1$ be in $\Lambda$ with $Nh_0 = Nh_1 = p^4$, $\Delta d^3h \neq 0$. If $f$, lying in $\Lambda$, is a root of, with $d$ being $p$-derivation,*

$$V(f) := (\Delta h)^2 - \frac{1}{2}\,\Delta h * \Delta d^2h * f + \frac{1}{6}\,\Delta dh * \Delta d^3h * f - \frac{1}{36}(\Delta d^3h)^2 * f^3,$$

*then $f|\Delta h$ and $d^2f = -3!I$.*

PROOF. If $Nf < p^2$, then the term $-\frac{1}{36}(\Delta d^3h)^2 * f^3$ in $V(f)$ would be the unique term of the smallest norm, so $V(f) \neq 0$. Similarly, we cannot have $Nf > p^2$, so $Nf = p^2$. Again, proceeding as in the proof of the last lemma, we have $f|\Delta h$. Finally, to show that $d^2f = I$, rewrite $\Delta h * V(f) = 0$ as

$$0 = u^3 + \Big(-\frac{1}{12}(\Delta d^2h)^2 + \frac{1}{6}\,\Delta dh * \Delta d^3h\Big) * u + \Big(-\frac{1}{108}(\Delta d^2h)^3 + \frac{1}{36}\,\Delta dh * \Delta d^2h * \Delta d^3h - \frac{1}{36}(\Delta d^3h)^2 * \Delta h\Big),$$

where $u := \frac{\Delta h}{f} - \frac{1}{3!}\,\Delta\, d^2h$. Observe that each coefficient (of $u$) has zero $p$-derivation, and so be Lemma 2, we get $d(\frac{\Delta h}{f}) = -\frac{1}{3!}\,\Delta\, d^3h$. Using this last relation, together with taking $p$-derivation of the equation in $u$ twice, we get $\frac{\Delta h}{f} = \frac{1}{3!}\,\Delta\, d^3h$. Substituting this last relation in the equation $\frac{V(f)}{f^2} = 0$, then dividing by $\Delta d^3h$, and taking $p$-derivation, we arrive at $d^2f = 3!I$. □

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 3. Results

THEOREM 1. *Let $h \in \Lambda$ be in standard form with $Nh = p^c$, where $p$ is a fixed prime and $c$ a nonnegative integer. Consider the following polynomial in $f$:*

$$P(f) := \sum_{k=0}^{c} \frac{(-1)^k}{k!} f^k * d^k h,$$

*where $d$ is the $p$-basic derivation. Then the roots of $p$ lying in $\Lambda$ are exactly the divisors of $h$ of norm $p$, in standard form.*

PROOF. If $f$ is a divisor of $h$ with $Nf = p$ and in standard form, then $h = f * g$ with $Ng = p^{c-1}$. By Lemma 4, $g$ is also in standard form, and so by Lemma 5, we have $P(f) = 0$.

On the other hand, assume $P(f) = 0$. Define the arithmetic function

$$r(n) := \begin{cases} 1 & \text{if } n = p, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and note that $r$ is in standard form with $dr = I$. Writing $P(f)$ as a polynomial in $f - r$, we get

$$0 = \sum_{k=0}^{c} \frac{(-1)^k}{k!} d^k h * (f - r + r)^k = \sum_{i=0}^{c} \frac{(-1)^i}{i!} C_i * (f - r)^i,$$

where

$$C_i = \sum_{k=0}^{c-i} \frac{(-1)^k}{k!} r^k * d^{k+i} h.$$

Observe that $C_c = d^c h = c!I \neq 0$, and $dC_i = 0$ for all $i$. Thus, by Lemma 2, $d(f - r) = 0$ and so $df = I$. Since $f$ is a root of $P(f) = 0$, then $f$ divides the constant term of $P(f)$, which is $P(0) = h$. Consequently, $Nf = p^a$, for some nonnegative integer $a$ not greater then $c$. Hence, $f$ is not a unit and we conclude that $Nf = p$, with $f$ in standard form. □

CONVENTION. For brevity, throughout the rest of the paper, all functions considered are understood as arithmetic functions, $p$ is a fixed prime, and $d$ is the corresponding $p$-basic derivation.

THEOREM 2. *Let $h$ be in standard form with $Nh = p^2$. Then*

(i) *$h$ is a square if and only if $h$ satisfies the differential equation*

$$(dh)^2 - 4h = 0,$$

(ii) *$h$ is a prime if and only if $(dh)^2 - 4h$ is not a square.*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

PROOF. The result follows by taking the case $c = 2$ in Theorem 1, and observing that the quadratic equation so obtained has discriminant equal to $(dh)^2 - 4h$. □

THEOREM 3. *Let $h$ be in standard form with $Nh = p^c$, $c$ being a positive integer. Consider the following polynomial in $f$ over the field of quotients of $\Lambda$:*

$$Q(f) := \sum_{k=0}^{c} \frac{(-1)^k}{k!} d^k h * h^k * f^{c-k}.$$

*Then the roots of $Q$ lying in $\Lambda$ are exactly the divisors of $h$ in standard form with norm $p^{c-1}$.*

PROOF. Observe that $Q(f) = P(h/f) * f^c$, where $P$ is the polynomial stated in Theorem 1. If $h = f * g$, with $f$ in standard form and $Nf = p^{c-1}$, then $g = h/f$ is in standard form of norm $p$, so that by Theorem 1, $P(g) = 0$, and so $Q(f) = 0$.

Conversely, assume $Q(f) = 0$. Then $P(h/f) = 0$, with $h/f$ belonging to the field of quotients of $\Lambda$. Since $P$ is monic, then $h/f$ is in $\Lambda$, i.e. $f \mid h$. By Theorem 1, $N(h/f) = p$, so $Nf = p^{c-1}$. Also by Theorem 1, $h/f$ is in standard form, and so $f$ is in standard form. □

DEFINITION. Let $h_0, h_1$ be in standard form, both having norm equal to a power of $p$. By a *differential polynomial* in $h_0, h_1$ we mean a polynomial in $h_0, h_1$ and their derivatives with constant coefficients. By a *differential rational form* in $h_0, h_1$ we mean an arithmetic function expressed as a quotient of two differential polynomials in $h_0, h_1$.

THEOREM 4. *Let $h_0, h_1$ be in standard form, not equal, each of norm $p^2$. Then $h_0$ and $h_1$ have a non-unit common divisor if and only if they satisfy the differential equation*

$$(\triangle h)^2 - \triangle h * \triangle dh * dh_i + (\triangle dh)^2 * h_i = 0 \qquad (i = 0, 1), \qquad (1)$$

*where $\triangle h = h_1 - h_0$. Moreover, if (1) holds, this common divisor, in standard form, is equal to $\triangle h / \triangle dh$.*

PROOF. Let $L = \gcd(h_0, h_1)$ be in standard form. Then $L$ is that unique common divisor of $h_0$ and $h_1$ which is in standard form and has maximum norm. Thus $L = I$ or $NL = p$. Assume $NL = p$. By Theorem 1, $f = L$ is a common root of the two polynomial equations

$$P_i(f) := f^2 - f * dh_i + h_i = 0, \qquad (i = 0, 1).$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Taking the difference of these two equations, we get

$$\Delta dh * L - \Delta h = 0.$$

Since $\Delta h \neq 0$, then this last equation yields $\Delta dh | \Delta h$, and so $L = \Delta h / \Delta dh$ is a differential rational form in $h_0, h_1$. Also, $\Delta h / \Delta dh$ must be a root of each of the two polynomial equations in (1).

Conversely, assume $h_0, h_1$ satisfy (1). Then $\Delta dh \neq 0$, and the element $\Delta h / \Delta dh$ in the field of quotients of $\Lambda$ is a root of the two polynomial equations in (1). Since these equations are monic, then $\Delta h / \Delta dh$ belongs to $\Lambda$, and by Theorem 1, $\Delta h / \Delta dh$ is a common divisor of $h_0, h_1$ in standard form and of norm $p$. □

THEOREM 5. *There is no differential polynomial in $h_0, h_1$ which is equal to the greatest common divisor of $h_0, h_1$, in standard form, whenever $h_0$ and $h_1$ are of norm $p^2$, in standard form and the greatest common divisor is of norm $p$.*

PROOF. Define

$$h_x(n) = (1 - x)h_0(n) + xh_1(n),$$

where $x$ is a numerical parameter. It is easily checked that, for every $x$, the function $h_x$ is in standard form and has the same norm as $h_0$ and $h_1$. Also, $L := \gcd(h_0, h_x) = \gcd(h_0, h_1) = \gcd(h_1, h_x)$ whenever $x \neq 0$.

Suppose there exists a differential polynomial as described in the statements of the theorem. In this expression, replace $h_1$ by $h_x := h_0 + x\Delta h$, and $dh_1$ by $dh_0 + x\Delta dh$. For fixed $n$, the value of this expression is a polynomial in $x$ which is equal to $L(n)$ for each $x \neq 0$. Thus $L$ is equal to the sum of the terms of the differential polynomial not containing $x$, i.e. not containing $\Delta h$ nor $\Delta dh$. Consequently, $L = \gcd(h_0, h_1)$ is representable by a formula independent of $h_1$, which is absurd. □

THEOREM 6. *Let $h_0, h_1$ be in standard form, with $Nh_0 = p^2$, $Nh_1 = p^3$, $h_0 \nmid h_1$. Then $L := \gcd(h_0, h_1)$, in standard form, is either $I$ of norm 1, or*

$$\frac{h_0 * dh_0 - \frac{1}{2}h_0 * d^2h_1 + h_1}{(dh_0)^2 - \frac{1}{2}dh_0 * d^2h_1 + dh_1 - h_0}$$

*of norm $p$.*

PROOF. Since $h_0 \nmid h_1$, then $L$ must be $I$ or of norm $p$. In the latter case, $f = L$, by Theorem 1, is a common root of the quadratic polynomial

$$f^2 - f * dh_0 + h_0 = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

and of the cubic polynomial

$$f^3 - \frac{1}{2}f^2 * d^2h_1 + f * dh_1 - h_1 = 0.$$

Dividing the former into the latter, we get a linear remainder

$$\left((dh_0)^2 - \frac{1}{2}dh_0 * d^2h_1 + dh_1 - h_0\right) * f - \left(h_0 * dh_0 - \frac{1}{2}h_0 * d^2h_1 + h_1\right)$$

for which $L$ is also a root. Thus there is just one possible value for $L$, and it is a differential rational form in $h_0$, $h_1$. □

THEOREM 7. *Let $h_0, h_1$ be in standard form, not equal, each of norm $p^3$. Then $L := \gcd(h_0, h_1)$ is either $I$ of norm 1, or $2\Delta h/\Delta d^2h$ of norm $p^2$, or*

$$\frac{4\Delta h * \Delta dh - \Delta d^2h * (d^2h_0 * h_1 - h_0 * d^2h_1)}{4(\Delta dh)^2 + \Delta d^2h * (dh_0 * d^2h_1 - d^2h_0 * dh_1 - \Delta h)}$$

*of norm $p$.*

PROOF. If $L \neq I$, then $NL = p^2$ or $p$. We consider each case separately.

Case $NL = p^2$. By Theorem 3, $f = L$ is a common root of the cubic polynomial

$$f^3 - dh_i * f^2 + \frac{1}{2}d^2h_i * h_i * f - h_i^2 = 0 \qquad (i = 0, 1). \tag{2}$$

As in the proof of Theorem 5, let $h_x = (1-x)h_0 + xh_1 = h_0 + x\Delta h$. Note that $L$ is also a root of (2) with $i = x$. Equating the coefficients of $x^2$ in(2), we get $L = \frac{2\Delta h}{\Delta d^2h}$.

Case $NL = p$. By Theorem 1, $L$ is a common root of the two cubic polynomial equations

$$0 = f^3 - \frac{1}{2}f^2 * d^2h_i + f * dh_i - h_i \qquad (i = 0, 1). \tag{3}$$

Taking the difference, we have

$$\frac{1}{2}f^2 * \Delta d^2h - f * \Delta dh + \Delta h = 0, \tag{4}$$

of which $L$ is also a root. If $\Delta d^2h = 0$, then $L = \frac{\Delta h}{\Delta dh}$. If $\Delta d^2h \neq 0$, divide the quadratic polynomial (4) into (3) corresponding to $h_0$, the constant term of the linear remainder, apart from the nonzero factor $\frac{I}{(\Delta d^2h)^2}$, is

$$-4\Delta h * \Delta dh + d^2h_0 * \Delta h * \Delta d^2h - h_0 * (\Delta d^2h)^2. \tag{5}$$

We shall show that this expression is nonzero. This will imply that the linear remainder is not identically zero, and since its coefficients are differential rational forms, and $L$ is its root, we then obtain a differential form for $L$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Assume (5) is zero and $\triangle d^2h \neq 0$. Divide (5) by $L$ and rewrite it as

$$\frac{h_0 * (\triangle d^2h)^2}{L} = (d^2h_0 * \triangle d^2h - 4\triangle dh) * \frac{\triangle h}{L}.$$

Since $\frac{h_0}{L}$ and $\frac{\triangle h}{L}$ are relatively prime, the former divides $d^2h_0 * \triangle d^2h - 4\triangle dh$. This last quantity is not zero but has zero second derivation, which contradicts the fact that it is divisible by $\frac{h_0}{L}$, of norm $p^2$. Solving the linear remainder for $L$, we get the required result. □

THEOREM 8. *Let $h_0, h_1$ be in standard form, each having norm equal to a power of $p$ not exceeding $p^4$. Then $L$ is always expressible as a differential rational form in $h_0$ and $h_1$.*

PROOF. We may assume that $Nh_0 = Nh_1 = p^4$. For if each norm is less than $p^4$, the result follows from Theorems 4, 6 and 7, and if $Nh_0 = p^4, Nh_1 = p^c$, $c$ being less than 4, and the theorem has been proved for $L' = \gcd(h_0, r^{4-c} * h_1)$, $r$ being as defined in the proof of Theorem 1, then the result is also true for $L = \gcd(h_0, h_1)$, because $L$ is either equal to $L'$ or to $L'$ divided by a power of $r$, since $r$ is a prime in $\Lambda$. We may further assume $h_0 \neq h_1$, $L \neq I$, so $NL$ is either $p^3, p^2$ or $p$.

Case $NL = p^3$. $L$ is a common root, by Theorem 3, of the two quartic polynomial equations

$$f^4 - dh_i * f^3 + \frac{1}{2}d^2h_i * h_i * f^2 - \frac{1}{6}d^3h_i * h_i^2 * f + h_i^3 = 0 \qquad (i = 0, 1).$$

Applying the $h_x$-method, as in Theorem 5, to these equations, and equating the $x^3$-component, we get $L = \frac{6\triangle h}{\triangle d^3h}$.

Case $NL = p$. By Theorem 1, $L$ is a common root of the two quartic polynomial equations

$$f^4 - \frac{1}{3!}f^3 * d^3h_i + \frac{1}{2!}f^2 * d^2h_i - f * dh_i + h_i = 0 \qquad (i = 0, 1). \quad (6)$$

Forming the difference of these two equations yields

$$-\frac{1}{6}f^3 * \triangle d^3h + \frac{1}{2}f^2 * \triangle d^2h - f * \triangle dh + \triangle h = 0, \quad (7)$$

of which $L$ is also a root. If $\triangle d^2h = 0$, then $L = \frac{\triangle h}{\triangle dh}$. If $\triangle d^3h = 0$ and $\triangle d^2h \neq 0$, then (7) reduces to (4). Dividing the quadratic polynomial (4) into the quartic polynomial (6) corresponding to $h_0$, we obtain a linear remainder whose constant term, apart from a non-zero factor $\frac{I}{(\triangle d^2h)^3}$, is of the form $h_0 * (\triangle d^2h)^3 - 2J * \triangle h$, where

$$J = 4(\triangle dh)^2 - \frac{2}{3!}d^3h_0 * \triangle dh * \triangle d^2h - 2\triangle h * \triangle d^2h + \frac{1}{2}d^2h_0 * (\triangle d^2h)^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

is a differential polynomial having zero third order derivation. We claim that this constant term is nonzero, for otherwise $\frac{h_0}{L} * (\triangle d^2 h)^3 = 2J * \frac{\triangle h}{L}$. Since $\frac{h_0}{L}$ and $\frac{\triangle h}{L}$ are relatively prime, then $\frac{h_0}{L}$ divides $J$. But $N\left(\frac{h_0}{L}\right) = p^3$ contradicting the fact that $d^3 J = 0$. Consequently, the linear (remainder) term is not zero, and as $L$ is its root, we obtain a differential rational form for $L$. If $\triangle d^3 h \neq 0$, divide the cubic polynomial (7) into the quartic polynomial (6) corresponding to $h_0$. The quadratic remainder $R$ has a constant term, apart from the nonzero factor $\frac{I}{(\triangle d^3 h)^2}$, equal to $h_0 * (\triangle d^3 h)^2 + J' * \triangle h$, where $J' = 18 \triangle d^2 h - d^3 h_0 * \triangle d^3 h$. We claim that this constant term is nonzero, for otherwise, we would have $\frac{h_0}{L} * (\triangle d^3 h)^2 = -J * \frac{\triangle h}{L}$ . Since $\frac{h_0}{L}$ and $\frac{\triangle h}{L}$ are relatively prime, then $\frac{h_0}{L}$ divides $J$. Observe that $d^3 J = 0$, and $N(\frac{h_0}{L}) = p^3$, which is a contradiction. Thus the quadratic remainder term $R \neq 0$. If $R$ is linear, we are through because its coefficients are differential rational forms and its root is $L$. Suppose $R$ is of degree 2, with the second root $f_0$ belonging to the field of quotients of $\Lambda$. We may assume that $f_0$ is also a common root of the two polynomials (6) corresponding to $h_0, h_1$, for otherwise division of $R$ into one of these polynomials will produce a linear polynomial with differential rational forms as coefficients having $L$ as its root, and we are done. Since (6) is monic, $f_0$ then belongs to $\Lambda$, and by Theorem 1, $f_0$ is a common divisor of $h_0, h_1$, of norm $p$, and in standard form. Thus $f_0 = L$, so $L$ is a double root of $R$. Therefore, the discriminant of $R$ is 0. We thus obtain a differential rational form for $L$.

Case $NL = p^2$. By Lemma 6, $f = L$ is a root of $T(f) = 0$, with $h$ replaced by $h_x := (1-x)h_0 + xh_1$. The coefficient of $x^3$ in $T(f)$, after cancelling the nonzero factor $\triangle h$, is equal to

$$V(f) := (\triangle h)^2 - \frac{1}{2}\triangle h * \triangle d^2 h * f + \frac{1}{6}\triangle dh * \triangle d^3 h * f^2 - \frac{1}{36} * (\triangle d^3 h)^2 * f^3,$$

and $L$ is a root of $V(f) = 0$. If $\triangle d^3 h = 0$, we get $L = \frac{2\triangle h}{\triangle d^2 h}$, and we are done. We thus assume $\triangle d^3 h \neq 0$. The coefficient of $x^2$ in $T(f)$ is

$$\begin{aligned} &3h_0 * (\triangle h)^2 - \frac{1}{2} f * \left(2h_0 * \triangle h * \triangle d^2 h + d^2 h_0 * (\triangle h)^2\right) + f^2 * \left(\frac{1}{6} h_0 * \triangle dh \right. \\ &\qquad \left. * \triangle d^3 h - (\triangle h)^2 + \frac{1}{6}\triangle h * \triangle dh * d^3 h_0 + \frac{1}{6} dh_0 * \triangle h * \triangle d^3 h\right) \\ &+ f^3 * \left(-(\triangle dh)^2 - \frac{1}{36}(h_0 * (\triangle d^3 h)^2 + 2d^3 h_0 * \triangle h * \triangle d^3 h) + \triangle h * \triangle d^2 h\right) \\ &+ f^4 * \left(\frac{1}{6}\triangle dh * d^3 h\right), \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

which is a quartic polynomial in $f$, and the remainder $W$, when divided by the cubic polynomial $V(f)$ has constant term equal to

$$\frac{2(\triangle h)^2}{(\triangle d^3 h)^2}\left(h_0 * (\triangle d^3 h)^2 + 18\triangle h * \triangle d^2 h - d^3 h_0 * \triangle h * \triangle d^3 h\right).$$

Apart from the nonzero factor $\frac{2(\triangle h)^2}{(\triangle d^3 h)^2}$, this constant term is exactly (8). Proceeding as after (8), we have that this constant term is nonzero. Thus the remainder $W$ is a linear or quadratic polynomial with nonzero constant term, and having $L$ as a root. If $W$ is linear, then clearly $L$ is expressible as a differential rational form in $h_0, h_1$ and we are through. Assume then that $W$ is of degree 2, with second root $f_1$ belonging to the field of quotients of $\Lambda$. We may assume that $f_1$ is also a common root of the two polynomials $T(f)$ corresponding to $h_0, h_1$. and also a root of $V(f)$, for otherwise division of $W$ into one of these three polynomials will produce a linear polynomial with differential rational form coefficients having $L$ as a root, and we are done. Since $T(f)$ is monic, $f_1$ thus belongs to $\Lambda$, and so by Lemma 6, $f_1$ is a common divisor of $h_0, h_1$ of norm $p^2$. Also, since $f_1$ is a root of $V(f) = 0$, we know by Lemma 5 that $d^2 f_1 = 3!I$, so $\frac{1}{3}f_1$ is in standard form. Consequently, $f_1 = 3L$, and so $L$ is a double root of $W$. Hence, the discriminant of $W$is 0, and we again obtain a differential rational form for $L$. □

## References


[1] T. M. Apostol, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[2] E. D. Cashwell and C. J. Everett, *The ring of number-theoretic functions*, Pacific J. Math., 9(1959), 975–985.

[3] E. D. Cashwell and C. J. Everett, *Formal power series*, Pacific J. Math., 13(1963), 45–64.

[4] David Rearick, *Divisibility of arithmetic functions*, Pacific J. Math., 112(1984), 237–248.

[5] Harold N. Shapiro, *On the convolution ring of arithmetic functions*, Comm. Pure Appl. Math., 25(1972), 287–336.


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บรรณานุกรม


1. T.M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, New York, 1976.
2. D.A. Buchsbaum, Some remarks on factorization in power series rings, J. Math. Mech. 10(5)(1961),749-753.
3. R. Bellman and H.N. Shapiro, The algebraic independence of arithmetic functions (I) Multiplicative functions, Duke Math. J. 15(1948),229-235.
4. E.D. Cashwell and C.J. Everett, The ring of number-theoretic functions, Pacific J. Math. 9(1959),975-985.
5. E.D. Cashwell and C.J. Everett, Formal power series, Pacific J. Math. 13(1963),45-64.
6. W. Krull, Beitrage zur Arithmetik kommutative Integritatsbereiche, III. Zum Dimensionsbegriff der Idealtheorie, Math. Zeit. 42(1937),745-766.
7. V. Laohakosol, K. Kongsakorn and U. Leerawat, Some arithmetic functions algebraically independent with respect to convolution, Soochow J. Math. 15(2)(1989),171-178.
8. J. Popken, Algebraic dependence of arithmetic functions, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. 65(1962),155-168.
9. D. Rearick, Divisibility of arithmetic functions, Pacific J. Math. 112(1984),237-248.
10. D. Rearick, Multiplicativity-preserving arithmetic power series, Pacific J. Math. 55(1)(1974),277-283.
11. W. Ruckert, Zum Eliminationsproblem der Potenzreihenideale, Math. Ann. 107(1933),259-281.
12. P. Samuel, On unique factorization domains, Ill. J. Math. 5(1961),1-17.
13. H.N. Shapiro, On the convolution ring of arithmetic functions, Comm. Pure Appl. Math. 25(1972),287-336.
14. H.N. Shapiro and C.H. Sparer, On algebraic independence of Dirichlet series, Comm. Pure Appl. Math. 39(1986),695-745.


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## ประวัตินักวิจัยและคณะ


หัวหน้าโครงการ นายวิเชียร เลาหโกศล B.Sc.(Hons.), M.Sc., Ph.D.

อาชีพ รับราชการ ตำแหน่ง รองศาสตราจารย์

หน่วยงาน ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กทม. 10900

ผู้ร่วมงาน 1. น.ส.กรรณิกา คงสาคร วท.บ.(เกียรตินิยม) วท.ม.

อาชีพ รับราชการ ตำแหน่ง ผู้ช่วยศาสตราจารย์

หน่วยงาน ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กทม. 10900

2. น.ส.อุษณีย์ ลีรวัฒน์ วท.บ.(เกียรตินิยม) วท.ม. วท.ด.

อาชีพ รับราชการ ตำแหน่ง อาจารย์

หน่วยงาน ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กทม. 10900




เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้