รายงานการวิจัย

การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงทวินามลบ

Statistical Hypotheses Testing Under Negative Binomial Distribution

อ.บุญญสิทธิ์ วรจันทร์

รศ.สายชล สินสมบูรณ์ทอง

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2555

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

หัวข้อ	การทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงทวินามลบ Statistical Hypotheses Testing Under Negative Binomial Distribution
ผู้วิจัย	อ.บุญญสิทธิ์ วรจันทร์
ผู้ร่วมวิจัย	รศ.สายชล สินสมบูรณ์ทอง
สาขา	สถิติประยุกต์
พ.ศ.	2555

บทคัดย่อ

การศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงทวินามลบ โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ใช้จำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดจนกว่าจะประสบความสำเร็จ (r) เท่ากับ 1, 2, 3, 4 และ 5 และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.01 และ 0.05

ผลการศึกษาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_1 ใด ๆ ที่ $\theta_0 = 0.5$ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้วความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก (γ) จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น สลับกันไปเรื่อย ๆ ส่วนค่าวิกฤต (c_1) และกำลังของการทดสอบ $(1-\beta)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น และในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับ $r = 5$ และ $\theta_0 = 0.5$ ถ้า θ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.6 ถึง 0.9 แล้ว γ และค่าวิกฤต (c_2) จะมีค่าคงที่ แต่ $1-\beta$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วน $r = 1$ ถึง 4 จะไม่สามารถหาค่า c_2, γ และ $1-\beta$ ได้

ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_0 ใด ๆ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นและในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_0 ใด ๆ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้วส่วนใหญ่จะไม่สามารถหาค่า γ และ c_2 ได้

ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta \leq \theta_1$ หรือ $\theta \geq \theta_2$ เทียบกับ $H_1:\theta_1 < \theta < \theta_2$ เมื่อ $\theta_1 = 0.25,\ \theta_2 = 0.75$ จะพบว่า เมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับ r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้วความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก $(\gamma_1,\ \gamma_2)$ จะมีค่าลดลงและเพิ่มขึ้นที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

ในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ เทียบกับ $H_1:\theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$ เมื่อ $\theta_1 = 0.25,\ \theta_2 = 0.75$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ และ r = 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 20 ถึง 50 แล้ว γ_1, γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

และในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta \neq \theta_0$ เมื่อ $\theta_0 = 0.25$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ ถ้า r = 3 จะสามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้

คำสำคัญ : การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการแจกแจงทวินามลบ

Thesis Title Statistical Hypotheses Testing Under Negative Binomial Distribution

Researcher Lecturer Boonyasit Warachan

Co-Researcher Assoc.Prof. Saichon Sinsomboonthong

Programme Applied Statistics

Year 2012

Abstract

In this study, the most powerful test, uniformly most powerful test and uniformly most powerful unbiased test were investigated under Negative binomial distribution with r of 1, 2, 3, 4 and 5, and the test size of 0.01 and 0.05.

The result of the most powerful test for $H_0:\theta=\theta_0$ versus $H_1:\theta=\theta_1,\theta_1<\theta_0$ showed that at $\alpha=0.01$ and $\alpha=0.05$ for any θ_1 and $\theta_0=0.5$ when r increased from 1 to 5, γ showed an certain decrease and increase value, while c_1 and $1-\beta$ had an increase. In addition, in the most powerful test for $H_0:\theta=\theta_0$ versus $H_1:\theta=\theta_1,\theta_1>\theta_0$ showed that at $\alpha=0.01$ and $\alpha=0.05$ for any r = 5 and $\theta_0=0.5$ when θ_1 increased from 0.6 to 0.9, γ and c_2 had constant, while $1-\beta$ had an increase. However, when there was an increase of r from 1 to 4, c_2, γ and $1-\beta$ could not be found.

In the uniformly most powerful test for $H_0:\theta=\theta_0$ versus $H_1:\theta<\theta_0$ showed that at $\alpha=0.01$ and $\alpha=0.05$ for any θ_0 when r increased from 1 to 5 and γ showed an uncertain value, while c_1 had an increase. In addition, in the uniformly most powerful test for $H_0:\theta=\theta_0$ versus $H_1:\theta>\theta_0$ showed that at $\alpha=0.01$ and $\alpha=0.05$ for any θ_0 when r increased from 1 to 5, γ and c_2 almost could not be found.

In the uniformly most powerful test for $H_0: \theta \le \theta_1$ or $\theta \ge \theta_2$ versus $H_1: \theta_1 < \theta < \theta_2$, $\theta_1 = 0.25$ and $\theta_2 = 0.75$ for $\alpha = 0.01$ and $\alpha = 0.05$ if r had an increase from 1 to 5 then γ_1, γ_2 showed an uncertain value, while c_1 and c_2 increased.

The result of the uniformly most powerful unbiased test for $H_0: \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ versus $H_1: \theta < \theta_1$ or $\theta > \theta_2$, $\theta_1 = 0.25$ and $\theta_2 = 0.75$ showed that $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ could not be found when $\alpha = 0.01$ and $\alpha = 0.05$ and r = 10. However, when there was an increase of r from 20 to 50, γ_1, γ_2 had uncertain value, and there was an increase for c_1 and c_2.

In addition, the result of the uniformly most powerful unbiased test for $H_0: \theta = \theta_0$ versus $H_1: \theta \ne \theta_0$, $\theta_0 = 0.25$ showed that $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ could be found when $\alpha = 0.01$ and $\alpha = 0.05$ with r = 3.

Keywords : Most powerful test, Uniformly most powerful test, Uniformly most powerful unbiased test and Negative binomial distribution

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี เนื่องจากผู้จัดทำได้รับความช่วยเหลือจากบุคคลผู้มีพระคุณหลายท่าน ดังนี้

ขอขอบพระคุณโครงการวิจัยที่เอื้อเฟื้อทุนสนับสนุนในการวิจัยครั้งนี้ โดยใช้เงินรายได้ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ขอขอบคุณนายศราวุธ สุวรรณอัตถ์ นักศึกษาปริญญาโท ชั้นปีที่ 2 สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่คอยให้ความช่วยเหลือด้านการเขียนโปรแกรม

ขอขอบคุณทุกท่านที่มิได้เอ่ยนามในที่นี้ที่ให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่าง ๆ และคอยเป็นกำลังใจให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

....

อ.บุญญสิทธิ์ วรจันทร์

(หัวหน้าโครงการวิจัย)

....

รศ.สายชล สินสมบูรณ์ทอง

(ผู้ร่วมโครงการวิจัย)

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

หน้า

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ในเรื่องของการอนุมานเชิงสถิตินั้นแบ่งออกเป็น 2 ส่วนสำคัญ ๆ คือ การประมาณค่าพารามิเตอร์และการทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์ จุดประสงค์ในการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติคือ หาข้อสรุปเกี่ยวกับค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงที่ผู้วิจัยสนใจศึกษา ในการดำเนินการทดสอบเมื่อกำหนดขนาดของการทดสอบ (size of the test) α ให้ และขนาดตัวอย่าง n คงที่ ผู้วิจัยจะหาการทดสอบ (test) ที่มีกำลังของการทดสอบ (power of the test) สูงที่สุด อย่างไรก็ตาม การทดสอบมีชื่อเรียกต่างกันไปขึ้นอยู่กับการตั้งสมมติฐานเชิงสถิติที่ต้องการทดสอบ (Mood, A. M., Graybill, F. A. and Boes, D. C. : 1974) มีผู้วิจัยหาการทดสอบแบบต่าง ๆ เช่น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายภายใต้การแจกแจงทวินาม (บรรทม สุระพร : 2541) การแจกแจงปัวส์ซง (รุจิเรข ดีเสียง : 2541) และการแจกแจงเบอร์นูลลี (สายชล สินสมบูรณ์ทอง : 2554) ในงานวิจัยนี้คณะวิจัยมีวัตถุประสงค์ที่จะศึกษาการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ โดยการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายภายใต้การแจกแจงทวินามลบ

คณะผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาถึงการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงทวินามลบ โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด

1.2.2 เพื่อศึกษาการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

1.2.3 เพื่อศึกษาการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

โครงการวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงทวินามลบ โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ใช้จำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดจนกว่าจะประสบความสำเร็จเท่ากับ 1, 2, 3, 4 และ 5 และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.01 และ 0.05 โดยในการวิจัยในครั้งนี้ใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATHLAB version 7.6 ช่วยในการคำนวณ รวมระยะเวลาดำเนินโครงการ 1 ปี

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

1.4.1 ทำให้ทราบถึงการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด

1.4.2 ทำให้ทราบถึงการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

1.4.3 ทำให้ทราบถึงการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

1.5 นิยามคำศัพท์

Most powerful test หมายถึง การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด

Uniformly most powerful test หมายถึง การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

Uniformly most powerful unbiased test หมายถึง การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

Two-sided test หมายถึง การทดสอบสองด้าน

Negative Binomial distribution หมายถึง การแจกแจงทวินามลบ

บทที่ 2

ทฤษฎีและรายงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most Powerful Test) (ประชุม สุวัตถี : 2545)

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ โดยที่ $\theta \in \Omega = \{\theta_0, \theta_1\}$ และต้องการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ โดยที่ C เป็น**บริเวณวิกฤต (Critical region)**

บริเวณวิกฤต C เป็น**บริเวณวิกฤตที่ดีที่สุด (Best critical region : BCR)** ที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ ก็ต่อเมื่อ C มีขนาด α และกำลังของการทดสอบที่ใช้บริเวณวิกฤต C ไม่น้อยกว่ากำลังของการทดสอบที่ใช้บริเวณวิกฤตอื่นใดที่มีขนาด α ด้วยกัน

ถ้า C_1 เป็นบริเวณวิกฤตใด ๆ ที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ คือ ถ้า $P[(X_1,\ldots,X_n) \in C_1 | H_0 : \theta = \theta_0 \text{ เป็นจริง}] = \alpha$ แล้ว C จะเป็นบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุด ที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ

1. $P[(X_1,\ldots,X_n) \in C | H_0 : \theta = \theta_0 \text{ เป็นจริง}] = \alpha$

และ 2. $P[(X_1,\ldots,X_n) \in C | H_1 : \theta = \theta_1 \text{ เป็นจริง}] \ge P[(X_1,\ldots,X_n) \in C_1 | H_1 : \theta = \theta_1 \text{ เป็นจริง}]$

สถิติเพื่อการทดสอบ $T = T(X_1,\ldots,X_n)$ ที่ใช้สำหรับบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุด C ที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ เรียกว่า **การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most powerful test : MP test) ที่มีขนาด** α

ถ้า $\beta_T(\theta)$ เป็นฟังก์ชันกำลังในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$. โดยการใช้สถิติเพื่อการทดสอบ T และถ้า $\beta_{T_1}(\theta)$ เป็นฟังก์ชันกำลังในการทดสอบสมมติฐานเดียวกัน โดยการใช้สถิติเพื่อการทดสอบ T_1 แล้วจะกล่าวว่า T เป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ

1. $\beta_T(\theta_0) = \alpha$

และ 2. $\beta_T(\theta_1) \ge \beta_{T_1}(\theta_1)$ ไม่ว่า T_1 จะเป็นสถิติใด ๆ ที่ $\beta_{T_1}(\theta_0) = \alpha$

2.1.1.1 การทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยว (Simple Hypothesis Test)

ในการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดจะอาศัย**ทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน (Neyman – Pearson Lemma)** ดังนี้ (ประชุม สุวัตถี : 2545)

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ โดยที่ $\theta \in \Omega = \{\theta_0, \theta_1\}$ ให้ α เป็นค่าคงที่ที่ $0<\alpha<1$ ให้ c เป็นจำนวนจริงบวก และ C เป็นเซทย่อยของปริภูมิตัวอย่าง S ที่มีคุณสมบัติ

$$P[(X_1,\ldots,X_n)\in C|\theta=\theta_0 \text{ เป็นจริง}] = \alpha$$

และ

$$\frac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)} \le c \quad \text{เมื่อ} \quad (x_1,\ldots,x_n)\in C$$

$$\frac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)} \ge c \quad \text{เมื่อ} \quad (x_1,\ldots,x_n)\notin C$$

โดยที่ L เป็นฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Likelihood function) ของตัวอย่างสุ่ม แล้ว C จะเป็นบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุดที่มีขนาด α ในการทดสอบ $H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta=\theta_1$

วิธีหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Method of Finding Most Powerful Test)

ในการทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยว $H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับสมมติฐานเชิงเดี่ยว $H_1:\theta=\theta_1$ อาจใช้ทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันหา**บริเวณวิกฤตที่ดีที่สุด (Best critical region : BCR)** หรือหา**การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most powerful test : MP test)** ได้ กล่าวคือบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุดคือ

$$C = \left\{(x_1,\ldots,x_n): \frac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)} \le c\right\}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$P[(X_1,\ldots,X_n)\in C|\theta=\theta_0] = \int_C \cdots \int L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n = \alpha$$

ถ้าฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมของตัวอย่างสุ่ม $X_1,\ldots,X_n$ เป็น**ฟังก์ชันที่มีการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง** ความน่าจะเป็น $P\left[\frac{L(\theta_0;X_1,\ldots,X_n)}{L(\theta_1;X_1,\ldots,X_n)}=c\right]$ อาจมีค่าที่ต่างจาก 0 ได้

ในกรณีเช่นนี้ อาจหาค่าคงที่ c ที่ทำให้ขนาดของการทดสอบเท่ากับ $\alpha-q$ เมื่อ $0<q<p$ เมื่อต้องการหาการทดสอบที่มีขนาด α จะต้องใช้**การทดสอบสุ่ม (Randomized test)**

ดังนั้นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดคือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \dfrac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)} < c \\ \dfrac{q}{p} & \text{เมื่อ } \dfrac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)} = c \\ 0 & \text{เมื่อ } \dfrac{L(\theta_0;x_1,\ldots,x_n)}{L(\theta_1;x_1,\ldots,x_n)} > c \end{cases}$$

โดยที่ $q = \alpha - P\left[\frac{L(\theta_0;X_1,...,X_n)}{L(\theta_1;X_1,...,X_n)} < c\right]$ และ $p = P\left[\frac{L(\theta_0;X_1,...,X_n)}{L(\theta_1;X_1,...,X_n)} = c\right]$

เมื่อ $P\left[\frac{L(\theta_0;X_1,...,X_n)}{L(\theta_1;X_1,...,X_n)} < c\right] < \alpha \le P\left[\frac{L(\theta_0;X_1,...,X_n)}{L(\theta_1;X_1,...,X_n)} \le c\right]$

ขนาดของการทดสอบคือ

$$E[\phi(X_1,...,X_n)|\theta_0] = (1)P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \left(\frac{q}{p}\right)P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right]$$

$$= P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \frac{\alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right]}{P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right]} P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right]$$

$$= P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] = \alpha$$

ทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยายสำหรับการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง

ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ โดยที่ $\theta \in \Omega = \{\theta_0, \theta_1\}$ ในการทดสอบ $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1$ การทดสอบที่กำหนดให้ในรูปของ

$$\phi(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c \\ \gamma & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c \\ 0 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} > c \end{cases}$$

โดยที่ $c > 0$ และ $0 \le \gamma \le 1$ เป็นการทดสอบสุ่มที่มีกำลังสูงสุดในบรรดาการทดสอบสมมติฐานเดียวกันที่มีขนาดไม่เกิน α

การทดสอบจะมีขนาด α ได้โดยการเลือก c และ γ ให้เหมาะสมดังนี้

1. ถ้ามีค่าคงที่ $c > 0$ ที่ทำให้ $P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] = \alpha$ ให้เลือกใช้ c นั้น และให้ $\gamma = 0$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดคือ

$$\phi(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \le c \\ 0 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} > c \end{cases}$$

2. ถ้าไม่มีค่าคงที่ $c > 0$ ใด ๆ ที่มีคุณสมบัติตามข้อ 1. ให้เลือก c ที่ทำให้

$$P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] < \alpha \le P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \le c\right]$$

และให้ $$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right]}{P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right]}$$

ดังนั้น การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดคือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c \\ \gamma & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c \\ 0 & \text{เมื่อ } \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} > c \end{cases}$$

ขนาดของการทดสอบคือ

$$\begin{aligned} E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta_0] &= 1P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \gamma P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right] \\ &= P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \frac{\alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right]}{P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right]} P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} = c\right] \\ &= P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] + \alpha - P\left[\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c\right] \\ &= \alpha \end{aligned}$$

2.1.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly Most Powerful Test)

2.1.2.1 การทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยวเทียบกับสมมติฐานเชิงประกอบ

(Simple Hypothesis Compare with Composite Hypothesis Test)

ในการทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยว H_0 เทียบกับสมมติฐานเชิงประกอบ H_1 บริเวณวิกฤต C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly most powerful critical region) ที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ C เป็นบริเวณวิกฤตที่ดีที่สุดที่มีขนาด α ในการทดสอบ H_0 นั้น เทียบกับสมมติฐานเชิงเดี่ยวใด ๆ ใน H_1 (ประชุม สุวัตถี : 2545)

ในการทดสอบสมมติฐานเชิงเดี่ยว $H_0 : \theta = \theta_0$, $\theta_0 \in \omega$ เทียบกับสมมติฐานเชิงประกอบ $H_1 : \theta \in \Omega - \omega$ เป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly most powerful test : UMP test) ที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อการทดสอบนั้นมีขนาด α และมีฟังก์ชันกำลังมากกว่าฟังก์ชันกำลังของการทดสอบอื่นใดที่มีขนาด α เมื่อ $\theta \in \Omega - \omega$

นั่นคือ $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ เป็นการทดสอบ UMP ที่มีขนาด α ในการทดสอบ $H_0:\theta=\theta_0$, $\theta_0\in\omega$ เทียบกับ $H_1:\theta\in\Omega-\omega$ ก็ต่อเมื่อ

1. $\beta_\phi(\theta_0)=\alpha$

และ 2. $\beta_\phi(\theta)\geq\beta_{\phi'}(\theta)$ ทุก $\theta\in\Omega-\omega$

ไม่ว่า $\phi'(x_1,\ldots,x_n)$ จะเป็นการทดสอบใด ๆ ที่ $\beta_{\phi'}(\theta_0)=\alpha$ ในที่นี้ $\beta_\phi(\theta)$ คือฟังก์ชันกำลังของ ϕ และ $\beta_{\phi'}(\theta)$ คือฟังก์ชันกำลังของ ϕ'

ในการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (ถ้ามี) สำหรับการทดสอบ $H_0:\theta=\theta_0$, $\theta_0\in\omega$ เทียบกับ $H_1:\theta\in\Omega-\omega$ อาจใช้ทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันสำหรับ $H_0:\theta=\theta_0$, $\theta_0\in\omega$ เทียบกับ $H_1:\theta=\theta_1$, $\theta_1\in\Omega-\omega$ เพื่อหาการทดสอบได้ โดยกำหนด θ_1 ขึ้นมา 1 ตัว เช่น $\theta=\theta_1$ แล้วทำการทดสอบดู ถ้าการทดสอบที่หาได้ไม่เปลี่ยนแปลงรูปไปเมื่อเปลี่ยนค่า θ_1 ไป แต่ยังคงอยู่ใน $\Omega-\omega$ แสดงว่าการทดสอบนั้นเป็นการทดสอบ UMP แต่ถ้าการทดสอบเปลี่ยนแปลงรูปไป เมื่อเปลี่ยนค่า θ_1 ไป ก็แสดงว่าการทดสอบนั้นไม่ใช่การทดสอบ UMP ดังนั้นการทดสอบ UMP อาจจะมีหรือไม่มีก็ได้

2.1.2.2 การทดสอบสมมติฐานเชิงประกอบ (Composite Hypothesis Test)

การทดสอบสมมติฐานเชิงประกอบ $H_0:\theta\in\omega,\ \omega\subset\Omega$ เป็นการทดสอบที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ

$$\sup_{\theta\in\omega} P[\text{ปฏิเสธ } H_0 | H_0 \text{ เป็นจริง}] = \alpha$$

นั่นคือ
$$\alpha = \sup_{\theta\in\omega}\beta(\theta)$$

เมื่อ $\beta(\theta)$ คือ ฟังก์ชันกำลัง (ประชุม สุวัตถี : 2545)

การทดสอบ $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ สำหรับ $H_0:\theta\in\omega$ เทียบกับ $H_1:\theta\in\Omega-\omega$ เป็น **การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly most powerful test : UMP test)** ที่มีขนาด α ก็ต่อเมื่อ

$$\sup_{\theta\in\omega}\beta_\phi(\theta) = \alpha$$

และ
$$\beta_\phi(\theta) \geq \beta_{\phi^*}(\theta)$$

ทุกค่า $\theta\in\Omega-\omega$

ไม่ว่า ϕ^* จะเป็นฟังก์ชันวิกฤตใด ๆ ที่มีขนาดไม่เกิน α กล่าวคือ

$$\sup_{\theta\in\omega}\beta_{\phi^*}(\theta) \leq \alpha$$

โดยที่ $\beta_\phi(\theta)$ เป็นฟังก์ชันกำลังของ ϕ และ $\beta_{\phi^*}(\theta)$ เป็นฟังก์ชันกำลังของ ϕ^*

การแจกแจงที่มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบเพิ่มอย่างเดียวหรือแบบลดอย่างเดียว (Distribution of monotone increasing or decreasing likelihood ratio)

วงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta):\theta\in\Omega\}$ โดยที่ Ω เป็นช่วงจำนวนจริง **มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบเพิ่มอย่างเดียว (Monotone increasing likelihood ratio)** ก็ต่อเมื่อมีสถิติ $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ ที่ทำให้อัตราส่วน $L(\theta_0;X_1,\ldots,X_n)/L(\theta_1;X_1,\ldots,X_n)$ เป็น**ฟังก์ชันไม่ลด (Nondecreasing function)** ของ $T(X_1,\ldots,X_n)$ สำหรับทุกค่าพารามิเตอร์ $\theta_0<\theta_1$

(ประชุม สุวัตถี : 2545)

วงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta):\theta\in\Omega\}$ โดยที่ Ω เป็นช่วงจำนวนจริง มี**อัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบลดอย่างเดียว (Monotone decreasing likelihood ratio)** ก็ต่อเมื่อมีสถิติ $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ ที่ทำให้อัตราส่วน $L(\theta_0;X_1,\ldots,X_n)/L(\theta_1;X_1,\ldots,X_n)$ เป็น**ฟังก์ชันไม่เพิ่ม (Nonincreasing function)** ของ $T(X_1,\ldots,X_n)$ สำหรับทุกค่าพารามิเตอร์ $\theta_0<\theta_1$

ถ้า $X_1,\ldots,X_n$ มีการแจกแจงที่มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็น เราอาจใช้หาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายได้ดังนี้

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ และวงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta):\theta\in\Omega\}$ **มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบไม่ลดอย่างเดียว (Monotone nondecreasing likelihood ratio)** ของสถิติ $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ ให้ C เป็นบริเวณวิกฤตที่ได้จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน ในการ**ทดสอบ** $H_0:\theta=\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta=\theta_1$, $\theta_1>\theta_0$ หรือ $H_0:\theta\le\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta>\theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$C = \{(x_1,\ldots,x_n):T(x_1,\ldots,x_n)\le c\}$$

หรือมีการทดสอบ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases}1 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n)<c\\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n)=c\\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n)>c\end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c>0,\ 0\le\gamma\le1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta=\theta_0]=\alpha$ แล้ว

1. ฟังก์ชันกำลังของ C เป็นฟังก์ชันเพิ่มของ θ
2. C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ในการ**ทดสอบ** $H_0:\theta=\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta>\theta_0$
3. C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ในการ**ทดสอบ** $H_0:\theta\le\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta>\theta_0$

ถ้าให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ และวงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta):\theta\in\Omega\}$ **มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบ<u>ไม่เพิ่ม</u>อย่างเดียว (Monotone nonincreasing likelihood ratio)** ของสถิติ $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ ให้ C เป็นบริเวณวิกฤตที่ได้จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน ในการ**ทดสอบ** $H_0:\theta=\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta=\theta_1$, $\theta_1>\theta_0$ หรือ $H_0:\theta\le\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta>\theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$C = \{(x_1,\ldots,x_n):T(x_1,\ldots,x_n)\ge c\}$$

หรือมีการทดสอบ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases}1 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n)>c\\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n)=c\\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n)<c\end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c>0,\ 0\le\gamma\le1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta=\theta_0]=\alpha$ แล้ว

1. ฟังก์ชันกำลังของ C เป็นฟังก์ชันเพิ่มของ θ
2. C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ในการ**ทดสอบ** $H_0:\theta=\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta>\theta_0$
3. C เป็นบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ในการ**ทดสอบ** $H_0:\theta\le\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta>\theta_0$

ถ้าให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ และวงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta):\theta\in\Omega\}$ **มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบ<u>ไม่ลด</u>อย่างเดียว (Monotone nondecreasing likelihood ratio)** ของสถิติ $T=T(X_1,\ldots,X_n)$ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0:\theta=\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta<\theta_0$ **หรือ** $H_0:\theta\ge\theta_0$ **เทียบกับ** $H_1:\theta<\theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases}1 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n)>c\\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n)=c\\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,\ldots,x_n)<c\end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c>0,\ 0\le\gamma\le1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta=\theta_0]=\alpha$ หรือบริเวณวิกฤตที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายคือ

$$C = \{(x_1,\ldots,x_n):T(x_1,\ldots,x_n)\ge c\}$$

และถ้าให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta)$ และในทำนองเดียวกัน วงศ์ของฟังก์ชันความหนาแน่น $\{f(x;\theta):\theta\in\Omega\}$ **มีอัตราส่วนภาวะน่าจะเป็นแบบ<u>ไม่เพิ่ม</u>อย่างเดียว (Monotone nonincreasing likelihood ratio)** ของสถิติ

$T = T(X_1,...,X_n)$ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ **หรือ** $H_0 : \theta \geq \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n) < c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n) > c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c > 0,\ 0 \leq \gamma \leq 1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้ $E[\phi(X_1,...,X_n)|\theta = \theta_0] = \alpha$ หรือบริเวณวิกฤต ที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายคือ

$$C = \{(x_1,...,x_n) : T(x_1,...,x_n) \leq c\}$$

การแจกแจงในวงศ์ชี้กำลัง (Distribution of Exponential Family)

ถ้า $X_1,...,X_n$ มีการแจกแจงในวงศ์ชี้กำลัง เราอาจใช้หาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ได้ดังนี้ (ประชุม สุวัตถี : 2545)

ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta), \theta \in \Omega$ ซึ่งเป็นสมาชิกใน**วงศ์ชี้กำลัง (Exponential family)** สามารถเขียนได้ในรูป

$$f(x;\theta) = c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

และให้ $$T = T(X_1,...,X_n) = \sum_{i=1}^{n} q(X_i)$$

1. ถ้า $p(\theta)$ **เป็นฟังก์ชัน<u>เพิ่ม</u>อย่างเดียว**ของ θ แล้ว จะมีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0 : \theta \leq \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta > \theta_0$ **หรือทดสอบ** $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta > \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\phi(x_1,...,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n) > c \\ \gamma & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ } T(x_1,...,x_n) < c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c > 0\ ,\ 0 \leq \gamma \leq 1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$\begin{aligned} E[\phi(X_1,...,X_n)|\theta = \theta_0] &= P[T(X_1,...X_n) > c|\theta = \theta_0] + \gamma P[T(X_1,...X_n) = c|\theta = \theta_0] \\ &= \alpha \end{aligned}$$

และกำลังของการทดสอบ $= 1 - \beta = P[T(X_1,...X_n) > c|\theta > \theta_0] + \gamma P[T(X_1,...X_n) = c|\theta > \theta_0]$

2. ถ้า $p(\theta)$ **เป็นฟังก์ชัน<u>ลด</u>อย่างเดียวของ** θ แล้ว จะมีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0 : \theta \leq \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta > \theta_0$ **หรือทดสอบ** $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta > \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) < c \\ \gamma & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) > c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c > 0 , 0 \le \gamma \le 1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$E[\phi(X_1,\ldots, X_n)|\theta = \theta_0] \quad = \quad P[T(X_1,\ldots X_n) < c|\theta=\theta_0] + \gamma P[T(X_1,\ldots X_n) = c|\theta=\theta_0]$$

$$= \quad \alpha$$

และกำลังของการทดสอบ $= 1-\beta = P[T(X_1,\ldots X_n) < c|\theta > \theta_0] + \gamma P[T(X_1,\ldots X_n) = c|\theta > \theta_0]$

ถ้าให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta), \theta \in \Omega$ ซึ่งเป็นสมาชิกในวงศ์ชี้กำลัง สามารถเขียนได้ในรูป

$$f(x;\theta) \quad = \quad c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

และให้ $T = T(X_1,\ldots,X_n) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} q(X_i)$

1. ถ้า $p(\theta)$ **เป็นฟังก์ชันเพิ่มอย่างเดียวของ** θ แล้ว จะมีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0 : \theta \ge \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ **หรือทดสอบ** $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) < c \\ \gamma & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) > c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c > 0 , 0 \le \gamma \le 1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$E[\phi(X_1,\ldots, X_n)|\theta = \theta_0] \quad = \quad P[T(X_1,\ldots X_n) < c|\theta=\theta_0] + \gamma P[T(X_1,\ldots X_n) = c|\theta=\theta_0]$$

$$= \quad \alpha$$

และกำลังของการทดสอบ $= 1-\beta = P[T(X_1,\ldots X_n) < c|\theta < \theta_0] + \gamma P[T(X_1,\ldots X_n) = c|\theta < \theta_0]$

2. ถ้า $p(\theta)$ **เป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียวของ** θ แล้ว จะมีการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α สำหรับ**ทดสอบ** $H_0 : \theta \ge \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ **หรือทดสอบ** $H_0 : \theta = \theta_0$ **เทียบกับ** $H_1 : \theta < \theta_0$ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) > c \\ \gamma & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) = c \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) < c \end{cases}$$

โดยที่ c และ γ $(c > 0 , 0 \le \gamma \le 1)$ เป็นค่าคงที่ที่ทำให้

$$E[\phi(X_1,\ldots, X_n)|\theta = \theta_0] \quad = \quad P[T(X_1,\ldots X_n) > c|\theta=\theta_0] + \gamma P[T(X_1,\ldots X_n) = c|\theta=\theta_0]$$

$$= \quad \alpha$$

และกำลังของการทดสอบ $= 1-\beta = P[T(X_1,\ldots X_n) > c|\theta < \theta_0] + \gamma P[T(X_1,\ldots X_n) = c|\theta < \theta_0]$

2.1.2.3 การทดสอบสมมติฐานสองด้าน (Two-sided Test)

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta),\ \theta\in\Omega$ อยู่ในวงศ์ ชี้กำลัง คือสามารถเขียนได้ในรูป (Lehmann, E. L. : 1986)

$$f(x;\theta) = c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

โดยที่ $\theta\in\Omega$ ในการทดสอบ $H_0:\theta\le\theta_1$ หรือ $\theta\ge\theta_2$ เทียบกับ $H_1:\theta_1<\theta<\theta_2$ จะมี**การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (UMP test)** ขนาด α ในรูป

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad c_1<T(x_1,\ldots,x_n)<c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n)=c_i, i=1,2 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n)<c_1 \text{ หรือ } >c_2 \end{cases}$$

โดยที่ c_1, c_2, γ_1, γ_2 หาได้จาก

$$E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta=\theta_1] = E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta=\theta_2] = \alpha$$

2.1.3 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

(Uniformly Most Powerful Unbiased Test : UMP Unbiased Test)

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta),\ \theta\in\Omega$ อยู่ในวงศ์ชี้กำลัง คือสามารถเขียนได้ในรูป (Lehmann, E. L. : 1986)

$$f(x;\theta) = c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

โดยที่ $\theta\in\Omega$ ในการทดสอบ $H_0:\theta_1\le\theta\le\theta_2$ เทียบกับ $H_1:\theta<\theta_1$ หรือ $\theta>\theta_2$ จะมี**การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (UMP unbiased test)** ขนาด α ในรูป

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n)<c_1 \text{ หรือ } >c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n)=c_i, i=1,2 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad c_1<T(x_1,\ldots,x_n)<c_2 \end{cases}$$

โดยที่ c_1, c_2, γ_1, γ_2 หาได้จาก

$$E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta=\theta_1] = E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta=\theta_2] = \alpha$$

ถ้าให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f(x;\theta),\ \theta\in\Omega$ อยู่ในวงศ์ชี้กำลัง คือสามารถเขียนได้ในรูป (Lehmann, E. L. : 1986)

$$f(x;\theta) = c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

โดยที่ $\theta\in\Omega$ ในการทดสอบ $H_0:\theta\neq\theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta\neq\theta_0$ จะมี**การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (UMP unbiased test)** ขนาด α ในรูป

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) < c_1 \ \text{หรือ} > c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ} \quad T(x_1,\ldots,x_n) = c_i, i = 1,2 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad c_1 < T(x_1,\ldots,x_n) < c_2 \end{cases}$$

โดยที่ c_1, c_2, γ_1, γ_2 หาได้จาก

$$E\left[\phi(X_1,\ldots,X_n) \middle| \theta = \theta_0\right] \quad = \quad \alpha$$

และ
$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\phi(X_1,\ldots,X_n) \middle| \theta = \theta_0\right] \quad = \quad \alpha E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| \theta = \theta_0\right]$$

2.2 รายงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บรรทม สุระพร (2541) ศึกษาการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงทวินาม โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.7$ เทียบกับ $H_1 : \theta = 0.3$ ขนาดตัวอย่างที่ใช้ n = 10, 20, 30, 40 และ 50 พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าลดลงจนถึง $n = 30$ หลังจากนั้น ค่าจะเพิ่มขึ้น ส่วนค่าวิกฤต C จะมีค่าเพิ่มขึ้น โดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 50$ และค่าวิกฤต C จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด

การหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.3$ เทียบกับ $H_1 : \theta > 0.3$ พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าลดลงจนถึง $n = 30$ หลังจากนั้นค่าจะเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต C จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 50$ และค่าวิกฤต C จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.3$ หรือ $\theta \ge 0.7$ เทียบกับ $H_1 : 0.3 < \theta < 0.7$ พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น ยกเว้นที่ $n = 10, 20, 30$ จะไม่สามารถหาค่าได้ ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C(\gamma)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น ยกเว้นที่ $n = 50$ และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 10$ จะไม่สามารถหาค่าได้

การหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.3 \le \theta \le 0.7$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.3$ หรือ $\theta > 0.7$ เมื่อขนาดของการ

ทดสอบ $\alpha = 0.01, 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C_1(\gamma_1)$ จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นแล้วลดลงอีก และ $X = C_2(\gamma_2)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอดและการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.3$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.3$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C_1(\gamma_1)$ และ $X = C_2(\gamma_2)$ จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธ H_0 เมื่อ $X = C_1(\gamma_1)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลงแล้วเพิ่มขึ้นอีก และ $X = C_2(\gamma_2)$ จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 10$ จะไม่สามารถหาค่าได้

รุจิเรข ดีเสียง (2541) ศึกษาการทดสอบสมมติฐานทางสถิติสองด้านภายใต้การแจกแจงปัวส์ซง โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \leq 0.2$ หรือ $\theta \geq 0.75$ เทียบกับ $H_1 : 0.2 < \theta < 0.75$ ขนาดตัวอย่างที่ใช้ n = 20, 30, 40 และ 50 พบว่าเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และ γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 20$ จะไม่สามารถหาค่าได้ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด และ γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ยกเว้นที่ $n = 50$ จะไม่สามารถหาค่าได้

การหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.25 \leq \theta \leq 0.3$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.25$ หรือ $\theta > 0.3$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลง และ γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้น และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าลดลง ยกเว้นที่ n = 20 และ 50 จะไม่สารถหาค่าได้

และการหาการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายสำหรับทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.5$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.5$ เมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.01$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้นแล้วลดลงแล้วเพิ่มขึ้นอีก ค่า γ_2 จะมีค่าลดลงแล้วเพิ่มขึ้นแล้วลดลงอีก และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอด ส่วนเมื่อขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และขนาดตัวอย่าง n มีค่าเพิ่มขึ้น ค่า γ_1, γ_2 จะมีค่าลดลงโดยตลอด และค่าวิกฤต C_1, C_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นโดยตลอดเช่นเดียวกัน

สายชล สินสมบูรณ์ทอง (2554) ศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงเบอร์นูลลี โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และ การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย ใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 และ 50 และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.05

ผลการศึกษาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta<\theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha=0.05$ สำหรับค่า n ใด ๆ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.9 ค่า γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงสลับกันไป ค่า c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta\le\theta_1$ หรือ $\theta\ge\theta_2$ เทียบกับ $H_1:\theta_1<\theta<\theta_2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha=0.05$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า γ_1, γ_2 มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น ในขณะที่ c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

ส่วนในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta_1\le\theta\le\theta_2$ เทียบกับ $H_1:\theta<\theta_1$ หรือ $\theta>\theta_2$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha=0.05$ ค่า n = 5 และ 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1,c_2,\gamma_1,\gamma_2$ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า γ_1, γ_2 มีแนวโน้มลดลง ในขณะที่ c_1 และ c_2 มีค่าเพิ่มขึ้น

และในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta\ne\theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha=0.05$ ค่า n = 5 และ 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1,c_2,\gamma_1,\gamma_2$ ได้ ถ้า n มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 5 ถึง 50 ค่า γ_1, γ_2 มีแนวโน้มลดลง ในขณะที่ c_1 และ c_2 มีค่าเพิ่มขึ้น

บทที่ 3
วิธีการดำเนินงาน

3.1 อุปกรณ์ในการวิจัย

3.1.1 อุปกรณ์ที่มีอยู่แล้ว

1) เครื่องคอมพิวเตอร์

2) เครื่องพิมพ์เลเซอร์

3) โปรแกรมสำเร็จรูป MATHLAB version 7.6

3.1.2 อุปกรณ์ที่ต้องการเพิ่ม

-

3.2 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

โครงการวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงทวินามลบ โดยทำการศึกษาในเรื่องต่อไปนี้

1. การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด
2. การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย
3. การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

วิธีการดำเนินงานกระทำได้ดังนี้

โครงการวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาเรื่องการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ ภายใต้การแจกแจงทวินามลบ โดยหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย โดยมีวิธีในการดำเนินงานดังนี้

1) สมมติฐานที่สนใจทดสอบ

1.1 $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$

$H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$

1.2 $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$

$H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

1.3 $H_0 : \theta \ge \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$

$H_0 : \theta \le \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

1.4 $H_0 : \theta \le \theta_1$ หรือ $\theta \ge \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$

1.5 $H_0 : \theta_1 \le \theta \le \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$

1.6 $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta \ne \theta_0$

2) จำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดจนกว่าจะประสบความสำเร็จและขนาดการทดสอบ

สำหรับการวิจัยในครั้งนี้ จะพิจารณาการทดสอบสมมติฐานเชิงสถิติ เมื่อจำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดจนกว่าจะประสบความสำเร็จ (r) เท่ากับ 1, 2, 3, 4 และ 5 และขนาดของการทดสอบเท่ากับ 0.01 และ 0.05

3) เขียนโปรแกรม

เขียนโปรแกรมโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATHLAB version 7.6 ช่วยในการหาการทดสอบที่มีกำลังสูงสุด การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย และการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

3.3 โปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

3.3.1 โปรแกรม MATHLAB version 7.6

บทที่ 4
ผลการวิจัยและอภิปรายผล

4.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุด (Most Powerful Test)

ให้ $X_1,\ldots,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงทวินามลบโดยมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$f(x;r,\theta) = \begin{cases} \binom{x-1}{r-1}\theta^r(1-\theta)^{x-r} & ; \quad x = r, r+1, r+2, \ldots \\ 0 & ; \quad \text{กรณีอื่น} \end{cases}$$

โดยที่ X คือ ตัวแปรสุ่มของจำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดจนกว่าจะประสบความสำเร็จครบ r ครั้ง

และ θ คือ ความน่าจะเป็นที่จะประสบความสำเร็จของการทดลองสุ่มแต่ละครั้ง

4.1.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$

ในที่นี้
$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; r_i, \theta)$$
$$= \prod_{i=1}^{n}\binom{x_i-1}{r_i-1}\theta^{r_i}(1-\theta)^{x_i-r_i}$$
$$= \prod_{i=1}^{n}\binom{x_i-1}{r_i-1}\theta^{\sum_{i=1}^{n} r_i}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i-\sum_{i=1}^{n} r_i}$$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c$$

จะได้
$$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} r_i}(1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} x_i-\sum_{i=1}^{n} r_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} r_i}(1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^{n} x_i-\sum_{i=1}^{n} r_i}} < c$$

$$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} r_i}(1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^{n} r_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} r_i}(1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} r_i}} < c$$

$$\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} < c$$

$$\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} < c\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}$$

ใส่ ln ทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) < \ln c\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}$$

แต่ $\theta_1 < \theta_0$ จะได้ $1-\theta_0 < 1-\theta_1$ และ $\ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) < 0$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} x_i > \frac{\ln c\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}}{\ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)} = c_1$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i > c_1 \\ \gamma & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = c_1 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < c_1 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น r_i และ θ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} r_i$ และ θ

ดังนั้น c_1 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] \le \alpha$

และ $$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right]}$$

เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] < \alpha,$ $\quad P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 - 1 | \theta = \theta_0\right] > \alpha$

และ $\gamma = 0$ เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] = \alpha$

กำลังของการทดสอบ (Power of the test)

$$\begin{aligned} 1-\beta &= E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i | \theta = \theta_1\right] \\ &= P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 | \theta = \theta_1\right] + \gamma P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 | \theta = \theta_1\right] \end{aligned}$$

ในกรณีที่ $r = 1$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบ คือ $\theta_0 = 0.50$ และ $\theta_1 = 0.25$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ มีการแจกแจงทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า c_1 และ γ ได้จากสมการ

$$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 \middle| \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_0\right]}$$

$$= \frac{0.05 - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 \middle| \theta = 0.50\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = 0.50\right]} \qquad \text{..... (1)}$$

และหาค่ากำลังของการทดสอบ (Power of the test) ได้จากสมการ

$$1 - \beta = P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 \middle| \theta = 0.25\right] + \gamma P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = 0.25\right] \qquad \text{..... (2)}$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (1) พบว่า $c_1 = 4$ โดยที่

$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > 4 \middle| \theta = 0.50\right] = 0.03125$, $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 4 \middle| \theta = 0.50\right] = 0.03125$

$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > 4 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.2373046875$, $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 4 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0791015625$

แทนค่าลงในสมการ (1) และ (2) จะได้

$$\gamma = \frac{0.05 - 0.03125}{0.03125}$$

$$= 0.6$$

และ

$$1 - \beta = 0.2373046875 + 0.6(0.0791015625)$$

$$= 0.284765625$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.50$ เทียบกับ $H_1 : \theta = 0.25,\ \theta_1 < \theta_0$ เมื่อ $r = 1$ คือ

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i > 4 \\ 0.60 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 4 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 4 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.1 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ ค่าวิกฤต c_1 และกำลังของการทดสอบ $1-\beta$ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0{:}\theta=\theta_0$ เทียบกับ $H_1{:}\theta=\theta_1, \theta_1<\theta_0$

α	r	θ_0	θ_1	γ	c_1	$1-\beta$
0.01	1	0.5	0.1	0.2800000000	6	0.4931772480
			0.2	0.2800000000	6	0.2243952640
			0.3	0.2800000000	6	0.0922368160
			0.4	0.2800000000	6	0.0332190720
	2	0.5	0.1	0.8480000000	9	0.7302101377
			0.2	0.8480000000	9	0.3676492005
			0.3	0.8480000000	9	0.1437879725
			0.4	0.8480000000	9	0.0439065059
	3	0.5	0.1	0.7415384615	11	0.8597908236
			0.2	0.7415384615	11	0.4877983337
			0.3	0.7415384615	11	0.1917152736
			0.4	0.7415384615	11	0.0532214574
	4	0.5	0.1	0.8512857143	13	0.9294769602
			0.2	0.8512857143	13	0.5908089392
			0.3	0.8512857143	13	0.2393200413
			0.4	0.8512857143	13	0.0623622436
	5	0.5	0.1	0.0676078431	14	0.9652791201
			0.2	0.0676078431	14	0.6761997215
			0.3	0.0676078431	14	0.2856330937
			0.4	0.0676078431	14	0.0712738147

ตารางที่ 4.1 (ต่อ)

α	r	θ_0	θ_1	γ	c_1	$1-\beta$
0.05	1	0.5	0.1	0.6000000000	4	0.6298560000
			0.2	0.6000000000	4	0.3768320000
			0.3	0.6000000000	4	0.2112880000
			0.4	0.6000000000	4	0.1088640000
	2	0.5	0.1	0.5428571429	6	0.8332994880
			0.2	0.5428571429	6	0.5431623680
			0.3	0.5428571429	6	0.2955342880
			0.4	0.5428571429	6	0.1347425280
	3	0.5	0.1	0.7866666667	8	0.9256766884
			0.2	0.7866666667	8	0.6649146245
			0.3	0.7866666667	8	0.3678404222
			0.4	0.7866666667	8	0.1569701929
	4	0.5	0.1	0.1436363636	9	0.9670635278
			0.2	0.1436363636	9	0.7541103578
			0.3	0.1436363636	9	0.4309345550
			0.4	0.1436363636	9	0.1767321516
	5	0.5	0.1	0.5566300366	11	0.9853803346
			0.2	0.5566300366	11	0.8191306651
			0.3	0.5566300366	11	0.4864117803
			0.4	0.5566300366	11	0.1947942724

จากตารางที่ 4.1 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r ใด ๆ ที่ $\theta_0 = 0.5$ ถ้า θ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.4 แล้ว γ และ c_1 จะมีค่าคงที่ แต่ $1-\beta$ จะมีค่าลดลง และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_1 ใด ๆ ที่ $\theta_0 = 0.5$ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว γ จะมีค่าลดลงและเพิ่มขึ้น สลับกันไปเรื่อย ๆ ส่วน c_1 และ $1-\beta$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น

นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r, θ_0 และ θ_1 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ จะมีค่า $1-\beta$ มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$

4.1.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$

จากหัวข้อที่ 4.1.1

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) < \ln c\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}$$

แต่ $\theta_1 > \theta_0$ จะได้ $1-\theta_0 > 1-\theta_1$ และ $\ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) > 0$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} x_i < \frac{\ln c\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}}{\ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)} = c_2$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < c_2 \\ \gamma & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = c_2 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i > c_2 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น r_i และ θ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} r_i$ และ θ

ดังนั้น c_2 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] \le \alpha$

และ
$$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]}$$

เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] < \alpha$, $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 + 1 \middle| \theta = \theta_0\right] > \alpha$

และ $\gamma = 0$ เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] = \alpha$

กำลังของการทดสอบ (Power of the test)

$$\begin{aligned} 1-\beta &= E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| \theta = \theta_1\right] \\ &= P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_1\right] + \gamma P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_1\right] \end{aligned}$$

ในกรณีที่ $r = 5$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบ คือ $\theta_0 = 0.50$ และ $\theta_1 = 0.75$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ มีการแจกแจงทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า c_2 และ γ ได้จากสมการ

$$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]}$$

$$= \frac{0.05 - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = 0.50\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = 0.50\right]} \qquad \text{..... (3)}$$

และหาค่ากำลังของการทดสอบ (Power of the test) ได้จากสมการ

$$1 - \beta = P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = 0.75\right] + \gamma P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = 0.75\right] \text{..... (4)}$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (3) พบว่า $c_2 = 1$ โดยที่

$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < 1 \middle| \theta = 0.50\right] = 0.03125$, $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \middle| \theta = 0.50\right] = 0.078125$

$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < 1 \middle| \theta = 0.75\right] = 0.2373046875$, $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 1 \middle| \theta = 0.75\right] = 0.2966308594$

แทนค่าลงในสมการ (3) และ (4) จะได้

$$\gamma = \frac{0.05 - 0.03125}{0.078125}$$

$$= 0.24$$

และ

$$1 - \beta = 0.2373046875 + 0.24(0.2966308594)$$

$$= 0.3084960938$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.50$ เทียบกับ $H_1 : \theta = 0.75,\ \theta_1 > \theta_0$ เมื่อ $r = 1$ คือ

$$\phi(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 1 \\ 0.3084960938 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i > 1 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.2 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ ค่าวิกฤต c_2 และกำลังของการทดสอบ $1-\beta$ สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta=\theta_1, \theta_1>\theta_0$

α	r	θ_0	θ_1	γ	c_2	$1-\beta$
0.05	1	0.5	0.6	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.8	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	2	0.5	0.6	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.8	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	3	0.5	0.6	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.8	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	4	0.5	0.6	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.8	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
			0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	5	0.5	0.6	0.24	1	0.1150848
			0.7	0.24	1	0.2285752
			0.8	0.24	1	0.4063232
			0.9	0.24	1	0.6613488

จากตารางที่ 4.2 จะพบว่าเมื่อ $\alpha=0.05$ สำหรับค่า $r=5$ และ $\theta_0=0.5$ ถ้า θ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.6 ถึง 0.9 แล้ว γ และ c_2 จะมีค่าคงที่ แต่ $1-\beta$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนค่า $r=1$ ถึง 4 จะไม่สามารถหาค่า c_2, γ และ $1-\beta$ ได้ และเมื่อ $\alpha=0.01$ สำหรับค่า $r=1$ ถึง 5 และ $\theta_0=0.5$ จะไม่สามารถหาค่า c_2, γ และ $1-\beta$ ได้เช่นเดียวกัน

4.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย (Uniformly Most Powerful Test)

ในการหาการทดสอบสำหรับสมมติฐานต่าง ๆ ถ้าสามารถหาการทดสอบที่สามารถนำไปใช้กับสมมติฐานที่สอดคล้องกัน โดยที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่จะทดสอบไปเรื่อย ๆ แล้วไม่ได้ทำให้การทดสอบเปลี่ยนแปลงไป แต่ยังคงเหมือนเดิม สามารถใช้การทดสอบนั้นได้เสมอ ซึ่งเป็นการทดสอบที่ดีมาก กล่าวคือการทดสอบที่มีรูปแบบเดียว (Uniform) และสามารถใช้ทดสอบสมมติฐานที่เปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ที่สอดคล้องกัน แบ่งออกเป็น 2 กรณี

4.2.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน

$H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta<\theta_0$

พิจารณา $H_0:\theta=\theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta=\theta_1, \theta_1<\theta_0$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c$$

จะได้

$$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} r_i}(1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} x_i-\sum_{i=1}^{n} r_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} r_i}(1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^{n} x_i-\sum_{i=1}^{n} r_i}} < c$$

$$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} r_i}(1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^{n} r_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} r_i}(1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} r_i}} < c$$

$$\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} < c$$

$$\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} < c\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}$$

ใส่ ln ทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) < \ln c\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}$$

แต่ $\theta_1<\theta_0$ จะได้ $1-\theta_0<1-\theta_1$ และ $\ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)<0$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \quad > \quad \frac{\ln c\left[\dfrac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}}{\ln\left(\dfrac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)} \quad = \quad c_1$$

อสมการนี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\theta_1 < \theta_0$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i > c_1 \\ \gamma & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = c_1 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < c_1 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น r_i และ θ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} r_i$ และ θ

ดังนั้น c_1 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] \leq \alpha$

และ
$$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right]}$$

เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] < \alpha, \quad P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 - 1 | \theta = \theta_0\right] > \alpha$

และ $\gamma = 0$ เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right] = \alpha$

ในกรณีที่ $r = 1$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบ คือ $\theta_0 = 0.50$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ มีการแจกแจงทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า c_1 และ γ ได้จากสมการ

$$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 | \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 | \theta = \theta_0\right]}$$

$$= \frac{0.05 - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 | \theta = 0.50\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 | \theta = 0.50\right]} \qquad \ldots\ldots (5)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (5) พบว่า $c_1 = 4$ โดยที่ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > 4 \middle| \theta = 0.5\right] = 0.03125$, $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 4 \middle| \theta = 0.5\right] = 0.03125$

แทนค่าลงในสมการ (5) จะได้

$$\gamma = \frac{0.05 - 0.03125}{0.03125} = 0.60$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.5$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.5$ เมื่อ $r = 1$ คือ

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i > 4 \\ 0.6 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 4 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 4 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.3 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ และค่าวิกฤต c_1 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$

α	r	θ_0	γ	c_1
0.01	1	0.1	0.2805153659	43
		0.3	0.0749205270	12
		0.5	0.2800000000	6
		0.7	0.1005291005	3
		0.9	0.0000000000	1
	2	0.1	0.4763832594	62
		0.3	0.8485064434	18
		0.5	0.8480000000	9
		0.7	0.8691246046	5
		0.9	0.2592592593	2
	3	0.1	0.1978686679	78
		0.3	0.3567657209	22
		0.5	0.7415384616	11
		0.7	0.8154332700	6
		0.9	0.0329218107	2
	4	0.1	0.1354409266	93
		0.3	0.2459762325	26
		0.5	0.8512857143	13
		0.7	0.9060369666	7
		0.9	0.5541838134	3
	5	0.1	0.8264079197	108
		0.3	0.3473166253	30
		0.5	0.0676078431	14
		0.7	0.0420971255	7
		0.9	0.2407516276	3

ตารางที่ 4.3 (ต่อ)

α	r	θ_0	γ	c_1
0.05	1	0.1	0.5538790749	28
		0.3	0.5577754260	8
		0.5	0.6000000000	4
		0.7	0.3650793651	2
		0.9	0.4444444444	1
	2	0.1	0.4574263769	44
		0.3	0.1558810175	12
		0.5	0.5428571429	6
		0.7	0.3631897203	3
		0.9	0.1358024691	1
	3	0.1	0.2245386589	58
		0.3	0.2750708653	16
		0.5	0.7866666667	8
		0.7	0.5088123433	4
		0.9	0.9474165524	2
	4	0.1	0.8833883009	72
		0.3	0.6641859918	20
		0.5	0.1436363636	9
		0.7	0.7561381930	5
		0.9	0.5204999238	2
	5	0.1	0.0903841969	84
		0.3	0.2204548944	23
		0.5	0.5566300366	11
		0.7	0.0515163130	5
		0.9	0.2744443880	2

จากตารางที่ 4.3 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r ใด ๆ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.9 แล้ว γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 จะมีค่าลดลง และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_0 ใด ๆ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r และ θ_0 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ จะมีค่า c_1 มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$

4.2.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน

$H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

พิจารณา $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$

จากหัวข้อที่ 4.2.1

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) \quad < \quad \ln c\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}$$

แต่ $\theta_1 > \theta_0$ จะได้ $1-\theta_0 > 1-\theta_1$ และ $\ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) > 0$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \quad < \quad \frac{\ln c\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}}{\ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)} \quad = \quad c_2$$

อสมการนี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\theta_1 > \theta_0$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 > \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < c_2 \\ \gamma & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = c_2 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i > c_2 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น r_i และ θ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} r_i$ และ θ

ดังนั้น c_1 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] \le \alpha$

และ $\gamma = \dfrac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]}$

เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] < \alpha$, $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 + 1 \middle| \theta = \theta_0\right] > \alpha$

และ $\gamma = 0$ เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] = \alpha$

ในกรณีที่ $r = 2$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบ คือ $\theta_0 = 0.1$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ มีการแจกแจงทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า c_2 และ γ ได้จากสมการ

$$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]}$$

$$= \frac{0.05 - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = 0.10\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = 0.10\right]} \quad \text{..... (6)}$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (6) พบว่า $c_2 = 2$ โดยที่ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < 2 \middle| \theta = 0.10\right] = 0.028$, $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 2 \middle| \theta = 0.10\right] = 0.0243$

แทนค่าลงในสมการ (6) จะได้

$$\gamma = \frac{0.05 - 0.028}{0.0243}$$

$$= 0.9053497942$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.10$ เทียบกับ $H_1 : \theta > 0.10$ เมื่อ $r = 2$ คือ

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 2 \\ 0.9053497942 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i > 2 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.4 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ และค่าวิกฤต c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

α	r	θ_0	γ	c_2
0.01	1	0.1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.3	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	2	0.1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.3	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	3	0.1	0.1975308642	3
		0.3	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	4	0.1	0.3738501277	6
		0.3	0.0837742504	1
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	5	0.1	0.2205523592	10
		0.3	0.8900646678	1
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้

ตารางที่ 4.4 (ต่อ)

α	r	θ_0	γ	c_2
0.05	1	0.1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.3	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	2	0.1	0.9053497942	2
		0.3	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	3	0.1	0.8002642143	6
		0.3	0.4056437390	1
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	4	0.1	0.5136327456	11
		0.3	0.4842529604	2
		0.5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	5	0.1	0.7602577196	16
		0.3	0.7268747761	3
		0.5	0.2400000000	1
		0.7	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
		0.9	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้

จากตารางที่ 4.4 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r ใด ๆ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.9 แล้วส่วนใหญ่จะไม่สามารถหาค่า γ และ c_2 ได้ และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_0 ใด ๆ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้วส่วนใหญ่จะไม่สามารถหาค่า γ และ c_2 ได้

นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r และ θ_0 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ จะมีค่า c_2 มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$

4.2.3 การทดสอบสมมติฐานเชิงประกอบ (Composite Hypothesis Test)

4.2.3.1 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \geq \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$

พิจารณา $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$

จากทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สันรูปขยาย

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} < c$$

จะได้

$$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} r_i}(1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} r_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} r_i}(1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} r_i}} < c$$

$$\frac{\theta_0^{\sum_{i=1}^{n} r_i}(1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^{n} r_i}}{\theta_1^{\sum_{i=1}^{n} r_i}(1-\theta_1)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} r_i}} < c$$

$$\left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} < c$$

$$\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} < c\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}$$

ใส่ ln ทั้งสองข้างของอสมการ จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) < \ln c\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}$$

แต่ $\theta_1 < \theta_0$ จะได้ $1-\theta_0 < 1-\theta_1$ และ $\ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) < 0$

$$\therefore \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \quad > \quad \frac{\ln c\left[\dfrac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}}{\ln\left(\dfrac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)} \quad = \quad c_1$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i > c_1 \\ \gamma & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = c_1 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < c_1 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น r_i และ θ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} r_i$ และ θ

ดังนั้น c_1 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] \le \alpha$

และ
$$\gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 \middle| \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_0\right]}$$

เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] < \alpha, \qquad P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 - 1 \middle| \theta = \theta_0\right] > \alpha$

และ $\gamma = 0$ เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] = \alpha$

อสมการ $\sum_{i=1}^{n} x_i > c_1$ นี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\theta_1 < \theta_0$

ดังนั้น การทดสอบนี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$

โดยทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน การทดสอบที่ได้ข้างบนนี้ก็มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \ge \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$ ดังนั้นการทดสอบ $\phi(x_1,\dots,x_n)$ นี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \ge \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$

การทดสอบนี้ให้การทดสอบในทำนองเดียวกับการทดสอบในหัวข้อที่ 4.2.1 ดังแสดงในตารางที่ 4.3

4.2.3.2 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบ

สมมติฐาน $H_0 : \theta \le \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

พิจารณา $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$

จากหัวข้อที่ 4.2.3.1

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) \quad < \quad \ln c\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}$$

แต่ $\theta_1 > \theta_0$ จะได้ $1-\theta_0 > 1-\theta_1$ และ $\ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right) > 0$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \quad < \quad \frac{\ln c\left[\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right]^{\sum_{i=1}^{n} r_i}}{\ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)} \quad = \quad c_2$$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < c_2 \\ \gamma & \text{เมื่อ } \sum x_i = c_2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i > c_2 \end{cases}$$

เราทราบว่าถ้า X_i มีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น r_i และ θ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงทวินามลบ โดยมีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} r_i$ และ θ

ดังนั้น c_2 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดที่ทำให้ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] \le \alpha$

$$\text{และ} \quad \gamma = \frac{\alpha - P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]}{P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]}$$

เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] < \alpha$, $\quad P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 + 1 \middle| \theta = \theta_0\right] > \alpha$

และ $\gamma = 0$ เมื่อ $P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] = \alpha$

อสมการ $\sum_{i=1}^{n} x_i < c_2$ นี้จะไม่เปลี่ยนแปลง เมื่อ $\theta_1 > \theta_0$

ดังนั้น การทดสอบนี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta > \theta_0$

โดยทฤษฎีบทประกอบของเนย์แมนและเพียร์สัน การทดสอบที่ได้ข้างบนนี้ก็มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta\le\theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta=\theta_1,\theta_1>\theta_0$ ดังนั้นการทดสอบ $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ นี้จึงเป็นการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta\le\theta_0$ เทียบกับ $H_1:\theta>\theta_0$

การทดสอบนี้ให้การทดสอบในทำนองเดียวกับการทดสอบในหัวข้อที่ 4.2.2 ดังแสดงในตารางที่ 4.4

4.2.4 การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta\le\theta_1$ หรือ $\theta\ge\theta_2$ เทียบกับ $H_1:\theta_1<\theta<\theta_2$

ในที่นี้

$$f(x;\theta) = \binom{x-1}{r-1}\theta^r(1-\theta)^{x-r}$$

$$= \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^r\binom{x-1}{r-1}(1-\theta)^x$$

$$= \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^r\binom{x-1}{r-1}e^{x\ln(1-\theta)}$$

เปรียบเทียบกับ

$$f(x;\theta) = c(\theta)h(x)e^{p(\theta)q(x)}$$

โดยที่ $c(\theta) = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^r$, $h(x) = \binom{x-1}{r-1}$

$p(\theta) = \ln(1-\theta)$, $q(x) = x$

ดังนั้น $T(X_1,\ldots,X_n)=\sum_{i=1}^{n}q(X_i)=\sum_{i=1}^{n}X_i$ เป็นสถิติที่พอเพียงของ θ

การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta\le\theta_1$ หรือ $\theta\ge\theta_2$ เทียบกับ $H_1:\theta_1<\theta<\theta_2$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } c_1<\sum x_i<c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ } \sum x_i=c_i, i=1,2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i<c_1 \text{ หรือ } >c_2 \end{cases}$$

โดยที่ c_1, c_2, γ_1, γ_2 หาได้จาก

$$E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta=\theta_1] = E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta=\theta_2] = \alpha$$

จะได้

$$P\left[c_1<\sum_{i=1}^{n}X_i<c_2\middle|\theta=\theta_1\right]+\gamma_1P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=c_1\middle|\theta=\theta_1\right]+\gamma_2P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=c_2\middle|\theta=\theta_1\right]=\alpha$$

$$P\left[c_1<\sum_{i=1}^{n}X_i<c_2\middle|\theta=\theta_2\right]+\gamma_1P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=c_2\middle|\theta=\theta_2\right]+\gamma_2P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=c_2\middle|\theta=\theta_2\right]=\alpha$$

ในกรณีที่ $r=2$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha=0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบ คือ $\theta_1=0.25$ และ $\theta_2=0.75$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n}X_i$ มีการแจกแจงทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n}r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า $c_1,c_2,\gamma_1,\gamma_2$ ได้จากสมการ

$$P\left[c_1<\sum_{i=1}^{n}X_i<c_2\middle|\theta=\theta_1\right]+\gamma_1P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=c_1\middle|\theta=\theta_1\right]+\gamma_2P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=c_2\middle|\theta=\theta_1\right]=\alpha \quad \text{..... (7)}$$

$$P\left[c_1<\sum_{i=1}^{n}X_i<c_2\middle|\theta=\theta_2\right]+\gamma_1P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=c_1\middle|\theta=\theta_2\right]+\gamma_2P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=c_2\middle|\theta=\theta_2\right]=\alpha \quad \text{..... (8)}$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (7) และ (8) พบว่า $c_1=1$ และ $c_2=2$ โดยที่

$$P\left[1<\sum_{i=1}^{n}X_i<2\middle|\theta=0.25\right]=0, \qquad P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=1\middle|\theta=0.25\right]=0.09375,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=2\middle|\theta=0.25\right]=0.10546875$$

$$P\left[1<\sum_{i=1}^{n}X_i<2\middle|\theta=0.75\right]=0, \qquad P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=1\middle|\theta=0.75\right]=0.28125,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n}X_i=2\middle|\theta=0.75\right]=0.10546875$$

แทนค่าลงในสมการ (7) และ (8) จะได้

$$0.09375\gamma_1+0.10546875\gamma_2 = 0.05 \quad \text{..... (9)}$$

$$0.28125\gamma_1+0.10546875\gamma_2 = 0.05 \quad \text{..... (10)}$$

จะได้ $\gamma_1=0,\ \gamma_2=0.4740740741$

นั่นคือ การทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta\le 0.25$ หรือ $\theta\ge 0.75$ เทียบกับ $H_1:0.25<\theta<0.75$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } 1<\sum x_i<2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i=1 \\ 0.4740740741 & \text{เมื่อ } \sum x_i=2 \\ 0 & \text{เมื่อ } \sum x_i<1 \text{ หรือ } >2 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.5 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ_1, γ_2 และค่าวิกฤต c_1, c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \le 0.25$ หรือ $\theta \ge 0.75$ เทียบกับ $H_1 : 0.25 < \theta < 0.75$

α	r	γ_1	γ_2	c_1	c_2
0.01	1	0.0533333333	0	1	2
	2	0	0.0948148148	1	2
	2	0.0948148148	0	2	3
	3	0.1517037037	0	3	4
	4	0.2311675485	0	4	5
	5	0	0.3424704422	4	5
	5	0.3424704422	0	5	6
0.05	1	0.2666666667	0	1	2
	2	0	0.4740740741	1	2
	2	0.4740740741	0	2	3
	3	0.7585185185	0	3	4
	4	0.0511342593	0.0973985891	3	5
	5	0.2404188713	0.4274113267	4	6

จากตารางที่ 4.5 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับ r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว γ_1, γ_2 จะมีค่าลดลงและเพิ่มขึ้นที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

และจากการเปรียบเทียบค่า c_1 และ c_2 เมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r ใด ๆ จะพบว่า c_1 มีค่าน้อยกว่า c_2

4.3 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลาย

(Uniformly Most Powerful Unbiased Test : UMP Unbiased Test)

4.3.1 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0:\theta_1 \le \theta \le \theta_2$ เทียบกับ $H_1:\theta<\theta_1$ หรือ $\theta>\theta_2$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = c_i, i=1,2 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad c_1 < \sum x_i < c_2 \end{cases}$$

โดยที่ c_1, c_2, γ_1, γ_2 หาได้จาก

$$E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta=\theta_1] = E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta=\theta_2] = \alpha$$

จะได้
$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1|\theta=\theta_1\right]+P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2|\theta=\theta_1\right]$$
$$+\gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1|\theta=\theta_1\right]+\gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2|\theta=\theta_1\right] = \alpha$$
$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1|\theta=\theta_2\right]+P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2|\theta=\theta_2\right]$$
$$+\gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1|\theta=\theta_2\right]+\gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2|\theta=\theta_2\right] = \alpha$$

ในกรณีที่ $r=2$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha=0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบคือ $\theta_1=0.25$ และ $\theta_2=0.75$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ มีการแจกแจงทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า $c_1,c_2,\gamma_1,\gamma_2$ ได้จากสมการ

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1|\theta=\theta_1\right]+P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2|\theta=\theta_1\right]$$
$$+\gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1|\theta=\theta_1\right]+\gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2|\theta=\theta_1\right] = \alpha \quad \text{.....(11)}$$
$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1|\theta=\theta_2\right]+P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2|\theta=\theta_2\right]$$
$$+\gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1|\theta=\theta_2\right]+\gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2|\theta=\theta_2\right] = \alpha \quad \text{.....(12)}$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (11) และ (12) พบว่า $c_1=1$ และ $c_2=17$ โดยที่

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i<1 \middle| \theta=0.25\right]=0,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i>17 \middle| \theta=0.25\right]=0.0310074056,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i=1 \middle| \theta=0.25\right]=0.0937500000,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i=17 \middle| \theta=0.25\right]=0.0084565652,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i<1 \middle| \theta=0.75\right]=0,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i>17 \middle| \theta=0.75\right]=0.0000000002,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i=1 \middle| \theta=0.75\right]=0.2812500000,\ P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i=17 \middle| \theta=0.75\right]=0.0000000006,$$

แทนค่าลงในสมการ (11) และ (12) จะได้

$$0.0937500000\gamma_1+0.0084565652\gamma_2 = 0.0189925944 \quad \text{..... (13)}$$

$$0.2812500000\gamma_1+0.0000000006\gamma_2 = 0.0499999998 \quad \text{..... (14)}$$

จะได้ $\gamma_1=0.1777777765,\ \gamma_2=0.2750440381$

นั่นคือ การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด $\alpha=0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0: 0.25 \le \theta \le 0.75$ เทียบกับ $H_1: \theta<0.25$ หรือ $\theta>0.75$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i<1 \text{ หรือ } >17 \\ 0.1777777765 & \text{เมื่อ } \sum x_i=1 \\ 0.2750440381 & \text{เมื่อ } \sum x_i=17 \\ 0 & \text{เมื่อ } 1<\sum x_i<17 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.6 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ_1, γ_2 และค่าวิกฤต c_1, c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : 0.25 \le \theta \le 0.75$ เทียบกับ $H_1 : \theta < 0.25$ หรือ $\theta > 0.75$

α	r	γ_1	γ_2	c_1	c_2
0.01	10	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	20	0.4306737104	0.4119376656	1	101
	30	0.2378600867	0.2927785263	3	139
	40	0.2552230575	0.4505054377	5	176
	50	0.4174827289	0.4267783832	7	212
0.05	10	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	20	0.7441404008	0.1842836997	2	87
	30	0.0186838107	0.4244293898	5	123
	40	0.3670394774	0.5795329060	7	158
	50	0.9150615627	0.3152571418	9	192

จากตารางที่ 4.6 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ ถ้า r = 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 20 ถึง 50 แล้ว γ_1, γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น

จากการเปรียบเทียบค่า c_1 และ c_2 เมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ จะพบว่าเมื่อ c_1 มีค่าน้อยกว่า c_2 ค่อนข้างมาก

4.3.2 การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq \theta_0$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i < c_1 \text{ หรือ } > c_2 \\ \gamma_i & \text{เมื่อ} \quad \sum x_i = c_i, i = 1, 2 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad c_1 < \sum x_i < c_2 \end{cases}$$

โดยที่ c_1, c_2, γ_1, γ_2 หาได้จาก

$$E[\phi(X_1,\ldots,X_n)|\theta = \theta_0] = \alpha$$

และ

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\phi(X_1,\ldots,X_n)\middle|\theta = \theta_0\right] = \alpha E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| \theta = \theta_0\right] = n\theta_0\alpha$$

จะได้

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] + \gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] = \alpha$$

หรือเขียนในอีกรูปหนึ่งดังนี้

$$\sum_{\sum_{i=1}^{n} X_i = 0}^{c_1 - 1} \binom{r + \sum_{i=1}^{n} X_i - 1}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} + \sum_{\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 + 1}^{\infty} \binom{r + \sum_{i=1}^{n} X_i - 1}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} + \sum_{i=1}^{2} \gamma_i \binom{r + \sum_{i=1}^{n} X_i - 1}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} = \alpha \quad \ldots\ldots (15)$$

และ

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \, P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + \sum_{i=1}^{n} X_i \, P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] + c_1\gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + c_2\gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] = n\theta_0\alpha$$

หรือเขียนในอีกรูปหนึ่งดังนี้

$$\sum_{\sum_{i=1}^{n} X_i = 0}^{c_1 - 1} \left[\sum_{i=1}^{n} X_i \binom{r + \sum_{i=1}^{n} X_i - 1}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] + \sum_{\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 + 1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} X_i \binom{r + \sum_{i=1}^{n} X_i - 1}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} c_i \gamma_i \binom{r + \sum_{i=1}^{n} X_i - 1}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \theta_0^r (1-\theta_0)^{\sum_{i=1}^{n} X_i} = n\theta_0\alpha \quad \ldots\ldots (16)$$

ในกรณีที่ $r = 3$ ขนาดของการทดสอบ $\alpha = 0.05$ และพารามิเตอร์ที่ต้องการทดสอบ คือ $\theta = 0.25$ จะได้ว่าสถิติการทดสอบ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ มีการแจกแจงทวินามลบที่มีพารามิเตอร์เป็น $\sum_{i=1}^{n} r_i$ และ θ โดยเราสามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้จากสมการ

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]$$
$$+\gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + \gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] = \alpha \qquad .....(17)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + \sum_{i=1}^{n} X_i P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > c_2 \middle| \theta = \theta_0\right]$$
$$+ c_1\gamma_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_1 \middle| \theta = \theta_0\right] + c_2\gamma_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = c_2 \middle| \theta = \theta_0\right] = n\theta_0\alpha \qquad .....(18)$$

จากการคำนวณค่าความน่าจะเป็นและการทดลองในสมการ (17) และ (18) พบว่า $c_1 = 2$ และ $c_2 = 9$ โดยที่

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < 2 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0156250000, \quad P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > 9 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0000527741,$$

$$P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 2 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0351562500, \quad P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 9 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0000150429,$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i < 2 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0000000000, \quad \sum_{i=1}^{n} X_i P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i > 9 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0028216622,$$

$$c_1 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 2 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0351562500, \quad c_2 P\left[\sum_{i=1}^{n} X_i = 9 \middle| \theta = 0.25\right] = 0.0007371080$$

แทนค่าลงในสมการ (17) และ (18) จะได้

$$0.0351562500\gamma_1 + 0.0000150429\gamma_2 = 0.0343222259 \qquad ..... (19)$$
$$0.0351562500\gamma_1 + 0.0007371030\gamma_2 = 0.0346783378 \qquad ..... (20)$$

จะได้ $\gamma_1 = 0.9760656186$, $\gamma_2 = 0.4931886847$

นั่นคือ การทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายที่มีขนาด $\alpha = 0.05$ ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.25$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.25$ คือ

$$\phi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \sum x_i < 1 \text{ หรือ } > 49 \\ 0.9760656186 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 1 \\ 0.4931886847 & \text{เมื่อ } \sum x_i = 49 \\ 0 & \text{เมื่อ } 1 < \sum x_i < 49 \end{cases}$$

ตารางที่ 4.7 ความน่าจะเป็นที่จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก γ_1, γ_2 และค่าวิกฤต c_1, c_2 สำหรับการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = 0.25$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq 0.25$

α	r	γ_1	γ_2	c_1	c_2
0.01	1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	2	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	3	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	4	0.5142699134	0.4314393008	1	55
	5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
0.05	1	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	2	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	3	0.9760656186	0.4931886847	1	49
	4	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้
	5	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้	หาค่าไม่ได้

จากตารางที่ 4.7 จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ ถ้า $r = 3$ จะสามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้

จากการเปรียบเทียบค่า c_1 และ c_2 เมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ จะพบว่าเมื่อ c_1 มีค่าน้อยกว่า c_2 ค่อนข้างมาก

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

1) ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 < \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r ใด ๆ ที่ $\theta_0 = 0.5$ ถ้า θ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.4 แล้วค่า γ และ c_1 จะคงที่ แต่ค่า $1-\beta$ จะลดลง และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_1 ใด ๆ ที่ $\theta_0 = 0.5$ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว γ จะมีค่าลดลงและเพิ่มขึ้น สลับกันไปเรื่อย ๆ ส่วน c_1 และ $1-\beta$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r, θ_0 และ θ_1 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ จะมีค่า $1-\beta$ มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$

ส่วนในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดที่มีขนาด α ในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta = \theta_1, \theta_1 > \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า $r = 5$ และ $\theta_0 = 0.5$ ถ้า θ_1 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.6 ถึง 0.9 แล้ว γ และ c_1 จะมีค่าคงที่ แต่ $1-\beta$ จะมีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนค่า $r = 1$ ถึง 4 จะไม่สามารถหาค่า c_1, γ และ $1-\beta$ ได้ และเมื่อ $\alpha = 0.01$ สำหรับค่า $r = 1$ ถึง 5 และ $\theta_0 = 0.5$ จะไม่สามารถหาค่า c_1, γ และ $1-\beta$ ได้เช่นเดียวกัน

2) ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r ใด ๆ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.9 แล้ว γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 จะมีค่าลดลง และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_0 ใด ๆ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว γ จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 จะมีค่าเพิ่มขึ้น นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r และ θ_0 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ จะมีค่า c_1 มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$

ส่วนการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 > \theta_0$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r ใด ๆ ถ้า θ_0 มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0.1 ถึง 0.9 แล้วส่วนใหญ่จะไม่สามารถหาค่า γ และ c_2 ได้ และเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า θ_0 ใด ๆ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้วส่วนใหญ่จะไม่สามารถหาค่า γ และ c_2 ได้ นอกจากนี้ จากการเปรียบเทียบเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ

$\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r และ θ_0 เดียวกัน จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.05$ จะมีค่า c_2 มากกว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$

3) ในการทดสอบที่มีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta \leq \theta_1$ หรือ $\theta \geq \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ เมื่อ $\theta_1 = 0.25, \theta_2 = 0.75$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับ r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 1 ถึง 5 แล้ว γ_1, γ_2 จะมีค่าลดลงและเพิ่มขึ้นที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 และ c_2 ที่มีค่าเพิ่มขึ้น และจากการเปรียบเทียบค่า c_1 และ c_2 เมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ สำหรับค่า r ใด ๆ จะพบว่า c_1 มีค่าน้อยกว่า c_2

4) ในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ เทียบกับ $H_1 : \theta < \theta_1$ หรือ $\theta > \theta_2$ เมื่อ $\theta_1 = 0.25, \theta_2 = 0.75$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ ค่า r = 10 จะไม่สามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ ถ้า r มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 20 ถึง 50 แล้ว γ_1, γ_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงที่ไม่แน่นอน ส่วน c_1 และ c_2 จะมีค่าเพิ่มขึ้น และจากการเปรียบเทียบค่า c_1 และ c_2 เมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ จะพบว่าเมื่อ c_1 มีค่าน้อยกว่า c_2 ค่อนข้างมาก

5) ในการทดสอบที่ไม่เอนเอียงและมีกำลังสูงสุดอย่างเสมอต้นเสมอปลายในการทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \theta = \theta_0$ เทียบกับ $H_1 : \theta \neq \theta_0$ เมื่อ $\theta_0 = 0.25$ จะพบว่าเมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ ถ้า r = 3 จะสามารถหาค่า $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ ได้ และจากการเปรียบเทียบค่า c_1 และ c_2 เมื่อ $\alpha = 0.01$ และ $\alpha = 0.05$ จะพบว่าเมื่อ c_1 มีค่าน้อยกว่า c_2 ค่อนข้างมาก

5.2 ข้อเสนอแนะ

1) ในการทดสอบสมมติฐานอาจเพิ่มจำนวนครั้งของการทดลองทั้งหมดจนกว่าจะประสบความสำเร็จให้มากขึ้น เช่น 10, 20 เป็นต้น

2) ในการทดสอบสมมติฐานอาจเปลี่ยนค่า θ_0 และ θ_1 ไป เช่น $\theta_0 = 0.30, \theta_1 = 0.70$

3) ในการทดสอบสมมติฐานอาจทำการศึกษากรณีที่ประชากรมีการแจกแจงแบบต่อเนื่อง เช่น การแจกแจงปกติ การแจกแจงเอ็กซ์โปเนนเชียล เป็นต้น