รายงานการวิจัย

เรื่อง

การเปรียบเทียบผลการทดสอบการแจกแจงปกติด้วยสถิติทดสอบจากโปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติ SPSS

(Comparison Results of Normality Test by Various Test Statistics From Statistical Package SPSS)

โดย

รศ.อุมาพร จันทศร

ผศ.ดร.มนัส ไพฑูรย์เจริญลาภ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจากเงินรายได้คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ประจำปีงบประมาณ 2550

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการทดสอบการแจกแจงปกติ จากการทดสอบ 3 แบบ คือ Kolmogorov, Lilliefors และ Shapiro – Wilk ที่มีอยู่ใน SPSS v.13 ข้อมูลที่นำมาศึกษาเป็นข้อมูลจากการจำลองแบบจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ และที่เบี่ยงเบนไปเล็กน้อยจากการแจกแจงปกติ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติ MINITAB ในแต่ละกรณีมีการทำซ้ำ 500 ครั้ง ของการจำลองแบบข้อมูล มีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10, 20, 30, 50 และ 100 ทำการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบ และความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนชนิดที่ I

ผลการวิจัย พบว่าสถิติทดสอบ Shapiro – Wilk มีอำนาจการทดสอบสูงที่สุดในทุกกรณี และทุกขนาดตัวอย่าง โดยเฉพาะเมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่เท่ากับ 100 จะมีอำนาจการทดสอบใกล้ 1 และมีความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ I เป็นส่วนใหญ่

Abstract

The purpose of this study is to compare the efficiency of three statistics for testing normality ; Komogorov, Lilliefors and Shapiro – Wilk, which are available in SPSS v13.0. The data for this study was yielded from simulation, by the method of Monte Carlo, under conditions of normal distribution and slightly depart from the normal distribution, by using MINITAB 14. In each situation was done 500 iterations with different sample size ; 10, 20, 30, 50 and 100. Comparisons of Type I error and power of the test among the three test statistics were done.

It was found that Shapiro – Wilk Test had the highest in all cases and all sample sizes, especially for the sample size of 100, it had the power of the test almost to be 1. And it also had ability to control probability of Type I error in almost situations.

คำสำคัญ (Keywords) : Normality Test, Kolmogorov Test, Lilliefors Test, Shapiro-Wilk Test, SPSS, MINITAB

คำนำ

ในการเลือกใช้สถิติเพื่อวิเคราะห์ผลลัพธ์ที่ได้จะน่าเชื่อถือ เมื่อสถิติวิเคราะห์ถูกนำไปใช้ภายใต้ข้อกำหนดเบื้องต้นที่เป็นจริง ข้อกำหนดเบื้องต้นที่สำคัญมักจะ คือ ข้อกำหนดว่าตัวแปรสุ่มนั่นต้องมีการแจกแจงปกติ ดังนั้นการตรวจสอบการแจกแจงปกติ จึงเป็นขั้นตอนแรกที่นักวิจัยจะต้องกระทำ และปัจจุบันมักจะใช้โปรแกรมสำเร็จรูปวิเคราะห์ โดยเฉพาะโปรแกรม SPSS เนื่องจากในโปรแกรม SPSS มีสถิติที่ใช้ทดสอบได้ 3 แบบ คือ Kolmogorov (แบบ Lilliefors), Shaprio – Wilk และ 1-Sample Kolmogorov – Smirnov จึงเป็นที่น่าสงสัยว่าควรจะเลือกใช้สถิติทดสอบใด จึงจะได้ผลสรุปที่ถูกต้องอย่างแท้จริง

ผลของงานวิจัยนี้จะเป็นประโยชน์สำหรับนักวิจัยทั่ว ๆ ไป และจะทำให้เลือกใช้สถิติวิเคราะห์ได้ถูกต้อง เหมาะสมกับลักษณะข้อมูล และข้อกำหนดเบื้องต้นอย่างแท้จริง

สุดท้ายนี้ผู้วิจัยขอขอบคุณภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่อุดหนุนงบประมาณจำนวน 20,000 บาท สำหรับงานวิจัยนี้ รวมทั้งนักศึกษาชั้นปีที่ 4 ปีการศึกษา 2551 คือ นางสาววรพรรณ เจริญขำ และนายวทัญญู ทองสุข ที่สละเวลาวิเคราะห์ข้อมูลด้วยโปรแกรม SPSS จนสำเร็จลุล่วง

รศ.อุมาพร จันทศร
ผศ.ดร.มนัส ไพฑูรย์เจริญลาภ
15 พฤศจิกายน 2551

สารบัญ

สารบัญตาราง

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญของปัญหา

การแจกแจงปกติ (The Normal Distribution) เป็นการแจกแจงพื้นฐานที่สำคัญมาก ในลำดับแรกของการเลือกใช้สถิติวิเคราะห์แบบต่าง ๆ จำเป็นต้องตรวจสอบว่าตัวแปรสุ่มที่สนใจนั้นมีการแจกแจงปกติหรือไม่ (1) ถ้าเป็นจริงก็เลือกใช้สถิติแบบพาราเมตริก แต่ถ้าไม่จริง วิธีที่นิยมใช้คือการแปลงข้อมูล (Transformation) เช่น แปลงเป็นค่าล็อค (Log) แล้วทดสอบอีกครั้งว่ามีการแจกแจงปกติหรือไม่ ขั้นสุดท้ายต้องเลือกใช้สถิติแบบไม่ใช้พารามิเตอร์เมื่อข้อกำหนดเบื้องต้นไม่เป็นจริง แต่โดยทั่วไปมีประสิทธิภาพต่ำกว่าสถิติแบบพาราเมตริก (2)

การตรวจสอบการแจกแจงปกติ มีหลายวิธีจากง่ายที่สุดคือดูจากกราฟ ไปจนถึงการใช้สถิติทดสอบ (3) เช่น Anderson & Darling (4) หรือ Kolmogorov – Smirnov (K – S) (5) หรือ Shapiro – Wilk (S – W) (6) ที่เป็นที่รู้จักกันโดยทั่วไปในหมู่นักวิจัย นอกจากนี้มีการคิดค้นสถิติใหม่ ๆ อีกมาก เช่น Chen & Shapiro (1995) หรือ Zhang (1999) (7) ซึ่งใช้หลักการของการทดสอบการถดถอยและสหสัมพันธ์เหมือนการทดสอบของ S – W ในขณะที่สองการทดสอบแรกใช้หลักการของ Empirical Distribution Function Test (EDF) และมีการพัฒนาตัวสถิติทดสอบที่ใช้การวัดความเบ้และความโด่ง (Test based on Skewness and Kurtosis) มาทดสอบการแจกแจงปกติ คือ D' Agostine (1990), Park (1999)

ในปัจจุบันโปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติ ถูกใช้เป็นเครื่องมือวิเคราะห์ข้อมูลแทนที่การคำนวณด้วยมือ และที่เป็นที่รู้จักในหมู่นักวิจัยคือ โปรแกรม SPSS ซึ่งสามารถใช้งานได้ง่าย และสะดวกในการจัดหาการทดสอบการแจกแจงปกติใน SPSS สามารถเลือกจากเมนู Analyze – Descriptive Statistics – Explore – Plots – Normality Plots with tests ซึ่งมีสถิติทดสอบ Kolmogorov – Smirnov (แบบ Lilliefors) และสถิติทดสอบ Shapiro – Wilk หรืออาจเลือกใช้เมนู Analyze – Nonparametric Test – 1-Sample K – S ก็ได้ เมื่อทดลองใช้ข้อมูลชุดเดิมแล้ววิเคราะห์ด้วยสถิติทดสอบทั้ง 3 จะพบว่าการสรุปผลมีทั้งให้ผลเหมือนกันและต่างกัน จึงเป็นที่น่าสงสัยว่าผู้ใช้ควรจะเลือกใช้เมนูใดในสถานการณ์ต่าง ๆ (เช่น ขนาดตัวอย่างเล็กหรือใหญ่หรือทราบค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงหรือไม่) และมีข้อขัดแย้งกับทฤษฎีของสถิติทดสอบเหล่านี้ที่กล่าวถึงในตำราสถิติที่ไม่ใช้พารามิเตอร์ในหลายประเด็น ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ตามทฤษฎีสถิติทดสอบ K – S ควรจะใช้กับตัวอย่างขนาดเล็ก เพราะจะได้ค่าวิกฤตจากการแจกแจงที่แท้จริง (Conover หน้า 77 (8), Gibbons หน้า 176 (9)) แต่คู่มือการใช้ SPSS ให้เลือกใช้สถิติทดสอบ S – W เมื่อมีขนาดตัวอย่าง ≤ 50 และกล่าวว่าโปรแกรมจะไม่วิเคราะห์สถิติทดสอบนี้ให้เมื่อขนาดตัวอย่างใหญ่กว่า 50 แต่เมื่อทดลองวิเคราะห์กับข้อมูลที่มีขนาดตัวอย่าง = 100 ก็ยังคงได้ผลจาก SPSS อยู่ ดังนั้นในกรณีที่ตัวอย่างมีขนาดเล็กกว่า 50 ผู้ใช้จะสามารถเลือกใช้สถิติทดสอบ S – W หรือ 1-Sample K – S ก็ได้ จึงน่าสงสัยว่าผลการทดสอบจะเหมือนกันหรือไม่ และมีอำนาจการทดสอบเท่ากันหรือไม่

การตั้งสมมติฐานเบื้องต้น เมื่อจะใช้สถิติทดสอบ 1-Sample K – S ตามทฤษฎีจำเป็นต้องระบุพารามิเตอร์ให้ครบถ้วน (เช่น H_0 : X มีการแจกแจงปกติด้วยค่าเฉลี่ย 100 ความแปรปรวน = 25 เป็นต้น) ในกรณีอื่นนอกจากนี้ไม่แนะนำให้ใช้สถิติทดสอบนี้อย่างเด็ดขาด (Sprent หน้า 68) แต่ใน SPSS ด้วยคำสั่ง 1-Sample K – S ผู้ใช้ไม่ต้องระบุค่าพารามิเตอร์ แต่ผลการวิเคราะห์จะหมายเหตุว่าใช้ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวอย่างเป็นค่าประมาณแทน และในเมนู Help ก็กล่าวว่าถ้าใช้วิธีการเช่นนี้ การแจกแจงของสถิติทดสอบ 1-Sample K – S จะเปลี่ยนไป แนะนำให้ผู้ใช้เปลี่ยนไปใช้เมนู Explore แทน ซึ่งวิธีการเช่นนี้จะทำให้ผู้ใช้ที่ไม่มีความรู้ทางสถิติเพียงพอ อาจเลือกใช้สถิติทดสอบที่ไม่เหมาะสม ในกรณีเช่นนี้ในคำสั่ง 1-Sample K – S ควรที่จะมีการปรับปรุง Algorithm ให้ผู้ใช้ระบุพารามิเตอร์ หรือไม่เช่นนั้นก็ไม่ควรจะมีการวิเคราะห์การแจกแจงปกติในเมนูนี้

ตามทฤษฎีบทสถิติทดสอบ 1- Sample K – S เหมาะสมที่จะใช้ทดสอบการแจกแจงแบบต่อเนื่องเท่านั้น (Sprent หน้า 77) แต่ใน SPSS สามารถเลือกทดสอบการแจกแจง Poisson ซึ่งเป็นการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง ผลสรุปที่ได้จึงไม่น่าเชื่อถือ เพราะไม่สามารถควบคุมค่าความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ได้

สถิติทดสอบแบบ Lilliefors ได้ถูกพัฒนาเพื่อใช้แทนที่สถิติทดสอบ 1-Sample K – S แต่ไม่จำเป็นต้องระบุค่าพารามิเตอร์ (คือค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน) ที่ครบถ้วนในสมมติฐานเบื้องต้น การแจกแจงของสถิติทดสอบจะมีหลายกรณี เช่น ทราบค่าเฉลี่ย แต่ไม่ทราบค่าความแปรปรวน และกรณีสุดท้ายไม่ทราบค่าทั้งคู่ แต่ในคำสั่ง Explore ผู้ใช้จะใช้ได้ในกรณีเดียวคือ ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ทั้งคู่ SPSS ได้คำนวณค่า p (p – value) จากการแจกแจงที่ถูกต้องหรือไม่

สถิติทดสอบ 1-Sample K – S และ Lilliefors ควรจะมีการปรับค่า (Correction for the Test Statistic) เพื่อพิจารณาความแตกต่างของโค้งการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสม 2 เส้น ทางขวามือด้วยสูตร

$$D = \max_{1 \le i \le r} \left\{ \max\left[\left| S(x_i) - F_0(x_i) \right|, \left| S(x_{i-1}) - F_0(x_i) \right| \right] \right\}$$

ซึ่งจะทำให้เห็นความแตกต่างอย่างแท้จริง SPSS ได้สร้าง Algorithm ได้ถูกต้องหรือไม่

เนื่องจากโปรแกรม SPSS เป็นที่นิยมกันแพร่หลายในประเทศไทย และการทดสอบการแจกแจงปกติ มีความสำคัญดังกล่าวในตอนต้น รวมทั้งข้อสงสัยในประเด็นต่าง ๆ ที่กล่าวแล้ว งานวิจัยนี้จึงจะหาข้อสรุปว่าเมนูทั้ง 3 ควรจะถูกเลือกใช้ในสถานการณ์ใด ๆ บ้าง จึงจะได้ผลสรุปที่เชื่อถืออย่างแท้จริง

ผลการวิเคราะห์ทางสถิติของโปรแกรมสำเร็จรูปต่าง ๆ พบว่ายังมีข้อผิดพลาด หรือทำให้เข้าใจผิด (Misleading) ในหลายประเด็น เช่น การศึกษาของกมล (10,11) หรือของ Bergmann, Ludbrook and Spooren (12) เกี่ยวกับการปรับค่าซ้ำ (Correction for ties) ของสถิติทดสอบ Wilcoxon – Mann – Whitney หรือการศึกษาของ Leo Knüsel (13) ที่พบว่าค่าความน่าจะเป็น (Probability) จากการแจกแจงต่าง ๆ ที่คำนวณจาก Microsoft Excel 97 และ 2003 ยังไม่ถูกต้องในหลายกรณี และการศึกษาของ McCullough และ Wilson (14) พบว่าการใช้เทคนิคสถิติ 3 เทคนิค คือ การวิเคราะห์การถดถอย (ทั้งกรณีเชิงเส้นและไม่ใช่เชิงเส้น) การผลิตเลขสุ่ม และการแจกแจงแบบต่าง ๆ ยังไม่ถูกต้อง จากการใช้ Microsoft Excel 97 และแนะนำว่าผู้ต้องการ

วิเคราะห์สถิติเหล่านี้ไม่ควรใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Excel และกรณีสุดท้ายเป็นการศึกษาของกุศยา (15) ที่เปรียบเทียบประสิทธิภาพของการจำลองแบบข้อมูลด้วยโปรแกรม SAS และ MINITAB ที่พบว่าสำหรับตัวอย่างเล็กทั้ง 2 โปรแกรมให้ผลไม่ต่างกัน แต่สำหรับตัวอย่างขนาดใหญ่ แนะนำให้ใช้โปรแกรม SAS มากกว่า

มีการศึกษาถึงการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบ (Power of the Test) ของการทดสอบการแจกแจงปกติทั้งหลาย จากการศึกษามากมาย อาทิเช่น Gan Kochler (16) ซึ่งใช้วิธีการจาก Monte Carlo 1000 ชุดตัวอย่าง จากการแจกแจงแบบต่าง ๆ พบว่า S – W เป็นการทดสอบที่มีอำนาจการทดสอบสูงสุด แต่ยังไม่เป็นการทดสอบที่มี UMP (Uniformly most powerful Test) สำหรับทุกสมมติฐานแย้ง หรือการศึกษาของเกตุจันทร์ (17) ที่เปรียบเทียบสถิติทดสอบ 6 ตัว พบว่าสถิติ S – W จะมีอำนาจสูงสุดเมื่อมีการแจกแจงแบบเบ้และขนาดตัวอย่างน้อยกว่า 50 และใช้ระดับนัยสำคัญ .01 เป็นต้น

1.2 วัตถุประสงค์

1.2.1 เพื่อศึกษาว่าในกรณีตัวอย่างขนาดเล็กกว่า 50 การทดสอบแบบ K-S และ S-W ให้ผลต่างกันหรือไม่ และการทดสอบใดจะสามารถควบคุมความน่าจะเป็น ความคลาดเคลื่อนชนิดที่หนึ่งได้ดีกว่ากัน การทดสอบใดมีอำนาจการทดสอบสูงกว่ากันในกรณีต่าง ๆ

1.2.2 เมื่อใช้สถิติทดสอบ K-S, S-W และ Lilliefors ทดสอบจะศึกษาถึงความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนชนิดที่หนึ่ง หรือระดับนัยสำคัญในการทดสอบของแต่ละการทดสอบและเปรียบเทียบกัน

1.2.3 เมื่อใช้สถิติทดสอบ K-S, S-W และ Lilliefors ทดสอบจะศึกษาถึงอำนาจการทดสอบของแต่ละการทดสอบและเปรียบเทียบกัน

1.2.4 เพื่อหาข้อสรุปว่าแต่ละวิธีในการทดสอบเหมาะสมที่จะใช้ในกรณีใดบ้าง (ขนาดตัวอย่าง, การกระจาย, ความโด่งแบบต่าง ๆ) จึงจะให้อำนาจการทดสอบสูงที่สุด

1.3 ข้อตกลงเบื้องต้น

1.3.1 การวิจัยครั้งนี้ถือว่า ความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 และอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบทั้ง 3 แบบ ใน SPSS เป็นดัชนีสำคัญที่ผู้วิจัยใช้เป็นเกณฑ์ในการสรุปผลว่าสถิติทดสอบใดควรจะถูกนำไปใช้

1.3.2 ความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 จะใช้เกณฑ์ของ Cochran และ Bradley ดังนี้

เกณฑ์ของ Cochran จะมีเกณฑ์การพิจารณาว่าสามารถควบคุมความน่าจะเป็นได้ เมื่อ

ที่ระดับนัยสำคัญ .10 ถ้าค่าที่ได้มีค่าในช่วง (.08 - .12)

ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ถ้าค่าที่ได้มีค่าในช่วง (.04 - .06)

เกณฑ์ของ Bradley จะมีเกณฑ์การพิจารณาว่าสามารถควบคุมความน่าจะเป็นได้ เมื่อ

ที่ระดับนัยสำคัญ .10 ถ้าค่าที่ได้มีค่าในช่วง (.05 - .15)

ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ถ้าค่าที่ได้มีค่าในช่วง (.025 - .075)

1.3.3 การสร้างข้อมูลให้มาจากประชากรแบบต่าง ๆ ได้จากการจำลองข้อมูลจากโปรแกรม MINITAB ด้วยเมนู Random Number โดยเชื่อมั่นว่าข้อมูลที่ได้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงตามที่กำหนด ด้วยผลงานวิจัยของกุศยา (15) ที่ได้ผลสรุปงานวิจัยว่า MINITAB มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับ SAS ในการจำลองข้อมูลให้มาจากการแจกแจงแบบต่าง ๆ เมื่อข้อมูลมีขนาดเล็ก

1.4 ขอบเขตของการวิจัย

1.4.1 ประชากรที่สุ่มตัวอย่างมาเพื่อทดสอบการแจกแจงปกติ จะมีการแจกแจงสมมาตรที่เบี่ยงเบนไปจากการแจกแจงปกติเล็กน้อย ดังต่อไปนี้

- การแจกแจงปกติโดยสนใจศึกษาเมื่อพารามิเตอร์ $\mu = 100$ และ σ = 10, 50, 100
- การแจกแจงสมมาตรที่มีหางยาวกว่าปกติ (Long tailed distribution) คือ การแจกแจงแบบที d.f = 1 และ 5
- การแจกแจงสมมาตรแต่โด่งกว่าปกติมาก (Distributions with high kurtosis) เช่น การแจกแจงCauchy ด้วยพารามิเตอร์ 0, 2 คือ C(0, 2) และ C(0, 0.5) และการแจกแจง Laplace คือ L(0, 0.5)
- การแจกแจงสมมาตรแต่โด่งกว่าปกติเล็กน้อย (Distribution with kurtosis slightly higher than the Normal) เช่น Logistic คือ L(0, 0.5) และ L(0, 1)
- การแจกแจงสมมาตรที่มีหางสั้น (Short tailed distribution) เช่น Uniform แบบ U(0 – 1) และ U (10 – 50)

1.4.2 จะสุ่มตัวอย่างข้อมูลจากประชากรที่มีการแจกแจงต่าง ๆ ด้วยขนาดตัวอย่างเป็น 10, 20, 30, 50 และ 100

1.4.3 ทดลองใช้เมนูของ SPSS คือ Explore และ 1-K-S ทดสอบการแจกแจงปกติจากข้อมูลตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรแบบต่าง ๆ เป็นจำนวนซ้ำ 500 ครั้ง หรือใช้ข้อมูลตัวอย่างจากประชากรหนึ่ง ๆ 500 ชุด

1.5 คำนิยามเชิงปฏิบัติการ

ความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 (Type I error) หมายถึง ความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการปฏิเสธสมมติฐานเบื้องต้น เมื่อสมมติฐานเบื้องต้นเป็นจริง ความน่าจะเป็นหรือโอกาสที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 จะกำหนดเบื้องต้นไว้ที่ α = .05 หรือ .10 ในงานวิจัยนี้จะเกิดความคลาดเคลื่อน

ชนิดที่ 1 นี้ เมื่อมีผลการทดสอบพบว่า ด้วยเมนูต่าง ๆ ของ SPSS แล้ว มีนัยสำคัญทางสถิติของการทดสอบจากข้อมูลตัวอย่างของประชากรที่มีการแจกแจงปกติ

ความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 2 (Type II error) หมายถึงความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการยอมรับสมมติฐานเบื้องต้น เมื่อสมมติฐานเบื้องต้นเป็นเท็จ ความน่าจะเป็นหรือโอกาสที่จะเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 2 กำหนดด้วย β ในงานวิจัยนี้จะเกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 2 นี้ เมื่อมีผลการทดสอบด้วยเมนูต่าง ๆ ของ SPSS แล้ว พบว่าไม่มีนัยสำคัญทางสถิติของการทดสอบจากข้อมูลตัวอย่างของประชากรที่มีการแจกแจงแบบอื่น ๆ ที่ไม่ใช่การแจกแจงปกติ

อำนาจการทดสอบ (Power of the Test) หมายถึง ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานเบื้องต้น เมื่อสมมติฐานเบื้องต้นเป็นเท็จ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $1-\beta$ ในงานวิจัยนี้จะคือความน่าจะเป็นของการมีนัยสำคัญทางสถิติจากการทดสอบด้วยเมนูต่าง ๆ ของ SPSS เมื่อใช้ข้อมูลตัวอย่างจากประชากรที่มีการแจกแจงอื่น ๆ ที่ไม่ใช่การแจกแจงปกติ

ความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 จากผลการวิจัยนี้ หมายถึง สัดส่วนของจำนวนครั้งของการปฏิเสธสมมติฐานเบื้องต้น (คือได้ค่า p (p-value) น้อยกว่า .05 หรือ .10) จากข้อมูลตัวอย่างจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ ต่อจำนวนครั้งที่ทดลองทั้งหมด คือ 500 ครั้ง

อำนาจการทดสอบ จากผลการวิจัยนี้ หมายถึง สัดส่วนของการปฏิเสธสมมติฐานเบื้องต้น (คือได้ค่า p (p-value) น้อยกว่า .05 หรือ .10) จากข้อมูลตัวอย่างจากประชากรที่มีการแจกแจงอื่น ๆ ที่ไม่ใช่การแจกแจงปกติ ต่อจำนวนครั้งที่ทดลองทั้งหมด คือ 500 ครั้ง

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัย

ภายใต้ขั้นตอนวิธี (Algorithm) ของการสร้างระบบโปรแกรม SPSS

1.6.1 ทำให้สามารถเลือกใช้วิธีการทดสอบการแจกแจงปกติจากโปรแกรม SPSS ในแต่ละกรณี (ขนาดตัวอย่าง การกระจาย ความเบ้) ให้ได้ผลที่น่าไว้วางใจอย่างแท้จริง (valid test)

1.6.2 ทำให้ทราบว่าสถิติตัวใดจะมีอำนาจการทดสอบมากกว่ากันภายใต้การแจกแจงแบบต่าง ๆ

บทที่ 2
เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้ผู้วิจัยจะนำเสนอแยกเป็น 4 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับการแจกแจงปกติ

ตอนที่ 2 สถิติทดสอบสำหรับการทดสอบการแจกแจงปกติ จากเมนูของ SPSS คือ สถิติทดสอบ 1 sample Kolomogorov-Smirnov (1-Sample K-S), Lilliefors และ Shapiro-Wilk (S-W)

ตอนที่ 3 การแจกแจงที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้

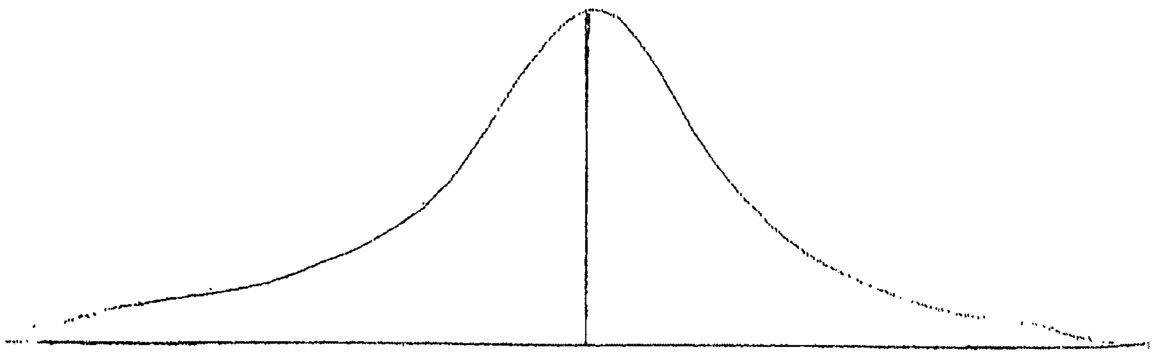
ตอนที่ 4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ตอนที่ 1 ความรู้ทั่วไปเกี่ยวกับการแจกแจงปกติ

การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

เป็นการแจกแจงชนิดพื้นฐานของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง (continuous random variable) ซึ่งมีความสำคัญมากในทฤษฎีสถิติสมัยใหม่ และนิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในงานวิจัยทั่วไป การแจกแจงชนิดนี้ได้เริ่มศึกษาเป็นครั้งแรกในศตวรรษที่ 18 โดย Abraham de Moivre (1667 – 1745) Pierre Laplace (1749 – 1827) และ Karl Gauss (1777 – 1855) โดยพิจารณาความผิดพลาดในการวัดปริมาณเดียวกันหลาย ๆ ครั้ง ซึ่งจะได้การแจกแจงของโค้งชนิดต่อเนื่องเรียกว่าโค้งปกติของความผิดพลาด (Normal curve of errors) และเพื่อเป็นเกียรติแก่ Gauss จึงมีชื่ออีกชื่อหนึ่งว่าการแจกแจงแบบเกาสส์ (Gaussian Distribution) แต่มักนิยมเรียกการแจกแจงแบบปกติมากกว่า

กราฟของการแจกแจงแบบปกติเรียกว่า เส้นโค้งปกติ (Normal curve) มีลักษณะคล้ายระฆังคว่ำ (Bell shape) ชนิดสมมาตร ดังรูป 2.1 ซึ่งมีค่าเฉลี่ย = ฐานนิยม = มัธยฐาน อยู่ตรงกลางของโค้งปกติ มักจะพบว่าข้อมูลที่เกิดตามธรรมชาติทั่ว ๆ ไป เช่น อายุของผู้ป่วย ความสูงของคนในช่วงอายุหนึ่ง ความดันโลหิต ปริมาณน้ำฝนในช่วงฤดูฝนของท้องที่หนึ่ง มีการแจกแจงแบบปกติ



mean = median = mode

รูปที่ 2.1 แสดงโค้งปกติ

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง ซึ่งมีค่า $-\alpha < x < \alpha$ และมีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (pdf)

คือ $$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\{(x-\mu)^2/2\sigma^2\}} \quad \text{เมื่อ} \quad -\alpha < x < \alpha$$

โดยที่ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

μ เป็นค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X

σ เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่ม X

e และ π เป็นค่าคงที่ โดย e = 2.71828 และ $\pi = 3.1416$

แล้วจะเรียกการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม X นี้ว่า มีการแจกแจงปกติ (normal distribution) ด้วยพารามิเตอร์ ค่าเฉลี่ย = μ และความแปรปรวน = σ^2 โดย $-\alpha < \mu < \alpha$ และ $\sigma > 0$ นิยมใช้สัญลักษณ์ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ แทนความหมายที่ว่า ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย = μ และความแปรปรวน = σ^2

คุณสมบัติทั่วไปของการแจกแจงแบบปกติ

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 1$ นั่นคือพื้นที่ทั้งหมดภายใต้เส้นโค้งปกติเท่ากับ 1
3. ความน่าจะเป็นของค่า X ในช่วงหนึ่ง ๆ เช่น $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ หาได้จากพื้นที่ภายใต้โค้งระหว่างค่า X = a ถึง X = b
4. ความน่าจะเป็นของค่า X ที่ X_0 ใด ๆ จะมีค่าเป็น 0 เนื่องจาก $\int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$

คุณสมบัติของโค้งปกติ

1. ลักษณะของโค้งเป็นรูประฆังคว่ำที่มีลักษณะสมมาตร (Symmetry) คือ ถ้าแบ่งครึ่งตามแนวตั้ง แล้วพื้นที่ครึ่งซ้าย = พื้นที่ครึ่งขวา = 0.5

2. ค่าสูงสุดของเส้นโค้งปกติ มีเพียงจุดเดียว คือ จุดที่อยู่ตรงกลางพอดี ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ย ค่ามัธยฐาน ค่าฐานนิยม

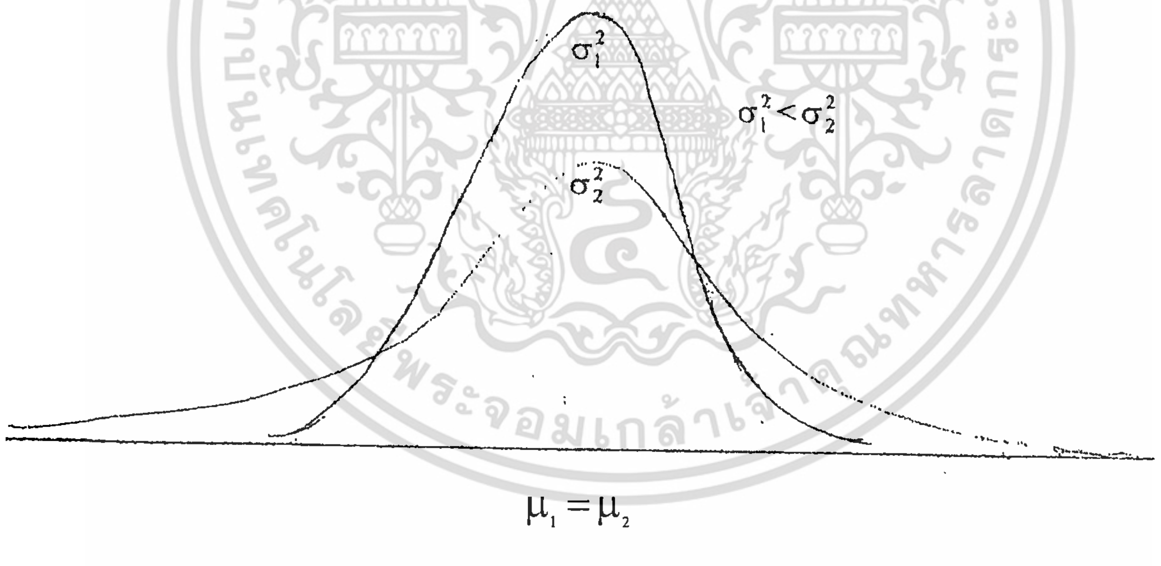
3. ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X = μ ความแปรปรวน = σ^2

4. โดยทางทฤษฎีแล้ว เส้นโค้งจะค่อย ๆ แผ่ออกไปทั้งสองข้าง และเข้าใกล้แกนระนาบมากขึ้น แต่จะไม่ตัดแกน คือวิ่งเข้าสู่ค่าอนันต์ทั้งสองข้าง

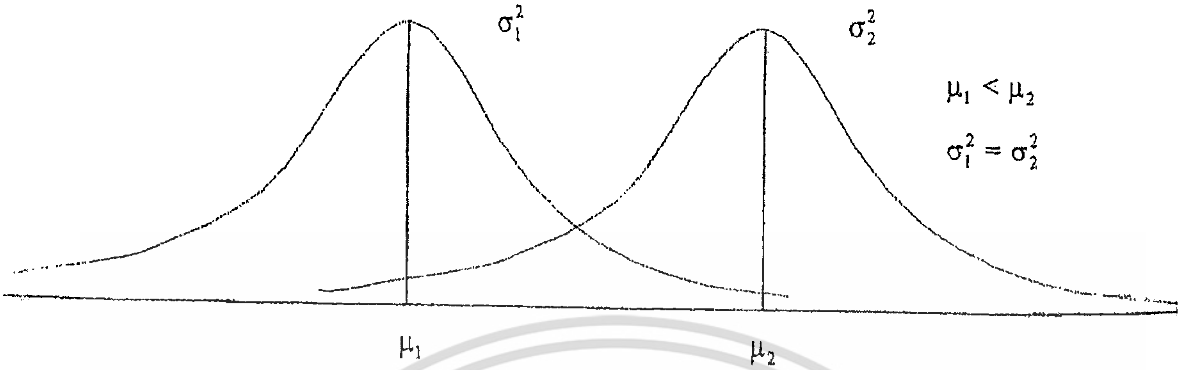
5. สำหรับข้อมูลที่ต่างก็มีการแจกแจงแบบปกติ แต่มีค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานต่างกัน จะมีรูปโค้งปกติที่ต่างกัน เช่น ข้อมูลชุดที่มีความแปรปรวนน้อยกว่าจะมีความโด่งของข้อมูลมากกว่า ข้อมูลที่มีความแปรปรวนสูงกว่า

อาจแยกได้หลายกรณี ดังนี้

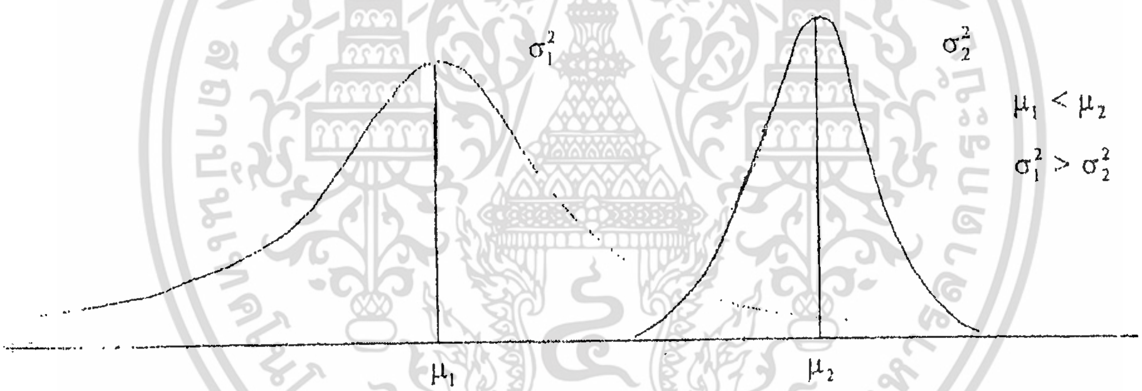
ก. ข้อมูล 2 ชุด ที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากัน แต่ความแปรปรวนต่างกัน รูปโค้งปกติที่ได้คือ



ข. ข้อมูล 2 ชุด ที่มีค่าเฉลี่ยต่างกัน แต่ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากัน รูปโค้งปกติที่ได้คือ



ค. ข้อมูล 2 ชุด ที่มีค่าเฉลี่ยต่างกัน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานต่างกัน รูปโค้งปกติที่ได้ คือ



ในความเป็นจริงแล้ว โดยทั่วไปไม่ค่อยพบโค้งปกติตามคุณสมบัติที่กำหนดให้ทางคณิตศาสตร์ที่แท้จริงเลย (ที่เห็นเด่นชัดคือคุณสมบัติข้อ 4) ฉะนั้นจึงเป็นเพียงการประมาณให้เป็นโค้งปกติ เพราะโค้งปกติสามารถอธิบายเกี่ยวกับรูปร่างของการแจกแจงความถี่ของข้อมูลจำนวนมาก และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลใด ๆ ก็ได้ นอกจากนี้ขบวนการทางสถิติ เช่น การประมาณค่า การทดสอบสมมติฐานและอื่น ๆ **ส่วนใหญ่มีข้อตกลงกันว่าการแจกแจงของข้อมูลต้องเป็นการแจกแจงแบบปกติ**

การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (Standard Normal Distribution)

จากตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย μ ความแปรปรวน = σ^2 ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (pdf) คือ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left\{(x-\mu)^2/2\sigma^2\right\}}$$

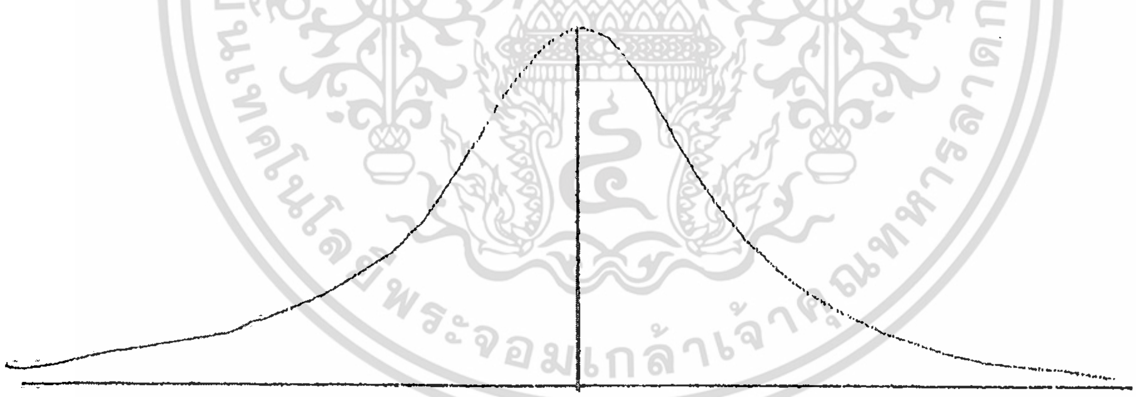
จะเห็นว่า การอินทิเกรทเพื่อหาค่าความน่าจะเป็นของค่า x ในช่วงใด ๆ จะทำได้ยุ่งยาก และขึ้นกับค่า μ และ σ^2 ที่ต่างกัน เพื่อที่จะทำให้ง่ายขึ้น สามารถแปลงตัวแปรสุ่ม X (transform) ให้เป็นตัวแปรใหม่ที่เป็นมาตรฐาน หรือ Z ซึ่งเรียกว่าคะแนนมาตรฐาน (Standard score)

โดย $$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

แล้วจะได้ว่าตัวแปร Z มีการแจกแจงแบบปกติด้วย โดยมีค่าเฉลี่ย = 0 ความแปรปรวน = 1 และมีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น คือ

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{1/2} z^{2}$$

และเรียกการแจกแจงของ Z นี้ว่าเป็นการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (Standard Normal Distribution) กราฟของรูปโค้งของ f(z) ซึ่งเรียกว่า รูปโค้งปกติมาตรฐานแสดงได้ดังรูป 2.2



รูปที่ 2.2 แสดงโค้งปกติมาตรฐาน ซึ่งมีค่าเฉลี่ย = 0 ความแปรปรวน = 1

ดังนั้น อาจเขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า Z~N(0, 1)

พิสูจน์

1. $E(Z) = 0$
2. $Var(Z) = 1$

$$E(Z) = \frac{E[x-\mu]}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sigma}E(x-\mu)$$
$$= \frac{1}{\sigma}[E(x)-\mu]$$
$$= \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu)$$
$$= 0$$
$$\mathrm{Var}(Z) = E(Z^2)-[E(Z)]^2$$
$$= E(Z^2)-0$$
$$= E\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2$$
$$= \frac{1}{\sigma^2}E(x-\mu)^2$$
$$= \frac{\sigma^2}{\sigma^2}$$
$$= 1$$

คะแนนมาตรฐานมีประโยชน์คือสามารถใช้เปรียบเทียบข้อมูลต่างชุด ซึ่งมีค่าเฉลี่ยความแปรปรวนต่างกันได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง ในการสอบครั้งหนึ่ง วิชาสถิติมีคะแนนเฉลี่ย 48 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 10 คะแนน ส่วนวิชาอังกฤษมีคะแนนเฉลี่ย 59 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 8 คะแนน ถ้านาย ก. สอบวิชาอังกฤษได้คะแนน = 72 และสอบวิชาสถิติได้คะแนน 69 จะกล่าวได้หรือไม่ว่านาย ก. สอบวิชาอังกฤษได้ดีกว่าวิชาสถิติ

วิธีทำ เนื่องจากคะแนนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ 2 วิชาต่างกัน ไม่สามารถเปรียบเทียบกันด้วยคะแนนดิบได้ จำเป็นต้องเปลี่ยนเป็นคะแนนมาตรฐานก่อนจะได้คะแนนมาตรฐานของแต่ละวิชาของนาย ก. คือ

คะแนนมาตรฐานของวิชาสถิติ $= \dfrac{69-48}{10} = 2.1$

คะแนนมาตรฐานของวิชาอังกฤษ $= \dfrac{72-59}{8} = 1.62$

คะแนนมาตรฐานของวิชาสถิติสูงกว่าคะแนนมาตรฐานของวิชาอังกฤษ ดังนั้น นาย ก. สอบวิชาสถิติได้ดีกว่าวิชาอังกฤษ

พื้นที่ภายใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน

ดังกล่าวแล้วว่า $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$ = พื้นที่ภายใต้โค้งปกติ = 1 และเมื่อได้ Z ที่เป็นตัวแปรที่มีการแจกแจงแบบปกติด้วย $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ ดังนั้น พื้นที่ภายใต้โค้งปกติมาตรฐาน = 1 ด้วย ถ้าต้องการหาความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม x ในช่วงใดช่วงหนึ่งก็สามารถคำนวณได้โดยการอินทิเกรท (Integrate) หาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้งในช่วงนั้น ๆ โดยอาจอินทิเกรทจาก f(x) หรือจาก f(z) ก็ได้

แต่การอินทิเกรท f(x) จะยุ่งยากมากเพราะขึ้นกับค่า μ และ σ จึงได้มีนักคณิตศาสตร์คำนวณหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง f(z) ในช่วง z ต่าง ๆ และได้สร้างตารางสำเร็จรูปที่แสดงค่าความน่าจะเป็นของ z ในช่วงต่าง ๆ จึงเป็นการสะดวกในการหาความน่าจะเป็นในช่วงใดช่วงหนึ่งของตัวแปรสุ่ม x ที่มีการแจกแจงแบบปกติ โดยการเปลี่ยนค่าของตัวแปรสุ่ม x ให้เป็นคะแนนมาตรฐาน Z และหาพื้นที่ภายใต้เส้นโค้ง f(z)

ตอนที่ 2 สถิติทดสอบสำหรับการทดสอบการแจกแจงปกติ

1. การทดสอบของโคลโมโกรอฟ (The Kolmogorov test หรือเรียกว่า one-sample Kolmogorov-Smirnov Test)

การทดสอบไคกำลังสองสารูปสนิทดีพัฒนาขึ้นเพื่อใช้ทดสอบกับข้อมูลที่เป็นกลุ่มหรือเป็นพวก สำหรับแบบทดสอบที่จะใช้เพื่อทดสอบสารูปสนิทดีจากข้อมูลที่เป็นแบบต่อเนื่อง หรือกับข้อมูลที่วัดมาอย่างน้อยจากมาตราแบบอันดับนั้น ถูกเปิดเผยขึ้นในปี ค.ศ. 1933 โดยนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซียชื่อ โคลโมโกรอฟ (A.N. Kolmogorov) ได้แนะนำขบวนการสำหรับใช้ทดสอบสารูปสนิทดีกับข้อมูลของ 1 ตัวอย่าง ซึ่งเป็นขบวนการที่จะทดสอบว่าตัวอย่างที่สุ่มมาจากประชากรมีการแจกแจงตามที่คาดหวังหรือไม่ และต่อมาในปี ค.ศ. 1939 นักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซียอีกคนหนึ่งชื่อ สมิร์นอฟ (N.V Smirnov) ได้แนะนำขบวนการสำหรับใช้ทดสอบสารูปสนิทดีสำหรับข้อมูลของ 2 ตัวอย่าง ซึ่งเป็นขบวนการที่จะทดสอบว่า 2 ตัวอย่างมาจากประชากรเดียวกันหรือมาจาก 2 ประชากรที่เหมือนกัน โดยขบวนการทดสอบของนักคณิตศาสตร์ทั้งสองท่านจะพิจารณาจากฟังก์ชันการแจกแจงแบบเอ็มไพริคัล (Empirical distribution) หรือฟังก์ชันการแจกแจงแบบสะสม (Cumulative distribution) ซึ่งหมายความว่าถ้าสุ่มตัวอย่างจากประชากรที่ไม่ทราบฟังก์ชันการแจกแจง F(x) สามารถจะสรุปได้หรือไม่ว่า F(x) = $F^*(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ X เมื่อ $F^*(x)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงที่ทราบการแจกแจง และถ้า F(x) = $F^*(x)$ แล้วสามารถคาดหวังว่า $F^*(x)$ และ S(x) ซึ่งเป็นฟังก์ชันการแจกแจงเอ็มไพริคัลของตัวอย่าง จะมีความสอดคล้องใกล้เคียงกันมากนอกเหนือจากความผันแปรที่เกิดจากการสุ่ม

ข้อมูล ข้อมูลประกอบด้วยค่าสังเกตของตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ ขนาด n ที่มีฟังก์ชันการแจกแจง F(x) ซึ่งไม่ทราบรูปแบบการแจกแจง

ข้อสมมุติ ตัวอย่างต้องเป็นตัวอย่างสุ่ม

สถิติทดสอบ

ให้ S(x) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงแบบเอ็มไพริคัลจากตัวอย่างสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ ซึ่งนิยามได้โดย

$$S(x) = \frac{\#(X \le x)}{n}$$

เมื่อ $\#(X \le x)$ แทนจำนวนของ X ที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x ซึ่งการแจกแจงของ S(x) เป็นดังนี้

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)} \\ \frac{k}{n}, & x_{(k)} \le x \le x_{(k+1)}; k = 2,3,...,n-1 \\ 1, & x \ge x_{(n)} \end{cases}$$

เมื่อ $X_{(k)}$ เป็นสถิติลำดับที่ k ของ X สถิติทดสอบนิยามได้แตกต่างกันเป็น 3 กลุ่มตามลักษณะของสมมุติฐานที่จะกล่าวถึงต่อไป และให้ $F^*(x)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงตามสมมุติฐานและทราบรูปแบบการแจกแจง

ก. การทดสอบแบบสองหาง (Two – tailed test)

H_0 : $F(x) = F^*(x)$ สำหรับทุกค่าของ $x, -\infty < x < \infty$

H_1 : $F(x) \ne F^*(x)$ สำหรับบางค่าของ x

ให้สถิติทดสอบ T เป็นระยะห่างที่กว้างที่สุดตามแนวตั้งระหว่าง S(x) และ $F^*(x)$ นั่นคือ

$$T = \sup_x \left| F^*(x) - S(x) \right|$$

ข. การทดสอบแบบหางเดียวด้านล่าง (One – sided test)

H_0 : $F(x) \le F^*(x), -\infty < x < \infty$

H_1 : $F(x) > F^*(x)$ อย่างน้อย 1 ค่าของ x

สถิติทดสอบนิยามได้โดย

$$T^- = \sup_x \left[S(x) - F^*(x) \right]$$

(พิจารณาเฉพาะระยะห่างตามแนวตั้งที่มากที่สุด เมื่อ S(x) อยู่ข้างบน $F^*(x)$)

ค. การทดสอบแบบหางเดียวด้านบน (One – sided test)

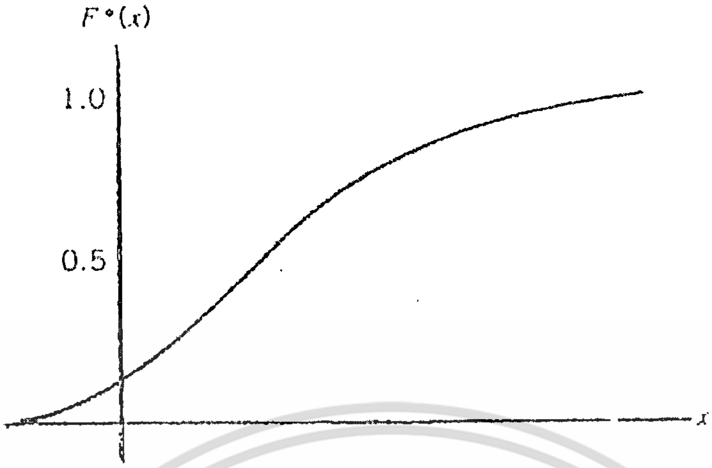
H_0 : $F(x) \ge F^*(x), -\infty < x < \infty$

H_1 : $F(x) < F^*(x)$ อย่างน้อย 1 ค่าของ x

สถิติทดสอบกำหนดได้โดย

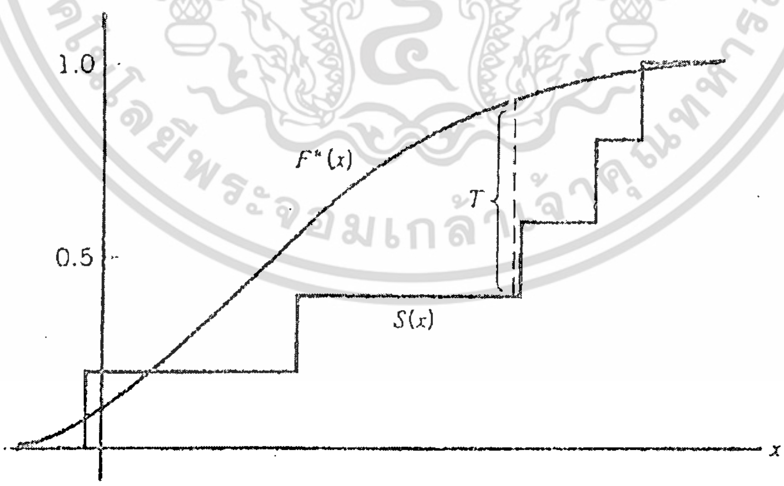
$$T^+ = \sup_x \left| F^*(x) - S(x) \right|$$

(พิจารณาเฉพาะระยะห่างตามแนวตั้งที่มากที่สุดเมื่อฟังก์ชัน $F^*(x)$ อยู่ข้างบน S(x))



รูปที่ 2.3 ฟังก์ชันการแจกแจงตามสมมุติฐาน

ถ้าข้อมูลตัวอย่าง สุ่มมาจากการแจกแจงที่ระบุไว้ในสมมุติฐาน ความแตกต่างระหว่าง S(x) และ $F^*(x)$ ของค่าสังเกต X ควรที่จะไม่มาก นั่นคือมีความสอดคล้องระหว่าง S(x) และ $F^*(x)$ สำหรับทุกค่าสังกต X เมื่อ H_0 เป็นจริง ในทางตรงกันข้าง ถ้า H_0 ไม่จริงหรือตัวอย่างไม่ได้มาจากการแจกแจงที่ระบุไว้ในสมมุติฐาน ความแตกต่างระหว่าง S(x) และ $F^*(x)$ ควรที่จะมีค่ามากจนสามารถสังเกตเห็นได้ รูปการแจกแจงที่ใช้แสดงฟังก์ชันการแจกแจงของสมมุติฐาน $F^*(x)$ ฟังก์ชันการแจกแจงเอ็มไพริคัล S(x) และสถิติของโคลโมโกรอฟ แสดงได้ดังนี้



รูปที่ 2.4 ฟังก์ชันการแจกแจงตามสมมุติฐาน $F^*(x)$, ฟังก์ชันการแจกแจงเอ็มไพริคัล S(x), และสถิติโคลโมโกรอฟ

หมายเหตุ การพัฒนาหาการแจกแจงของสถิติแบบโคลโมโกรอฟนั้นยุ่งยากมากและจะไม่แสดง ณ ที่นี้

การพิจารณาการประมาณการแจกแจงของสถิติทดสอบ อาจพิจารณาได้จากการที่ F(x) มีการแจกแจงแบบต่อเนื่องและสมมุติฐานว่าเป็นจริง ซึ่งฟังก์ชันการแจกแจงที่แท้จริงของ T^+ และ T^- กำหนดโดย

$$G(x) = 1-x\sum_{j=0}^{[n(1-x)]}\binom{n}{j}\left(1-x-\frac{j}{n}\right)^{n-j}\left(x+\frac{j}{n}\right)^{j-1}$$

ซึ่ง $\left[n(1-x)\right]$ คือจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ $n(1-x)$ และทั้ง T^+ และ T^- จะเป็นการแจกแจงเหมือนกัน ฟังก์ชันการแจกแจงแบบแอสซิมโทติก $(n\to\infty)$ ของ $\sqrt{n}T^+$ และ $\sqrt{n}T^-$ หาได้จาก

$$H(x) = \lim_{n\to\infty} G\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) = 1-C^{-2x^2}$$

และฟังก์ชันประมาณการแจกแจงของ T คือ

$$\Pr(T\leq x)\,\square\,\left[G(x)\right]^2$$

ซึ่ง T จะน้อยกว่า x เมื่อทั้ง T^+ และ T^- มีค่าน้อยกว่า x เท่านั้น

ควอนไทล์ที่แท้จริงของ T ในการทดสอบแบบสองหางและค่าควอนไทล์โดยประมาณของ T^+ และ T^- ในการทดสอบแบบหางเดียวจะแสดงในตารางที่ 1 ในภาคผนวกสำหรับ $n\leq 40$ และการประมาณแบบแอสซิมโทติกจะใช้เมื่อ $n > 40$ เป็นที่น่าสังเกตว่าการทดสอบทั้งหมดของการทดสอบแบบนี้เป็นแบบทดสอบหางเดียวด้านบนแต่เพียงอย่างเดียว ที่เป็นเช่นนี้เพราะว่าการทดสอบแบบอื่น มีสถิติทดสอบสมมูลกันกับสถิติทดสอบแบบทดสอบหางเดียวด้านบน

หมายเหตุ ตารางการแจกแจงของค่าควอนไทล์ของ T จะให้ผลถูกต้องเมื่อ F(x) เป็นการแจกแจงแบบต่อเนื่องเท่านั้น แต่ถ้า F(x) มีการแจกแจงเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง จะใช้วิธีอื่นหาการแจกแจงของ T

การทดสอบสมมุติฐาน

ก. การทดสอบแบบสองหาง (Two – tailed test)

H_0 : $F(x)=F^*(x)$ สำหรับทุกค่าของ $x, -\infty<x<\infty$

H_1 : $F(x)\neq F^*(x)$ สำหรับบางค่าของ x

จะปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า T มากกว่าควอนไทล์ที่ $1-\alpha$ ที่หาได้จากตารางที่ 1 และค่าพี (p-value) หาได้จาก

ค่าพี = 2 x (ค่าระดับนัยสำคัญสังเกตหาได้จากการทดสอบแบบหางเดียว)

ค่าพีที่แท้จริงจากการทดสอบแบบหางเดียว คือ

$$t\sum_{j=0}^{[n(1+t)]}\binom{n}{i}\left(1-t-\frac{j}{n}\right)^{n-j}\left(t+\frac{j}{n}\right)^{j-1}$$

เมื่อ t คือค่าสังเกตของสถิติทดสอบและ $\left[n(1+t)\right]$ คือจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ n(1+t)

หมายเหตุ ค่าประมาณค่าพีอาจหาได้โดยใช้ตารางที่ 1

ข. การทดสอบแบบหางเดียวด้านล่าง (One – tailed test)

$H_0 \; : \; F(x) \le F^*(x), \; -\infty < x < \infty$

$H_1 \; : \; F(x) > F^*(x)$ อย่างน้อย 1 ค่าของ x

จะปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า T^- มากกว่าควอนไทล์ที่ $1-\alpha$ ของการทดสอบแบบหางเดียวจากตารางที่ 1 ค่าพีที่แท้จริงหาได้จากสูตรหาระดับนัยสำคัญสังเกตข้างต้น หรืออาจประมาณได้จากตารางที่ 1

ค. การทดสอบแบบหางเดียวด้านบน (One – tailed test)

$H_0 \; : \; F(x) \ge F^*(x), \; -\infty < x < \infty$

$H_1 \; : \; F(x) < F^*(x)$ อย่างน้อย 1 ค่าของ x

จะปฏิเสธ H_0 ที่ระดับนัยสำคัญ α ถ้า T^+ มากกว่าควอนไทล์ที่ $1-\alpha$ ที่หาได้จากตารางที่ 1 และค่าระดับนัยสำคัญสังเกตหาได้ในทำนองเดียวกับข้อ ข.

หมายเหตุ การทดสอบสารูปสนิทดีของโคลโมโกรอฟจะใช้ได้ดีเมื่อตัวอย่างสุ่มมีการแจกแจงเป็นไปตามฟังก์ชันการแจกแจงบางอย่างที่ระบุไว้ชัดเจน นั่นคือเมื่อฟังก์ชันการแจกแจงในสมมุติฐานไม่มีตัวพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าที่จะต้องประมาณจากตัวอย่าง แต่ถ้าฟังก์ชันการแจกแจงในสมมุติฐานมีตัวพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าที่จะต้องประมาณจากตัวอย่าง แล้ว การทดสอบแบบนี้จะให้ผลไม่ถูกต้อง

การทดสอบสารูปสนิทดีของโคลโมโกรอฟได้รับความนิยามมากกว่าการทดสอบของไคกำลังสองเมื่อตัวอย่างมีขนาดเล็กเพราะให้ผลลัพธ์ที่แท้จริง ในขณะที่การทดสอบไคกำลังสองต้องการจำนวนค่าสังเกตที่ใหญ่พอ เพื่อที่จะทำให้สามารถใช้การแจกแจงไคกำลังสองประมาณการแจกแจงของสถิติทดสอบได้ดีพอ แต่ยังมีการโต้แย้งกันอยู่ว่าการทดสอบใดมีอำนาจการทดสอบที่มากกว่า ซึ่งโดยความรู้สึกทั่วไปแล้ว การทดสอบของโคลโมโกรอฟบางทีจะมีอำนาจการทดสอบมากกว่าการทดสอบไคกำลังสองในหลาย ๆ สถานการณ์ที่เกี่ยวข้องกับข้อมูลอันดับ สำหรับรายละเอียดการเปรียบเทียบของการทดสอบทั้งสองอาจศึกษาได้จากงานของ Sloker, M.J. (1965) ในหัวข้อเรื่อง A comparison of the Pearson Chi-square and Kolmogorov goodness of fit tests with respect to validity. Jaurnal of the American Statistical Association, 60, 854 – 858

ตัวอย่าง ตัวอย่างสุ่มขนาด 10 มีค่าสังเกตดังนี้ $X_1 = 0.621$, $X_2 = 0.503$, $X_3 = 0.203$, $X_4 = 0.477$, $X_5 = 0.710$, $X_6 = 0.581$, $X_7 = 0.329$, $X_8 = 0.480$, $X_9 = 0.554$ และ $X_{10} = 0.382$ จงทดสอบว่าข้อมูลนี้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบเอกรูป

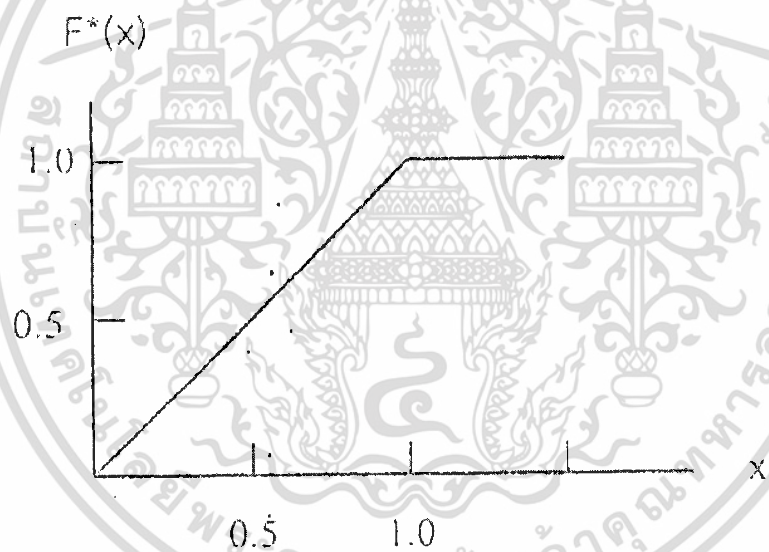
จากสิ่งกำหนดให้ข้างต้น สมมุติฐานของการทดสอบเป็น

H_0 : ประชากรมีการแจกแจงแบบเอกรูป

ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงภายใต้สมมุติฐานว่าง H_0 คือ

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า} \quad x < 0 \\ x & \text{ถ้า} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{ถ้า} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

ซึ่งมีกราฟเป็น



รูปที่ 2.5 ฟังก์ชันการแจกแจงของสมมติฐาน

ดังนั้นสมมุติฐานของการทดสอบเขียนใหม่ได้เป็น

H_0 : $F(x) = F^*(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ x

H_1 : $F(x) \neq F^*(x)$ อย่างน้อย 1 ค่าของ x

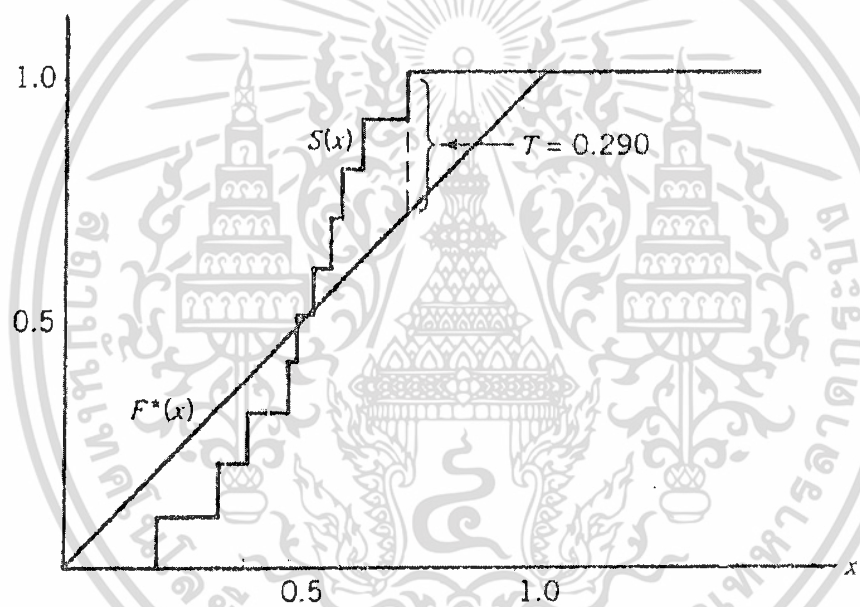
เมื่อ F(x) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงที่ไม่ทราบรูปแบบสำหรับทุก ๆ x_i และ $F^*(x)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงภายใต้สมมุติฐานว่าง จากสมมุติฐานใช้ การทดสอบสารูปสนิทดีของโคลโมโกรอฟแบบสองหางและจากตารางที่ 1 ควอนไทล์ของสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ เมื่อ n = 10 บริเวณวิกฤตที่ระดับนัยสำคัญ $\alpha = 0.05$

คือ T มากกว่าควอนไทล์ที่ 0.95 ซึ่งจากตารางที่ 1 พบว่ามีค่าเท่ากับ 0.409 และค่าสถิติทดสอบสังเกตคำนวณได้จาก

$$T = \sup_x \left| F^*(x) - S(x) \right|$$

เมื่อ $$S(x) = \frac{\text{จำนวนของค่าสังเกต } X \leq x}{n}$$

เขียนกราฟของ $F^*(x)$ และ S(x) ได้เป็น



รูปที่ 2.6 กราฟของ $F^*(x)$ และ S(x) และค่าของ T

จากรูประยะห่างที่มากที่สุดตามแนวตั้งที่แยกระหว่าง 2 กราฟ คือ 0.290 ซึ่งเกิดขึ้นที่ x = 0.710 เนื่องจากว่าค่าของฟังก์ชันการแจกแจงเอ็มไพริคัลที่ x = 0.710 มีค่าเท่ากับ 1.00 นั่นคือ S(0.710) = 1.00 และค่าของฟังก์ชันการแจกแจงสมมุติฐานว่าเป็น $F^*(0.710) = 0.710$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} T &= \sup_x \left| F^*_{(x)} - S(x) \right| \\ &= \left| F^*_{(0.710)} - S(0.710) \right| \\ &= 0.290 \end{aligned}$$

และ T = 0.290 < 0.409 ดังนั้น จึงไม่ปฏิเสธ H_0 และสรุปว่าข้อมูลนี้มาจากประชากรที่มีการแจกแจงเอกรูป ซึ่งค่าพีหาได้โดยใช้ตารางที่ 1 เมื่อ n = 10 และมีค่าพี = Pr(T > 0.290) > Pr(T > 0.323) = 0.20

ถ้าเปลี่ยนสมมุติฐานของการทดสอบเป็น

$H_0 \quad : \quad F(x) \geq F^*(x)$ สำหรับทุก ๆ x

$H_1 \quad : \quad F(x) < F^*(x)$ สำหรับบางค่าของ x

บริเวณวิกฤตที่ $\alpha =$ 0.05 จะเป็นที่ T^+ มากกว่า 0.95 ควอนไทล์ สำหรับการทดสอบแบบหางเดียว ซึ่งจากตารางที่ 1 และ n = 10 พบว่าบริเวณวิกฤตคือ T > 0.369 ค่าของสถิติทดสอบหาได้จาก

$$
\begin{aligned}
T^+ &= \sup_x \left[F^*_{(x)} - S_{(x)}\right] \\
&= F^*_{(0.3289)} - S_{(0.3289)} \\
&= 0.3289 - 0.100 \\
&= 0.1289
\end{aligned}
$$

เพราะว่า $T^+ = 0.1289 < 0.369$ จึงทำให้ไม่สามารถปฏิเสธ H_0 จึงให้ผลสรุปเหมือนกันกับการทดสอบสองหางข้างต้นด้วย ค่าพี > 0.10

ถ้าสมมุติฐานเพื่อการทดสอบเปลี่ยนเป็น

$H_0 \quad : \quad F(x) \leq F^*(x)$ สำหรับทุก ๆ ค่า x

$H_1 \quad : \quad F(x) > F^*(x)$ สำหรับบางค่าของ x

สถิติทดสอบจึงเป็น

$$
\begin{aligned}
T^- &= \sup_x \left[S(x) - F^*(x)\right] \\
&= S(0.710) - F^*(0.710) \\
&= 1.00 - 0.710 \\
&= 0.290
\end{aligned}
$$

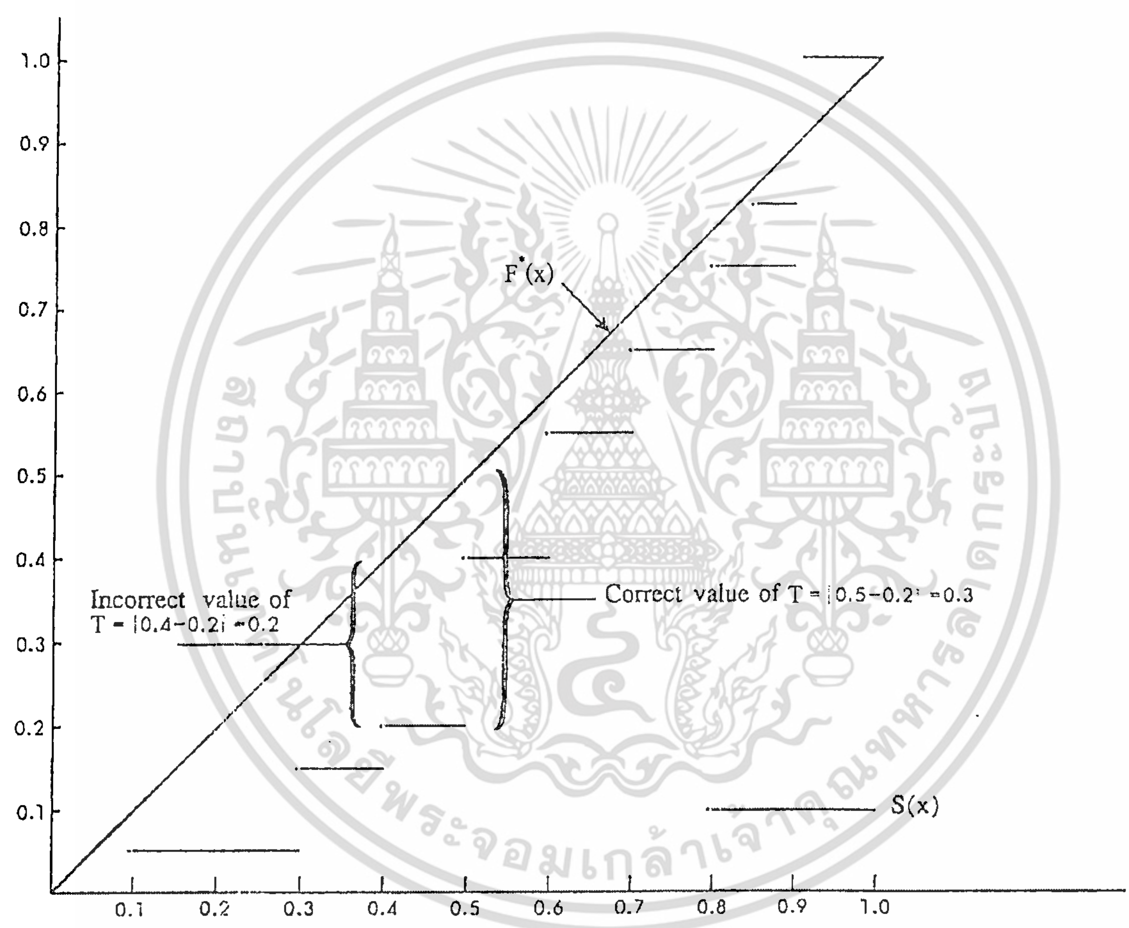
ด้วยค่า ค่าพี > 0.10 จึงยอมรับ H_0 และสรุปว่าข้อมูลดังกล่าวมาจากประชากรที่มีการแจกแจงเอกรูป

หมายเหตุ ค่าพีที่แท้จริงของการทดสอบแบบสองหางหาได้จาก

$$
\begin{aligned}
\text{ค่าพี} &= 2(0.29)\sum_{j=0}^{7}\binom{10}{j}\left(0.71-\frac{j}{10}\right)^{10-j}\left(0.29+\frac{j}{10}\right)^{j-1} \\
&= 0.307
\end{aligned}
$$

สำหรับ $F^*(x)$ ที่ไม่ต่อเนื่อง ค่าพีที่ได้จากตารางที่ 1 จะไม่ถูกต้อง รายละเอียดผู้อ่านอาจหาอ่านได้จากหนังสือทฤษฎีสถิติสำหรับการวิเคราะห์แบบไม่ใช้พารามิเตอร์

วิธีการเปรียบเทียบค่า $F^*(x)$ และ $S(x)$ ด้วยค่าตัวเลขดังกล่าวข้างต้น บางครั้งจะพบว่าไม่เพียงพอที่จะหาค่า $T = \sup_x \left|F^*_{(x)} - S(x)\right|$ เนื่องจากระยะห่างมากที่สุด (ในแนวตั้ง) ระหว่าง $F^*(x)$ และ $S(x)$ ไม่ได้เกิดขึ้นที่ค่า x แต่เกิดขึ้นที่ค่าอื่น ให้พิจารณาจากกราฟของ $F^*(x)$ และ $S(x)$ ของตัวอย่างต่อไปนี้



รูปที่ 2.7 แสดงความแตกต่างของ $F^*(x)$ และ $S(x)$ ในด้านซ้ายและขวา

จากรูปกราฟข้างต้น ถ้าหาค่า $\left|F^*(x) - S(x)\right|$ เฉพาะที่จุดด้านซ้ายของเส้นตามแกนนอน (---) เราจะได้ว่า T = $|0.2 - 0.4|$ = 0.2 ซึ่งไม่ใช่ค่าที่ถูกต้องของ D แต่ถ้าพิจารณากราฟให้ละเอียด จะพบว่าระยะห่างที่มากที่สุด (ในแนวตั้ง) จะเกิดขึ้นทางด้านขวาของเส้นตามแกนนอน (---) ที่จุด x = 0.4 ดังนั้นค่า T ที่ถูกต้อง คือ $|0.5 - 0.2| = 0.3$

ดังนั้นวิธีการหาค่าที่ถูกต้องของค่า T จากตัวเลขสามารถทำได้เช่นกันโดยหาค่า $\left|S(x_{i-1})-F^*(x_i)\right|$ สำหรับทุกค่าของ i = 1, 2,..., r+1 เมื่อ r = จำนวนของค่า x ที่แตกต่างกัน และกำหนดให้ $S(X_0)=0$ ค่าสถิติทดสอบที่ถูกต้อง : T คือ

$$T = \sup_{1\le i\le r}\left\{\sup\left[\left|S(X_i)-F^*(X_i)\right|,\left|S(X_{i-1})-F^*(X_i)\right|\right]\right\}$$

ให้ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงทดสอบว่าข้อมูลต่อไปนี้ที่ถูกสุ่มมาด้วยขนาด 36 มาจากประชากรที่มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 85 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = 15 หรือไม่

58	78	84	90	97	70	90	86	82
59	90	70	74	83	90	76	88	84
68	93	70	94	70	110	67	68	75
80	68	82	104	92	112	84	98	80

วิธีทำ H_0 : ข้อมูลนี้มาจากการแจกแจงปกติ ด้วยค่าเฉลี่ย = 85 และ σ = 15

H_1 : ข้อมูลนี้ไม่ได้มาจากการแจกแจงปกติ ด้วยค่าเฉลี่ย = 85 และ σ = 15

จะใช้การทดสอบของ Kolmogorov-Smirnov และคำนวณหาค่า $S(x)$, $F^*(x)$, T ดังต่อไปนี้

X_i	$S(x_i)$	$F^*(x_i)$	$\left\|S(x_i)-F^*(x_i)\right\|$	$\left\|S(x_{i-1})-F^*(x_i)\right\|$
58	.0278	.0359	.0081	.0359
59	.0556	.0418	.0138	.0140
67	.0833	.1151	.0318	.0595
68	.1667	.1292	.0375	.0459
70	.2778	.1587	.1191	.0080
74	.3056	.2327	.0729	.0451
75	.3333	.2514	.0819	.0542
76	.3611	.2743	.0868	.0590
78	.3889	.3192	.0697	.0419
80	.4444	.3707	.0737	.0182
82	.5000	.4207	.0793	.0237

X_i	$S(x_i)$	$F^*(x_i)$	$\left\|S(x_i)-F^*(x_i)\right\|$	$\left\|S(x_{i-1})-F^*(x_i)\right\|$
83	.5278	.4483	.0795	.0517
84	.6111	.4721	.1390	.0557
86	.6339	.5279	.1110	.0832
88	.6667	.5793	.0874	.0596
90	.7778	.6293	.1485	.0374
92	.8056	.6808	.1248	.0970
93	.8333	.7019	.1314	.1037
94	.8611	.7257	.1354	.1076
97	.8889	.7881	.1008	.0730
98	.9167	.8078	.1089	.0811
104	.9444	.8980	.0464	.0187
110	.9722	.9525	.0197	.0081
112	1.0000	.9641	.0359	.0081

จะพบว่าค่าใหญ่ที่สุดของ $\left|S(x_i)-F^*(x_i)\right|$ = .1485 แต่ไม่มีค่าใดของ $\left|S(x_{i-1})-F^*(x_i)\right|$ ที่มีค่ามากกว่า .1485 ดังนั้น T = .1485 จากตารางค่าวิกฤตที่ 1 ที่ N = 36 , α = .05 ได้ค่าวิกฤต = .221 ดังนั้นจึงยอมรับ H_0 นั่นคือ ตัวอย่างสุ่มชุดนี้ถูกสุ่มมาจากประชากรปกติด้วยค่าเฉลี่ย = 85 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = 15

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้นจะพบว่า ไม่มีประโยชน์ที่หาค่า $\left|S(x_{i-1})-F^*(x_i)\right|$ แต่กรณีเช่นนี้ไม่เกิดขึ้นเสมอไป ดังนั้นในการทดสอบการแจกแจงชนิดต่อเนื่อง แนะนำให้คำนวณค่าทั้งสอง คือ $\left|S(x_i)-F^*(x_i)\right|$ และ $\left|S(x_{i-1})-F^*(x_i)\right|$ แต่ถ้านำไปทดสอบการแจกแจงชนิดไม่ต่อเนื่อง ก็คำนวณหาค่า $\left|S(x_i)-F^*(x_i)\right|$ เพียงอย่างเดียว ซึ่งการทดสอบชนิดนี้จะเป็นการทดสอบแบบ Conservative (Noether and Slakter) นอกจากนี้มีผู้ศึกษากรณีนำการทดสอบนี้ไปทดสอบการแจกแจงชนิดไม่ต่อเนื่องมากมายหลายท่าน

2. การทดสอบของ Lilliefors (The Lilliefors test)

Lilliefors (1967) ได้ปรับปรุงการทดสอบของ Kolmogorov-Smirnov ในกรณีที่ต้องการทดสอบเกี่ยวกับการแจกแจงปกติที่ไม่ได้ระบุค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน อาจเรียกได้ว่าเป็น "การทดสอบสำหรับการแจกแจงปกติ" (A Test For Normality) แม้ว่าจะมีนักสถิติหลาย ๆ ท่านได้คิดค้นวิธีการทดสอบนี้ อาทิ Conover (1980) แต่การหาค่าวิกฤตค่อนข้างยาก รวมทั้งการทดสอบของ Shapiro-Wilk ซึ่งต้องใช้ตารางค่าวิกฤตที่เฉพาะ แต่การทดสอบของ Lilliefors จะมีลักษณะคล้ายการทดสอบของ Kolmogorov-Smirnov

เพียงแต่ตารางค่าวิกฤตจะต่างกัน และ Lilliefors ได้ชี้ให้เห็นว่า การทดสอบของเขามีประสิทธิภาพสูงกว่าการทดสอบไคสแควร์

การทดสอบของ Lilliefors จะเหมือนกับการทดสอบของ Kolmogorov-Smirnov เกือบทุกประการ ยกเว้นการใช้คะแนนมาตรฐาน (Normolized value) แทนคะแนนดิบ กล่าวคือ จากข้อมูลตัวอย่างคำนวณหาค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $(\overline{X}, S)$ ด้วย

สูตร $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$

และ $S = \sqrt{\frac{1}{(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})^2}$

และแปลงค่า X_i เป็น Z_i ด้วยสูตร $Z_i = \frac{X_i - \overline{X}}{S}$, $i = 1, \ldots, N$ การคำนวณหาสถิติทดสอบจะคำนวณจากค่า Z_i แทน X_i ซึ่งเป็นข้อมูลดิบ นั่นคือ หาค่า $S(Z_i) = \frac{k}{N}$ เมื่อ k = จำนวนข้อมูลค่า Z ที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ Z_i และคำนวณหาค่า $F_0(Z_i)$ จากความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐาน

การหาสถิติทดสอบคงเหมือนกับการทดสอบของ Kolmogorov-Smirnov แต่การหาค่าวิกฤตจะใช้ตารางค่าวิกฤตของ Lilliefors แทนดังตารางที่ 2 ซึ่งแยกได้ 3 ตาราง คือ

ตาราง 2_I ใช้ในกรณีที่ไม่ทราบค่าเฉลี่ยแต่ทราบค่าความแปรปรวน

ตาราง 2_{II} ใช้ในกรณีที่ทราบค่าเฉลี่ยแต่ไม่ทราบค่าความแปรปรวน

ตาราง 2_{III} ใช้ในกรณีที่ไม่ทราบค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน

ตัวอย่าง ข้อมูลอายุของผู้เสียชีวิตเพศชายในสุสานแห่งหนึ่งใน Water Ross, Scotland จำนวน 117 คน ได้ถูกบันทึกไว้ และสุ่มมา 30 คน ได้ค่าอายุ (เรียงลำดับ) ดังนี้

11	13	14	22	29	30	41	41	52	55	56	59	65	65	66
74	74	75	77	81	82	82	82	82	83	85	85	87	87	88

มีเหตุผลเพียงพอหรือไม่ ที่จะกล่าวว่าอายุของผู้เสียชีวิตมีการแจกแจงแบบปกติ

วิธีทำ

H_0 : อายุผู้เสียชีวิตมีการแจกแจงแบบปกติ

H_1 : อายุผู้เสียชีวิตไม่มีการแจกแจงแบบปกติ

จากข้อมูลตัวอย่างขนาด 30 คำนวณหา $\overline{X}$ และ S ได้ค่า $\overline{X}$ = 61.43 และ S = 25.04 แล้วเปลี่ยนค่าข้อมูลอายุ (X_i) ให้เป็นคะแนนมาตรฐาน Z_i ดังนี้

ที่ $X_1 = 11$, $Z_1 = \dfrac{11-61.43}{25.04} = -2.014$ และทำนองเดียวกันที่ i อื่น ๆ

คำนวณหาค่า $F_0(Z_i)$ จากตารางการแจกแจงปกติมาตรฐาน ได้พื้นที่ด้านซ้ายของ $Z_1 = -2.014$ = .022 = P(Z < -2.014) และทำนองเดียวกันที่ i อื่น ๆ

ส่วนค่า $S(Z_i) = \dfrac{k}{N}$ เช่น $S(Z_1) = \dfrac{1}{30}$ = .033 สามารถสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

X_i	Z_i	$F_0(Z_i)$	$S(Z_i)$	$\lvert F_0(Z_i)-S(Z_i)\rvert$	$\lvert F_0(Z_i)-S(Z_{i-1})\rvert$
11	-2.014	.022	.033	0.011	.022
13	-1.934	.026	.067	0.044	.007
14	-1.894	.029	.100	0.071	.038
22	-1.575	.058	.133	0.075	.042
29	-1.295	.098	.167	0.069	.035
30	-1.255	.105	.200	0.095	.062
41*	-0.816	.207	.267	0.060	.007
52	-0.377	.353	.300	0.053	.086
55	-0.257	.399	.333	0.066	.099
56	-0.217	.414	.367	0.047	.081
59	-0.097	.461	.400	0.061	.094
65*	0.142	.556	.467	0.089	.156
66	0.183	.572	.500	0.072	.105
74*	0.502	.692	.567	0.125	.192*
75	0.542	.706	.600	0.106	.139
77	0.622	.733	.633	0.100	.133
81	0.781	.782	.667	0.115	.149
82*	0.821	.794	.800	0.006	.127
83	0.861	.805	.833	0.028	.005
85*	0.942	.827	.900	0.073	.006
87*	1.021	.846	.967	0.121	.054
88	1.061	.856	1.000	0.144	.111

* หมายถึง มีข้อมูลซ้ำ

จากคอลัมน์ที่ 5 และ 6 พบว่า ได้ค่า D = .192

และหาค่าวิกฤตจากตารางที่ 2_{III} (เนื่องจากไม่ทราบค่า μ และ σ) เมื่อกำหนด α = 0.01 ที่ N = 30

ได้ค่าวิกฤต = .183

ดังนั้นจึงตกในอาณาเขตวิกฤต ปฏิเสธ H_0

นั่นคือ อายุคนเสียชีวิตเพศชายของสุสานนี้ ไม่มีการแจกแจงแบบปกติ

หมายเหตุ ยังคงสามารถใช้การเปรียบเทียบกราฟของ $F_0(Z_i)$ และ $S(Z_i)$ ได้เช่นกัน คือหา D = ระยะห่างที่มากที่สุด (ในแนวตั้ง) ระหว่าง $F_0(Z_i)$ และ $S(Z_i)$

3. ตัวสถิติ W หรือตัวสถิติของ Shapiro-Wilk

$$W = \frac{\left\{\sum_{i=1}^{k} a_{n+1-i}\left(x_{n+1-i} - x_{(i)}\right)\right\}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{(i)} - \bar{x}\right)^2}$$

เมื่อ n แทน ขนาดตัวอย่าง

k แทน จำนวนเต็มที่เล็กที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ n/2

a_i แทน ค่าสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการเปิดตารางที่ 3 ในภาคผนวก เมื่อ $n \le 50$

$x_{(i)}$ แทน order sample

จะปฏิเสธสมมติฐานว่างที่ว่า “ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ” เมื่อค่าสถิติที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่าค่า W ที่ได้จากตารางในภาคผนวก ที่ขนาดตัวอย่าง n และระดับนัยสำคัญที่ต้องการ

ตัวสถิติ W เป็นตัวสถิติที่ใช้สัดส่วนของ $\hat{\sigma}^2/s^2$ เมื่อ $\hat{\sigma}^2$ เป็นค่าประมาณของ σ^2 ขั้นตอนในการหาตัวสถิติ W มีดังนี้

กำหนดให้ $m' = (m_1, m_2, ..., m_n)$ เป็นเวคเตอร์ค่าคาดหวังของ $x_1, x_2, ..., x_n$

$v = (v_{ij})$ เป็น Covariance Matrix ขนาด n x n

$y_1 \le y_2 \le ... \le y_n$ เป็น order sample ขนาด n จาก N(0, 1)

ดังนั้น $E(x_i) = m_1$

$Cov(y_i, y_j) = v_{ij} \quad (i, j = 1, 2, ..., n)$

ให้ $x' = (x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)})$ เป็นเวคเตอร์ของ order sample ของตัวอย่างขนาด n ต้องการทดสอบว่าตัวอย่างนี้สุ่มมาจากการแจกแจงแบบปกติ $N(\mu, \sigma^2)$

ถ้า $\{x_i\}$ มีการแจกแจงแบบปกติ

จะได้
$$\frac{x_i-\mu}{\sigma} = y_i$$
$$x_i = \mu+\sigma y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$
$$E(x_i) = \mu+\sigma E(y_i)$$
$$E(x) = 1+\sigma m \qquad (1 = \underset{\sim n\times 1}{1})$$

ดังนั้น
$$E(x) = p\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

เมื่อ p เป็นเมตริกซ์ $(1,m_i)$ ซึ่งมีขนาด n x 2

θ' เป็นเวกเตอร์ (μ,σ)

และ $\mathrm{Var}(x_i) = \sigma^2 \mathrm{Var}(y_i)$

$\mathrm{Var}(x) = \sigma^2 v$

จาก (1) โดยทฤษฎี Generalized Least-Sqrares

$$\hat{\theta} = (p'v^{-1}p)^{-1}p'v^{-1}x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$p'v^{-1}p$ สามารถกระจายในรูปของ

$$p'v^{-1}p = \begin{bmatrix} 1'v^{-1}1 & 1'v^{-1}m \\ 1'v^{-1}m & m'v^{-1}m \end{bmatrix}$$

$$(p'v^{-1}p)^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} m'v^{-1}m & -1'v^{-1}m \\ -1'v^{-1}m & 1'v^{-1}1 \end{bmatrix}$$

เมื่อ
$$\Delta = 1'v^{-1}1m'v^{-1}m-1'v^{-1}m1'v^{-1}m$$
$$= 1'v^{-1}1m'v^{-1}m-(1'v^{-1}m)^2$$

ในทำนองเดียวกันสามารถกระจาย $p'v^{-1}x$ ในรูปของ

$$p'v^{-1}x = \begin{bmatrix} 1'v^{-1}x \\ m'v^{-1}x \end{bmatrix}$$

จาก (2) ดังนั้น

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} m'v^{-1}m & -1'v^{-1}m \\ -1'v^{-1}m & 1'v^{-1}1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1'v^{-1}x \\ m'v^{-1}x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mu} \\ \hat{\sigma} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} m'v^{-1}m1'v^{-1}x-1'v^{-1}mm'v^{-1}x \\ -1'v^{-1}m1'v^{-1}x+1'v^{-1}1m'v^{-1}x \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mu} = \frac{m'v^{-1}(m1'+1m')v^{-1}x}{1'v^{-1}1m'v^{-1}m-(1'v^{-1}m)^2}$$

$$\hat{\sigma} = \frac{1'v^{-1}(1m' - m1')v^{-1}x}{1'v^{-1}1m'v^{-1}m - (1'v^{-1}m)^2} \qquad (\because 1'v^{-1}m = 0)$$

$$= \frac{m'v^{-1}x}{m'v^{-1}m}$$

เนื่องจาก $s^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ เป็นตัวประมาณที่ไม่เอนเอียงของ $(n-1)\sigma^2$

ดังนั้นตัวสถิติ W ที่ใช้ทดสอบการแจกแจงแบบปกติ คือ

$$W = \frac{R^4\hat{\sigma}^2}{C^2S^2} = \frac{b^2}{S^2} = \frac{(a'x)^2}{S^2} = \frac{\left(\sum a_i x_i\right)^2}{\sum (x_i - x)^2}$$

เมื่อ $R^2 = m'v^{-1}m$

$C^2 = m'v^{-1}v^{-1}m$

$$a' = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{m'v^{-1}}{(m'v^{-1}v^{-1}m)^{1/2}} = \frac{m'v^{-1}}{C}$$

$$b = \frac{R^2\hat{\sigma}}{C}$$

แต่เนื่องจาก $-a_i = a_{n+1-i}$ จาก Shapiro-Wilk (1965 : 593)

ดังนั้น

$$W = \frac{\left\{\sum_{i=1}^{k} a_{n+1-i}\left(x_{(n+1-i)} - x_{(i)}\right)\right\}^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{(i)} - \bar{x}\right)^2}$$

Sarhan และ Greenberg ได้คำนวณค่าของ a' เมื่อขนาดตัวอย่างเล็กกว่า 20 แต่สำหรับขนาดตัวอย่างที่ใหญ่กว่า 20 Shapiro และ Wilk ได้ประมาณค่า a' โดย

$$a' = \frac{m'v^{-1}}{(m'v^{-1}v^{-1}m)^{1/2}}$$

$$\therefore \quad a'a = 1$$

ให้ $a^* = m'v^{-1}$

ดังนั้น $c^2 = a^*a^{*\prime}$

และประมาณค่า a^* โดย $a_i^* = 2m_i$ เมื่อ $i = 2, 3, \ldots, n-1$

$$\text{และ} \quad \left(a_i^*\right)^2 = \left(a_n^*\right)^2 = \begin{cases} \dfrac{\tau\{(1/2)n\}}{\sqrt{2\tau\{(1/2)(n+1)\}}} & (n \leq 20) \\ \dfrac{\tau\{(1/2)(n+1)\}}{\sqrt{2\tau\{(1/2)n+1\}}} & (n > 20) \end{cases}$$

ตัวอย่าง การใช้สถิติของ Shapiro และ Wilk ในการทดสอบการแจกแจงแบบปกติของข้อมูลต่อไปนี้

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}
-3	-5	4	6.5	0	2	1	3.5	7	10

H_0 : ประชากรมีการแจกแจงแบบปกติ

H_1 : ประชากรไม่มีการแจกแจงแบบปกติ

เรียงลำดับข้อมูลใหม่

i	$X_{(i)}$	$\left(X_{(i)} - \overline{X}\right)^2$
1	-5	57.76
2	-3	31.36
3	0	6.76
4	1	2.56
5	2	0.36
6	3.5	0.81
7	4	1.96
8	6.5	15.21
9	7	19.36
10	10	54.76
		190.90

$$s^2 = \sum_{i=1}^{10} \left(X_{(i)} - \overline{X}\right)^2$$

$$= 190.90$$

จากตารางที่ 3 ในภาคผนวก เมื่อ n = 10

$a_{10} = 0.5739, \quad a_9 = 0.3291, \quad a_8 = 0.2141, \quad a_7 = 0.1224$ และ $a_6 = 0.0399$

$$b = \sum_{i=1}^{k} a_{n+1-i}\left(x_{(n+1-i)} - x_{(i)}\right)$$

$$= (0.5739)(10-(-5)) + (0.3291)(7-(-3)) + (0.2141)(6.5-0) + (0.1224)(4-1) + (0.0399)(3.5-2)$$

$$= 13.7182$$

$$W = b^2/s^2 = (13.7182)^2/190.90 = 0.9858$$

จากตารางที่ 3 พบว่า ถ้ากำหนดระดับนัยสำคัญ 0.05 ค่า W ที่ขนาดตัวอย่าง 10 มีค่าเท่ากับ 0.842 ดังนั้นยอมรับ H_0 เนื่องจากค่า W ที่คำนวณได้มีค่ามากกว่า 0.842

ตอนที่ 3 การแจกแจงที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้

การแจกแจงที (Student's t – Distribution)

การแจกแจงที คิดค้นโดย William Sealy Gosset ตีพิมพ์ครั้งแรกในปี ค.ศ. 1908 โดยใช้นามปากกาว่า "Student" ดังนั้นการแจกแจงที จึงมีชื่อว่า Student t – Distribution หรือ Student's t – Distribution หรือบางทีเรียกว่า t – Distribution (Freund, 1992)

สมการของการแจกแจงที

ถ้า Y และ Z เป็นตัวแปรสุ่มที่อิสระต่อกัน Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ ที่ชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ ν และ Z เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ ตัวแปรสุ่ม T จะมีสมการดังนี้

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}$$

ซึ่งได้รับจากฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของตัวแปร T ดังนี้

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \cdot \left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{-\nu+1}{2}} \qquad ; -\infty < t < \infty$$

เมื่อ $\Gamma(P)$ คือ ฟังก์ชันแกรมม่า มีค่า $= \int_0^{\infty} x^{P-1}e^{-x}dx \quad ; \quad P > 0$

เรียกตัวแปรสุ่ม T ว่ามีการแจกแจงที ที่ชั้นแห่งความเป็นอิสระเท่ากับ ν

คุณสมบัติของการแจกแจงที

1. มีลักษณะสมมาตร เมื่อเทียบกับแกน $t = 0$ จุดนี้จะเป็นค่าเฉลี่ย มัธยฐาน และฐานนิยม
2. ในกรณีที่ $\nu = 1$ การแจกแจงจะไม่มีค่าเฉลี่ย แต่ถ้า $\nu = 2, 3, \ldots$ ค่าเฉลี่ยจะมีค่าเท่ากับ 0
3. เมื่อ $\nu = 1, 2$ การแจกแจงจะไม่มีค่าความแปรปรวน แต่ถ้า $\nu = 3, 4, \ldots$ ค่าความแปรปรวนจะเท่ากับ $\nu/\nu - 2$
4. ถ้า ν มีค่ามาก ๆ การแจกแจงทีจะใกล้เคียงการแจกแจงแบบปกติ
5. กำลังสองของ t ที่ $\nu = k$ จะมีค่าเท่ากับ F ที่ $\nu = 1$ กับ k

การแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม (The Uniform Distribution)

เราจะเรียกฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่กำหนดโดย

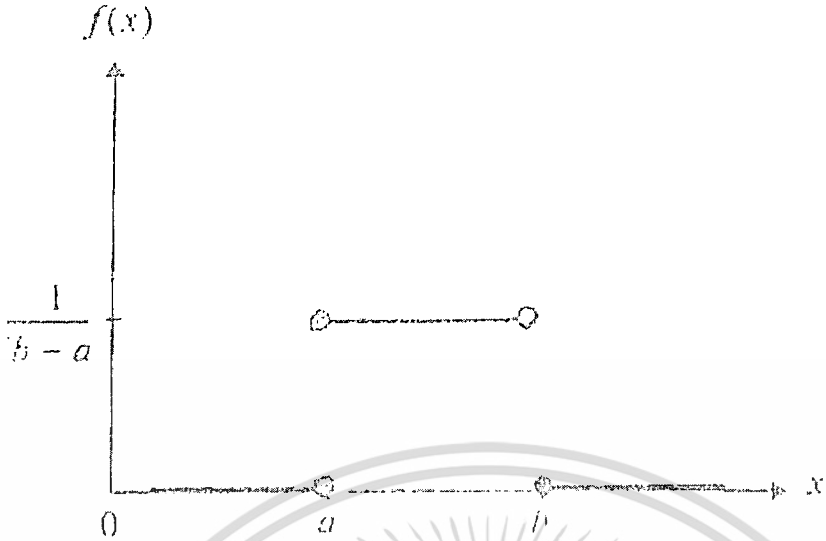
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{เมื่อ } a < x < b \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

โดยที่ a และ b เป็นค่าคงตัวที่ $a < b$ ว่า **การแจกแจงยูนิฟอร์ม** (uniform distribution) บนช่วง (a, b) และเรียกตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงยูนิฟอร์มบนช่วง (a, b) ว่า **ตัวแปรสุ่มยูนิฟอร์ม** (uniform random variable) บนช่วง (a, b) โดยเราจะใช้สัญลักษณ์ "$X \sim U(a,b)$" แทนคำกล่าวที่ว่า "X เป็นตัวแปรสุ่มยูนิฟอร์มบนช่วง (a, b)"

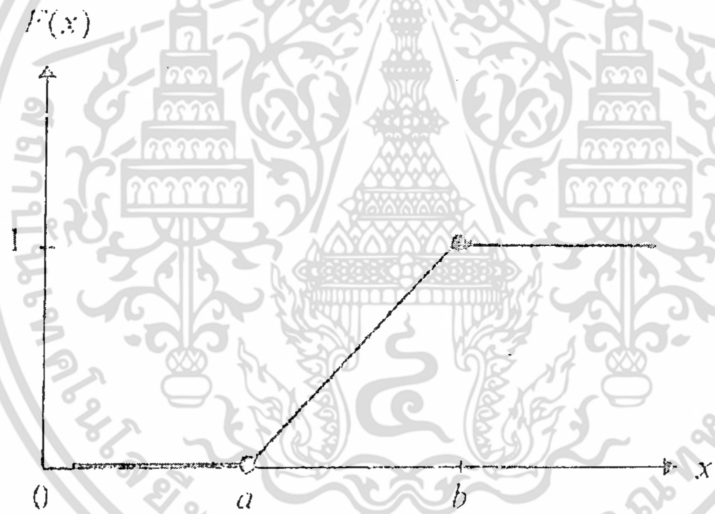
ข้อสังเกต 1. ถ้า $X \sim U(a,b)$ จะได้ว่า ฟังก์ชันการแจกแจง F ของ X จะกำหนดโดย

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{เมื่อ } a \le x \le b \\ 0 & \text{เมื่อ } x > b \end{cases}$$

2. ถ้า $X \sim U(a,b)$ จะได้ว่า ฟังก์ชันความน่าจะเป็น f และฟังก์ชันการแจกแจง F ของ X มีกราฟดังนี้



รูปที่ 2.8 ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบยูนิฟอร์มในช่วง (a, b)



รูปที่ 2.9 ฟังก์ชันการแจกแจงของการแจกแจงยูนิฟอร์มในช่วง (a, b)

ตัวอย่าง ให้ $X \sim U(0,10)$ จงหา

ก. $P(X < 3)$

ข. $P(X > 6)$

ค. $P(3 < X < 8)$

วิธีทำ เพราะว่า $X \sim U(0,10)$ ดังนั้นฟังก์ชันความน่าจะเป็น f ของ X กำหนดโดย

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10} & \text{เมื่อ } 0 < x < 10 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

ก) $P(X<3) = \int_{-\infty}^{3} f(x)dx$

$= \int_{0}^{3} \frac{1}{10} dx$

$= \frac{3}{10}$

ข) $P(X>6) = 1-P(X\leq 6)$

$= 1-\int_{-\infty}^{6} f(x)dx$

$= 1-\int_{0}^{6} \frac{1}{10} dx$

$= 1-\frac{6}{10}$

$= \frac{2}{5}$

ค) $P(3<X<8) = \int_{3}^{8} f(x)dx$

$= \int_{3}^{8} \frac{1}{10} dx$

$= \frac{1}{2}$

ตัวอย่าง รถประจำทางจะมาจอดที่ป้ายในเวลา 7 :15 และ 7:30 ตามลำดับ ผู้โดยสารคนที่หนึ่งจะมาถึงป้ายรถประจำทางด้วยการแจกแจงยูนิฟอร์มบนช่วง (7, 7:30) จงหาความน่าจะเป็นที่

ก. ผู้โดยสารจะคอยรถประจำทางไม่เกิน 5 นาที

ข. ผู้โดยสารจะคอยรถประจำทางเกิน 10 นาที

วิธีทำ ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นเวลาที่ผู้โดยสาร จะมาถึงป้ายรถประจำทาง ดังนั้น $X \sim U(7,7:30)$ และ

ก) ความน่าจะเป็นที่ผู้โดยสารจะคอยรถประจำทางไม่เกิน 5 นาที

$= P(7:10<X<7:15)+P(7:25<X<7:30)$

$= \int_{7:10}^{7:15} \frac{1}{30} dx + \int_{7:25}^{7:30} \frac{1}{30} dx$

$$= \frac{5}{30} + \frac{5}{30}$$

$$= \frac{1}{3}$$

ข. ความน่าจะเป็นที่ผู้โดยสารจะคอยรถประจำทางเกิน 10 นาที

$$= P(7{:}00 < x < 7{:}05) + P(7{:}15 < x < 7{:}20)$$

$$= \int_{7:00}^{7:05} \frac{1}{30} dx + \int_{7:15}^{7:20} \frac{1}{30} dx$$

$$= \frac{5}{30} + \frac{5}{30}$$

$$= \frac{1}{3}$$

ทฤษฎี กำหนดให้ $X \sim U(a,b)$ จะได้ว่า

1. $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

2. $Var(X) = \dfrac{(a+b)^2}{12}$

พิสูจน์

1) $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

2) เนื่องจาก $$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

และ $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$ จึงได้ว่า

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(a-b)^2}{12}$$

ตัวอย่าง ให้ $X \sim U(0,10)$ จงหา $E(X)$

วิธีทำ จากทฤษฎีจะได้ว่า

$$E(X) = \frac{10+0}{2} = 5$$

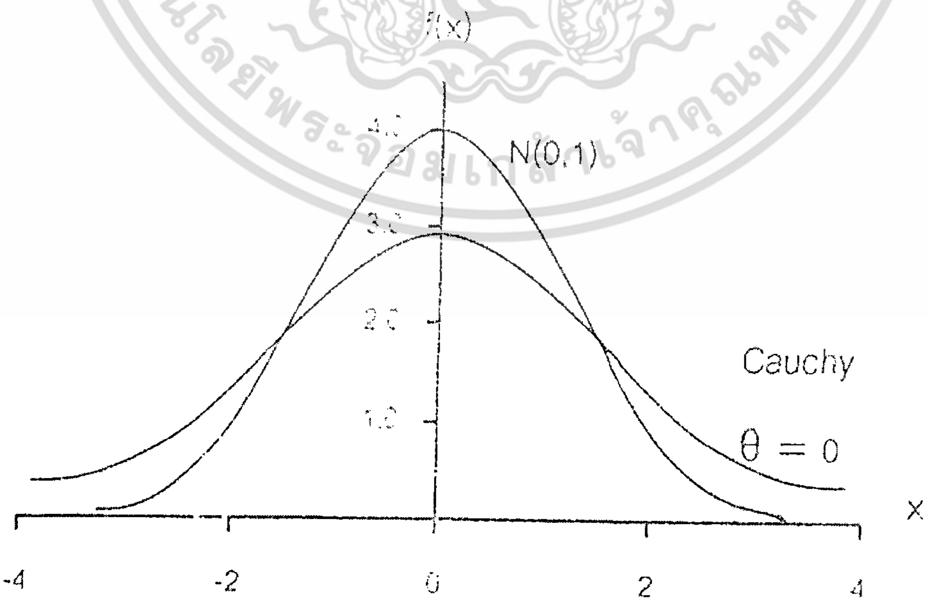
การแจกแจงแบบโคชี (The Cauchy Distribution)

นิยาม ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม X จะมีการแจกแจงโคชี ถ้า X มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{\pi[1+(x-\theta)]^2} \qquad -\infty < x < \infty \;;\; -\infty < \theta < \infty$$

$$= 0 \qquad \text{นอกช่วงดังกล่าว}$$

การแจกแจงโคชีจะเหมือนกับการแจกแจงปกติ เส้นโค้งมีลักษณะเป็นรูปประะฆังคว่ำ และสมมาตรกับแกนตั้งที่ลากผ่าน θ แต่เส้นโค้งจะแบนกว่าโค้งปกติ ดังรูป



รูปที่ 2.10 ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบโคชี และแบบปกติมาตรฐาน

ถ้า X มีการแจกแจงโคชี แล้วฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ และทุกโมเมนต์ของ X รอบศูนย์ $\left(E\left(X^{k}\right)\right)$ จะไม่มีจริง (does not exist)

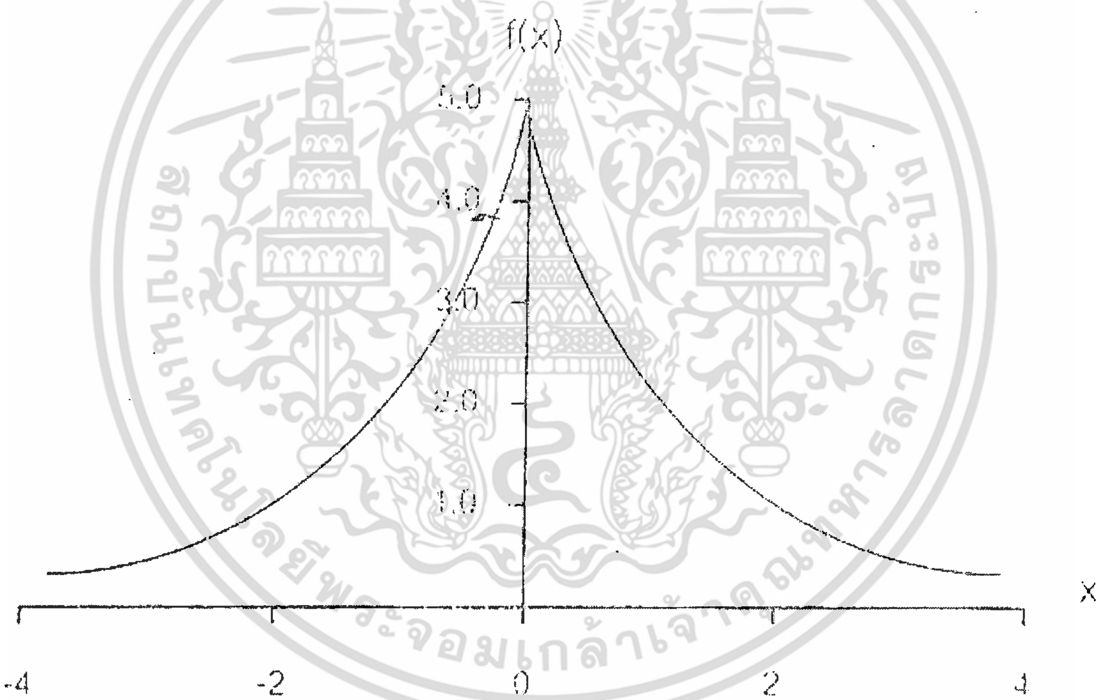
การแจกแจงแบบลาปลาซ (The Laplace Distribution)

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม X จะมีการแจกแจงลาปลาซ หรือการแจกแจงเอ็กซ์โพเนนเชียลสองด้าน (double exponential) ถ้า X มีฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{2\beta}e^{-\frac{|x-\theta|}{\beta}} \qquad -\infty < x < \infty \;;\; -\infty < \theta < \infty, \beta > 0$$

$$= 0 \qquad \text{นอกช่วงดังกล่าว}$$

กราฟของฟังก์ชัน สำหรับ $\theta = 0$ และ $\beta = 1$ ดังรูป



รูปที่ 2.11 ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบลาปลาซ ที่ $\theta = 0$ และ $\beta = 1$

ถ้า X มีการแจกแจงลาปลาซ ที่มีพารามิเตอร์ θ และ β แล้วจะได้

$$E(X) = \theta$$

$$V(X) = 2\beta^2$$

และ $$M_X(t) = \frac{e^{\theta t}}{1-\beta^2 t^2} \qquad , |t| < \frac{1}{\beta}$$

ตอนที่ 4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

สำหรับงานวิจัยที่เกี่ยวข้องนั้น ได้มีนักสถิติจำนวนมากทำการศึกษาเกี่ยวกับอำนาจการทดสอบของตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งในส่วนนี้จะเสนอเฉพาะบางผลงานวิจัยที่สำคัญและเกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้เท่านั้น

Shapiro และคณะ (1968) เป็นผู้ริเริ่มในการศึกษาอำนาจการทดสอบของตัวสถิติต่าง ๆ ในการทดสอบการแจกแจงแบบปกติ โดยทำการศึกษาตัวสถิติ 9 ตัว คือ Shapiro-Wilk Statistic (W) $\sqrt{b_1}$ b_2 Kolmogorov-Smirnov Test (K) Cramer-von Mises $\left(W^2\right)$ Anderson-Darling $\left(A^2\right)$ Durbin (D) Chi-sqrare Test $\left(X^2\right)$ และ Studentized Range Test (U) ภายใต้การแจกแจง 12 การแจกแจง ซึ่งมีค่าพารามิเตอร์ที่แตกต่างกัน รวมเป็น 45 การแจกแจง ได้ผลสรุปดังนี้

1. Shapiro-Wilk Statistic ใช้ได้ดีในการทดสอบทั่วไป
2. การทดสอบโดยใช้ Empirical Distribution Function ได้อำนาจการทดสอบต่ำ
3. Studentized Range Test (U) มีอำนาจการทดสอบสูงเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบ Symmetric Short-Tailed และมีอำนาจการทดสอบต่ำเมื่อประชากรมีการแจกแจงแบบ Asymmetric Short-Tailed และ Asymmetric Long-Tailed
4. $\sqrt{b_1}$ และ b_2 ใช้ในการทดสอบได้ดี แต่มีอำนาจการทดสอบต่ำกว่า W

M.A. Stephens (1974) ได้แสดงให้เห็นว่า ผลการศึกษาของ Shapiro และคณะ ได้ให้ค่าวิกฤตสำหรับตัวสถิติที่ใช้ Empirical Distribution Function ในการทดสอบการแจกแจงแบบปกติของประชากรที่ไม่ถูกต้องนัก ทั้งนี้เพราะค่าวิกฤตดังกล่าวคำนวณมาจากการสมมติว่าทราบค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของประชากร ดังนั้น Stephens จึงทำการคำนวณค่าวิกฤตของตัวสถิติเหล่านี้ขึ้นมาใหม่ โดยสมมติว่าไม่ทราบค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของประชากร

สมพิศ โชติวิทยะธารากร (2531) ได้ทำการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของตัวสถิติที่ใช้ในการทดสอบการแจกแจงแบบปกติ 5 ตัว คือ Chi-Sqrare Test $\left(X^2\right)$ Studentized Range Test (U) Shapiro-Wilk Statistic (W) Probability Plot Correlation Coefficient Test (r) และ Hannu oja Statistic (T_1 และ T_2) ภายใต้การแจกแจง 2 ลักษณะที่สำคัญ คือ การแจกแจงแบบปกติ และการแจกแจงแบบไม่ปกติ ซึ่งพบว่าในด้านการนำไปใช้ประโยชน์แล้วควรเลือกใช้ตัวสถิติ W เนื่องจากให้อำนาจการทดสอบสูงเป็นส่วนใหญ่ และสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ได้ดี

Edith Seirr (2004) ได้ทำการศึกษาถึงสถิติทดสอบต่าง ๆ ที่ใช้ทดสอบการแจกแจงปกติ รวมทั้งสิ้น 10 สถิติทดสอบ โดยทำการจำลองข้อมูลให้มีขนาดตั้งแต่ 20 --> 100 ด้วยจำนวนซ้ำ 10,000 รอบ จากการแจกแจงแบบต่าง ๆ ที่มีลักษณะต่าง ๆ เช่น Bimodal, หางสั้น, โด่งกว่าปกติเล็กน้อย, โด่งมาก, มีความเบ้ ศึกษาถึงค่า empirical alpha และ power ที่ได้จากสถิติทดสอบแต่ละแบบ พบว่า สถิติทดสอบที่ใช้หลักการของ Regression test คือ D’Agostino (1972), Shapiro, Royston (ซึ่งคือ Shapiro corrected), Chen and Shapiro และ Zhang จะดีที่สุด คือมี power สูงที่สุด ในเกือบทุกแบบของการแจกแจง แต่ถ้ามีวัตถุประสงค์

เพื่อดูว่าการแจกแจงมีลักษณะสมมาตรที่มีความโด่งสูงหรือไม่ ควรใช้สถิติทดสอบแบบที่ใช้หลักของ Skewness และ Kurtosis Test คือ D'Agostino (1990) และ G-kurtosis ซึ่งประกอบด้วย The first statistic G_w^2 และ The second statistic G_w^{2*} ที่ให้ค่า power สูงที่สุด และยังแนะนำว่าโปรแกรมสำเร็จรูปควรจัดให้มีสถิติทดสอบเหล่านี้

กมล บุษบา (2547) ได้ทำการศึกษาถึงการคำนวณค่าคลาดเคลื่อนมาตรฐานของการประมาณค่าเฉลี่ยในการทดลองแบบแฟกทอเรียล กรณีตัวแบบอิทธิพลผสมของโปรแกรม SPSS ซึ่งพบว่า ได้ค่าไม่ถูกต้อง ในขณะที่โปรแกรม SAS ให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้อง และกมล ยังได้ศึกษาถึงการรายงานค่าพี (p-value) ด้วยสถิติทดสอบไค-สแควร์ จากตารางไขว้ของโปรแกรม SPSS ที่พบว่า เป็นค่าความน่าจะเป็นแบบด้านเดียว ไม่ใช่แบบสองด้านตามที่โปรแกรมรายงาน ดังนั้นผู้นำผลไปใช้ไม่จำเป็นต้องนำไปหารด้วยสอง เนื่องจากการทดสอบด้วยไค-สแควร์ เป็นการทดสอบแบบด้านเดียว

Reinhard Bergmann, John Ludbrook and Wilk P.J.M. Shooren (2000) ได้ทำการศึกษาถึงผลลัพธ์ของการใช้สถิติทดสอบ Wilcoxon-Mann Whitney จากโปรแกรมสำเร็จรูป 11 แบบ เช่น SPSS 8.0, StatXact 4.0, SigmaStat 2.03, S-Plus 2000, SAS 6.12 เป็นต้น พบว่า ผลลัพธ์ที่ได้จะแตกต่างกันในหลายด้าน เช่น การปรับ ties, การปรับค่าต่อเนื่อง, การปรับค่ากรณีตัวอย่างมีขนาดใหญ่ รวมทั้งการทำให้เข้าใจผิด หรือ Indequate description of Algorithms

Leo Knüsel ได้ทำการศึกษาถึงความถูกต้องของค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินาม พัวซอง ไฮเปอร์จีออเมตริก แกมมา และ Inverse Beta จากโปรแกรม Excel 2003 พบว่าได้ค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินามและพัวซองเป็นที่ถูกต้อง เมื่อค่าตัวแปรสุ่มมีค่าในช่วงกลาง ๆ ของการแจกแจงเท่านั้น แต่เมื่อตัวแปรสุ่มมีค่าในตอนต้นของการแจกแจง (extreme lower tail) Excel 2003 จะปัดค่าความน่าจะเป็นเหล่านั้นเป็น 0 ในขณะที่ Excel 97 ให้ค่าที่ถูกต้อง แสดงให้เห็นว่าการสร้าง Algorithm ใน Excel 2003 ก็ยังคงมีข้อบกพร่องอยู่ แม้ว่าจะมีการปรับปรุงจาก Excel 97 แล้วก็ตาม

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

3.1 ขั้นตอนการดำเนินการวิจัย

ขั้นตอนในการวิจัยแบ่งออกเป็น 4 ขั้นตอน ดังนี้

1. สร้างการแจกแจงของประชากรที่มีลักษณะสมมาตร ตามลักษณะที่กำหนดในสถานการณ์ ต่าง ๆ ดังนี้

1.1 กำหนดประชากรให้มีการแจกแจงที่สมมาตร ดังต่อไปนี้

- การแจกแจงปกติโดยสนใจศึกษาเมื่อพารามิเตอร์ $\mu = 100$ และ $\sigma = 10, 50, 100$
- การแจกแจงสมมาตรที่มีหางยาวกว่าปกติ (Long tailed distribution) คือ การแจกแจงแบบที d.f = 1 และ 5
- การแจกแจงสมมาตรแต่โด่งกว่าปกติมาก (Distributions with high kurtosis) เช่น การแจกแจงCauchy ด้วยพารามิเตอร์ 0, 2 คือ C(0, 2) และ C(0, 0.5) และการแจกแจง Laplace คือ L(0, 0.5)
- การแจกแจงสมมาตรแต่โด่งกว่าปกติเล็กน้อย (Distribution with kurtosis slightly higher than the Normal) เช่น Logistic คือ L(0, 0.5) และ L(0, 1)
- การแจกแจงสมมาตรที่มีหางสั้น (Short tailed distribution) เช่น Uniform แบบ U(0 – 1) และ U (10 – 50)
- ข้อมูลดังกล่าวข้างต้นได้จากการจำลองด้วยโปรแกรม MINITAB Version 14.0 ด้วยคำสั่ง Random Number ซึ่งได้จากงานวิจัยของกุศยา (15) ที่พบว่าการจำลองข้อมูลให้มีการแจกแจงแบบต่าง ๆ โปรแกรม MINITAB มีประสิทธิภาพใกล้เคียงกับ SAS

1.2 กำหนดขนาดตัวอย่างเป็น 10, 20, 30, 50, 100

1.3 จำนวนทำซ้ำ = 500 รอบในแต่ละสถานการณ์

2. คำนวณค่าสถิติทดสอบทั้ง 3 พร้อมทั้งค่าพี (p – value)

ทำโดยนำข้อมูลในข้อ 1.1 ไปวิเคราะห์ด้วยเมนูใน SPSS เพื่อทดสอบการแจกแจงปกติ คือเมนู Explore และเมนู 1 – Sample K – S

3. คำนวณค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1

เมื่อใช้ข้อมูลจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ ทดสอบด้วยสถิติทดสอบทั้ง 3 เป็นจำนวน 500 ชุดตัวอย่าง ในแต่ละสถานการณ์ หาค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 โดยการนับจำนวนครั้งของการปฏิเสธสมมติฐานเบื้องต้น (H_0 : ตัวแปรสุ่มมาจากการแจกแจงปกติ) แล้วหารด้วย 500 และเทียบค่ากับความน่าจะเป็น

ของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ว่าสามารถควบคุมค่าได้หรือไม่ โดยใช้เกณฑ์ของ Cochran และ Bradley ดังนี้

เกณฑ์ของ Cochran จะมีเกณฑ์การพิจารณาว่าสามารถควบคุมความน่าจะเป็นได้ เมื่อ

ที่ระดับนัยสำคัญ .10 ถ้าค่าที่ได้มีค่าในช่วง (.08 - .12)

ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ถ้าค่าที่ได้มีค่าในช่วง (.04 - .06)

เกณฑ์ของ Bradley จะมีเกณฑ์การพิจารณาว่าสามารถควบคุมความน่าจะเป็นได้ เมื่อ

ที่ระดับนัยสำคัญ .10 ถ้าค่าที่ได้มีค่าในช่วง (.05 - .15)

ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ถ้าค่าที่ได้มีค่าในช่วง (.025 - .075)

4. คำนวณค่าอำนาจการทดสอบ (Power of the test)

เมื่อใช้ข้อมูลจากประชากรที่มีการแจกแจงอื่น ๆ ที่ไม่ใช่การแจกแจงปกติ ทดสอบด้วยสถิติทดสอบทั้ง 3 เป็นจำนวน 500 ชุดตัวอย่าง ในแต่ละสถานการณ์ หาค่าอำนาจการทดสอบด้วยการนับจำนวนครั้งของการปฏิเสธสมมติฐานเบื้องต้น (H_0 : ตัวแปรสุ่มมาจากการแจกแจงปกติ) แล้วหารด้วย 500 และจะเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของตัวสถิติทั้งสามในแต่ละสถานการณ์

3.2 วิธีดำเนินงาน

การวิจัยนี้ได้สร้างและจำลองการทดลอง โดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ช่วยในการดำเนินการ โดยมีวิธีการดำเนินงานตามลำดับดังนี้

1. สร้างข้อมูลจากประชากรที่มีการแจกแจงต่าง ๆ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MINITAB 14 ด้วยการใช้เมนูตามขั้นตอนต่อไปนี้

Calc

Random data

เลือกการแจกแจงตามที่ต้องการ เช่น การแจกแจงปกติ ซึ่งต้องกำหนด

ขนาดตัวอย่าง จาก .... rows of data

จำนวนชุดตัวอย่าง จาก .... Store in column

ค่าพารามิเตอร์ คือ ค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เช่น (0, 1)

(สำหรับการแจกแจงอื่น ๆ ก็ทำในทำนองเดียวกันนี้)

ตัวอย่างเช่น ต้องการสร้างข้อมูลจากประชากรปกติที่มีค่าเฉลี่ย = 0 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = 1 ด้วยขนาดตัวอย่าง = 10 โดยมี 3 ชุดตัวอย่าง จะได้ชุดตัวอย่างทั้ง 3 ดังนี้

	C1	C2	C3
1	-0.79781	0.09723	0.93731
2	0.68059	1.57570	0.54652
3	0.12719	0.93158	-0.91581
4	0.09112	0.93090	1.39447
5	-0.16258	1.60160	-0.66808
6	0.76615	0.35147	-0.36402
7	-0.02019	0.07582	-1.75371
8	-1.31629	0.04552	-0.57979
9	-1.18545	-0.99917	0.82800
10	-0.66199	0.86277	1.05859

เมื่อ C_1, C_2 และ C_3 คือชุดตัวอย่างที่ 1 ถึง 3 ในงานวิจัยนี้จะสร้างข้อมูล 500 ชุด นั่นคือ มี C_1 ถึง C_{500} แต่ละชุดตัวอย่างจะได้ค่าข้อมูลที่ต่างกัน

2. นำข้อมูลที่ได้ในขั้นที่ 1 ไปวิเคราะห์ด้วยโปรแกรม SPSS ด้วยสถิติทดสอบ 3 แบบ โดยใช้เมนูดังนี้

Analyze	และ	Analyze
Descriptive Statistics		Nonparametric Test
Explore		1 – Sample K-S
Plot		
Normality Plots with test		

ซึ่งจะได้ผลลัพธ์เป็นค่าสถิติทดสอบ และค่าพี (p-value)

3. คำนวณหาค่า empirical alpha หรือความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ที่แท้จริง จากข้อมูลที่มาจากประชากรปกติ ที่ขนาดตัวอย่างหนึ่งจะนับจำนวนชุดตัวอย่างที่ทำการปฏิเสธสมมติฐานเบื้องต้น (คือได้ค่าพีน้อยกว่า .05 หรือน้อยกว่า .10) แล้วหารด้วย 500 แล้วนำค่าที่ได้เทียบกับค่า Alpha ที่กำหนดเบื้องต้น (.05 หรือ .10) ว่ามีค่าที่อยู่ในขอบเขตที่ถือว่าควบคุมได้หรือไม่ ตามเกณฑ์ของ Cochran และ Bradley ดังกล่าวในตอนต้น

4. คำนวณหาค่าอำนาจการทดสอบ หรือความสามารถในการปฏิเสธสมมติฐานเบื้องต้นเมื่อไม่เป็นจริง จากข้อมูลที่มาจากการแจกแจงแบบอื่น ๆ ที่ไม่ใช่แบบปกติ ที่ขนาดตัวอย่างหนึ่งจะ

นับจำนวนชุดตัวอย่างของการปฏิเสธสมมติฐานเบื้องต้น (คือมีค่าพีน้อยกว่า .05 หรือ .10) แล้วหารด้วย 500

5. เปรียบเทียบค่าอำนาจการทดสอบจากสถิติทดสอบทั้ง 3 แบบ ในกรณีที่การทดสอบนั้น ๆ สามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ได้

บทที่ 4
ผลการวิจัย

จะเสนอผลการวิจัยใน 2 ประเด็น คือ

4.1 การเปรียบเทียบค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 เพื่อหาผลสรุปว่าสถิติทดสอบใดสามารถควบคุมความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ได้ ตามเกณฑ์ของ Cochran และ Bradley

ผลการเปรียบเทียบความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 จากการทดลองใช้เมนูของ SPSS เพื่อทดสอบการแจกแจงปกติ จะนำเสนอด้วยตารางดังนี้

ตารางที่ 4.1 ค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 จากสถิติทดสอบต่าง ๆ ของ SPSS

การแจกแจง	สถิติทดสอบ	ขนาดตัวอย่าง	α	
			.05	.10
$N(100, 10^2)$	1 – Sample K-S	10	.0000	.0000
		20	.0000	.0000
		30	.0000	.0000
		50	.0000	.0020
		100	.0000	.0000
	Lilliefors	10	.0520	.1200
		20	.0540	.0920
		30	.0620[*C]	.1160
		50	.0340[*C]	.0740[*C]
		100	.0400	.1060
	S-W	10	.0580	.1120
		20	.0540	.0900
		30	.0680[*C]	.1120
		50	.0340[*C]	.0940
		100	.0540	.1020
$N(100, 50^2)$	1 – Sample K-S	10	.0000	.0000
		20	.0000	.0020
		30	.0020	.0000
		50	.0000	.0000
		100	.0000	.0040
	Lilliefors	10	.0540	.1200
		20	.0400	.0980
		30	.0340[*C]	.0800
		50	.0520	.1000
		100	.0540	.1140
	S-W	10	.0540	.1080
		20	.0360[*C]	.0980
		30	.0440	.0920
		50	.0540	.1000
		100	.0500	.0960

ตารางที่ 4.1 (ต่อ)

การแจกแจง	สถิติทดสอบ	ขนาดตัวอย่าง	α .05	α .10
N(100, 100²)	1 – Sample K-S	10	.0000	.0000
		20	.0000	.0000
		30	.0000	.0000
		50	.0000	.0000
		100	.0020	.0020
	Lilliefors	10	.0440	.0920
		20	.0680*C	.1180
		30	.0560	.1100
		50	.0520	.1080
		100	.0760*C, *B	.1180
	S-W	10	.0360*C	.1020
		20	.0580	.1420*C
		30	.0660*C	.1240*C
		50	.0480	.1060
		100	.0460	.0940

*C มีค่านอกช่วงตามวิธีของ Cochran, *B มีค่านอกช่วงตามวิธีของ Bradley

จากตารางที่ 4.1 จะพบว่า ในทุกกรณีของการแจกแจงปกติ เมื่อใช้สถิติทดสอบ 1-Sample K-S จะยอมรับสมมติฐานเบื้องต้นเกือบทั้งหมด นั่นคือ จำนวนครั้งของการปฏิเสธสมมติฐานเบื้องต้นมีค่าเป็นศูนย์ หรือเข้าใกล้ 0 เมื่อกำหนดระดับนัยสำคัญที่ 0.05 และ 0.10
ส่วนการทดสอบด้วยสถิติทดสอบ Lilliefors จะพบว่ามีการปฏิเสธสมมติฐานเบื้องต้น เมื่อเป็นจริงด้วยค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ส่วนใหญ่อยู่ในขอบเขตที่ควบคุมได้ตามเกณฑ์ของ Cochran และ Bradley โดยมีค่านอกขอบเขตเพียงร้อยละ 12 และส่วนใหญ่เป็นกรณีที่มีค่าน้อยกว่า α ที่กำหนด คือ น้อยกว่า .05 หรือ .10
และสถิติทดสอบ S-W ก็ให้ผลลัพธ์ในทำนองเดียวกันกับสถิติทดสอบ Lilliefors

4.2 การเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบ เพื่อหาผลสรุปว่า สถิติทดสอบใดจะมีค่าสูงที่สุด

ผลการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบ จากการทดลองใช้เมนู SPSS เพื่อทดสอบการแจกแจงปกติ จะนำเสนอด้วยตารางดังนี้

ตารางที่ 4.2 ค่าอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบต่าง ๆ เพื่อทดสอบการแจกแจงปกติ จาก SPSS

การแจกแจงที่เป็นจริง	ขนาดตัวอย่าง	สถิติทดสอบ					
		1-Sample K-S		Lilliefors		S-W	
		α		α		α	
		.05	.10	.05	.10	.05	.10
เป็นการแจกแจงที่มีหางสั้น							
	10	.000	.000	.054	.104	.066	.152
	20	.000	.000	.084	.170	.214	.362
Uniform (0-1)	30	.000	.000	.124	.246	.376	.596
	50	.000	.006	.288	.456	.778	.912
	100	.016	.052	.610	.750	.992	.998
	10	.000	.000	.064	.140	.076	.182
	20	.000	.000	.120	.184	.210	.358
Uniform (10-50)	30	.000	.002	.166	.276	.396	.586
	50	.000	.004	.248	.404	.742	.880
	100	.008	.044	.586	.770	.998	1.000
เป็นการแจกแจงที่มีหางยาว							
	10	.126	.190	.546	.606	.572	.620
	20	.482	.500	.836	.880	.856	.892
t(1)	30	.706	.794	.934	.960	.962	.966
	50	.924	.952	.996	.996	.996	.996
	100	.998	.998	1.000	1.000	1.000	1.000
	10	.000	.000	.114	.164	.116	.164
	20	.002	.010	.148	.220	.208	.258
t(5)	30	.004	.012	.150	.228	.250	.326
	50	.006	.016	.200	.286	.352	.446
	100	.030	.054	.342	.468	.576	.632
เป็นการแจกแจงที่โด่งกว่าปกติเล็กน้อย							
	10	.000	.000	.070	.134	.082	.134
	20	.000	.004	.096	.174	.132	.200
Logistic (0,0.5)	30	.000	.010	.108	.196	.166	.234
	50	.000	.008	.118	.190	.214	.288
	100	.006	.010	.168	.252	.318	.392
	10	.000	.000	.080	.144	.066	.138
	20	.002	.006	.106	.152	.122	.214
Logistic (0,1)	30	.000	.000	.078	.148	.128	.198
	50	.000	.004	.092	.160	.178	.266
	100	.002	.008	.158	.262	.284	.408
เป็นการแจกแจงที่โด่งมาก							
	10	.000	.000	.122	.218	.132	.204
	20	.000	.000	.210	.318	.280	.370
Laplace (0,0.5)	30	.006	.016	.308	.418	.376	.464
	50	.018	.054	.424	.576	.520	.620
	100	.082	.192	.704	.796	.802	.864
	10	.124	.204	.568	.646	.588	.660
	20	.500	.606	.858	.898	.888	.910
Cauchy (0,0.5)	30	.682	.786	.950	.964	.972	.982
	50	.942	.956	.998	1.000	1.000	1.000
	100	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

ตารางที่ 4.2 (ต่อ)

การแจกแจงที่เป็นจริง	ขนาดตัวอย่าง	สถิติทดสอบ					
		1-Sample K-S		Lilliefors		S-W	
		α		α		α	
		.05	.10	.05	.10	.05	.10
Cauchy (0,2)	10	.104	.174	.554	.614	.564	.618
	20	.468	.572	.814	.868	.836	.872
	30	.728	.784	.948	.962	.970	.978
	50	.928	.964	.996	1.000	.998	1.000
	100	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

จากตารางที่ 4.2 จะพบว่า สถิติทดสอบ S-W จะมีประสิทธิภาพสูงที่สุดในทุกรูปแบบการแจกแจง และมีค่าอำนาจจากการทดสอบสูงขึ้นตามลำดับ เมื่อขนาดตัวอย่างที่ใช้มากขึ้นด้วย ในบางการแจกแจง เช่น การแจกแจงที่โด่งมาก มีอำนาจการทดสอบสูงสุดถึง 100 เปอร์เซ็นต์ นั่นหมายความว่า สถิติทดสอบนี้จะปฏิเสธสมมติฐานเบื้องต้นเกี่ยวกับการแจกแจงปกติ ในทุกชุดข้อมูลตัวอย่างที่มาจากการแจกแจงอื่น ๆ ในขณะที่การทดสอบด้วยสถิติ Lilliefors มีอำนาจการทดสอบมากในลำดับถัดไป และมีค่าอำนาจการทดสอบสูงขึ้น เมื่อใช้ขนาดตัวอย่างมากขึ้นเช่นเดียวกัน ส่วนสถิติทดสอบ 1-Sample K-S มีอำนาจการทดสอบน้อยที่สุด ในเกือบทุกแบบการแจกแจงยกเว้นการแจกแจงแบบ Cauchy ที่มีอำนาจการทดสอบสูงที่สุดเท่ากับสถิติทดสอบ Lilliefors และ S-W ส่วนใหญ่ของการแจกแจงที่เข้าใกล้แบบปกติ สถิติทดสอบนี้ไม่สามารถแยกได้ว่าไม่เป็นแบบปกติ จึงได้อำนาจการทดสอบเข้าใกล้ 0

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อทำการเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการทดสอบการแจกแจงปกติจากการทดสอบ 3 แบบ คือ Kolmogorov, Lilliefors และ Shapiro – Wilk ที่มีอยู่ใน SPSS v.13 ข้อมูลที่นำมาศึกษาเป็นข้อมูลจากการจำลองแบบจากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ และที่เบี่ยงเบนไปเล็กน้อยจากการแจกแจงปกติ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติ MINITAB ในแต่ละกรณีมีการทำซ้ำ 500 ครั้ง ของการจำลองแบบข้อมูล มีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 10, 20, 30, 50 และ 100 ทำการเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบ และความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนชนิดที่ I

แผนการทดลอง

1. ทดลองหาค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 (Empirical Alpha หรือ Actual Type I error) ของสถิติทดสอบทั้งสามแบบ เมื่อกำหนดระดับนัยสำคัญที่ .05 และ .10
2. ทดลองหาค่าอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบทั้งสามแบบ จากสถิติทดสอบที่สามารถควบคุมค่าความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ได้ ตามเกณฑ์ของ Cochran และ Bradley

แผนการทดลองนี้จะเสนอค่าความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 จากผลการทดลองในกรณีต่าง ๆ ทั้งสิ้น 45 ค่า สำหรับ $\alpha = .05$ และอีก 45 ค่า สำหรับ $\alpha = .10$ และเสนอค่าอำนาจการทดสอบทั้งสิ้น 145 ค่า สำหรับ $\alpha = .05$ และ 145 ค่า สำหรับ $\alpha = .10$

วิธีดำเนินการทดลอง

การวิจัยนี้ใช้เทคนิคมอนติคาร์โลซิมมูเลชั่น โดยแต่ละกรณีกำหนดให้คอมพิวเตอร์จำลองการทดลอง 500 ครั้ง และนับจำนวนครั้งที่เกิดความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 และอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบทั้ง 3 แบบ เพื่อคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ที่แท้จริง และค่าอำนาจการทดสอบ

สรุปผลการวิจัย

การสรุปผลว่าสถิติทดสอบใดมีความเหมาะสมที่จะเลือกใช้จากโปรแกรม SPSS 13 จะใช้วิธีเปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของสถิติทดสอบ 3 แบบ ซึ่งได้ผ่านการพิจารณาความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 แล้ว ผลสรุปที่สำคัญของการวิจัยเป็นดังนี้

1. เปรียบเทียบความสามารถในการควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ของสถิติทดสอบทั้ง 3 แบบ ที่ระดับนัยสำคัญ .05 และ .10 โดยใช้เกณฑ์ของพิจารณาความสามารถในการควบคุมความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ของ Cochran และ Bradley

1.1 สถิติทดสอบ 1-Sample K-S สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ได้เกือบทุกกรณีของการแจกแจงปกติ และ ณ ทุกระดับนัยสำคัญ .05 หรือ .10 โดยมีค่าน้อยกว่าความคลาดเคลื่อนที่กำหนดไว้ ในทุกกรณี และเกือบทั้งหมดมีค่าเป็น 0

1.2 สถิติทดสอบ Lilliefors สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ได้ โดยค่าที่ได้ส่วนใหญ่อยู่ในขอบเขตที่ควบคุมได้ตามเกณฑ์ของ Cochran และ Bradley โดยมีค่าอยู่นอกขอบเขตเพียงร้อยละ 12 และส่วนใหญ่มีค่าน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด คือ น้อยกว่า .05 หรือ .10

1.3 สถิติทดสอบ Shapiro-Wilk ให้ผลลัพธ์ในทำนองเดียวกับสถิติทดสอบ Lilliefors

ดังนั้นอาจสรุปได้ว่าสถิติทดสอบทั้ง 3 ใน SPSS เป็นสถิติที่สามารถควบคุมความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 ได้ทั้งหมด ซึ่งจะนำผลลัพธ์จากอำนาจการทดสอบจากสถิติทดสอบทั้ง 3 มาเปรียบเทียบเพื่อหาผลสรุปว่าควรจะใช้สถิติทดสอบใดมากที่สุดในกรณีต่าง ๆ ที่ทดลองในครั้งนี้

2. เปรียบเทียบอำนาจการทดสอบของสถิติทั้ง 3 แบบ ที่จะใช้ในการทดสอบการแจกแจงปกติ ที่ระดับนัยสำคัญ .05 และ .10

2.1 สถิติทดสอบ 1-Sample K-S มีอำนาจการทดสอบค่อนข้างต่ำ และมีอำนาจการทดสอบต่ำที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับสถิติทดสอบอีก 2 แบบ โดยส่วนใหญ่มีค่าใกล้ 0 แม้จะใช้ตัวอย่างใหญ่ขึ้นถึง 100 ก็ตาม และมีค่าสูงกว่ากันเล็กน้อย ระหว่าง $\alpha = .05$ และ .10 ยกเว้นการแจกแจงแบบ Cauchy ที่มีอำนาจการทดสอบสูงที่สุด เท่ากับสถิติทดสอบ Lilliefors และ S-W

2.2 สถิติทดสอบ Lilliefors มีอำนาจการทดสอบที่สูงขึ้นกว่าสถิติทดสอบ 1-Sample K-S และมีค่าสูงขึ้นเมื่อใช้ตัวอย่างขนาดใหญ่ขึ้น มีค่าอำนาจการทดสอบสูงเมื่อใช้ $\alpha = .10$ มากกว่าที่ $\alpha = .05$ และมีอำนาจการทดสอบสูงที่สุด คือร้อยละ 100 เมื่อประชากรมาจากการแจกแจงแบบ t(1), Cauchy (0, 0.5) และ Cauchy (0, 2) จากตัวอย่างขนาด 100

2.3 สถิติทดสอบ S-W มีประสิทธิภาพสูงที่สุด เมื่อเทียบกับสถิติทดสอบอีก 2 แบบ กล่าวคือ มีค่าอำนาจการทดสอบสูงขึ้นเมื่อใช้ขนาดตัวอย่างใหญ่ขึ้น และมีค่าอำนาจการทดสอบมากกว่าที่ระดับนัยสำคัญ .10 ส่วนใหญ่จากการแจกแจงแบบต่าง ๆ สถิติทดสอบนี้จะมีค่าอำนาจการทดสอบเข้าใกล้ร้อยละ 100 เมื่อใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100

5.2 การอภิปรายผล

เมื่อข้อมูลมาจากประชากรแบบปกติ 1-Sample K-S ให้ผลการทดสอบได้ถูกต้องร้อยละ 100 แต่ถ้าข้อมูลมาจากประชากรแบบอื่น ๆ ที่ใกล้เคียงแบบปกติ 1-Sample K-S ให้ผลการทดสอบผิดพลาดจากความจริงเกือบทั้งหมด แต่เมื่อข้อมูลมาจากการแจกแจงแบบ Cauchy (0, 0.5) และ Cauchy (0, 2) และการแจกแจงแบบ t(1) ให้ผลการทดสอบถูกต้องเกือบทั้งหมด โดยเฉพาะเมื่อขนาดตัวอย่างมีขนาด 50 ขึ้นไป สรุปได้ว่า 1-Sample K-S ให้ค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 เป็น 0 และมีค่าอำนาจการทดสอบต่ำในเกือบทุกรณี

ส่วนสถิติทดสอบ S-W ให้ผลการทดสอบที่ถูกต้องเป็นส่วนใหญ่ ทั้งในกรณีที่ข้อมูลมาจากการแจกแจงปกติ หรือข้อมูลที่มาจากการแจกแจงแบบอื่น ๆ โดยเป็นสถิติทดสอบที่มีอำนาจการทดสอบสูงที่สุด เมื่อเทียบกับสถิติทดสอบอีก 2 แบบ ในทุกขนาดตัวอย่าง มีค่าอำนาจการทดสอบเข้าใกล้ 1 เมื่อใช้ขนาดตัวอย่างเข้าใกล้ 100 ในทุกแบบของการแจกแจง และทุกระดับของ α = .05 หรือ .10 ยกเว้นการแจกแจงแบบ t(5), Logistic (0, 0.5) และ Logistic (0, 1) ที่อำนาจการทดสอบมีค่าอยู่ในช่วงร้อยละ 28.4-63.2 ส่วนค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 มีค่าอยู่ในช่วงตามเกณฑ์ของ Cochran และ Bradley เป็นส่วนใหญ่

สถิติทดสอบ Lilliefors ให้ผลการทดสอบคล้ายกับสถิติทดสอบ S-W โดยส่วนใหญ่มีค่าความน่าจะเป็นของความคลาดเคลื่อนชนิดที่ 1 อยู่ในช่วงตามเกณฑ์ของ Cochran และ Bradley แต่มีค่าอำนาจการทดสอบต่ำกว่าสถิติทดสอบ S-W ในทุกแบบของการแจกแจง ยกเว้นการแจกแจงแบบ t(1), Cauchy (0, 0.5) และ Cauchy (0, 2) ที่ให้ค่าอำนาจการทดสอบเท่ากันคือ 1 เมื่อขนาดตัวอย่างเป็น 100 สรุปได้ว่า Lilliefors ให้ผลการทดสอบถูกต้องเป็นส่วนใหญ่คล้ายสถิติ S-W แต่มีอำนาจการทดสอบต่ำกว่า โดยมีค่าอำนาจการทดสอบสูงขึ้น เมื่อใช้ขนาดตัวอย่างที่ใหญ่ขึ้น

ผลการศึกษาครั้งนี้ได้ผลสอดคล้องกับงานวิจัยของ Gan และ Kochler (คศ. 1990) Edith Seier (คศ.2004) (18) และเกตุจันทร์ (พศ. 2534) ที่ได้ข้อสรุปว่าสถิติทดสอบ S-W มีอำนาจการทดสอบที่สูง แต่ขัดแย้งกับคู่มือการใช้โปรแกรม SPSS ที่แนะนำให้ใช้สถิติทดสอบ S-W เมื่อขนาดตัวอย่าง ≤ 50 จากการศึกษาครั้งนี้พบว่าสถิติทดสอบ S-W จะมีอำนาจการทดสอบเข้าใกล้ 1 เมื่อขนาดตัวอย่างเข้าใกล้ 100 ในเกือบทุกแบบของการแจกแจง และในทุกระดับของ α ที่ .05 หรือ .10 นั่นหมายความว่า ถ้านักวิจัยต้องการเชื่อมั่นในคำตอบของการทดสอบการแจกแจงปกติด้วยสถิติทดสอบ S-W ในระดับสูง ควรจะใช้ขนาดตัวอย่างเข้าใกล้ 100

ส่วนสถิติทดสอบ Lilliefors นั้นให้ผลการทดสอบใกล้เคียงกับสถิติทดสอบ S-W แต่ส่วนใหญ่มีอำนาจการทดสอบต่ำกว่าสถิติทดสอบ S-W ดังกล่าวในตอนต้นว่าการแจกแจงของสถิติทดสอบนี้แยกได้หลายกรณี เช่น กรณีที่ไม่ทราบค่าพารามิเตอร์ทั้งสองของการแจกแจงปกติ (คือ μ และ σ^2) หรือกรณีที่ทราบค่าพารามิเตอร์เพียงค่าเดียว (เช่น ทราบค่า μ หรือ σ^2) แต่ในโปรแกรม SPSS ใช้เพียงกรณีเดียว คือ ไม่ทราบ μ และ σ^2 จึงน่าศึกษาต่อไปว่า Algorithm ของ SPSS เลือกใช้

การแจกแจงที่ถูกต้องหรือไม่ คือได้ค่าพีที่แท้จริงหรือไม่ ถ้า SPSS ได้สร้างเมนูให้ผู้ใช้เลือกกรณีต่าง ๆ ก็จะทำให้ได้การแจกแจงที่ถูกต้องอย่างแท้จริง

สถิติทดสอบ 1-Sample K-S มีประสิทธิภาพต่ำที่สุด ซึ่งสอดคล้องกับผลสรุปจากการศึกษาของ D' Agostino และ Stephens (1986) ว่าสถิติทดสอบนี้ไม่ควรจะนำไปใช้ทดสอบการแจกแจงปกติ เพราะมีอำนาจการทดสอบต่ำเมื่อเทียบกับการทดสอบอื่น ๆ (อ้างถึงใน Nonparametric Statistics with Applications to Science and Engineering By Kvam and Vidakovic หน้า 96)

5.3 ข้อเสนอแนะ

เพื่อให้ผลสรุปครอบคลุมกว้างขวางขึ้น ควรจะมีการศึกษากับข้อมูลที่แตกต่างจากการแจกแจงปกติอย่างมาก เช่น มีความเบ้เล็กน้อย เบ้มาก หรือมีค่าฐานนิยม 2 ค่า (Bimodal) หรือ Scale Contaminated and Mixture of Normal Distribution และศึกษาในประเด็นของสถิติทดสอบ 1-Sample K-S ว่าตามเมนูที่ผู้ใช้สามารถเลือกทดสอบการแจกแจง 4 แบบ นอกจาก Normal คือ Exponential, Uniform และ Poisson นั้น สถิติทดสอบนี้ให้ผลถูกต้องมากน้อยอย่างไร และประเด็นสุดท้ายเกี่ยวกับสถิติทดสอบ Lilliefors ว่าค่าพีที่ได้มาจากการแจกแจงที่ระบุพารามิเตอร์อย่างไรเพื่อทำให้ผู้ใช้มั่นใจได้ว่าผลการทดสอบได้จากการแจกแจงที่ถูกต้อง

บรรณานุกรม

1. James J. Higgins. **"Introduction to Modern Nonparametric Statistics"** Thomson Brook/cole, 2004

2. P.Sprent. **"Applied Nonparametric Statistical Methods"** 2nd edition, Chapman & Hall, London, 1993

3. กัลยา วานิชย์บัญชา. **"การใช้ SPSS For Windows ในการวิเคราะห์ข้อมูล"** โรงพิมพ์ห้างหุ้นส่วนจำกัด ซีเคแอนด์เอสโฟโต้สตูดิโอ, 2544

4. Anderson, T. W. and Darling, D. A. "A Test of Goodness-of-fit." **Journal of the American Statistical Association.**, 1952, 49, 765-769

5. Kolmogorov, A.N. "Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione" **Giorna Ist. Attuari.**, 1933, 4, 83-91.

6. Shapiro, S. and Wilk, M.B. "An analysis of variance test for normality" **Biometrika**, 1965, 52, 591-611

7. Zhang, P. "Omnibus test of normality using the Q statistic." **Journal of Applied Statistics** , 1999, 26, 519-528

8. W.J. Conover. **"Practical Nonparametric Statistics"** John Wiley & Sons Inc. 1971

9. Jean Dickinson Gibbons. **"Nonparametric Methods for Quantitative Analysis"** Holt, Inehart and Winston, 1976

10. กมล บุษบา. "การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานที่ไม่ถูกต้องของโปรแกรม SPSS ในการทดลองแบบแฟกทอเรียลกรณีตัวแบบอิทธิพลผสม" วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ธรรมศาสตร์, 2547 ปีที่ 12 ฉบับที่ 1 ม.ค. – เม.ย.

11. กมล บุษบา. "การรายงานค่า p-value ที่ทำให้เข้าใจผิดของโปรแกรม SPSS สำหรับการวิเคราะห์ข้อมูลในตารางไขว้ด้วย ไค-สแควร์" วารสารวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ธรรมศาสตร์ , 2546 ปีที่ 11 ฉบับที่ 2 ก.ค. – ธ.ค.

12. Reinhard Bergmann, John Ludbrook, and Will P.J.M. Spooren "Different Outcomes of the Wilcoxon-Mann-Whitney Test From Different Statistics Packages" **Journal of The American Statistician**, 2000, 54, No.1

13. Leo Knüsel. "On the accuracy of statistical distributions in Microsoft Excel 2003" **Computational Statistics & Data Analysis**, 48, 2005, 445 – 449

14. B.D. McCullough, Berry Wilson. "On the accuracy of Statistical procedures in Microsoft Excel 97" **Computational Statistics & Data Analysis**, 31, 1999, 27 – 37

15. กุศยา ปลั่งพงษ์พันธ์. "การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการจำลองแบบข้อมูลโดยการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติ" การประชุมวิชาการสถิติ และสถิติประยุกต์ ประจำปี 2550

16. Gan, F.F. and Kochler, K.J. "Goodness of Fit Test Based on P-P Probability Plots." **Technometrics** 32, 289-303, 1990

17. เกตุจันทร์ พัชรินทร์ศักดิ์. "การเปรียบเทียบวิธีการนอนพาราเมตริกสำหรับการทดสอบการแจกแจงปกติ" **วิทยานิพนธ์**ภาควิชาสถิติ บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย พ.ศ. 2534

18. Edith Seier. "Comparison of Test for Univariate Normality" Department of Mathematics, East Tennessee State University, Johnson City, TN 37614, 2004

ภาคผนวก

ตารางที่ 1 ตารางการแจกแจงของสถิติทดสอบ Kolmogorov-Smirnov

ตารางที่ 1 ควอนไทล์ของสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ (Quantiles of the Kolmogorov test statistic)

One-Sided Test	$p = 0.90$	0.95	0.975	0.99	0.995		$p = 0.90$	0.95	0.975	0.99	0.995
Two-Sided Test	$p = 0.80$	0.90	0.95	0.98	0.99		$p = 0.80$	0.90	0.95	0.98	0.99
$n = 1$	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	$n = 21$	0.22[illegible]	0.259	0.287	0.321	0.344
2	0.684	0.776	0.842	0.900	0.929	22	0.221	0.253	0.281	0.314	0.337
3	0.565	0.636	0.708	0.785	0.829	23	0.216	0.247	0.275	0.307	0.330
4	0.493	0.565	0.624	0.689	0.734	24	0.212	0.242	0.269	0.301	0.323
5	0.447	0.509	0.563	0.627	0.669	25	0.208	0.238	0.264	0.295	0.317
6	0.410	0.468	0.519	0.577	0.617	26	0.204	0.233	0.259	0.290	0.311
7	0.381	0.436	0.483	0.538	0.576	27	0.200	0.229	0.254	0.284	0.305
8	0.358	0.410	0.454	0.507	0.542	28	0.197	0.225	0.250	0.279	0.300
9	0.339	0.387	0.430	0.480	0.513	29	0.193	0.221	0.246	0.275	0.295
10	0.323	0.369	0.409	0.457	0.489	30	0.190	0.218	0.242	0.270	0.290
11	0.308	0.352	0.391	0.437	0.468	31	0.187	0.214	0.238	0.266	0.285
12	0.296	0.338	0.375	0.419	0.449	32	0.184	0.211	0.234	0.262	0.281
13	0.285	0.325	0.361	0.404	0.432	33	0.182	0.208	0.231	0.258	0.277
14	0.275	0.314	0.349	0.390	0.418	34	0.179	0.205	0.227	0.254	0.273
15	0.266	0.304	0.338	0.377	0.404	35	0.177	0.202	0.224	0.251	0.269
16	0.258	0.295	0.327	0.366	0.392	36	0.174	0.199	0.221	0.247	0.265
17	0.250	0.286	0.318	0.355	0.381	37	0.172	0.196	0.218	0.244	0.262
18	0.244	0.279	0.309	0.346	0.371	38	0.170	0.194	0.215	0.241	0.258
19	0.237	0.271	0.301	0.337	0.361	39	0.168	0.191	0.213	0.238	0.255
20	0.232	0.265	0.294	0.329	0.352	40	0.165	0.189	0.210	0.235	0.252
					Approximation for $n > 40$		$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

SOURCE. Adapted from Table 1 of Miller (1956). Used with permission of the American Statistical Association.

[a] The entries in this table are selected quantiles w_p of the Kolmogorov test statistics T, T^+, and T^- as defined by Equation 6.1.1 for two-sided tests and by Equations 6.1.2 and 6.1.3 for one-sided tests. Reject H_0 at the level α if T exceeds the $1 - \alpha$ quantile given in this table. These quantiles are exact for $n \leq 40$ in the two-tailed test. The other quantiles are approximations that are equal tothe exact quantiles in most cases. A better approximation for $n > 40$ results if $(n + \sqrt{n/10})^{1/2}$ is used instead of $\sqrt{n}$ in the denominator.

ตารางที่ 2 ตารางการแจกแจงของสถิติทดสอบ Lilliefors

TABLE 2.I

Critical values for Lilliefors test, normal case 1 (μ unknown, σ^2 known)

n	α 0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
3	.392	.308	.428	.453	.495
4	.351	.366	.384	.410	.455
5	.318	.333	.350	.376	.423
6	.294	.307	.324	.348	.396
7	.276	.288	.305	.328	.374
8	.260	.272	.288	.311	.353
9	.246	.258	.272	.294	.334
10	.234	.245	.259	.280	.323
11	.225	.235	.249	.269	.309
12	.216	.226	.238	.259	.300
13	.209	.218	.230	.249	.285
14	.202	.211	.224	.242	.280
15	.195	.205	.217	.235	.270
16	.189	.197	.209	.227	.261
17	.184	.192	.203	.220	.256
18	.179	.187	.198	.215	.246
19	.174	.182	.194	.210	.242
20	.170	.178	.189	.205	.235
21	.166	.174	.184	.199	.230
22	.163	.171	.180	.195	.227
23	.160	.167	.177	.193	.221
24	.156	.164	.173	.188	.217
25	.154	.160	.170	.185	.214
26	.151	.158	.167	.181	.209
27	.147	.154	.163	.177	.205
28	.146	.153	.161	.174	.202
29	.143	.149	.158	.172	.198
30	.141	.147	.155	.169	.193

TABLE 2 II

Critical values for Lilliefors test, normal case 2 (μ known, σ^2 unknown)

n	α 0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
2	.739	.770	.797	.820	.837
3	.551	.599	.657	.722	.798
4	.499	.529	.565	.621	.734
5	.440	.470	.507	.567	.660
6	.400	.429	.464	.514	.607
7	.375	.395	.429	.477	.566
8	.451	.374	.405	.450	.534
9	.332	.353	.382	.425	.505
10	.315	.335	.361	.401	.477
11	.300	.320	.346	.387	.466
12	.289	.307	.332	.371	.444
13	.277	.296	.320	.358	.428
14	.266	.284	.307	.341	.410
15	.259	.275	.297	.331	.397
16	.251	.257	.288	.322	.387
17	.244	.260	.282	.313	.377
18	.236	.251	.271	.302	.369
19	.231	.246	.266	.297	.357
20	.226	.241	.260	.290	.348
21	.219	.233	.252	.282	.337

TABLE 2 II

(continued)

n	α 0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
22	.214	.228	.247	.278	.334
23	.210	.223	.242	.270	.319
24	.205	.218	.236	.263	.317
25	.202	.214	.231	.256	.308
26	.197	.210	.227	.255	.305
27	.194	.208	.224	.250	.302
28	.191	.203	.219	.244	.292
29	.188	.200	.217	.242	.290
30	.185	.198	.212	.236	.284
50	$1.02/\sqrt{n}$	$1.080/\sqrt{n}$	$1.170/\sqrt{n}$	$1.310/\sqrt{n}$	$1.595/\sqrt{n}$
100	$1.04/\sqrt{n}$	$1.100/\sqrt{n}$	$1.180/\sqrt{n}$	$1.320/\sqrt{n}$	$1.610/\sqrt{n}$
≥ 101	$1.06/\sqrt{n}$	$1.120/\sqrt{n}$	$1.190/\sqrt{n}$	$1.333/\sqrt{n}$	$1.625/\sqrt{n}$

TABLE 2 III

Critical values for Lilliefors test, normal case 3 (μ, σ^2 both unknown)

n	α 0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
4	.303	.320	.344	.374	.414
5	.290	.302	.319	.344	.398
6	.268	.280	.295	.321	.371
7	.252	.264	.280	.304	.353
8	.239	.251	.266	.290	.333
9	.227	.239	.253	.275	.319
10	.217	.228	.241	.262	.303
11	.209	.219	.232	.252	.291
12	.201	.210	.223	.243	.281
13	.193	.203	.215	.233	.270
14	.187	.196	.209	.227	.264
15	.181	.190	.202	.219	.256
16	.176	.184	.195	.212	.248
17	.170	.179	.190	.207	.241
18	.166	.174	.185	.201	.234
19	.162	.171	.181	.197	.230
20	.159	.167	.177	.192	.223
21	.155	.163	.173	.188	.219
22	.152	.160	.170	.185	.214
23	.149	.156	.165	.181	.210
24	.145	.153	.162	.177	.205
25	.144	.151	.159	.173	.202
26	.141	.147	.156	.170	.198
27	.138	.145	.153	.166	.193
28	.136	.142	.151	.165	.191
29	.134	.140	.149	.162	.188
30	.132	.138	.146	.159	.183
31	$\frac{0.741}{d_n}$	$\frac{0.775}{d_n}$	$\frac{0.819}{d_n}$	$\frac{0.895}{d_n}$	$\frac{1.035}{d_n}$

$$d_n = (\sqrt{n} - 0.01 + 0.83/\sqrt{n})$$

Source: Andrew L. Mason and C. B. Bell, "New Lilliefors and Srinivasan Tables with Applications," *Communic. Statist.—Simul.*, Vol. 15, No. 2 (1986), pp. 457–459. Copyright (c) 1986 by Marcel Dekker, Inc.; reprinted by permission.

ตารางที่ 3 Percentage Points of the W Test* for n = 3(1)50

	Level								
n	0·01	0·02	0·05	0·10	0·50	0·90	0·95	0·98	0·99
3	0·753	0·756	0·767	0·789	0·959	0·998	0·999	1·000	1·000
4	·687	·707	·748	·792	·935	·987	·992	·996	·997
5	·686	·715	·762	·806	·927	·979	·986	·991	·993
6	0·713	0·743	0·788	0·826	0·927	0·974	0·981	0·986	0·989
7	·730	·760	·803	·838	·928	·972	·979	·985	·988
8	·749	·778	·818	·851	·932	·972	·978	·984	·987
9	·764	·791	·829	·859	·935	·972	·978	·984	·986
10	·781	·806	·842	·869	·938	·972	·978	·983	·986
11	0·792	0·817	0·850	0·876	0·940	0·973	0·979	0·984	0·986
12	·805	·828	·859	·883	·943	·973	·979	·984	·986
13	·814	·837	·866	·889	·945	·974	·979	·984	·986
14	·825	·846	·874	·895	·947	·975	·980	·984	·986
15	·835	·855	·881	·901	·950	·975	·980	·984	·987
16	0·844	0·863	0·887	0·906	0·952	0·976	0·981	0·985	0·987
17	·851	·869	·892	·910	·954	·977	·981	·985	·987
18	·858	·874	·897	·914	·956	·978	·982	·986	·988
19	·863	·879	·901	·917	·957	·978	·982	·986	·988
20	·868	·884	·905	·920	·959	·979	·983	·986	·988
21	0·873	0·888	0·908	0·923	0·960	0·980	0·983	0·987	0·989
22	·878	·892	·911	·926	·961	·980	·984	·987	·989
23	·881	·895	·914	·928	·962	·981	·984	·987	·989
24	·884	·898	·916	·930	·963	·981	·984	·987	·989
25	·888	·901	·918	·931	·964	·981	·985	·988	·989
26	0·891	0·904	0·920	0·933	0·965	0·982	0·985	0·988	0·989
27	·894	·906	·923	·935	·965	·982	·985	·988	·990
28	·896	·908	·924	·936	·966	·982	·985	·988	·990
29	·898	·910	·926	·937	·966	·982	·985	·988	·990
30	·900	·912	·927	·939	·967	·983	·985	·988	·900
31	0·902	0·914	0·929	0·940	0·967	0·983	0·986	0·988	0·990
32	·904	·915	·930	·941	·968	·983	·986	·988	·990
33	·906	·917	·931	·942	·968	·983	·986	·989	·990
34	·908	·919	·933	·943	·969	·983	·986	·989	·990
35	·910	·920	·934	·944	·969	·984	·986	·989	·990
36	0·912	0·922	0·935	0·945	0·970	0·984	0·986	0·989	0·990
37	·914	·924	·936	·946	·970	·984	·987	·989	·990
38	·916	·925	·938	·947	·971	·984	·987	·989	·990
39	·917	·927	·939	·948	·971	·984	·987	·989	·991
40	·919	·928	·940	·949	·972	·985	·987	·989	·991
41	0·920	0·929	0·941	0·950	0·972	0·985	0·987	0·989	0·991
42	·922	·930	·942	·951	·972	·985	·987	·989	·991
43	·923	·932	·943	·951	·973	·985	·987	·990	·991
44	·924	·933	·944	·952	·973	·985	·987	·990	·991
45	·926	·934	·945	·953	·973	·985	·988	·990	·991
46	0·927	0·935	0·945	0·953	0·974	0·985	0·988	0·990	0·991
47	·928	·936	·946	·954	·974	·985	·988	·990	·991
48	·929	·937	·947	·954	·974	·985	·988	·990	·991
49	·929	·937	·947	·955	·974	·985	·988	·990	·991
50	·930	·938	·947	·955	·974	·985	·988	·990	·991

* Based on fitted Johnson (1949) S_B approximation, see Shapiro & Wilk (1965a) for details.